

VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

Alina Jakubėnaitė ir Donalda Sinkutė

PIRMIEJI ŽINGSNIAI Į AKTUARINĘ MATEMATIKĄ

Magistro darbas

Vilnius 2006

Darbas atliktas **Tikimybių teorijos ir skaičių teorijos katedroje**

Darbo vadovas **doc. dr. J. Šiaulys**

Recenzentas **prof. habil. dr. A. Laurinčikas**

Darbas apgintas _____

Gynimo posėdžio protokolo Nr. _____

Registravimo Nr. 1105/ —

2006-05- _____

Turinys

Ivadas	6
1. Knygelės pratarinė	7
2. Draudimo terminų žodynėlis	8
3. Draudimo istorija	10
3.1. Pasaulio draudimo istorija	10
3.2. Lietuvos draudimo rinka šiandien	13
4. Pagrindinės gyvybės draudimo sąvokos ir apibrėžimai	17
4.1. Gyvenimo trukmės funkcijos	17
4.2. Likusio gyvenimo trukmės funkcijos	27
4.3. Mirtingumo lentelė	34
4.4. Pakartokime	36
4.5. Uždaviniai	37
5. Paprasčiausios gyvybės draudimo rūšys	46
5.1. Draudimas su išmoka iš karto po mirties	49
5.1.1. Viso gyvenimo gyvybės draudimas	49
5.1.2. Terminuotas n -metų gyvybės draudimas	51
5.1.3. Kaupiamasis n -metų gyvybės draudimas	53
5.1.4. Pakartokime	56
5.1.5. Uždaviniai	57
5.2. Draudimas su išmoka mirties metų gale	61
5.2.1. Viso gyvenimo gyvybės draudimas	61
5.2.2. Terminuotas n -metų gyvybės draudimas	63
5.2.3. Kaupiamasis n -metų gyvybės draudimas	65
5.2.4. Pakartokime	68
5.2.5. Uždaviniai	69
6. Reziūmė	73
1 Priedas. Gyvybės draudimo formulų santrauka	75

2 priedas. Lietuvos 1993 m. – 1996 m. gyventojų mirtingumo lentelė	76
Summary	80
Literatūra	81

Ivadas

Šio magistro darbo tikslas – tai aktuarinės matematikos knygelės, skirtos vyresnių klasių vidurinių mokyklų, gimnazijų, licėjų moksleiviams, rankraštis.

Atlikusios tyrimą įsitikinome, kad tokia knygelė gali būti aktuali. Apklausėme kelis šimtus įvairaus amžiaus respondentų. Anketoje buvo pateikti klausimai apie respondentų profilinį mokymą, matematikos programos mokymosi lygį, rezultatus. Taip pat bandėme išsiaiškinti ar apklaustieji kada nors yra susidūrę su aktuarinės matematikos sąvoka. Pagrindinė apklausos užduotis buvo sužinoti, ar rekomenduotų pasirinkti naują dalyką, nagrinėjantį įvairius aktuarinės teorijos modelius, vyresnių klasių moksleiviams. Daugeliui apklaustųjų sąvoka buvo visiškai nauja ir nepažįstama. Tačiau užsiminus, kad tai yra draudimo matematika, daugelis parodė susidomėjimą nauju dalyku. Tyrimo rezultatai mus įtikino, kad pasirinkta tema yra aktuali ir naudinga.

Magistro darbą sudarys knygelės “Pirmieji žingsniai į aktuarinę matematiką” rankraštis. Pateikta medžiaga sieksime supažindinti skaitytojus su paprasčiausiais draudimo matematikos modeliais, sąvokomis ir dydžiais. Populiariai dėstydamos sudėtingą teoriją, stengsimės sudominti kuo daugiau skaitytojų. Kursime originalias uždavinių sąlygas, konstruosime kuo gyvenimiškesnes situacijas. Kiekvieną naują sąvoką iliustruosime pavyzdžiu. Dėstomą teoriją pritaikysime būtent Lietuvos rinkos dalyviams, visas uždavinių bei pavyzdžių formuluotes taip pat suderinsime su mūsų šalies gyventojų duomenimis, ko iki šiol nebuvo bandyta daryti.

Tikėsime, kad išnagrinėtos temos ne tik sudomins moksleivius, bet ir padės ne vienam iš jų apsispręsti dėl būsimos profesijos. Vyriausiajam draudimo matematikui – aktuariui – yra suteikiamas itin reikšmingas vaidmuo draudimo įmonių rizikų valdyme. Kadangi draudimo rinka Lietuvoje sparčiai vystosi, turi didelį augimo potencialą, todėl tokių specialistų poreikis nuolat auga.

Tikime, kad ateityje ši knygelė bus išleista ir prieinama masiniam skaitytojui.

1. Knygelės pratarinė

Knygelė skirta vidurinių mokyklų, gimnazijų, licėjų aukštesniųjų klasių moksleiviams, kurių nebaugina žodis “matematika”. Tikimės, kad tai puikus pagalbininkas ir vadovas jaunuoliams, ketinantiems studijuoti matematikos taikymus aukštesiose mokyklose. Kuklus pradžiūmokslis būsimiems draudimo matematinės srities specialistams.

Knygelės tikslas – pavyzdžių bei jų detalių sprendimų pagalba supažindinti skaitytoją su pagrindiniais aktuarinės matematikos dydžiais ir modeliais. Pateikta medžiaga – tai sudėtinė draudimo teorijos dalis, kuri kartu su atitinkamomis ekonominėmis bei teisinėmis disciplinomis sudaro draudimo teorijos visumą.

Šiuolaikiniame pasaulyje yra daug įvairių draudimo rūšių. Egzistuoja dvi draudimo šakos, kurios apima beveik visas galimas draudimo rūšis, – tai gyvybės ir negyvybės draudimas. Tam, kad supažindintumėme su pagrindiniais draudimo dydžiais, šioje knygelėje nagrinėsime vieną sudėtingiausių – gyvybės draudimą.

Į klausimą “Kas yra gyvybės draudimas?” galime rasti daug atsakymų. Tai – idealus finansinis planas šiuolaikiškam žmogui; logiškas žingsnis, išlaisvinantis gyvenimą nuo papildomo streso ir nerimo dėl ateities. Šiuolaikinis gyvybės draudimas apima labai platų žmogaus interesų lauką, o jo tiklas – ne tik apdrausti patį brangiausią (pratiškai neįkainojamą) žmogaus turtą – gyvybę, bet ir rūpintis asmens finansine geroje – santaupomis.

Knygelės pagrindą sudaro paprasčiausių gyvybės rūšių aprašymas. Visa pateikiama informacija turi praktinį pritaikymą. Kiekvienas suformuluotas draudimo uždavinys, išspręstas pavyzdys – tai mažytės didelio vitražo dalelės, kurias kartu sudėjus, galime įsivaizduoti aktuarinės matematikos paveikslą.

Knygelės skaitytojui turimų vidurinės mokyklos matematikos kurso žinių visiškai pakanka dėstomai medžiagai įsisavinti. Tiek mokytojai, tiek mokiniai knygelę gali naudoti kaip mokyimo proceso uždavinių rinkinį, kaip medžiagą matematikos fakultatyvui ar kaip naujo dėstomo populiaraus dalyko vadovėlį. Knygelė orientuota tiems, kam labiau patinka tikslicieji mokslai, tačiau atvira ir humanitarinio profilio atstovams.

Nuoširdžiai tikimės, kad ši knygelė atras garbingą vietą mokytojo ir mokinio bibliotekoje. Džiaugsimės, jei ši knygelė sudomins ir pastūmės jaunąjį skaitytoją siekti aukštumų aktuarinės matematikos srityje.

Autorės

2. Draudimo terminų žodynėlis

Šiame skyrelyje pateikiamos pačios paprasčiausios ir draudimo srityje plačiausiai paplitusios pagrindinės draudimo sąvokos:

Aktuarijus – tai matematikos, statistikos ir apskaitos specialistas, atsakingas už draudimo tarifų, rezervų, dividendų ir kitus statistinius apskaičiavimus draudimo bendrovėje.

Draudėjas – tai draudimo bendrovės klientas. Draudimo sutarties šalis, sudariusi su draudimo bendrove draudimo sutartį, mokanti draudimo įmokas atsitikus draudimui įvykiui, turinti teisę į žalą atlyginimą ir/ar suteikiamas paslaugas.

Draudikas – tai draudimo bendrovė. Draudimo sutarties šalis, prisiimanti atsakomybę atlyginti nuostolius, apmokėti žalą ar suteikti paslaugas.

Draudiminis įvykis – tai draudimo sutartyje nustatytas atsitikimas, kuriam įvykus draudėjas, apdraustasis, naudos gavėjas ar tretysis asmuo įgyja teisę į draudimo išmoką.

Draudimo įmoka – tai kliento piniginiai mokėjimai draudimo bendrovei pagal draudimo sutartį už draudimo bendrovės prisiimtą riziką. Dar kitaip vadinama – *draudimo premija*.

Draudimo išmoka – tai išmoka, numatyta atitinkamose draudimo rūšies taisyklėse, kurią, įvykus draudimo sutartyje nustatytam draudimui įvykiui draudimo įmonė privalo mokėti draudėjui, apdraustajam, naudos gavėjui, tretiesiems asmenims, remdamasi šį įvykį patvirtinančiais oficialiais dokumentais.

Draudimo laikotarpis – tai laikotarpis, kurio metu galioja draudiko draudėjui suteikta draudimo apsauga.

Draudimo polisas – tai dokumentas patvirtinantis draudimo apsaugos galiojimą.

Draudimo suma – tai draudimo sutartyje nustatyta suma, kuria draudžiami turtiniai interesai.

Draudimo sutartis – tai sutartis, kuria viena šalis (draudikas) įsipareigoja už sutartyje nustatytą draudimo įmoką (premiją) sumokėti kitai šaliai (draudėjui) arba trečiajam asmeniui, kurio naudai sudaryta sutartis, draudimo sutartyje nustatytą draudimo išmoką, apskaičiuotą draudimo sutartyje nustatyta tvarka, jeigu įvyksta draudimo sutartyje nustatytas draudiminis įvykis.

Draudimo veikla – tai finansinė ūkinė veikla, kuria siekiama apsaugoti fizinių ir juridinių asmenų turtinius interesus, įvykus draudimo sutartyje nustatytiems draudiminiams įvykiams, panaudojant rezervus ir draudimo techninius atidėjimus, sudaromus iš minimų asmenų mokamų draudimo įmokų bei pajamų, gautų jas investavus istatymų nustatyta tvarka.

Naudos gavėjas – tai draudimo sutartyje draudėjo valia nurodytas arba apdraustojo paskirtas asmuo, kuris draudimo sutartyje nustatytomis sąlygomis įgyja teisę į draudimo išmoką.

Nuostolis – tai žalos, patirtos dėl draudiminio įvykio, piniginė išraiška.

Rizika – tai tikimybė įvykti draudiminiam įvykiui.

3. Draudimo istorija

3.1. Pasaulio draudimo istorija

Draudimas kaip bendradarbiavimo forma atsirado dar pačiais seniausiais laikais. Operacijos, kuriose iš tolo galime įžvelgti draudimo veiklos pradmenis, atsirado jau šumerų laikais beveik prieš 4 500 metų. Tenykščiams prekeiviams buvo išduodama pinigų suma, kuria jie padengdavo nuostolius, jeigu jų prekėms kas nors atsitikdavo pervežimo metu. Vėliau Babilone atsirado ypatingos grupės “prekeivių – skolintojų”, kurie skolindavo savo kolegoms, nusprendusiems “leisti į tolimą kelionę” ir nereikalaudavo pinigų grąžinti, jeigu kelionės metu prekes pavogdavo ar kas nors joms atsitikdavo.

Hamurabis savo valdymo metu (1792 - 1750 metai prieš Kristaus gimimą) išleido kodeksą. Manoma, kad tai buvo pirmasis mėginimas civilizacijos raidoje susiteminti įstatymus. Hamurabio kodekse galima rasti straipsnių apie žalos atlyginimą praradus turtą. Gali būti, kad būtent šis kodeksas tapo draudiminių susitarimų, pagrįstų įstatymais, pradininku.

Jūrinė prekyba, kuri sparčiai vystėsi Viduržemio jūroje, padėjo vystyti pirmosioms draudimo rūšims. Atėnuose buvo paplitusi tokia praktika. Prekeivis, gavęs paskolą, ją grąžindavo tik tuo atveju, jeigu sėkmingai baigdavosi jo kelionė, tuo pačiu grąžindamas 30% daugiau pinigų nei pasiskolino. Tokią veiklą galima laikyti šiuolaikinio žmonių vežamų krovinių draudimo užuomazga.

Antikos laikais darbininkai, nusamdyti tokiems darbams kaip Egipto piramidės, Saliamono rūmų ar kitų objektų statybai, organizuodavo pagalbos kasas tiems kolegoms ar jų šeimoms, kurie susižalodavo ar mirdavo atsitikus nelaimėi. Tai buvo vienas iš pirmųjų žingsnių link draudimo nuo nelaimingų atsitikimų, kuris vis labiau populiarėja šiuolaikiniame pasaulyje.

Romos imperijos laikais valdžios atstovai suteikdavo garantijas nuo įvairių rizikų: pasirašydavo ypatingus protokolus su tiekėjais ir prekeiviais, kurie įsipareigodavo rūpintis legionieriais Ispanijoje; padengdavo nuostolius, kai karo ar audros metu buvo prarandami laivai, pervežantys ginklus ar būtiniausius pragyvenimui daiktus. Ilgoms kelionėms po Viduržemio jūrą buvo taikoma pristatymo paskola: nuo 50% ir daugiau priklausomai nuo krovinio ir laivo vertės. Galima manyti, kad šis pavyzdys yra draudimo nuo stichinių nelaimių prototipas.

Gyvybės draudimas kildinamas iš Antikinės Romos, kurios piliečiai įsteigdavo laidotuvių biurus tam, kad vieno nario mirties atveju būtų padengtos laidojimo išlaidos kitų narių sąskaita.

Draudimo istorijos raida pradedama skaičiuoti nuo XIII amžiaus, kai pradėjo vystyti jūrinių klastė Italijoje. Konkrečiai 1347-aisiais metais Genujoje Europos tautos, užsiimančios jūrin-

ninkyste, sudarė pirmą žinomą draudimo kontraktą ir pradėjo jūriniųkystės draudimo vystymą.

Tačiau reikia paminėti faktą, kuris galėjo užkirsti kelią sparčiai besivystančiai naujai finansinei veiklai.

XII a. pabaigoje – XIII a. pradžioje vystantis ekonomikai, Romos katalikų bažnyčia, kuri buvo labai įtakinga visose sferose, negalėjo likti augančios pinigų skolinimo praktikos ir lupikavimo nuošalyje. 1234 m. popiežiaus Grigaliaus XI dekretu, vadovaujantis Šventojo Rašto principais buvo uždraustos visos operacijos, susijusios su lupikavimu. Po kurio laiko bažnyčia pakeitė savo sprendimą, leisdama lupikavimą, bet su “protingomis palūkanomis”, tokiu būdu leisdama atsirasti “protingų palūkanų” teorijai, teigiančiai, kad gautas atlygis turi būti proporcingas paslaugai, atliktai prekeiviui, pasiskolinusiam asmeniui, arba bet kuriam ūkininkaujančiam, nes negalima pelnytis iš artimo savo.

Uždrausdama ir ribodama lupikavimą, bažnyčia galėjo stipriai pabloginti jūrinės prekybos vystymąsi. Bet bažnyčios veiksmai padėjo vystyti apsaugos nuo rizikos sistemai ir atsirasti draudimo sutarčiai. Po pirmojo bažnyčios sprendimo prekeiviai – bankininkai stengėsi apeiti formalų draudimą. Knygoje “Auksas ir prieskoniai” Žanas Favje aprašo genujiečio Benedeto Zacharijos pasakojimą: 1928 metais jis pardavė daugiau kaip trisdešimt tonų druskos savo tėvynainiams. Krovinys turėjo būti pristatytas į Briugę. Toje pačioje sutartyje buvo pasakyta, kad Zacharija įsipareigoja vėl nupirkti visą krovinį jam atvykus į pristatymo uostą tokia suma, kuri buvo aptarta sutartyje iš anksto, bet aukštesne negu pardavimo suma. Tokiu būdu tarp iškrovimo uosto iki pristatymo vietos Zacharija rizikavo tik savo laivu. Skirtumas tarp antrą kartą pirktos prekės ir pardavimo – tai ir yra rizikos kaina, kuri užima paskolos procento dalį, uždraustą bažnyčios. Sugalvoję tokias schemas, jūreiviai ir skolintojai padėjo atsirasti draudimo sutartims.

Pervežėjai mokėjo prekeiviams ar bankininkams “rizikos kainą” – papildomą sumą pinigų priklausomai nuo to, kokio tipo buvo laivas, krovinys ir pervežimo trukmė. “Rizikos kaina” vėliau buvo pavadinta draudimo premija. Tokiu būdu ir atsirado draudiko profesija.

Panašūs į dabartinius draudimo susivienijimus buvo XII amžiuje Islandijoje atsiradę valstiečių susivienijimai, skirti gaisro atveju ar dvesiant gyvuliams pasirūpinti susivienijimo nariais. Susivienijimai dažniausiai buvo sudaryti iš 20 pasiturinčių valstiečių. Atsitikus nelaimei, dalis nuostolių buvo apmokama materialiniais daiktais ir darbu, o kita – pinigais.

Yra žinoma, kad jau 1300 metais, Belgijoje, buvo naudojami tiesioginiai jūrinių rizikų už draudimo premiją apmokėjimai.

Sekančiame amžiuje buvo nustatyti draudimo tarifai reguliariems plaukiojimams iš Londono į kontinentą ir atgal.

Vystėsi draudimo įstatymai ir jau XV amžiaus dokumentuose galime rasti visiškai sutvarkytą tų laikų draudimo kodeksą.

1601 metais prie Anglijos Parlamento buvo įkurta komisija, kuri sprendė ginčytinus jūrinio draudimo sutarčių klausimus. 1680 metais Anglijoje atsirado pirmoji istorijoje draudimo kompanija, draudžianti nuo ugnies. Draudimo verslas tapo populiarius ir naudingas.

XV amžiaus pabaigoje Europoje atsirado bendri draudimo susivienijimai, taip vadinamos ugnies draugijos (Brangilden), kurios padėjo dar labiau vystyti draudimui.

O nuo XVII amžiaus pabaigos atsiranda akcinės kompanijos. Pirmoji tokia kompanija „Olandijos – Ostindijos draugija“ buvo įkurta 1602 metais.

Bet vis dėlto, atsižvelgianti į tai, kad nebuvo tikslių statistinių duomenų apie nelaimingus atsitikimus, jų dydžius, mirtingumą ir kt., draudimas liko, kad ir pelningu, bet rizikingu verslu. Tik dabar, kai draudimas gali naudotis tiksliais statistiniais ir ekonominiais duomenimis, kai yra sukurtas detalus draudimo įstatymas, draudimo taisyklės, galime drąsiai pasitikėti draudimo kompanijomis.

3.2. Lietuvos draudimo rinka šiandien

Pateikiame trumpą Lietuvos draudimo rinkos apžvalgą, kurią apžvelgsime nuo 2004 metų.

Šie metai Lietuvos draudimo rinkai buvo išskirtiniai, nes nuo 2004 m. gegužės 1 d. mūsų šalies draudimo rinka pradėjo veikti kaip Europos Sąjungos vidaus draudimo rinkos dalis.

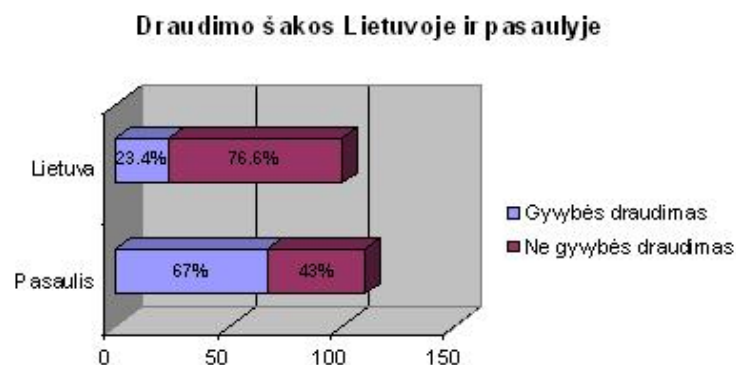
Lietuvos įstojimas į Europos sąjungą sąlygojo draudimo sumų padidinimą iki 100 000 eurų materialiniams nuostoliams atlyginti ir iki 500 000 eurų žaloms asmeniui bei transporto priemonių valdytojų civilinės atsakomybės privalomojo draudimo apsaugos išplėtimas visoje Europos sąjungos teritorijoje.

Praėjusių metų duomenimis Lietuvoje šiuo metu draudimo veiklą vykdo 25 įmonės: 8 – gyvybės, 17 – ne gyvybės draudimo įmonių.

Draudimo šakos

Lietuvos draudimo rinkoje, priešingai nei įprasta pasaulyje, dominuoja ne gyvybės draudimo veikla. Remiantis Lietuvos Respublikos draudimo priežiūros komisijos (toliau – Priežiūros komisija) išvadamis pasirašytos ne gyvybės draudimo įmokos 2005 metų I pusmetį sudarė 76,6 proc. visų pasirašytų įmokų. Ne gyvybės draudimo įmokos pasaulyje sudaro tik 43 proc. visų įmokų. Planuojama, kad 2005 metais gyvybės draudimo veiklos dalis truputį padidės ir sudarys 26 proc. draudimo rinkos.

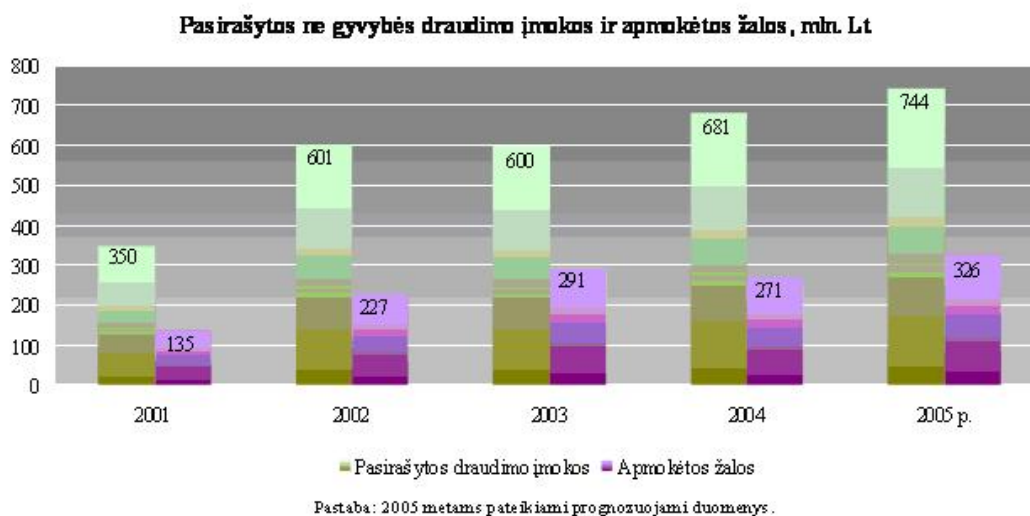
Dabartinis draudimo šakų procentinis pasiskirstymas pavaizduotas šioje scheme:



Ne gyvybės draudimo rinka

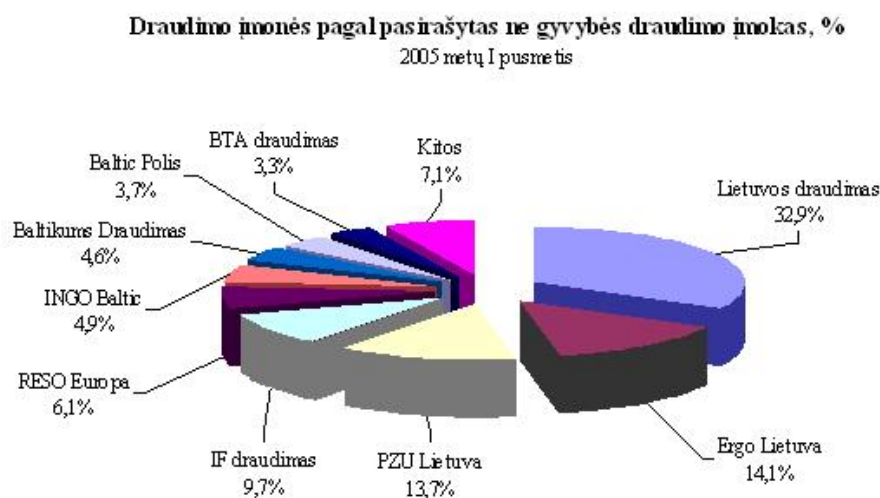
Per pirmąjį 2005 metų pusmetį ne gyvybės draudimo įmokų pasirašyta už 409,3 mln. litų ir apmokėta 167,1 mln. litų ne gyvybės draudimo žalų.

Ne gyvybės draudimo įmokų ir žalų bendrųjų sumų palyginimo schema:



Didžiąją ne gyvybės draudimo rinkos dalį, sudarančią 60,7 proc., užima trys ne gyvybės draudimo įmonės: AB “Lietuvos draudimas”, UAB “ERGO Lietuva” ir UAB DK “PZU Lietuva”. Visos kitos draudimo įmonės užima tik 29,3 proc. visos draudimo rinkos.

Pagrindiniai ne gyvybės draudimo rinkos dalyviai pavaizduoti diagramoje:

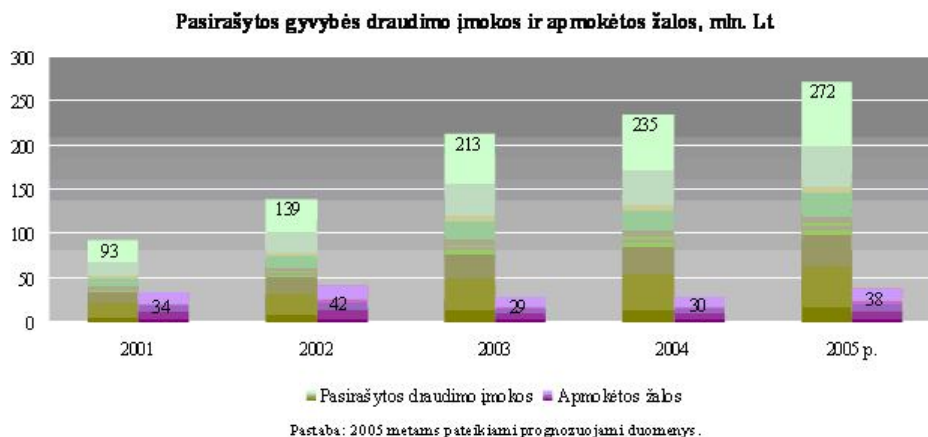


Kalbant apie draudimo produktus, kaip jau tapo įprasta, daugiausia draudimo įmokų buvo pasirašyta šiose draudimo grupėse:

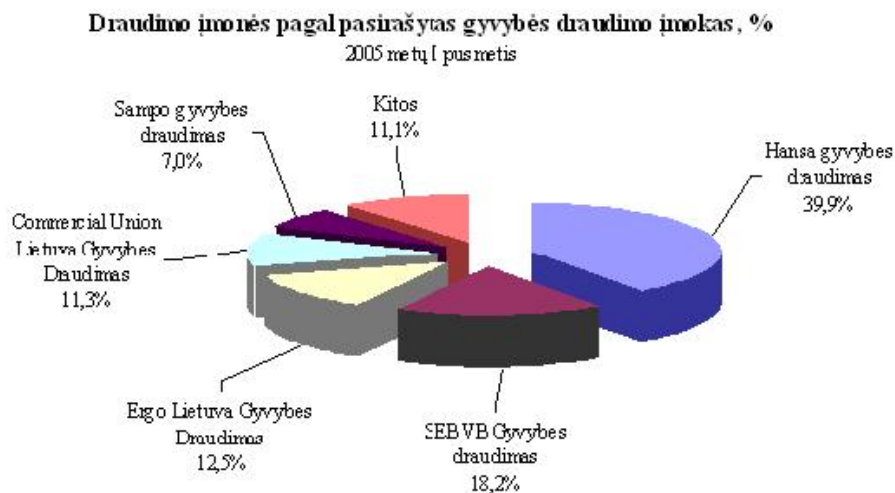
- transporto priemonių valdytojų civilinės atsakomybės;
- sausumos transporto priemonių, išskyrus geležinkelio transporto priemones;
- turto.

Gyvybės draudimo rinka

Per 2005 metų I pusmetį draudimo įmonės pasirašė 124,7 mln. litų gyvybės draudimo įmokų, o apmokėjo 15,1 mln. litų gyvybės draudimo žalos. Paskutinių metų pasirašytų įmokų ir apmokėtų žalų santykis atsispindi šioje scheme:



Didžiąją gyvybės draudimo rinkos dalį Lietuvoje užima trys gyvybės draudimo įmonės: UAB “Hansa gyvybės draudimas”, UAB “SEB VB gyvybės draudimas” ir UAB “ERGO Lietuva gyvybės draudimas”. Joms kartu priklauso 70,6 proc. gyvybės draudimo įmokų.



Lietuvos gyvybės draudimo rinkoje vis dar dominuoja kaupiamasis gyvybės draudimas.

Svarbiausi 2005 metų draudimo įvykiai Lietuvoje

- 2005 m. gegužės mėnesį baigėsi UAB “Lindra – gyvybės draudimas” reorganizavimo procesas. Šios kompanijos veiklą perėmė UAB “PZU Lietuva gyvybės draudimas”.
- 2005 m. liepos mėnesį 2 draudimo įmonės baigė savo draudimo veiklą: DUAB “INGO Baltic” draudimo veiklos licencija buvo panaikinta Priežiūros komisijos sprendimu, UADB “Lavisos garantas” licencijos galiojimas sustabdytas įmonės prašymu.
- Nuo 2005 m. liepos 1 d. įsigaliojo Lietuvos Respublikos draudimo įstatymo 25 straipsnyje nurodytas reikalavimas kiekvienoje ne gyvybės draudimo įmonėje turėti vyriausiąjį aktuarijų – draudimo matematiką (anksčiau tik gyvybės draudimo įmonėje privalėjo būti vyriausiasis aktuarijus). Vyriausiajam aktuariui yra suteikiamas itin reikšmingas vaidmuo draudimo įmonės rizikų valdyme. Pažymėtina, kad vyriausiasis aktuarijus turi pareigą informuoti Priežiūros komisiją apie problemas įmonėje: “nustatęs iškilusią grėsmę, kad draudimo įmonė gali tapti nepajėgi bet kuriuo metu įvykdyti pareigas, atsirandančias iš draudimo ar perdraudimo sutarčių, vyriausiasis aktuarijus apie tai nedelsdamas privalo pranešti bendrovės valdybai, o jei ši nedelsdama nesiima priemonių susidariusiai padėčiai ištaisyti – ir Priežiūros komisijai.” (Lietuvos Respublikos draudimo Įstatymo 25 str.)

4. Pagrindinės gyvybės draudimo sąvokos ir apibrėžimai

Draudimas yra paprastas ir patogus būdas atsitiktiniams nuostoliams atlyginti. Iš draudėjų surinktų įmokų draudikai sudaro fondus, iš kurių vėliau padengiamos žalos. Aktuariaus – draudimo matematiko – paskirtis yra nustatyti, kokias įmokas turėtų mokėti draudėjai. Įmokos negali būti nei labai mažos, nei pernelyg didelės. Nustačius mažą draudimo įmoką – atsiras daug norinčių draustis, bet surinktų pinigų gali nepakakti visų nuostolių atlyginimui. Tokiu atveju draudikui grėstų bankrotas. Jei nustatyta draudimo įmoką bus didelė – niekas nenorės draustis. Taigi aktuarijaus pareiga – rasti “aukso viduriuką”.

Tam, kad būtų galima daryti išvadas, reikia susipažinti su pagrindiniais aktuarinės teorijos dydžiais ir metodais.

4.1. Gyvenimo trukmės funkcijos

Gyvenimo trukmė.

Pagrindinis gyvybės draudimo proceso rizikos faktorius yra proceso neapibrėžtumas arba mirties momento nenuspėjamumas. Todėl, aprašant gyvybės draudimą, teorijoje būtina objektyviai vertinti gyvenimo trukmę. Taigi pradėsime nuo sąvokų ir apibrėžimų.

Apie vieno žmogaus mirties momentą nieko konkretaus pasakyti negalime – neįmanoma konkrečiai pasakyti, kada mirs atsitiktinai parinktas asmuo. Tačiau stebint didelę žmonių grupę ir nesidomint kiekvieno iš jų tolesniu likimu, galime laikyti, kad žmogaus gyvenimo trukmė yra atsitiktinis dydis T .

Pagrindinės gyvenimo trukmės charakteristikos – tai gyvenimo trukmės pasiskirstymo funkcija ir gyvenimo trukmės išgyvenimo funkcija.

Išgyvenimo funkcija.

Pasiskirstymo funkcija nusako bet kokio atsitiktinio dydžio T reikšmių tikimybes. Šią funkciją pažymėkime raide F . Šios funkcijos reikšmė $F(x)$ – tai tikimybė, kad žmogus mirs nesulaukęs x metų.

Apibrėžimas. Atsitiktinio dydžio T pasiskirstymo funkcija vadiname funkciją $F(x)$, kuri lygi tikimybei, kad atsitiktinis dydis T yra mažesnis už skaičių x :

$$F(x) = P(T < x).$$

1 pavyzdys.

a) Jeigu pasiskirstymo funkcija

$$F(x) = 1 - e^{-0,02x}, \quad x \geq 0,$$

tai tikimybė, kad gyvenimo trukmė mažesnė kaip 50 metų, lygi

$$F(50) = P(T < 50) = 1 - e^{-0,02 \cdot 50} = 1 - e^{-1} = 1 - 2,72^{-1} = 1 - 0,37 = 0,63,$$

o tikimybė, kad gyvenimo trukmė mažesnė kaip 10 metų, lygi

$$F(10) = P(T < 10) = 1 - e^{-0,02 \cdot 10} = 1 - e^{-0,2} = 1 - 2,72^{-0,2} = 1 - 0,82 = 0,18.$$

b) Jeigu

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x}{100}, & 0 \leq x \leq 100, \\ 1, & x > 100, \end{cases}$$

tai tikimybė, kad gyvenimo trukmė mažesnė kaip 50 metų, lygi

$$F(50) = P(T < 50) = \frac{50}{100} = \frac{1}{2},$$

o tikimybė, kad gyvenimo trukmė mažesnė kaip 70 metų, lygi

$$F(70) = P(T < 10) = \frac{70}{100} = 0,7.$$

Aktuarinės matematikos teorijoje įprasta naudoti ne funkciją $F(x)$, o funkciją $1 - F(x)$. Ši funkcija – tai tikimybė, kad žmogus išgyvens iki x metų arba daugiau.

Apibrėžimas. Atsitiktinio dydžio T išgyvenimo funkcija vadiname funkciją $s(x)$, kuri lygi tikimybei, kad atsitiktinis dydis T yra nemažesnis už skaičių x :

$$s(x) = 1 - F(x) = P(T \geq x).$$

2 pavyzdys.

a) Jeigu išgyvenimo funkcija $s(x)$ yra lygi

$$s(x) = \sqrt{1 - \frac{x}{120}}, \quad 0 \leq x \leq 120,$$

tai tikimybė, kad gyvenimo trukmė T bus nemažesnė kaip 30 metų, bus lygi

$$P(T \geq 30) = s(30) = \sqrt{1 - \frac{30}{120}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,87,$$

o tikimybė, kad gyvenimo trukmė bus nemažesnė kaip 90 metų, lygi

$$P(T \geq 90) = s(90) = \sqrt{1 - \frac{90}{120}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} = 0,5.$$

b) Jeigu

$$s(x) = \frac{x + 40}{40} e^{-\frac{x}{40}},$$

tai tikimybė, kad gyvenimo trukmė T bus nemažesnė kaip 40 metų, bus lygi

$$s(40) = P(T \geq 40) = \frac{40 + 40}{40} e^{-\frac{40}{40}} = 2e^{-1} \approx 0,74,$$

o tikimybė, kad gyvenimo trukmė bus nemažesnė kaip 80 metų, lygi

$$s(80) = P(T \geq 80) = \frac{80 + 40}{40} e^{-\frac{80}{40}} = 3e^{-2} \approx 0,41.$$

Išgyvenimo funkcija pasižymi tokiomis savybėmis:

1 savybė. $s(x)$ – nedidėjanti funkcija, kai $x \geq 0$;

Apibrėžimas. Funkcija $f(x)$ vadinama *nedidėjančia* intervale I , jei:

$$f(x_1) \geq f(x_2), \quad \text{visiems } x_1 < x_2; \quad x_1, x_2 \in I.$$

3 pavyzdys. Tarkime,

$$s(x) = \sqrt{1 - \frac{x}{100}}, \quad 0 \leq x \leq 100.$$

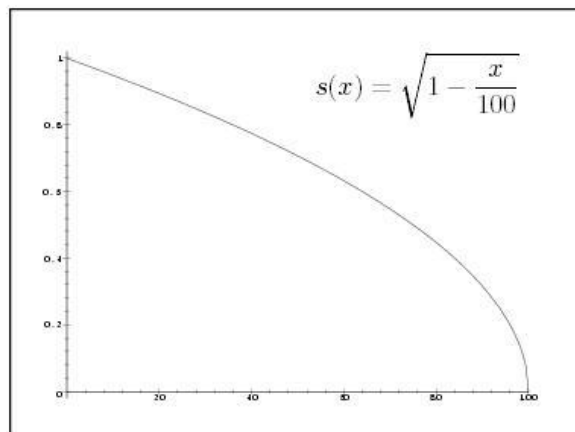
Patikrinsime, ar ši funkcija yra mažėjanti.

Sprendimas. Skaičiuosime funkcijos išvestinę:

$$\begin{aligned} s'(x) &= \left(\sqrt{1 - \frac{x}{100}} \right)' = \left(\left(1 - \frac{x}{100} \right)^{-\frac{1}{2}} \right)' \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{100} \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{100} \right) = -\frac{1}{200 \sqrt{1 - \frac{x}{100}}} < 0, \quad 0 \leq x < 100. \end{aligned}$$

Kadangi gavome, kad funkcijos išvestinė yra neigiama, tai reiškia, kad funkcija $s(x)$ yra mažėjanti.

Pateikiame šios funkcijos grafiką:



2 savybė. $s(0) = 1$.

3 savybė. $\lim_{x \rightarrow \infty} s(x) = 0$.

4 savybė. $s(x)$ – tolydi funkcija.

Apibrėžimas. Funkcija $F(x)$ vadinama *nenutrūkstama (tolydžia)* taške x_0 , jeigu

$$\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = F(x_0)$$

bet kuriam taškui x_0 iš F apibrėžimo srities.

Priešingu atveju funkcija vadinama *trūkia*, o taškai, kuriuose funkcija nėra tolydi vadinami *trūkio taškais*.

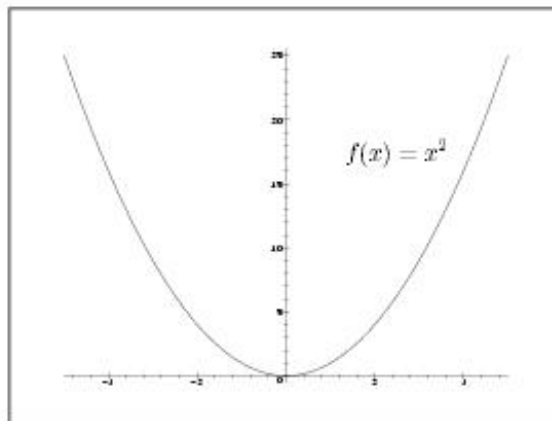
Kai funkcija yra tolydi kiekviename intervalo I taške, sakoma, kad ji tolydi visame intervale I .

4 pavyzdys. Ar funkcija $f(x) = x^2$, kur x – realus skaičius, yra tolydi?

Sprendimas. Fiksuosime tašką iš $f(x)$ apibrėžimo srities x_0 ir skaičiuosime jos ribą tame taške:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} x^2 = x_0^2 = f(x_0).$$

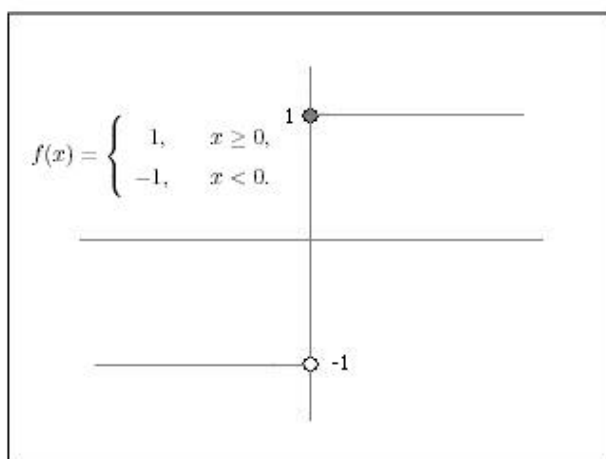
Akivaizdu, kad funkcija $f(x)$ – tolydi funkcija, kadangi yra tenkinama apibrėžimo sąlyga.



5 pavyzdys. Tirsime funkciją:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Sprendimas. Fiksuosime, kad $x_0 = 0$. Funkcijos reikšmė taške 0 yra lygi 1, tačiau taškas $x_0 = 0$ taip pat yra funkcijos $f(x)$ trūkio taškas. Todėl funkcijos ribos šiame taške apskaičiuoti negalime. Vadinasi, funkcija jame nėra tolydi.



Pirmosios trys išgyvenimo funkcijos savybės išplaukia iš apibrėžimo $s(x) = P(T \geq x)$. Ketvirtoji $s(x)$ savybė yra susitartinė. Funkcija $s(x)$ yra tolydi tik tada, kai atsitiktinio dydžio T pasiskirstymo funkcija $F(x)$ yra tolydi. Aktuarinėje matematikoje laikome, kad žmogaus gyvenimas gali baigtis bet kuriuo laiko momentu. Todėl atsitiktinis dydis T gali įgyti bet kokią reikšmę, pavyzdžiui 50, 12 metų, $49\frac{1}{3}$ metų, $70\frac{1}{9}$ metų ir panašiai. Iš to išplaukia, kad atsitiktinio dydžio T pasiskirstymo funkcija $F(x)$, o tuo pačiu ir išgyvenimo funkcija $s(x)$ laikomos tolydžiomis funkcijomis.

6 pavyzdys. Patikrinsime, ar funkcija

$$s(x) = e^{-x}, \quad \text{kai } x \in [0; +\infty)$$

yra išgyvenimo funkcija.

Sprendimas. Tam, kad įsitikintume, kad funkcija yra išgyvenimo funkcija, tikrinsime, ar ji tenkina visas išgyvenimo funkcijos savybes.

1) Kadangi

$$s'(x) = -e^{-x} < 0 \quad \text{visiems } x \in [0; \infty),$$

tai $s(x)$ yra mažėjanti visiems $x \in [0; \infty)$.

2) Skaičiuosime funkcijos $s(x)$ reikšmę taške $x = 0$:

$$s(0) = e^{-0} = 1.$$

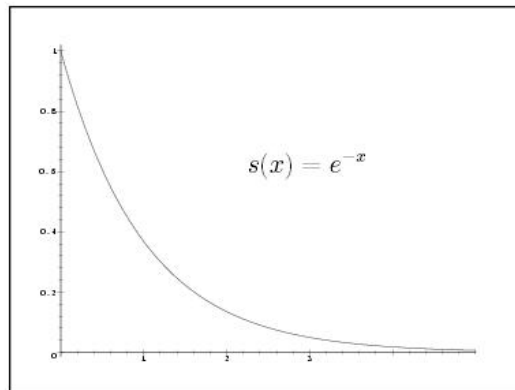
Taigi funkcija $s(x)$ tenkina 2-ąją išgyvenimo funkcijos savybę.

3) Patikrinsime, kam lygi funkcijos $s(x)$ riba, kai x artėja į begalybę:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} s(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{e^\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Taigi funkcijai $s(x)$ galioja ir 3-ioji išgyvenimo funkcijos savybė.

4) Tirsime funkcijos tolydumą $s(x)$. Pasinaudosime grafiku:



Iš grafiko aišku, kad

$$\lim_{x \rightarrow x_0} s(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{-x} = e^{-x_0} = s(x_0).$$

Taigi $s(x)$ yra tolydi.

Darome išvadą, kad funkcija $s(x) = e^{-x}$ yra išgyvenimo funkcija, kadangi ji tenkina visas išvardintas išgyvenimo funkcijos savybes.

Ribinis amžius.

Ribinis amžius, žymimas raide ω ¹ – tai mažiausias amžius, kuriam $s(x) = 0$, kai $x > \omega$. Praktiniuose skaičiavimuose dažniausiai ω priklauso (100; 120) metų intervalui.

7 pavyzdys.

a) Jei išgyvenimo funkcija

$$s(x) = 1 - \frac{x}{130}, \quad 0 \leq x \leq 130,$$

tai ribinis amžius $\omega = 130$;

¹ ω [omega] – paskutinioji, dvidešimt ketvirtoji graikų abėcėlės raidė.

b) Jei išgyvenimo funkcija

$$s(x) = \left(1 - \frac{x}{90}\right)^{\frac{4}{3}}, \quad 0 \leq x \leq 90,$$

tai ribinis amžius $\omega = 90$;

c) Jei išgyvenimo funkcija

$$s(x) = \frac{x + 50}{50} e^{-\frac{x}{50}},$$

tai ribinis amžius ω neegzistuoja, t.y. asmuo su tokia išgyvenimo funkcija gali gyventi be galo ilgai. Tikimybė, kad jis sulauks 100 metų, lygi

$$s(100) = \frac{100 + 50}{50} e^{-\frac{100}{50}} = 3e^{-2} \approx 0,41,$$

o, kad jis sulauks 1 000 metų, lygi

$$s(1\,000) = \frac{1\,000 + 50}{50} e^{-\frac{1\,000}{50}} = 21e^{-20} \approx 4,33 \cdot 10^{-8}.$$

Mirtingumas

Mirtingumas – tai visų per tam tikrą laikotarpį mirusių žmonių ir vidutinio gyventojų skaičiaus santykis. Šis rodiklis dažniausiai yra apskaičiuojamas 1 000, 10 000, 100 000 gyventojų. Dažnai skaičiuojamas ne tik bendras mirčių kiekis, bet ir naujagimių mirtingumas (vaikų iki 1 metų).

Dešimt šalių, kur 2004 metais užfiksuotas didžiausias naujagimių mirtingumas (tūkstančiui naujagimių): 1. Angola 192,50. 2. Afganistanas 165,96. 3. Siera Leone 145,24. 4. Mozambikas 137,08. 5. Liberija 130,51. 6. Nigeris 122,66. 7. Somalis 118,52. 8. Malis 117,99. 9. Tadžikija 112,10. 10. Bisau Gvinėja 108,72.

Lietuvoje mirusių vaikų iki 1 metų amžiaus skaičius 1000-iui gyvų gimusių išaugo nuo 6,75 atvejo 2003 metais iki 7,9 atvejo 2004 metais. Kūdikių mirtingumas Lietuvoje mažesnis už Europos vidurkį (9,67/1000 gyvų gimusiųjų), bet aukštesnis už labiausiai išsivysčiusių Europos Sąjungos šalių vidurkį (Norvegijos – 4,06/1000, Švedijos – 3,66/1000, Suomijos – 2,97/1000).

Išgyvenimo funkcija turi paprastą statistinę prasmę. Tarkime, kad stebime grupę, kurią sudaro 100 000 naujagimių. Šį dydį žymėsime l_0 . Be to, sakykime, kad galime fiksuoti jų mirties momentus. Vaikų, išgyvenusių iki amžiaus x , skaičių žymėsime raide $L(x)$. Tada vidutinis naujagimių, sulaukusių amžiaus x , skaičius lygus:

$$l_x = \mathbb{E}L(x) = l_0 \cdot P(T \geq x) = l_0 \cdot s(x).$$

Taigi išgyvenimo funkcija yra lygi vidutinio naujagimių, sulaukusių amžiaus x , ir bendro pradinio naujagimių skaičių santykiui:

$$s(x) = \frac{l_x}{l_0}.$$

8 pavyzdys. Įsivaizduosime, kad stebime 10 000 naujagimių grupę. Rasime, kiek vidutiniškai berniukų ir mergaičių sulauks diplomų įteikimo šventės, tai reiškia, kad sulauks 22 metų, jei jų išgyvenimo funkcija apibrėžiama taip:

$$s(x) = \frac{100}{100 + x}.$$

Sprendimas. Turime, kad $l_0 = 10\,000$. Remiantis gauta formule:

$$l_{22} = l_0 \cdot s(22) = 10\,000 \cdot \frac{100}{100 + 22} = 10\,000 \cdot 0,81967 \approx 8\,196.$$

Kadangi atsitiktinis dydis T laikomas tolydžiu, tai jį apibūdina ne tik pasiskirstymo funkcija $F(x)$, bet ir *tankio funkcija*. Pažymėkime šią funkciją $f(x)$. Gerai žinoma, kad tankio funkcija, jeigu ji egzistuoja, yra lygi pasiskirstymo funkcijos išvestinei:

$$f(x) = F'(x).$$

Nesunku patikrinti, kad

$$F'(x) = -(1 - F(x))'.$$

Kadangi

$$s(x) = 1 - F(x),$$

tai

$$f(x) = -s'(x).$$

Šios lygybės abi puses padauginę iš l_0 , gausime:

$$l_0 \cdot f(x) = -l_0 \cdot s'(x).$$

Mirties kreivė.

Aktuarinėje matematikoje išgyvenimo funkcijos tankio grafikas vadinamas *mirties kreive*. Ši kreivė turi paprastą statistinę prasmę. Tarkime, stebime naujagimių grupę, kurios dydis yra l_0 . Raide $D(x)$ žymėsime mirusių x -mečių vaikų skaičių.

Tada vidutinis x amžiaus mirusių asmenų skaičius, žymimas d_x , lygus

$$d_x = \mathbb{E}D(x) = \mathbb{E}(L(x) - L(x+1)) = \mathbb{E}L(x) - \mathbb{E}L(x+1) = l_x - l_{x+1}.$$

Vadinasi,

$$d_x \approx l_0 \cdot f(x),$$

nes

$$l_x - l_{x+1} = l_0(s(x) - s(x+1)) \approx -l_0 s'(x) = l_0 f(x).$$

Taigi

$$f(x) \approx \frac{d_x}{l_0}.$$

Žinant funkciją $f(x)$, išgyvenimo funkciją irgi galima rasti. Lygybė $f(x) = -s'(x)$ tinka funkcijos $f(x)$ radimui iš $s(x)$, o iš jos išplaukia, kad

$$s(x) = \int_x^{\infty} f(u) du.$$

Taigi mirties kreivė yra viena iš pagrindinių gyvenimo trukmės charakteristikų.

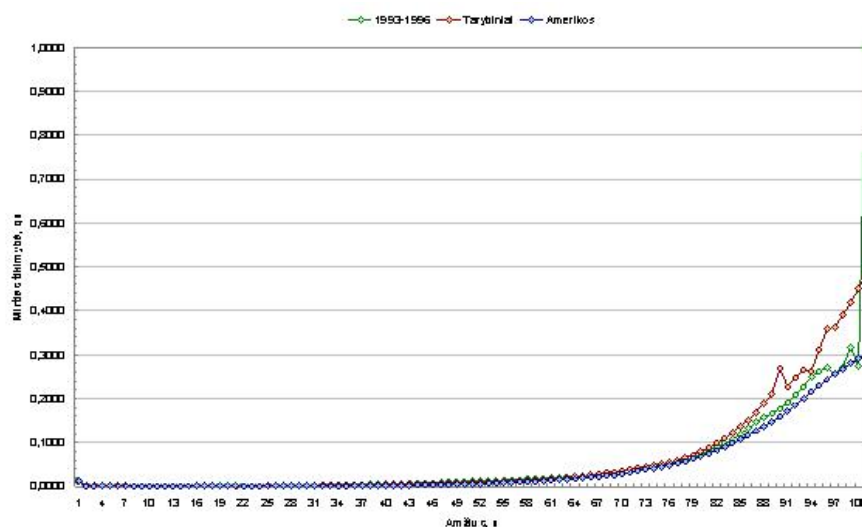
9 pavyzdys. Esant patenkingoms 8 pavyzdžio sąlygoms, apskaičiuosime, kiek jaunuolių iš naujagimių, sulaukusių 22 metų amžiaus, mirs per sekančius metus.

Sprendimas. Analogiškai, kaip ir 8-ame pavyzdyje, apskaičiuojame:

$$l_{23} = l_0 \cdot s(23) = 10\,000 \cdot \frac{100}{100 + 23} = 10\,000 \cdot 0,813008 \approx 8130.$$

Kadangi $d_{22} = l_{22} - l_{23}$, tai $d_{22} = 8196 - 8130 = 66$.

Pateiksime kelių mirtingumo kreivių grafikų pavyzdžius:



Šiame paveiksliuke pavaizduotos trys mirtingumo kreivės: Tarybinių metų Lietuvos, Lietuvos 1993 m. – 1996 m. ir JAV 1979 m. – 1981 m.

Aiškiai matosi, kad visos trys mirtingumo kreivės iki 80 metų beveik sutampa, o vėliau pradeda skirtis. Kiekviena iš jų turi savitą pavidalą, priklausančią nuo daugelio dalykų, tokių kaip klimatas, tradicijos, gyvenimo būdas.

Mirtingumo galia.

Apibrėžimas. Dydis

$$\mu(x) = \frac{f(x)}{s(x)} = -\frac{s'(x)}{s(x)}$$

vadinamas *mirtingumo galia*². Kitaip šis dydis dar vadinamas *mirties intensyvumu*. Mirtingumo galia apibūdina išgyvenimo funkcijos $s(x)$ mažėjimo greitį didėjant amžiui x .

Kaip matome iš apibrėžimo, $\mu(x)$ galime rasti žinodami funkciją $s(x)$. Išsprendę užrašytąją lygtį, gauname kitą lygybę, kuri leidžia rasti funkciją $s(x)$, žinant funkciją $\mu(x)$:

$$s(x) = \exp \left\{ - \int_0^x \mu(u) du \right\}.$$

10 pavyzdys. Tarsime, kad ledų pardavėjų išgyvenimo funkcija lygi:

$$s(x) = \frac{666}{666 + x}.$$

(Laikysime, kad jau ištyrėme, jog šiai funkcijai galioja visos keturios išgyvenamumo funkcijos savybės).

Rasime ledų pardavėjų mirtingumo galią.

Sprendimas. Kadangi turime tik išgyvenimo funkcijos išraišką, tam, kad pasinaudotumėme lygybe: $\mu(x) = -\frac{s'(x)}{s(x)}$, reikia apskaičiuoti funkcijos $s(x)$ išvestinę:

$$\begin{aligned} s'(x) &= \left(\frac{666}{666 + x} \right)' = 666 \left(\frac{1}{666 + x} \right)' = 666 \left((666 + x)^{-1} \right)' \\ &= -666(666 + x)^{-2} = -\frac{666}{(666 + x)^2}. \end{aligned}$$

Taigi

$$\mu(x) = -\frac{s'(x)}{s(x)} = \frac{\frac{666}{(666+x)^2}}{\frac{666}{666+x}} = \frac{1}{666 + x}.$$

² μ [miu] – dvyliktoji graikų abėcėlės raidė.

Jei ledų pardavėjai 50 metų, tai jos mirtingumo galia:

$$\mu(50) = \frac{1}{666 + x} = \frac{1}{666 + 50} = 1,397 \cdot 10^{-3},$$

o jei 200 metų, tai jos mirtingumo galia:

$$\mu(200) = \frac{1}{666 + x} = \frac{1}{666 + 200} = 1,155 \cdot 10^{-3}.$$

4.2. Likusio gyvenimo trukmės funkcijos

Likusio gyvenimo trukmė.

Draudimo bendrovės pasirašo gyvybės draudimo sutartis su konkrečiais žmonėmis, kurie išgyvena iki tam tikro amžiaus. Tokių žmonių gyvenimo trukmės savybės skiriasi nuo naujagimių gyvenimo trukmės savybių. Jei žmogus, turintis x metų kreipiasi į draudiką, iš anksto yra žinoma, kad besikreipiantysis jau yra išgyvenęs iki x metų. Todėl visi atsitiktiniai įvykiai susiję su šiuo individu, turi būti nagrinėjami su sąlyga: $T > x$, t.y. jo gyvenimo trukmė yra ilgesnė negu x metų.

Asmuo, sulaukęs x metų, aktuarinėje matematikoje žymimas simboliu (x) .

Sakykime, kad naujagimis iš pradinės populiacijos l_0 sulaukė x metų. Nagrinėjant asmens (x) gyvenimą, dažniausiai atsižvelgiama ne į jo gyvenimo trukmę T , o į jam likusį gyventi laiką $T_x = T - x$.

Apibrėžimas. Atsitiktinio dydžio T_x pasiskirstymo funkcija F_x – tai tikimybė asmeniui (x) mirti nesulaukus numatyto laiko t , t.y. $F_x(t) = P(T_x < t)$.

Teisingos tokios lygybės:

$$\begin{aligned} F_x(t) &= P(T_x < t) = \frac{P(x < T < x + t)}{P(T > x)} = \frac{F(x + t) - F(x)}{1 - F(x)} \\ &= \frac{1 - s(x + t) - 1 + s(x)}{1 - 1 + s(x)} = \frac{s(x) - s(x + t)}{s(x)} \\ &= \frac{\frac{l_x}{l_0} - \frac{l_{x+t}}{l_0}}{\frac{l_x}{l_0}} = \frac{l_x - l_{x+t}}{l_x}. \end{aligned}$$

Atsitiktinio dydžio T_x išgyvenimo funkcija:

$$s_x(t) = 1 - F_x(t) = P(T_x \geq t) = 1 - \frac{s(x) - s(x + t)}{s(x)} = \frac{s(x + t)}{s(x)} = \frac{l_{x+t}}{l_x};$$

tankio funkcija:

$$f_x(t) = -s'_x(t) = -\frac{s'(x + t)}{s(x)} = \frac{f(x + t)}{s(x)};$$

mirtingumo galia:

$$\mu_x(t) = \frac{f_x(t)}{s_x(t)} = -\frac{s'_x(t)}{s_x(t)} = \frac{\frac{f(x+t)}{s(x)}}{\frac{s(x+t)}{s(x)}} = \frac{f(x+t)}{s(x+t)} = \mu(x+t).$$

Gautas rezultatas reiškia tai, kad žmogaus (x) mirtingumo galia, praėjus t metų, yra lygi naujagimio mirtingumo galiai laiko momentu $x+t$.

Iš paskutinės lygybės išplaukia svarbi tankio $f_x(t)$ formulė, kuri bus dažnai naudojama ateityje:

$$f_x(t) = \mu_{x+t}P(T_x > t) = \mu_{x+t}s_x(t).$$

11 pavyzdys. Jeigu gyvenimo trukmė T turi išgyvenimo funkciją

$$s(x) = \left(1 - \frac{x}{100}\right)^2, \quad 0 \leq x \leq 100,$$

tai

$$F_{20}(t) = \frac{s(20) - s(20+t)}{s(20)} = \frac{\left(1 - \frac{20}{100}\right)^2 - \left(1 - \frac{20+t}{100}\right)^2}{\left(1 - \frac{20}{100}\right)^2} = 1 - \frac{25}{16} \left(\frac{80+t}{100}\right)^2, \quad 0 \leq t \leq 80,$$

$$s_{20}(t) = \frac{s(20+t)}{s(20)} = \frac{\left(1 - \frac{20+t}{100}\right)^2}{\left(1 - \frac{20}{100}\right)^2} = \frac{25}{16} \left(\frac{80+t}{100}\right)^2, \quad 0 \leq t \leq 80,$$

$$f_{20}(t) = -s'_{20}(t) = -\left(\frac{25}{16} \left(\frac{80+t}{100}\right)^2\right)' = -\frac{100}{16} \left(\frac{80+t}{100}\right) \left(\frac{1}{100}\right) = -\frac{1}{16} \left(\frac{80+t}{100}\right), \quad 0 < t < 80,$$

$$\mu_{20}(t) = -\frac{f_{20}(t)}{s_{20}(t)} = -\frac{-\frac{1}{16} \left(\frac{80+t}{100}\right)}{\frac{25}{16} \left(\frac{80+t}{100}\right)^2} = \frac{1}{25 \left(\frac{80+t}{100}\right)} = \frac{4}{80+t}, \quad 0 < t < 80.$$

Pagrindiniai dydžiai, susiję su likusio gyvenimo trukme.

★ $\boxed{{}_tq_x}$ Aktuariniuose skaičiavimuose tikimybė žmogui, sulaukusiam x metų, mirti per artimiausius t metų, t.y. $P(T_x < t)$, žymima simboliu ${}_tq_x$. Remiantis aukščiau pateiktomis lygybėmis funkcijai $F_x(t)$, gauname:

$${}_tq_x = \frac{s(x) - s(x+t)}{s(x)} = \frac{l_x - l_{x+t}}{l_x}.$$

12 pavyzdys. Natalija, kuriai dvidešimt vieneri, dirba pardavėja greito maisto restorane “Burgeris – didysis dėdulė”. Žinoma, kad jos gyvenimo trukmės pasiskirstymo funkcija tokia:

$F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{50}}$. Po dviejų metų restoranas atidarys naują savo filialą “Burgerio dėdienė”, kuriame mergina jau dirbs administratore. Kokia tikimybė, kad mergina mirs nesulaukusi paaukštinimo pareigos?

Sprendimas. Tam, kad lengvai pritaikytume išvestą formulę, reikia rasti išgyvenimo funkciją $s(x)$. Žinome, kad $s(x) = 1 - F(x)$. Todėl:

$$s(x) = 1 - (1 - e^{-\frac{x}{50}}) = e^{-\frac{x}{50}}.$$

Remiantis formule, nesunku suskaičiuoti:

$$\begin{aligned} {}_2q_{21} &= \frac{s(21) - s(21 + 2)}{s(21)} = \frac{e^{-\frac{21}{50}} - e^{-\frac{23}{50}}}{e^{-\frac{21}{50}}} = 1 - \frac{e^{-\frac{23}{50}}}{e^{-\frac{21}{50}}} = 1 - e^{-\frac{23}{50} + \frac{21}{50}} \\ &= 1 - e^{-\frac{2}{50}} = 1 - e^{-\frac{1}{25}} \approx 1 - 0,960789 \approx 0,0392. \end{aligned}$$

★ ${}_tp_x$ Priešinga tikimybei ${}_tq_x$ – tai tikimybė, kad žmogus (x) išgyvens mažiausiai t metų, t.y. $P(T_x > t)$. Ji žymima simboliu ${}_tp_x$ ir ji apskaičiuojama taip:

$${}_tp_x = 1 - {}_tq_x = \frac{s(x+t)}{s(x)} = \frac{l_{x+t}}{l_x}.$$

13 pavyzdys. Mažajam Tadiui – šešeri. Kokia tikimybė, kad jis baigs vidurinę mokyklą, jei jo išgyvenimo funkcija lygi:

$$s(x) = \frac{200}{200 + x}?$$

Sprendimas. Reikia apskaičiuoti tikimybę, kad Tadas išgyvens bent 12 metų – vidutiniškai tiek laiko užtrunka baigti vidurinę. Remiantis duota išgyvenimo funkcija ir pateikta formule:

$${}_{12}p_6 = \frac{s(6+12)}{s(6)} = \frac{s(18)}{s(6)} = \frac{\frac{200}{200+18}}{\frac{200}{200+6}} = \frac{206}{218} \approx 0,94.$$

★ q_x, p_x Praktikoje gana dažnai pasitaiko atvejų, kai $t = 1$. Todėl šiuo atveju minėtas funkcijas ${}_tp_x, {}_tq_x$ buvo sumanyta žymėti be indekso “1” kairėje pusėje. Taigi simboliu q_x žymėsime tikimybę žmogui, turinčiam x metų, mirti per artimiausius vienerius metus, t.y. $P(T_x < 1)$, o simboliu p_x žymėsime tikimybę žmogui, turinčiam x metų, išgyventi dar mažiausiai vienerius metus, t.y. $P(T_x > 1)$. Pagal anksčiau pateiktas formules:

$$q_x = \frac{s(x) - s(x+1)}{s(x)} = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x},$$

$$p_x = \frac{s(x+1)}{s(x)} = \frac{l_{x+1}}{l_x}.$$

Tikimybių p_x pagalba galime apskaičiuoti bet kokią tikimybę ${}_t p_x$:

$${}_t p_x = p_x \cdot p_{x+1} \cdot \dots \cdot p_{x+t-1}, \quad \text{kai } t \in \mathbb{N}.$$

14 pavyzdys. Kokia tikimybė, kad direktoriaus pavaduotoja, turinti 46 metus, kuriai iki kaden-cijos pabaigos liko vieneri metai, sulauks naujų rinkimų, jeigu jos išgyvenimo funkcija lygi

$$s(x) = 1 - \frac{x}{75}, \quad \text{kai } 0 \leq x \leq 75?$$

Sprendimas. Remiantis duota išgyvenimo funkcija ir pateikia formulę:

$$p_{46} = \frac{s(46+1)}{s(46)} = \frac{s(47)}{s(46)} = \frac{1 - \frac{47}{75}}{1 - \frac{46}{75}} = \frac{28}{29} \approx 0,97.$$

15 pavyzdys. Apskaičiuokite tikimybę, kad 36 metų lenktynininkas Juozas mirs per ateinančius metus, nesulaukęs to laiko, kada į Lietuvą atkeliaus naujausiais lenktyninis “Ferrari” firmos automobilio modelis. Juozo išgyvenimo funkcija:

$$s(x) = \sqrt{1 - \frac{x}{100}}, \quad \text{kai } 0 \leq x \leq 100?$$

Sprendimas. Remiantis duota išgyvenimo funkcija ir pateikia formulę:

$$\begin{aligned} q_{36} &= \frac{s(36) - s(36+1)}{s(36)} = \frac{s(36) - s(37)}{s(36)} = \frac{\sqrt{1 - \frac{36}{100}} - \sqrt{1 - \frac{37}{100}}}{\sqrt{1 - \frac{36}{100}}} \\ &= \frac{\sqrt{\frac{64}{100}} - \sqrt{\frac{63}{100}}}{\sqrt{\frac{64}{100}}} = \frac{\frac{8}{10} - \frac{3\sqrt{7}}{10}}{\frac{8}{10}} = \frac{8 - 3\sqrt{7}}{8} = 1 - \frac{3\sqrt{7}}{8} \approx 1 - 0,99 \approx 0,01. \end{aligned}$$

★ ${}_{t|u}q_x$ Kartais svarbu rasti tikimybę, kad x metų turintis žmogus išgyvens dar bent t metų ir mirs per kitus u metų, t.y. tikimybę $P(t < T_x < t+u)$. Šią tikimybę žymėsime simboliu ${}_{t|u}q_x$.

Kadangi

$$P(T_x \in (t, t+u)) = F_x(t+u) - F_x(t),$$

tai

$$\begin{aligned} {}_{t|u}q_x &= {}_{t+u}q_x - {}_t q_x = \frac{s(x) - s(x+t+u)}{s(x)} - \frac{s(x) - s(x+t)}{s(x)} \\ &= \frac{s(x+t) - s(x+t+u)}{s(x)} = \frac{l_{x+t} - l_{x+t+u}}{l_x}. \end{aligned}$$

16 pavyzdys. Raskite tikimybę, kad 32 metų policininkas Laurynas Viršyla išgyvens 10 metų ir po 20 metų tarnybos išeis į užtarnautą pensiją, tačiau 45 metų nesulauks. L . Viršylos išgyvenimo funkcija:

$$s(x) = \frac{\sqrt{100-x}}{10}, \quad \text{kai } 0 \leq x \leq 100.$$

Sprendimas. Remiantis duota išgyvenimo funkcija ir pateikta formule:

$$\begin{aligned} {}_{10|3}q_{32} &= \frac{s(32+10) - s(32+10+3)}{s(32)} = \frac{\sqrt{100-42} - \sqrt{100-45}}{\sqrt{100-32}} \\ &= \frac{\sqrt{58} - \sqrt{55}}{\sqrt{68}} \approx \frac{7,62 - 7,42}{8,25} = \frac{0,20}{8,25} \approx 0,02. \end{aligned}$$

★ ${}_t|q_x$ Kai $u = 1$, tikimybė žmogui išgyventi dar t metų ir mirti per artimiausius vienerius metus, t.y. $P(t < T_x < t+1)$, žymima ${}_t|q_x$ ir apskaičiuojama:

$${}_t|q_x = \frac{s(x+t) - s(x+t+1)}{s(x)} = \frac{l_{x+t} - l_{x+t+1}}{l_x}.$$

17 pavyzdys. Kokia tikimybė, muzikos mokytoja Marija Mocartė, kuriai dabar yra 28-eri metai ir dabartiniai jos auklėtiniai yra dešimtokai, gros savo auklėtinių išleistuvėse, tačiau dar vienu išleistuvių nesulauks? M . Mocartės išgyvenimo funkcija lygi:

$$s(x) = \frac{x+50}{50} e^{-\frac{x}{50}}.$$

Sprendimas. Remiantis duota išgyvenimo funkcija ir pateikta formule:

$$\begin{aligned} {}_3|q_{28} &= \frac{s(28+3) - s(28+3+1)}{s(28)} = \frac{s(31) - s(32)}{s(28)} = \frac{\frac{31+50}{50} e^{-\frac{31}{50}} - \frac{32+50}{50} e^{-\frac{32}{50}}}{\frac{28+50}{50} e^{-\frac{28}{50}}} \\ &= \frac{81e^{-\frac{31}{50}} - 82e^{-\frac{32}{50}}}{78e^{-\frac{28}{50}}} = \frac{81}{78} e^{-\frac{3}{50}} - \frac{82}{78} e^{-\frac{4}{50}} = \frac{81e^{-0,06} - 82e^{-0,08}}{78} \\ &\approx \frac{81 \cdot 0,9420 - 82 \cdot 0,9234}{78} \approx \frac{76,3020 - 75,7188}{8,25} = \frac{0,5832}{78} \approx 0,0075 \approx 0,01. \end{aligned}$$

Ryšys tarp ${}_tp_x$ ir μ_x .

Ar galima rasti ${}_xp_t$, jei μ_x yra žinomas? Taip!

Turime, kad

$$\mu_x(t) = -\frac{s'_x(t)}{s_x(t)} = (\ln s_x(t))'.$$

Suintegruokime:

$$\begin{aligned}\int_0^t \mu_x(u) du &= \int_0^t (\ln s_x(u))' du = \ln s_x(u) \Big|_0^t \\ &= \ln s_x(x+t) - \ln s_x(x) = \ln \frac{s_x(x+t)}{s_x(x)} = \ln {}_t p_x.\end{aligned}$$

Taigi

$${}_t p_x = \exp \left\{ \int_0^t \mu_x(u) du \right\} = \exp \left\{ \int_0^t \mu(x+u) du \right\} = \exp \left\{ \int_x^{x+t} \mu(u) du \right\}.$$

Sveikas metų skaičius.

Dažniausiai žmonės nugyventus metus skaičiuoja metais, o ne mėnesiais ar dienomis. Draudimo bendrovės taip pat paprastai sudaro sutartis 1, 2, 3, 5 ar 7 metams, t.y. laikotarpiui, kada sutarties galiojimų laikas yra sveikas skaičius. Taigi būtų logiška kartu su įprasta gyvenimo trukme T_x išnagrinėti ir jos dalį, kurią žymėsime simboliu K_x , kur:

$$K_x = [T_x].$$

18 pavyzdys. Mantas labai norėjo sužinoti, kiek jam liko gyventi. Pasinaudojęs būrėjos paslaugomis, jis sužinojo, kad jam viso labo liko 3 metai ir 6 mėnesiai! Atsiribodami nuo Mantą kankinančių klausimų, skaičiuosime toliau. Taigi jam likęs gyventi laikas:

$$T_x = 3 \text{ m. } 6 \text{ mėn.} = 3 \frac{6}{12} \text{ m.} = 3 \frac{1}{2} \text{ m.}$$

Vadinasi Mantui likusių gyventi sveikų metų skaičius lygus:

$$K_x = \left[3 \frac{1}{2} \text{ m.} \right] = 3 \text{ m.}$$

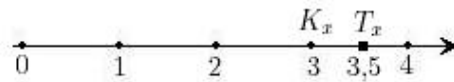
Apibrėžimas. Dydis $K_x = [T_x]$ vadinamas likusios gyvenimo trukmės T_x sveikąja dalimi.

Svarbu pabrėžti, kad sveikosios dalies apvalinimas atliekamas ne iki artimiausio sveiko skaičiaus, o visada su trūkumu, t.y. iki artimiausio mažesnio sveiko skaičiaus negu duotas trupmeninis skaičius.

19 pavyzdys. Grįžkime prie jau nagrinėto (18) pavyzdžio. Manto likusių gyvenimo trukmę T_x , lygią 3 m. 6 mėn. užrašykime dešimtaine trupmena. Gauname $T_x = 3,5 \text{ m.}$ Remdamiesi

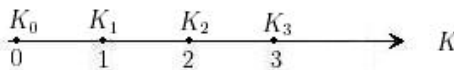
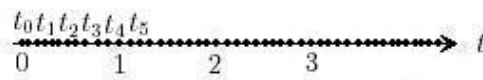
įprastomis apvalinimo taisyklėmis ir apvalindami skaičių iki vienetų, gautume rezultatą, lygų 4 metams. Tačiau sveikosios dalies skaičiavimui ši taisyklė negalioja, kad ir kokie dideli skaičiai būtų po kablelio. Duotame pavyzdyje artimiausias mažesnis sveikas skaičius už 3,5 yra 3, todėl $K_x = [3,5] = 3$.

Apvalinimo procedūros ypatumai pavaizduoti žemiau esančiame paveiksliuke:



Kadangi dydis K_x yra atsitiktinio dydžio T_x dalis, tai ir dydis K_x yra atsitiktinis dydis. Atsitiktinio dydžio prigimtį turėtų apibūdinti pasiskirstymo funkcija. Kadangi atsitiktinis dydis K_x įgyja tik sveikas reikšmes, tai jis aprašomas ne pasiskirstymo funkcija, o tiesiog pasiskirstymu, kurį galima išreikšti lentele. Pasiskirstymo funkcija nuo pasiskirstymo skiriasi tuo, kad pasiskirstymo funkcija išreiškia tam tikro atsitiktinio dydžio elgesio dėsni bet kuriuo momentu t , o pasiskirstymą sudaro tikimybių rinkinys atskirais momentais k . Kintamasis t yra realus skaičius, o kintamasis k – sveikas, neneigiamas.

Jei bandytume vaizduoti šiuos du skirtingus laiko momentus teigiamoje skaičių tiesėje, atrodytų taip:



Atsitiktinio dydžio K_x pasiskirstymą sudaro tikimybės $P(K_x = 0)$, $P(K_x = 1)$, ... Bendras šių tikimybių pavidalas yra:

$$P(K_x = k), \text{ kai } k = 0, 1, \dots$$

Nesunku pastebėti, kad įvykis $\{K_x = k\}$ yra ekvivalentus įvykiui $\{k \leq T_x < k+1\}$. Tokiu būdu:

$$\begin{aligned} P(K_x = k) &= P(k \leq T_x < k+1) = {}_{k|}q_x = \frac{s(x+k) - s(x+k+1)}{s(x)} \\ &= \frac{l_{x+k} - l_{x+k+1}}{l_x} = \frac{d_{x+k}}{l_x}. \end{aligned}$$

4.3. Mirtingumo lentelė

Statistiniai duomenys apie tam tikras žmonių grupės gyvenimo trukmę sumuojami ir surašomi į gyvenimo trukmės lenteles, vadinamąsias *mirtingumo lenteles*. Paprasčiausias tokios lentelės pavyzdys – tai lentelė, kurioje pateikta gyvenimo trukmės statistinė informacija atsitiktinai parinkto vieno žmogaus, atsižvelgiant tik į to žmogaus amžių. Tačiau įsivaizduoti bendrą mirtingumo lentelės vaizdą, kai pateikiami atskirų žmonių duomenys, yra gana keblu. Iš bendrųjų lentelių galime susidaryti tikslesnį mirtingumo lentelės vaizdą, kadangi bendrosiose lentelėse pateikiama informacija apie pasirinktos populiacijos (tautos, socialinės grupės ir kt.) gyvenimo trukmės savybes.

1693 metais anglų astronomas Edmundas Halis sukonstravo pirmąją mirtingumo lentelę, susiedamas gyvybės draudimo premiją su vidutine gyvenimo trukme, paremta mirtingumu bei sudėtinėmis palūkanomis. 1756 metais Josefas Dodsonas pakoregavo mirtingumo lentelę, susiedamas premijos normą ir amžių, nes anksčiau ši norma buvo ta pati bet kokiam amžiui.

Tam, kad aktuarinis uždavinys būtų išspręstas, iš esmės pakanka žinoti išgyvenimo funkcijos $s(x)$ reikšmę. Dažnai mirtingumo lentelėse pateikiami ir kiti dydžiai, susiję su žmogaus likusio gyvenimo trukme.

Realų mirtingumo lentelės pavyzdį pateikiame antrame priede. Lentelėje surašyti Lietuvos gyventojų 1993 - 1996 metų mirtingumo duomenys. Panagrinėkime mirtingumo lentelės fragmentą:

Amžius	Išgyvenę iš $l_0 = 100\,000$			Mirę per metus			Mirties tikimybė			Išgyvenimo f-ja		
x	l_{x_v}	l_{x_m}	l_x	d_{x_v}	d_{x_m}	d_x	q_{x_v}	q_{x_m}	q_x	$s(x)_v$	$s(x)_m$	$s(x)$
0	100000	100000	100000	1546	1255	1405	0,0155	0,0126	0,0141	1,000	1,000	1,000
1	98454	98745	98595	118	91	105	0,0012	0,0009	0,0011	0,9845	0,9875	0,9860
2	98336	98654	98490	102	70	86	0,0010	0,0007	0,0009	0,9834	0,9865	0,9849
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
17	97455	98102	97771	130	53	92	0,0013	0,0005	0,0009	0,9746	0,9810	0,9777
18	97325	98049	97679	184	62	124	0,0019	0,0006	0,0013	0,9733	0,9805	0,9768

Šią mirtingumo lentelę sudaro penki stulpeliai. Pirmame stulpelyje surašytas žmogaus amžius kas vieneri metai. Paprastai mirtingumo lentelės žingsnis yra lygus vieneriems metams, todėl ir šioje mirtingumo lentelėje visų likusio gyvenimo trukmės funkcijų reikšmės pateikiamos taškuose $x = 0, 1, 2, 3, \dots$. Kiekvienas iš likusių keturių stulpelių yra sudarytas dar iš trijų. Akivaizdu, kad vyrų ir moterų lentelės duomenys skiriasi, kadangi skiriasi jų mirtingumas. Norėdami atskirti skirtingų lyčių informaciją - gauname tris stulpelius: vyrų, moterų ir bendrą.

Prisiminkime visas likusio gyvenimo trukmės funkcijas, kurias jau išnagrinėjome praeituose skyreliuose:

- 1) $l_x = l_0 \cdot s(x)$ – vidutinis sulaukusių x metų tam tikros grupės skaičius iš pradinės naujagimių grupės $l_0 = 100\,000$;
- 2) $d_x = l_x - l_{x+1}$ – vidutinis tam tikros grupės atstovų, kurie mirė sulaukę amžiaus iš intervalo $[x; x + 1]$, skaičius;
- 3) $q_x = \frac{d_x}{l_x}$ – tikimybė žmogui, sulaukusiam x metų, mirti per ateinančius metus.

Paskutiname mirtingumo lentelės stulpelyje pateiktos išgyvenimo funkcijos skaitinės reikšmės. Sprendžiant draudimo uždavinius, šios reikšmės gali skirtis priklausomai nuo išgyvenimo funkcijos pavidalo.

Pastaba. Antrame priede pateiktoje 1993 – 1996 metų Lietuvos gyventojų mirtingumo lentelėje pateikiamos tik Lietuvos gyventojų mirtingumo savybės. Uždavinių sprendimui, kuriam reikalingos žinios apie kitų šalių mirtingumo situaciją, šios lentelės informacijos naudoti negalima, nes gauti rezultatai nebus tikri.

4.4. Pakartokime

- Kokiomis savybėmis pasižymi išgyvenimo funkcija?
- Kokią įtaką funkcijai $s(x)$ turi ribinis amžius ω ?
- Kaip apskaičiuoti atsitiktinio dydžio tankį, kai žinoma jo pasiskirstymo funkcija ir atvirkščiai?
- Kokia yra išgyvenimo funkcijos bei mirties kreivės statistinės prasmės?
- Kodėl mirties kreivė ir mirtingumo galia gali būti laikomos pagrindinėmis išgyvenimo funkcijos charakteristikomis?
- Kaip paaiškintumėte atsitiktinių dydžių T ir T_x skirtumą?
- Kam lygi tikimybių ${}_t p_x$ ir ${}_t q_x$ suma?
- Kokios yra likusio gyvenimo trukmės sveikosios dalies apvalinimo taisyklės?
- Kodėl atsitiktinio dydžio K_x prigimtis aprašoma pasiskirtymu, o ne pasiskirstymo funkcija?
- Kokios likusio gyvenimo funkcijos sudaro mirtingumo lentelę?

4.5. Uždaviniai

1 uždavinys. 16 metų Onutė mokosi Vilniaus S. Nėries gimnazijoje devintoje klasėje. 16 metų Jonukas mokosi Panevėžio J. Balčikonio gimnazijoje irgi devintoje klasėje. Kokia tikimybė 16 metų Onutei sulaukti abiturės egzaminų? O Jonukui? Palyginkite gautus skirtingų lyčių rezultatus.

Sprendimas. Kadangi Onutė gyvena Lietuvoje, todėl naudosime Lietuvos gyventojų mirtingumo lentelę. Tikimybė Onutei sulaukti abiturės egzaminų yra lygi tikimybei, kad ji, būdama 16 metų, išgyvens dar bent du metus:

$${}_2p_{16}^{(O)} = \frac{l_{18}^{(O)}}{l_{16}^{(O)}} = \frac{98049}{98147} = 0,9990.$$

Tokia tikimybė Jonukui bus lygi:

$${}_2p_{16}^{(J)} = \frac{l_{18}^{(J)}}{l_{16}^{(J)}} = \frac{97325}{97548} = 0,9977.$$

Pastebėsime, kad tikimybė Onutei sulaukti abiturės egzaminų yra nežymiai didesnė nei Jonuko.

2 uždavinys. Kurios iš šių funkcijų yra išgyvenimo:

a) $s(x) = e^{(x-0,2^x-1)};$

b) $s(x) = \frac{1}{(1+x)^2};$

c) $s(x) = e^{-x^2};$

d) $s(x) = xe^{-x} + 1;$

e) $s(x) = \frac{1}{3}e^{-\frac{x}{100}} + \frac{2}{3}e^{-\frac{x}{50}}?$

f) $s(x) = \begin{cases} \sqrt{1-\frac{x}{100}}, & \text{jei } 0 \leq x \leq 100, \\ 0, & \text{jei } x \geq 100. \end{cases}$

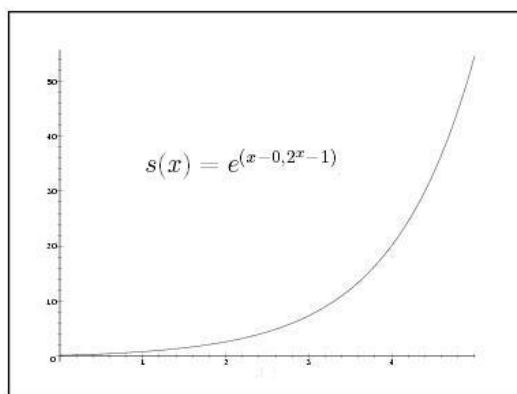
Sprendimas.

a) Tirsime funkciją

$$s(x) = e^{(x-0,2^x-1)}.$$

$$\begin{aligned}
 s'(x) &= \left(e^{(x-0,2^x-1)} \right)' = e^{(x-0,2^x-1)} \cdot (x-0,2^x-1)' \\
 &= e^{(x-0,2^x-1)} \cdot \left(1-0,2^x \ln 0,2 \right) \approx e^{(x-0,2^x-1)} \cdot \left(1+0,2^x \cdot 1,61 \right).
 \end{aligned}$$

Kadangi $e^{(x-0,2^x-1)} > 0$ bei $(1+0,2^x \cdot 1,61) > 0$, tai ir $s'(x) > 0$, todėl funkcija yra didėjanti $\Rightarrow$ netenkinama 1-oji išgyvenimo funkcijos savybė – taigi funkcija nėra išgyvenimo.



b) Tirsime funkciją

$$s(x) = \frac{1}{(1+x)^2}.$$

$$s'(x) = \left(\frac{1}{(1+x)^2} \right)' = \left((1+x)^{-2} \right)' = -2(1+x)^{-3} = -\frac{2}{(1+x)^3}.$$

Kadangi $s(x) < 0$ visiems $x \geq 0$, tai $s(x)$ yra mažėjanti.

Skaičiuosime funkcijos $s(x)$ reikšmę taške $x = 0$:

$$s(0) = \frac{1}{(1+0)^2} = 1.$$

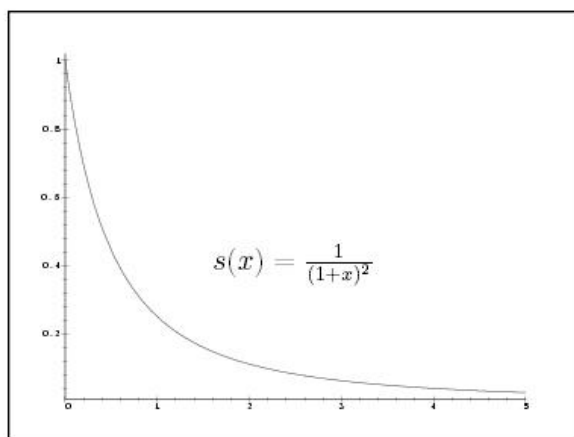
Tenkinama ir 2-oji išgyvenimo funkcijos savybė.

Patikrinsime, kam lygi funkcijos $s(x)$ riba, kai x artėja į begalybę:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} s(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Taigi funkcijai $s(x)$ galioja ir 3-ioji išgyvenimo funkcijos savybė.

Tikrinsime, ar duota funkcija $s(x)$ yra tolydi.



Iš grafiko aišku, kad

$$\lim_{x \rightarrow x_0} s(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x_0)^2} = s(x_0).$$

Taigi $s(x)$ yra tolydi – tenkinama 4-oji savybė.

Darome išvadą, kad funkcija $s(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ yra išgyvenimo funkcija, kadangi ji tenkina visas išvardintas išgyvenimo funkcijos savybes.

c) Nagrinėkime funkciją

$$s(x) = e^{-x^2}.$$

Skaičiuosime funkcijos išvestinę:

$$s'(x) = \left(e^{-x^2} \right)' = -2x \cdot e^{-x^2} < 0$$

Funkcija mažėjanti.

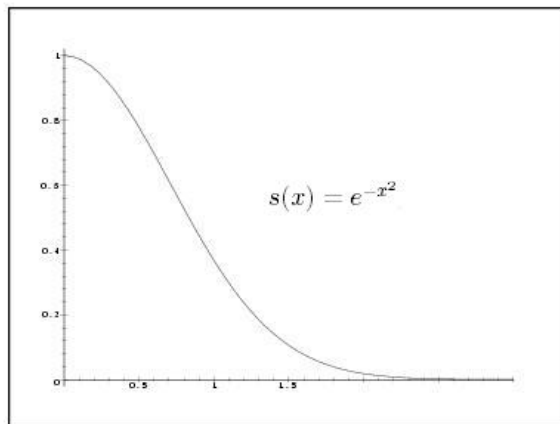
Skaičiuosime funkcijos reikšmę taške 0:

$$s(0) = e^{-0^2} = 1.$$

Patikrinsime, kam lygi funkcijos $s(x)$ riba, kai x artėja į begalybę:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} s(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{x^2}} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Tikrinsime, ar duota funkcija $s(x)$ yra tolydi.



Iš grafiko aišku, kad

$$\lim_{x \rightarrow x_0} s(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{-x^2} = e^{-x_0^2} = s(x_0).$$

Taigi $s(x)$ yra tolydi.

Funkcija $s(x)$ yra išgyvenimo funkcija.

d) Tirsime

$$s(x) = xe^{-x} + 1.$$

$$s'(x) = \left(xe^{-x} + 1 \right)' = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1 - x).$$

$$e^{-x}(1 - x) \leq 0 \Leftrightarrow (1 - x) \leq 0 \Leftrightarrow x \geq 1.$$

Skaičiuosime funkcijos reikšmę taške 0:

$$s(0) = 0 \cdot e^{-0} + 1 = 1.$$

Patikrinsime, kam lygi funkcijos $s(x)$ riba, kai x artėja į begalybę:

Kadangi $e^x > x^2$, kai $x > 10$, tai

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

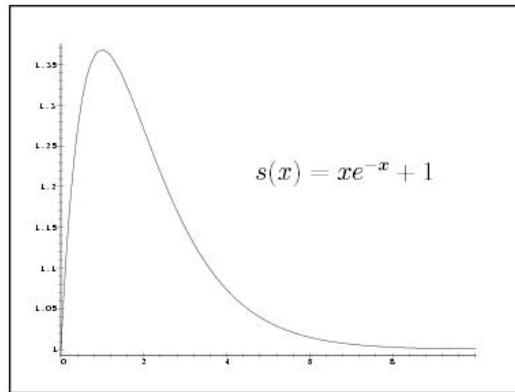
Vadinasi,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = 0.$$

Taigi

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (xe^{-x} + 1) = 0 + 1 = 1.$$

Kadangi ir 1-oji, ir 3-ioji išgyvenimo funkcijos savybės nėra tenkinamos, funkcija $s(x)$ nėra išgyvenimo funkcija.



e) Tirsime

$$s(x) = \frac{1}{3}e^{-\frac{x}{100}} + \frac{2}{3}e^{-\frac{x}{50}}.$$

Skaičiuosime funkcijos išvestinę:

$$s'(x) = \left(\frac{1}{3}e^{-\frac{x}{100}} + \frac{2}{3}e^{-\frac{x}{50}} \right)' = -\frac{1}{300}e^{-\frac{x}{100}} - \frac{2}{150}e^{-\frac{x}{50}} = -\left(\frac{1}{300}e^{-\frac{x}{100}} + \frac{1}{75}e^{-\frac{x}{50}} \right) < 0$$

Funkcija mažėjanti.

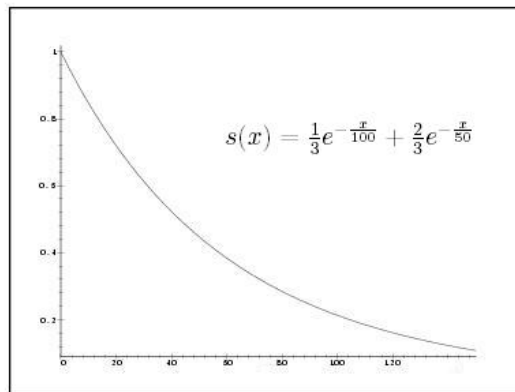
Skaičiuosime funkcijos reikšmę taške 0:

$$s(0) = \frac{1}{3}e^{-\frac{0}{100}} + \frac{2}{3}e^{-\frac{0}{50}} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1.$$

Patikrinsime, kam lygi funkcijos $s(x)$ riba, kai x artėja į begalybę:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} s(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{3}e^{-\frac{x}{100}} + \frac{2}{3}e^{-\frac{x}{50}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{e^\infty} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{e^\infty} = 0$$

Tikrinsime, ar duota funkcija $s(x)$ yra tolydi.



Iš grafiko aišku, kad

$$\lim_{x \rightarrow x_0} s(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{1}{3} e^{-\frac{x}{100}} + \frac{2}{3} e^{-\frac{x}{50}} \right) = \frac{1}{3} e^{-\frac{x_0}{100}} + \frac{2}{3} e^{-\frac{x_0}{50}} = s(x_0).$$

Taigi $s(x)$ yra tolydi.

Funkcija $s(x)$ yra išgyvenimo funkcija.

f) Tirsime funkciją:

$$s(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - \frac{x}{100}}, & \text{jei } 0 \leq x \leq 100, \\ 0, & \text{jei } x \geq 100. \end{cases}$$

Pažymėsime

$$s_1(x) = \sqrt{1 - \frac{x}{100}}, \quad \text{jei } 0 \leq x \leq 100, \quad \text{ir} \quad s_2(x) = 0, \quad \text{jei } x \geq 100.$$

Taigi

$$s'(x) = \begin{cases} s'_1(x), \\ s'_2(x). \end{cases}$$

(3) pavyzdyje įsitikinome, kad funkcija $s_1(x)$ yra mažėjanti, o funkcija $s_2(x)$ yra pastovi:

$$s'_2(x) = 0.$$

Taigi funkcija $s(x)$ yra nedidėjanti.

Skaičiuosime funkcijos reikšmę taške $x = 0$:

$$s(0) = \sqrt{1 - \frac{0}{100}} = 1.$$

Patikrinsime, kam lygi funkcijos $s(x)$ riba, kai x artėja į begalybę:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} s(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \infty} s_1(x) \\ \lim_{x \rightarrow \infty} s_2(x) \end{cases} = 0.$$

Tikrinsime, ar duota funkcija $s(x)$ yra tolydi.

Iš grafiko, pavaizduoto 3-iame pavyzdyje, aišku, kad

$$\lim_{x \rightarrow x_0} s(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{1 - \frac{x}{100}} = \sqrt{1 - \frac{x_0}{100}} = s(x_0).$$

3 uždavinys. Sakykime, chemijos mokytojų, kurių amžius nuo 30 iki 40 metų, mirtingumo galia apibrėžiama formule: $\mu_x = 0,002x$. Apskaičiuokite tikimybę, kad labai pikta chemijos mokytoja išgyvens dar penkis metus, bet mirs per sekančius.

Sprendimas. Mums reikia apskaičiuoti tikimybę ${}_{5|}q_{40}$:

$${}_{5|}q_{40} = \frac{s(x+t) - s(x+t+1)}{s(x)}$$

Kadangi $\mu_x = 0,002 \cdot x$, tai

$$\begin{aligned} s(x) &= \exp \left\{ - \int_0^x \mu_u du \right\} = \exp \left\{ - \int_0^x 0,002u, du \right\} = \exp \left\{ - \frac{0,002u^2}{2} \Big|_0^x \right\} \\ &= \exp \left\{ - 0,001u^2 \Big|_0^x \right\} = \exp \left\{ - 0,001x^2 \right\}, \end{aligned}$$

Atitinkamai

$$s(x+t+1) = \exp \left\{ - 0,001(x+t+1)^2 \right\},$$

$$s(x+t) = \exp \left\{ - 0,001(x+t)^2 \right\}.$$

Taigi

$$\begin{aligned} {}_{5|}q_{40} &= \frac{s(x+t)}{s(x)} - \frac{s(x+t+1)}{s(x)} \\ &= \exp \left\{ - 0,001(x+t)^2 \right\} - \exp \left\{ - 0,001x^2 \right\} \\ &\quad - \exp \left\{ - 0,001(x+t+1)^2 \right\} + \exp \left\{ - 0,001x^2 \right\} \\ &= e^{-0,001 \cdot 45^2} - e^{-0,001 \cdot 46^2} = e^{-2,025} - e^{-2,116} \\ &\approx 0,131 - 0,125 = 0,01. \end{aligned}$$

4 uždavinys. Tarkime, bendra Lietuvos matematikų olimpiados rengėjų išgyvenimo funkcija tokia: $s(x) = 1 - \frac{x}{90}$, $0 \leq x \leq 90$. Kokia tikimybė, kad 50-ies metų rengėjas Boleslovas, visą savo gyvenimą paskyręs matematikų olimpiadoms, išgyvens dar bent metus?

Sprendimas.

$$p_{50} = \frac{s(51)}{s(50)} = \frac{1 - \frac{51}{90}}{1 - \frac{50}{90}} = \frac{\frac{39}{90}}{\frac{40}{90}} = \frac{39}{40} = 0,975.$$

5 uždavinys. Tarkime, kad Dieveniškėse (Lietuvos apendicite), gyvena $l_0 = 1000$ gyventojų. Panaudodami mirtingumo lentelės fragmentą

Amžius	Išgyvenimo funkcija
45	0,8901
46	0,8826
47	0,8741
...	...
64	0,6766
65	0,6605

raskite, kiek vidutiniškai šio miestelio gyventojų mirs ne jaunesni kaip 45 metų ir nevyresni kaip 65 metų?

Sprendimas.

$$\begin{aligned} {}_{45}d_{65} &= l_{45} - l_{65} = l_0 \cdot s(45) - l_0 \cdot s(65) = l_0(s(45) - s(65)) \\ &= 1\,000(0,8901 - 0,6605) = 1\,000 \cdot 0,2296 = 229,6. \end{aligned}$$

Gavome, kad Dieveniškėse pagal duotą sąlygą vidutiniškai mirs 230 žmonių.

6 uždavinys. Brolio Salvijaus gyvenimo trukmės T_x tankis

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{40}e^{-\frac{x}{40}}, & 0 \leq x \leq +\infty \\ 0, & \text{kitur.} \end{cases}$$

Raskite brolio Salvijaus išgyvenimo funkciją $s(x)$ ir mirtingumo galią μ_x .

Sprendimas.

$$s(x) = \int_x^{+\infty} f(t) dt = \int_x^{+\infty} \frac{1}{40}e^{-\frac{t}{40}} dt = 40 \cdot \frac{1}{40}e^{-\frac{t}{40}} \Big|_x^{+\infty} = e^{-\frac{x}{40}}, \text{ kai } x \in (0; +\infty);$$

$$\mu_x = \frac{f(x)}{s(x)} = \frac{\frac{1}{40}e^{-\frac{x}{40}}}{e^{-\frac{x}{40}}} = \frac{1}{40}.$$

7 uždavinys. 16 metų Rugilė susižavėjo sveikos gyvensenos programa: grūdinausi, rytais sportuoja, sveikai maitinasi, neturi žalingų įpročių. Mergina svajoja pasiekti ilaamžiškumo rekordą. Remiantis 2003 metų statistikos duomenimis, vidutinė Lietuvos moterų gyvenimo trukmė yra 78 m. Kokia tikimybė, kad Rugilė išgyvens ilgiau?

Sprendimas. Tikimybė, kad Rugilės gyvenimo trukmė viršys vidutinį amžių, yra lygi

$$P(T \geq 78) = s(78) = \frac{l_{78}}{l_0} = \frac{52720}{100\,000} = 0,5272.$$

5. Paprasčiausios gyvybės draudimo rūšys

“Gyvybės draudimą galima palyginti su palto siuvimu: kiekvieno žmogaus kūno išmatavimai skirtingi ir paltas pasiuvamas pagal jį. Taip ir gyvybės draudimas – žmonių poreikiai skirtingi, todėl gyvybės draudimas gali būti modeliuojamas pagal kiekvieno individualius poreikius.”

<http://www.draudimas.lt>

Apibrėžimas. Gyvybės draudimas – tai tik viena iš draudimo šakų. Gyvybės draudimo šakai priskiriamos šios grupės (pagal Valstybinės draudimo priežiūros tarnybos prie LR finansų ministerijos klasifikaciją):

- 1) sutuoktuvinis ir gimimų draudimas;
- 2) gyvybės draudimas, kai investavimo rizika tenka draudėjui;
- 3) gyvybės draudimas (likę atvejai, kiek nenumatyta 1) ir 2) punktuose).

Paprasčiausias gyvybės draudimo rūšis kitaip galima vadinti ilgalaikio draudimo rūšimis. Matematinio požiūriu ilgalaikis draudimas pasižymi tuo, kad atliekant įvairius skaičiavimus atsižvelgiama į pinigų vertės pokyčius bėgant laikui.

Pažymime, kad norint palyginti draudėjo ir draudiko įsipareigojimus, būtina tuos įsipareigojimus atkelti į tą patį laiko momentą. Kitaip tariant, jei mes norime suformuluoti įsipareigojimų ekvivalentumo principą draudimo sutarties sudarymo momentu, privalome tiek draudėjo, tiek draudiko įsipareigojimus nagrinėti būtent šiuo – sutarties sudarymo momentu. Minėtų įsipareigojimų vidutinės reikšmės vadinsime aktuarinėmis dabartinėmis įsipareigojimų vertėmis.

Aktuariniuose uždaviniuose taip pat naudojamos yra palūkanos, kurios išreiškia tam tikrą pinigų sumą, kurią draudėjas privalo sumokėti už suteiktas paslaugas.

Naudojant sudėtines palūkanas, sukaupta suma S yra lygi:

$$S(t) = S_0(1 + i)^t.$$

Čia i – metinė palūkanų norma, t – kaupimo metų skaičius, o S_0 – pradinė suma (suma, kurią skolinamasi, arba kurią skoliname).

20 pavyzdys. Dvyliktokas Martynas Papartynas pasiskolino iš brolio Lauryno 1 000 litų su 0,02 metine palūkanų norma. Kiek Martynas bus skolingas Laurynui po 3 metų?

Sprendimas. Pagal duotą formulę:

$$S = 1\,000(1 + 0,02)^3 = 1\,000(1,02)^3 = 1\,000 \cdot 1,061208 = 1\,061,21 \text{ Lt}.$$

Norėdami apskaičiuoti dabartinę būsimos sumos vertę, turime tą sumą dauginti iš daugiklio. Šį daugiklį žymėsime raide ν ir vadinsime *diskonto daugikliu*³:

$$\nu = \frac{1}{1+i}.$$

21 pavyzdys. *Praeito pavyzdžio duomenimis apskaičiuosime dabartinę būsimos Martyno skolos Laurynui vertę.*

Sprendimas. Kadangi

$$\nu = \frac{1}{1+0,02} = \frac{1}{1,02} \approx 0,98,$$

tai

$$S_0 = S \cdot \nu^3 = 1\,061,21 \cdot 0,98^3 = 1\,000 \text{ Lt},$$

ko ir reikėjo tikėtis.

Jei broliai susitarė, kad Martynas po 3 metų gražins Laurynui lygiai 1 000 litų, tai Laurynas šiandien skolintų Martynui pinigų sumą, lygią

$$\tilde{S}_0 = \tilde{S} \cdot \nu^3 = 1\,000 \cdot 0,98^3 = 941,19 \text{ Lt}.$$

Aktuarinės matematikos teorijoje kartais naudojama ir *tolydžioji palūkanų norma*. Ją žymėsime ⁴ δ_t . Kartais tolydžioji palūkanų norma vadinama *procentų intensyvumu*.

Šis dydis lygus:

$$\delta_t = \frac{S'(t)}{S(t)},$$

kur $S(t)$ yra sukaupta suma.

Pastebėsime, kad

$$\delta_t = \frac{S'(t)}{S(t)} = (\ln S(t))'.$$

³ ν [niu] – tryliktoji graikų abėcėlės raidė.

⁴ δ [delta] – ketvirtoji graikų abėcėlės raidė.

Jeigu laikui bėgant procentų intensyvumas nekinta, tai

$$S(t) = S_0(1+i)^t.$$

Šiuo atveju:

$$\delta_t = \delta = \frac{S'(t)}{S(t)} = \frac{(S_0(1+i)^t)'}{S_0(1+i)^t} = \ln(1+i) \frac{S_0(1+i)^t}{S_0(1+i)^t} = \ln(1+i),$$

$$\delta = \ln(1+i).$$

Taigi ryšys tarp metinės palūkanų normos i ir tolydžiosios normos δ , esant pastoviam procentų intensyvumui, išreiškiamas formule:

$$i = e^\delta - 1.$$

Vadinasi, diskonto daugiklis šiuo atveju užrašomas paprasčiau:

$$\nu = e^{-\delta}.$$

Trumpai apžvelgėme mums reikalingas palūkanų teorijos dydžius. Grįžkime prie aktuarinės teorijos.

Raide Z su indeksu x , t.y. simboliu Z_x , žymėsime vienkartinę draudimo sumą, kurią draudimo kompanija privalo išmokėti draudėjui pagal draudimo sutarties sąlygas. Visais atvejais indeksas x reikš draudėjo amžių sutarties pasirašymo momentu. Kai draudimo suma bus išmokama mirties momentu, tai vienkartinę draudimo išmoką žymėsime $\bar{Z}_x$. Be brūkšnio bus žymima draudimo išmokos dabartinė vertė, kai išmoka mokama mirties metų gale.

Draudimo kompanijos įsipareigojimų vertės matematinė viltis vadinama aktuarine dabartine verte – *premija* – ir žymima raide A su atitinkamais indeksais panašiai kaip ir kintamasis Z .

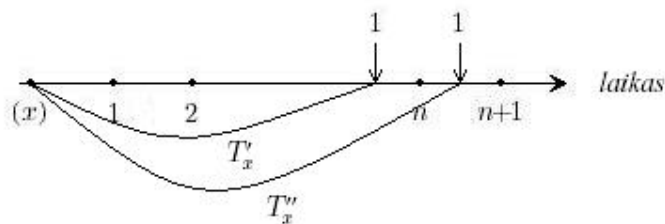
Sutarties galiojimo laikotarpis.

Pastebėsime, jei draudimo suma išmokama draudėjo mirties momentu, tai draudimo sutartis vadinama “nenutrūkstama” arba “tolydžia”. Jei draudimo suma išmokama draudėjo mirties metų gale, tai draudimo sutartis vadinama “diskrečia”.

5.1. Draudimas su išmoka iš karto po mirties

5.1.1. Viso gyvenimo gyvybės draudimas

Viso gyvenimo tolydaus gyvybės draudimo atveju draudimo suma išmokama draudėjo mirties momentu. Visiems mums žinoma, kad žmogus anksčiau ar vėliau mirs ir, jei jis nelaimingasis buvo apsidraudęs, tai draudimo kompanija besąlygiškai privalės išmokėti sumą, kuria mirtingasis buvo apsidraudęs (jei mirties aplinkybės neprieštaraus gyvybės draudimo sutarties sąlygoms). Jei įmoka už draudimą įnešama sudarant draudimo sutartį, tai logiška manyti, kad draudimo suma, kuri bus išmokėta draudėjo mirties momentu, bus gana didelė. Atsižvelgiant į tai, dažniausiai premijos mokamos periodiškai viso gyvenimo metu arba iki tam tikro draudėjo amžiaus (pavyzdžiui, iki pensijinio, kai jo pajamos ženkliai sumažėja). Norėdami supaprastinti skaičiavimus, nagrinėsime tik vienkartinės premijas, kurios mokamos sutarties pasirašymo metu.



Pirmajame grafike pavaizduoti viso gyvenimo tolydaus gyvybės draudimo piniginiai srautai.

Draudėjas apsidraudžia, būdamas x metų amžiaus. Kaip jau minėjome, T_x – yra jam likęs gyventi laikas. Šis dydis T_x priklauso tam tikram uždaram laiko intervalui, kurio pradžia yra draudėjo amžius sutarties sudarymo metu, o pabaiga – apsidraudusiojo mirties momentas. Draudėjui mirus, draudikas išmoka vienetinę draudimo sumą, kurią žymėsime 1. Kadangi draudikas investuoja visas gautas lėšas su palūkanų norma i , tai vienetinės sumos kaina dabartiniu laiko momentu viso gyvenimo tolydaus gyvybės draudimo atveju:

$$\bar{Z}_x = \nu^{T_x}. \quad (1)$$

Kiek draudėjas turi sumokėti už gyvybės draudimą dabar, kad, pasibaigus sutartyje numatytam laikotarpiui, jis gautų išmoką 1? Aišku, kad ν^{T_x} . Iš tiesų draudėjas turi sumokėti daugiau negu ν^{T_x} , nes draudikas už teikiamą paslaugą turi gauti ir atlygį. Bet apie tai kiek vėliau.

Dydis ν^{T_x} yra atsitiktinis dydis. O mus be abejo domina piniginė draudėjo išipareigojimų išraiška. Deja, tiksliai į šį klausimą atsakyti neįmanoma. Tačiau nesunkiai galime paskaičiuoti,

kiek vidutiniškai turi mokėti draudėjas už gyvybės draudimą. Tam tereikia surasti premiją, t.y. atsitiktinio dydžio $\bar{Z}_x$ matematinę viltį (vidurkį).

Viso gyvenimo tolydaus gyvybės draudimo atveju premija:

$$\bar{A}_x = \mathbb{E}\bar{Z}_x = \int_0^{\infty} \nu^t f_x(t) dt = \int_0^{\infty} \nu^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt, \quad (2)$$

nes

$$f_x(t) = \mu_{x+t} P(T_x > t) = \mu_{x+t} p_x.$$

Pastaba. Vienetinę draudimo sumą susitarėme žymėti 1. Tačiau tai nereiškia, kad mirties atveju gausime 1 Lt. Realiose skaičiavimuose draudimo suma yra pakankamai didelis skaičius, pavyzdžiui, 10 000, 100 000 ir t.t.

22 pavyzdys. Kai Andrius sulaukė 18 metų, rūpestingi Andriaus tėvai ir brolis, kuris mokosi Vilniaus universitete, kreipėsi į draudiką, norėdami apdrausti Andrių viso gyvenimo tolydžiu gyvybės draudimu. Jie nori, kad Andriaus mirties momentu jiems būtų išmokėta pinigų suma, lygi 1 000 000. Draudėjai (šiuo atveju tėvai ir brolis) planuoja sumokėti už šią paslaugą vienu mokėjimu. Draudiko nustatytas palūkanų intensyvumas lygus 0,06. Žinodami, kad Andriaus išgyvenimo funkcija:

$$s(x) = 1 - \frac{x}{100}, \quad 0 \leq x \leq 100,$$

apskaičiuokite kokio dydžio premiją turi sumokėti Andriaus artimieji už tokį draudimą.

Sprendimas. Nesunkiai pastebėsime, kad aštuoniolikmečiui Andriui iki 100 metų liko gyventi 82 metai.

Kadangi

$$f_x(t) = -\frac{s'(x+t)}{s(x)},$$

tai

$$s'(x+t) = \left(1 - \frac{x+t}{100}\right) = -\frac{1}{100}.$$

Todėl

$$f_{18}(t) = -\frac{s'(18+t)}{s(18)} = \frac{-\frac{1}{100}}{1 - \frac{18}{100}} = \frac{1}{82}.$$

Pritaikę (2) formulę, rasime milijono, kuris bus išmokėtas po Andriaus mirties, dabartinę vertę.

Ši suma bus lygi:

$$\begin{aligned}\bar{A}_{18} &= 1 \int_0^{82} \nu^t \frac{1}{82} dt = \frac{1}{82} \int_0^{82} e^{-\delta t} dt = \frac{1}{82} \left(-\frac{1}{\delta} \right) e^{-\delta t} \Big|_0^{82} \\ &= \frac{1}{82} \left(-\frac{1}{\delta} \right) (e^{-82\delta} - e^{-\delta \cdot 0}) = -\frac{e^{-82\delta} - 1}{82\delta} = \frac{1 - e^{-82\delta}}{82\delta}\end{aligned}$$

Taigi

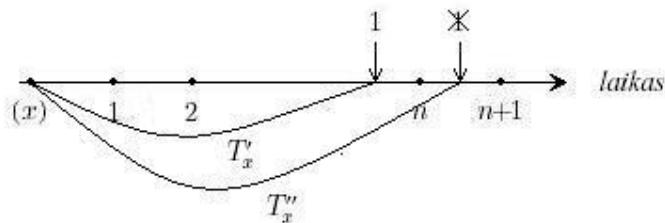
$$\bar{A}_{18} = \frac{1 - e^{-4,92}}{4,92} \approx \frac{1 - 0,008}{4,92} = 0,2.$$

Vadinasi premija, kurią turi sumokėti Andriaus artimieji, yra lygi

$$1\,000\,000 \cdot \bar{A}_{18} = 0,2 \cdot 1\,000\,000 = 200\,000.$$

5.1.2. Terminuotas n -metų gyvybės draudimas

Draudžiantis šia gyvybės draudimo rūšimi – analogiškai kaip ir viso gyvenimo gyvybės draudimo atveju – fiksuota draudimo suma 1 yra išmokama mirties momentu. Tačiau egzistuoja tam tikra sąlyga, kuri skiria šias dvi draudimo rūšis. Šiuo atveju svarbų vaidmenį atlieka draudimo terminas, t.y. draudimo sutarties galiojimo laikotarpis.



Šiame paveiksliuke pavaizduoti pinigų srautai terminuoto n -metų tolydaus gyvybės draudimo atveju.

Panagrinėkime situaciją detaliau. Tarkime, kad žmogus, turintis x metų pasirašo draudimo sutartį, kurioje nurodomas n -metų galiojimo terminas. Jei dėl kokių nors priežasčių jis miršta nepraėjus n -metų laikotarpiui, tai draudimo kompanija išmoka vienetinę vienkartinę draudimo sumą. Jei atsitinka taip, kad draudėjas sulaukia sutartyje numatytų n -metų, tai draudikas nemoka nieko.

Draudimo kompanijos būsimų įsipareigojimų dabartinė vertė terminuoto n -metų draudimo sutarties pasirašymo metu apskaičiuojama pagal formulę:

$$\bar{Z}_{x:\bar{n}}^1 = \begin{cases} \nu^{T_x}, & T_x \leq n; \\ 0, & T_x > n. \end{cases} \quad (3)$$

Kadangi premija lygi atsitiktinio dydžio $\bar{Z}_{x:\bar{n}}^1$ vidurkiui, tai vidutiniškai draudėjas už aprašytą draudimą turi sumokėti.

$$\bar{A}_{x:\bar{n}}^1 = \mathbb{E}\bar{Z}_{x:\bar{n}}^1 = \int_0^n \nu^t f_x(t) dt = \int_0^n \nu^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt. \quad (4)$$

Paprastai draudėjo mirties tikimybė sutarties galiojimo laikotarpiui yra labai maža, todėl ir premija terminuoto gyvybės draudimo atveju atitinkamai nėra didelė. Taigi terminuotas draudimas dažniausiai naudojamas tose situacijose, kai nelaimės atveju būtina atlyginti didelę sumą.

23 pavyzdys. Tarkime, 50-etis gaisrininkas Petras sudaro 5 metų terminuotą sutartį sumai, lygiai 25 000 Lt. Sakykime, gaisrininko gyvenimą valdo pastovi mirtingumo galia, apibrėžiama $\mu = 0,01$. Draudimo išmoka bus išmokama iš karto po draudėjo mirties. Palūkanų intensyvumas $\delta = 0,04$. Rasime vienkartinę premiją, kurią, atsižvelgiant į sutarties sąlygas, privalo sumokėti Petras.

Sprendimas. Remiantis (4) formule ir žinodami, kad šiame pavyzdyje draudimo suma nėra vienetinė, o lygi 25000 Lt, gauname

$$25\,000 \cdot \bar{A}_{50:\bar{5}}^1 = 25\,000 \int_0^5 \nu^t {}_t p_{50} dt.$$

(3) skyriuje išvestą lygybę ${}_t p_x = \exp\left\{-\int_x^{x+t} \mu(u) du\right\}$ pritaikę mūsų atvejui, gausime:

$$\begin{aligned} {}_t p_{50} &= \exp\left\{-\int_{50}^{50+t} \mu du\right\} = \exp\left\{-0,01 \int_{50}^{50+t} du\right\} = \exp\left\{-0,01 u \Big|_{50}^{50+t}\right\} \\ &= \exp\{-0,01(50+t-50)\} = \exp\{-0,01t\}. \end{aligned}$$

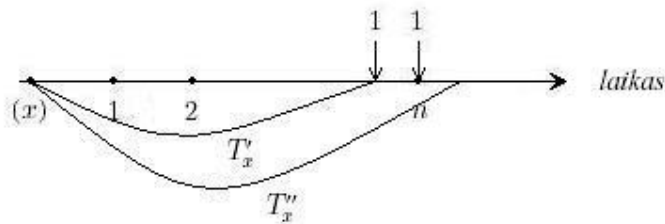
Todėl

$$\begin{aligned}
 25\,000 \cdot \bar{A}_{50:\overline{5}|}^1 &= 25\,000 \int_0^5 0,01\nu^t e^{-0,01t} dt = 250 \int_0^5 e^{-\delta t} e^{-0,01t} dt = 250 \int_0^5 e^{-(\delta+0,01)t} dt \\
 &= 250 \int_0^5 e^{-(0,04+0,01)t} dt = -\frac{250}{0,05} e^{-0,05t} \Big|_0^5 = -5000 \left(e^{-0,05 \cdot 5} - e^{-0,05 \cdot 0} \right) \\
 &= -5000 \left(e^{-0,25} - 1 \right) = -5000(0,78 - 1) = -5000 \cdot (-0,22) = 1\,100.
 \end{aligned}$$

Taigi Petrui reikės sumokėti 1 100 litų.

5.1.3. Kaupiamasis n -metų gyvybės draudimas

Ši tolydaus draudimo rūšis atlieka dvi funkcijas – draudimo ir kaupimo. Pirma vienietinė draudimo išmoka išmokama iš karto po draudėjo mirties, jei mirtis jį užklumpa per artimiausius n metų. Antra vertus, jei draudėjas išgyveno ilgiau nei n metų, draudikas $n + 1$ metų pradžioje išmoka vienietinę sumą.



Šiame paveiksliuke pažymėti piniginiai srautai vaizduoja kaupiamojo n -metų tolydaus gyvybės draudimo situaciją. Jei draudėjas miršta per draudimo sutartyje numatytą galiojimo laikotarpį, tai draudikas jam išmoką vienietinę draudimo sumą 1 išmokama iš karto po draudėjo mirties. Jei atsitinka taip, kad draudėjas išgyvena ilgiau, nei numatyta sutartyje, tai draudimo suma išmokama momentu n , t.y. $n + 1$ metų pradžioje.

Vienetinės draudimo sumos dabartinė vertė sutarties pasirašymo momentu išreiškiama formule:

$$\bar{Z}_{x:\overline{n}|} = \begin{cases} \nu^{T_x}, & T_x \leq n; \\ \nu^n, & T_x > n. \end{cases} \quad (5)$$

Atsižvelgus į draudėjo ir draudiko išipareigojimų ekvivalentumo principą, premija aprašyto draudimo atveju yra lygi:

$$\bar{A}_{x:\bar{n}} = \mathbb{E}\bar{Z}_{x:\bar{n}} = \int_0^n \nu^t f_x(t) dt + \nu^n {}_n p_x = \int_0^n \nu^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt + \nu^n {}_n p_x. \quad (6)$$

24 pavyzdys. Į draudimo kompaniją “Pilnatis” kreipiasi 22 metų vaikiną, vardu Kostas. Kostas nori likusiems trims studijų metams apsidrausti kaupiamuoju draudimu. Mirties atveju – iškart po Kosto mirties – jo sesuo Gabija gautų 50 000 Lt. “Pilnatis” siūlo 0,04 metinę palūkanų normą. Laikydami, kad Kosto mirtingumo galia, lygi 0,04, nekis per artimiausius tris metus, apskaičiuokite vienkartinę premiją, kurią Kostas privalo mokėti.

Sprendimas. Naudodamiesi (6) formule ir knygelės priede pateikta mirtingumo lentele, turime:

$$\begin{aligned} 50\,000 \cdot \bar{A}_{22:\bar{3}} &= 50\,000 \left(\int_0^3 0,04 \nu^t {}_t p_{22} dt + \nu^{22} {}_{22} p_{22} \right) \\ &= 50\,000 \left(0,04 \int_0^3 e^{-\delta t} {}_t p_{22} dt + \left(\frac{1}{1+0,04} \right)^{22} \frac{l_{25}}{l_{22}} \right) \\ &= 2000 \int_0^3 e^{-\delta t} {}_t p_{22} dt + 50\,000 \left(\frac{1}{1,04} \right)^{22} \frac{95591}{96383} \\ &\approx 2000 \int_0^3 e^{-\delta t} {}_t p_{22} dt + 20\,924,4. \end{aligned}$$

Analogiškai, kaip (23) pavyzdyje galime gauti, kad

$${}_t p_{22} = e^{-0,03t}.$$

Galutiniam rezultatui suskaičiuoti trūksta tik palūkanų intensyvumo, kurį nesunkiai rasime iš šių lygybių:

$$\nu = \frac{1}{1+i} = e^{-\delta} \quad \text{ir} \quad \ln \left(\frac{1}{1+i} \right) = \ln e^{-\delta} = -\delta.$$

Taigi

$$\delta = -\ln\left(\frac{1}{1+0,04}\right) = -\ln\left(\frac{1}{1,04}\right) \approx -\ln 0,96 \approx 0,0408.$$

Turėdami visų reikalingų dydžių skaitines išraiškas, galime apskaičiuoti vienkartinės premijos reikšmę:

$$\begin{aligned} 50\,000 \cdot \bar{A}_{22:\overline{3}|} &= 2000 \int_0^3 e^{-(0,0408+0,03)t} dt + 20\,924,4 = 2000 \int_0^3 e^{-(0,0708)t} dt + 20\,924,4 \\ &= -\frac{2000}{0,0708} e^{-(0,0708)t} \Bigg|_0^3 + 20\,924,4 \approx -28248,58 \left(e^{-0,2124} - 1 \right) + 20\,924,4 \\ &= -28248,58 \left(-0,1914 \right) + 20\,924,4 = 5405,62 + 20\,924,4 \approx 26330,02 Lt. \end{aligned}$$

5.1.4. Pakartokime

- Koks yra pagrindinis aktuarinės matematikos principas?
- Ką bendruoju atveju reiškia simbolis, žymimas raide Z ?
- Kaip suprantate vienkartinės premijos apibrėžimą?
- Kuo skiriasi terminuoto n -metų ir kaupiamojo n -metų draudimo sutartys?

5.1.5. Uždaviniai

8 uždavinys. 30 metų matematikos mokytoja Zita apdraudė savo gyvybę 10 000 litų sumai. Išmoka bus išmokama iškart po mokytojos mirties. Mokytojos Zitos gyvenimo trukmę valdo mirties kreivė:

$$f(x) = \frac{1}{100}, \quad 0 < x < 100.$$

Už paslaugą mokytoja sumokėjo 2 500 Lt. Gautas lėšas draudimo kompanija investuoja su 0,06 metine palūkanų norma. Koks yra vidutinis draudiko pelnas sutarties sudarymo metu.

Sprendimas. Pastebėsime, kad mokytojai likęs gyventi laikas yra pasiskirstęs intervale $(0; 70)$. Taigi draudimo sumos vertė sutarties sudarymo momentu yra lygi:

$$\bar{Z}_{30} = \nu^{T_{30}}.$$

Iš čia gauname, kad draudiko pelnas pradiniu laiko momentu yra lygus skirtumui:

$$2\,500 - 10\,000 \cdot \bar{Z}_{30},$$

o vidutinis draudiko pelnas apskaičiuojamas taip:

$$2\,500 - 10\,000 \cdot \mathbb{E}\bar{Z}_{30} = 2\,500 - 10\,000 \cdot \bar{A}_{30}.$$

Apskaičiuosime vienkartinės premijos dydį.

Kadangi

$$f_{30}(t) = \frac{f(30+t)}{s(30)} = \frac{f(30)}{\int_{30}^{100} f(x)dx} = \frac{\frac{1}{100}}{\int_{30}^{100} \frac{1}{100}dx} = \frac{\frac{1}{100}}{\frac{x}{100}\Big|_{30}^{100}} = \frac{\frac{1}{100}}{\frac{100}{100} - \frac{30}{100}} = \frac{\frac{1}{100}}{\frac{70}{100}} = \frac{1}{70},$$

tai

$$\begin{aligned} 10\,000 \cdot \bar{A}_{30} &= 10\,000 \cdot \mathbb{E}\bar{Z}_{30} = 10\,000 \int_0^{+\infty} \nu^t f_x(t) dt = 10\,000 \int_0^{70} e^{-\delta t} \frac{1}{70} dt \\ &= \frac{10\,000}{70} \int_0^{70} e^{-\delta t} dt = -\frac{10\,000}{70} e^{-\delta t} \Big|_0^{70} = -\frac{10\,000}{70\delta} (e^{-70\delta} - 1) = 10\,000 \frac{1 - e^{-70\delta}}{70\delta}. \end{aligned}$$

Prisiminę, kad $\delta = \ln(1+i)$, gauname, kad $\delta = \ln 1,06 = 0,058$.

Tada

$$\begin{aligned} 10\,000 \cdot \bar{A}_{30} &= 10\,000 \frac{1 - e^{-7 \cdot 0,058}}{70 \cdot 0,058} = 10\,000 \frac{1 - e^{-4,06}}{4,06} \\ &= 10\,000 \frac{1 - e^{0,195}}{4,06} = 10\,000 \frac{0,805}{4,06} = 1\,982,76. \end{aligned}$$

Vadinasi, vidutinis pelnas sutarties sudarymo momentu:

$$2\,500 - 10\,000 \cdot \bar{A}_{30} = 2\,500 - 1\,982,76 = 517,24 \text{ Lt.}$$

9 uždavinys. Į draudimo bendrovę “Ramuma” kreipiasi studentų pora – dvidešimtmetė Laumė ir dvidešimt vienerių metų Viesulas. Jaunuoliai planuoja dvejiems metams išvažiuoti į užsienį, tad nori apsidrausti dviejų metų kaupiamuoju gyvybės draudimu. Kiekvienas jų draudžiasi 50 000 EUR sumai, kurią mirties atveju turėtų gauti iš karto. Viesulo išgyvenimo funkciją žymėkime $s_V(x)$, o Laumės – $s_L(x)$, kur:

$$s_V(x) = 1 - \frac{x}{90}, \quad 0 \leq x \leq 90,$$

$$s_L(x) = 1 - \frac{x}{100}, \quad 0 \leq x \leq 100.$$

Kurio ir kiek sumokėta premija yra didesnė, jei “Ramuma” investuoja gautas lėšas su 0,05 metine palūkanų norma?

Sprendimas. T_{21}^V – žymėsime Viesulai likusį gyventi laiką, o T_{20}^L – Laumei likusį gyventi laiką.

Tada

$$\begin{aligned} f_x^V(t) &= -\frac{s'_V(x+t)}{s(x)} = -\frac{s'_V(21+t)}{s(21)} \\ s'_V(x) &= \left(1 - \frac{x}{90}\right)' = -\frac{1}{90} \Rightarrow s'_V(x+t) = -\frac{1}{90}. \end{aligned}$$

Todėl

$$f_x^V(t) = \frac{\frac{1}{90}}{1 - \frac{21}{90}} = \frac{\frac{1}{90}}{\frac{69}{90}} = \frac{1}{69}.$$

Analogiškai

$$f_x^L(u) = -\frac{s'_L(x+u)}{s(x)} = -\frac{s'_L(20+u)}{s(20)} = \frac{\frac{1}{100}}{1 - \frac{20}{100}} = \frac{\frac{1}{100}}{\frac{80}{100}} = \frac{1}{80}.$$

Remiantis (4) formule:

$$\bar{A}_{21:2}^{1(V)} = \int_0^2 \nu^t \left(\frac{1}{69}\right) dt + \nu^2 {}_2p_{21}.$$

Naudodamiesi mirtingumo lentele, rasime tikimybę 21-erių metų Viesului išgyventi dar du metus:

$${}_2p_{21} = \frac{l_{23}}{l_{21}} = \frac{0,96113}{0,96670} = 0,994.$$

Šią tikimybę įstatę į aukščiau pateiktą formulę, gausime:

$$\bar{A}_{21:\overline{2}}^{1(V)} = \frac{1}{69} \int_0^2 e^{\delta t} dt + \left(\frac{1}{1,05} \right)^2 \cdot 0,994.$$

Palūkanų intensyvumas lengvai apskaičiuojamas naudojant lygybę:

$$\delta = \ln(1 + i) = \ln 1,05 = 0,04879.$$

Taigi Viesulo premijos dydis bus:

$$\begin{aligned} 50\,000 \cdot \bar{A}_{21:\overline{2}}^{1(V)} &= 50\,000 \left(\frac{1}{69} \int_0^2 \exp\{-0,04879t\} dt + 0,901587 \right) \\ &= 50\,000 \left(-\frac{1}{0,04879 \cdot 69} (\exp\{-0,09758\} - 1) + 0,901587 \right) \\ &= 50\,000 \cdot 0,929203 = 46\,460,16. \end{aligned}$$

Atlikę analogiškus skaičiavimus Viesulo draugės atveju, gausime

$$\begin{aligned} 50\,000 \cdot \bar{A}_{20:\overline{2}}^{1(L)} &= 50\,000 \left(\frac{1}{80} \int_0^2 \exp\{-0,04879u\} du + \nu^2 \frac{l_{22}}{l_{20}} \right) \\ &= 50\,000 \left(-\frac{1}{0,04879 \cdot 80} (\exp\{-0,09758\} - 1) + \left(\frac{1}{1,05} \right)^2 \cdot 0,9988 \right) \\ &= 50\,000 \cdot 0,92976 = 46\,487,99. \end{aligned}$$

Sulyginę gautas vienkartinės premijas, gavome, kad merginos įmoka bus 27,83 EUR didesnė negu vaikinio.

10 uždavinys. Draudimo kompanija “Taupukas” draudžia klientus taikydama techninę palūkanų normą $i = 0,15$. Kuri iš trijų nagrinėtų gyvybės tolydaus gyvybės draudimo rūšių: viso gyvenimo, 5-metų terminuoto ar 5-metų kaupiamojo – bus pigiausias Andriaus tėčiui, kuriam yra 40 metų, kai jo išgyvenimo funkcija apibrėžiama taip:

$$s(x) = 1 - \frac{x}{120}, \quad 0 \leq x \leq 120?$$

Sprendimas. Aišku, kad:

$$f_{40}(t) = -\frac{s'(40+t)}{s(40)} = -\frac{-\frac{1}{120}}{1 - \frac{40}{120}} = \frac{1}{120 - 40} = \frac{1}{80}, \quad 0 \leq t \leq 80$$

Todėl (žr. (2) formulę)

$$\begin{aligned} \bar{A}_{40} &= \int_0^{80} \nu^t f_{40}(t) dt = \int_0^{80} \nu^t \frac{1}{80} dt = \frac{1}{80} \int_0^{80} \nu^t dt = \frac{1}{80} \int_0^{80} e^{-\delta t} dt \\ &= \frac{1}{80} \left(-\frac{1}{\delta} \right) e^{-\delta t} \Big|_0^{80} = -\frac{1}{80\delta} (e^{-80\delta} - e^0) = \frac{1 - e^{-80\delta}}{80\delta}. \end{aligned}$$

Be to,

$$\delta = \ln(1+i) = \ln(1+0,15) = \ln 1,15 \approx 0,1398.$$

Vadinasi,

$$\bar{A}_{40} = \frac{1 - e^{-80 \cdot 0,1398}}{80 \cdot 0,1398} = \frac{1 - e^{-11,184}}{11,184} = 0,0894.$$

Analogiškai iš (4) ir (6) formulių, gausime:

$$\bar{A}_{40:5}^1 = \int_0^5 \nu^t f_{40}(t) dt = \int_0^5 \nu^t \frac{1}{80} dt = \frac{1 - e^{-5\delta}}{80\delta} = \frac{1 - e^{-5 \cdot 0,1398}}{80 \cdot 0,1398} = 0,0449.$$

$$\begin{aligned} \bar{A}_{40:5} &= \int_0^5 \nu^t f_{40}(t) dt + \nu^5 {}_5p_{40} = \int_0^5 \nu^t \frac{1}{80} dt + \nu^5 {}_5p_{40} \\ &= \frac{1 - e^{-5\delta}}{80\delta} + e^{-5\delta} \frac{l_{45}}{l_{40}} = 0,0449 + 0,4971 \cdot \frac{83861}{88457} \\ &= 0,0449 + 0,4713 = 0,5162. \end{aligned}$$

Nesunku pastebėti, kad Andriaus tėčiui brangiausias bus kaupiamasis gyvybės draudimas, o pigiausias – terminuotas.

5.2. Draudimas su išmoka mirties metų gale

Praeituose skyreliuose apžvelgėme draudimo sutarčių pavyzdžius, kuriuose draudimo suma išmokama iškart po apdraustojo mirties. Suprantama, kad realiame gyvenime tam tikras laikotarpis skiriamas reikiamų dokumentų paruošimui. Tokios draudimo rūšys dažnai vadinamos “tolydžiomis”. Tačiau kartais draudimo suma išmokama kitais laiko momentais. Paprasčiausias atvejis gaunamas, kai išmoka mokama ne mirties momentu, o draudėjo mirties metų pabaigoje. Tokios draudimo rūšys vadinamos “diskrečiomis”. Jeigu laikysime, kad apdraustojo amžius sutarties pasirašymo metu yra sveikas skaičius (įprastai tokia prielaida taikoma aktuariniuose skaičiavimuose), tai diskretaus draudimo sutartis galima apibūdinti kaip sutartį, kurių draudimo suma išmokama sekančios sutarties pasirašymo momentu. Kiekvienai iš praeitame (5.1.) skyriuje nagrinėtų tolydžių draudimo rūšių galime surasti diskretų analogą.

5.2.1. Viso gyvenimo gyvybės draudimas

Pagrindinis skirtumas tarp tolydaus ir diskretaus viso gyvenimo gyvybės draudimo sutarties yra tas, kad diskretaus draudimo atveju sutarties galiojimo laikotarpis nėra nenutrūkstamas laiko intervalas, o sveikų skaičių aibė. Šio teiginio iliustravimui paimkime pavyzdį: tarkime, Linui – 22 metai ir jis draudžiasi tolydžiu viso gyvenimo draudimu. Jo bendraamžis Tomas renkasi diskretų viso gyvenimo draudimą. Lino sutarties galiojimo laikotarpį valdo intervalas $[22; +\infty]$, Tomo – atskirų, vienas po kito einančių sveikųjų skaičių seka, kurių visuma sudaro aibę $\{22; 23; 24; \dots\}$.

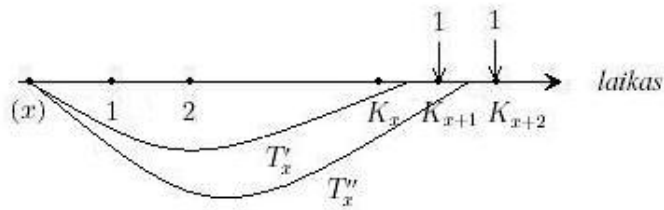
Pažymėkime:

$$K_x = [T_x].$$

Aišku, kad K_x – draudėjui likusio gyventi laiko T_x sveikoji dalis. Jei draudėjui likęs gyventi laikas lygus 15 metų ir 3 mėn., tai $K_x = [T_x] = [15 \text{ m. } 3 \text{ mėn.}] = 15 \text{ m.}$

Jei liko gyventi 20 metų ir 7 mėnesiai, tai K_x bus lygus 20 metų.

Individas, turintis x metų pasirašo sutartį, kurios galiojimo laikotarpis yra neterminuotas, t.y. sutartis neturi konkrečios galiojimo datos pabaigos. Jei apdraustasis miršta n -ųjų metų bėgyje, tai draudiko kompanija išmoka sutartą piniginę sumą n -ųjų metų pabaigoje. Kaip pavyzdį galime panagrinėti tokią situaciją: jauna alytiškė, pasirašiusi viso gyvenimo gyvybės draudimo sutartį 2004 m. spalio 10 d., miršta po pusantrų metų nuo sutarties sudarymo, būdama 20-ies metų ir 3 mėnesių – 2006 m. kovo 31 d. Šiuo atveju sutarta suma merginos artimiesiems bus išmokėta 2006 m. spalio pradžioje.



Paveiksliuke pavaizduoti piniginiai srautai esant diskretaus viso gyvenimo gyvybės draudimo sąlygoms.

Būsimos išmokos dabartinė vertė viso gyvenimo diskretaus gyvybės draudimo atveju lygi:

$$Z_x = \nu^{K_x}. \quad (7)$$

Čia kaip ir anksčiau $\nu = \frac{1}{1+i}$, o i yra metinė palūkanų norma.

Atsižvelgdami į draudiko ir draudėjo įsipareigojimų ekvivalentumo principą, atsitiktinio dydžio Z_x vidurkį vadinsime *premija* (kaip ir tolydaus gyvybės draudimo atveju, kai išmoka išmokama mirties momentu).

Viso gyvenimo diskretaus gyvybės draudimo atveju premija lygi:

$$A_x = \mathbb{E}Z_x = \mathbb{E}\nu^{K_x} = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^{k+1} P(K_x = k). \quad (8)$$

Kadangi

$$P(K_x = k) = P(k \leq K_x \leq k+1) = P(k \leq T_x \leq k+1),$$

tai pagal ${}_k|q_x$ apibrėžimą:

$$P(K_x = k) = {}_k|q_x$$

arba

$$P(K_x = k) = {}_k p_x q_{x+k}.$$

Vadinasi,

$$A_x = \mathbb{E}Z_x = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^{k+1} {}_k p_x q_{x+k}. \quad (9)$$

25 pavyzdys. Dešimtoko močiutė, būdama garbaus 65 metų amžiaus, pasirašo viso gyvenimo gyvybės draudimo sutartį. Mirties atveju anūkui bus išmokėta suma, lygi 1 234 567 Lt, senolės mirties metų pabaigoje. Kaimo draudimo bendrovė investuoja gautas lėšas su 0,065 metine palūkanų norma. Kiek vidutiniškai šiandien kainuoja draudimas močiutei?

Sprendimas. Remiantis (9) premijos apskaičiavimo formule,

$$A_{65} = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^{k+1} {}_k p_{65} q_{65+k}.$$

Žinodami, kad ilgiausiai išgyvenusi lietuvė mirė būdama 115 metų, laikysime, kad tikimybė, jog senolė išgyvens ilgiau nei 115 metų yra lygi nuliui.

Vadinasi,

$$\begin{aligned} A_{65} &= \sum_{k=0}^{50} \nu^{k+1} {}_k p_{65} q_{65+k} \\ &= \nu q_{65} + \nu^2 {}_1 p_{65} q_{66} + \nu^3 {}_2 p_{65} q_{67} + \nu^4 {}_3 p_{65} q_{68} + \dots \\ &\quad + \nu^{35} {}_{34} p_{65} q_{99} + \nu^{36} {}_{35} p_{65} q_{115}. \end{aligned}$$

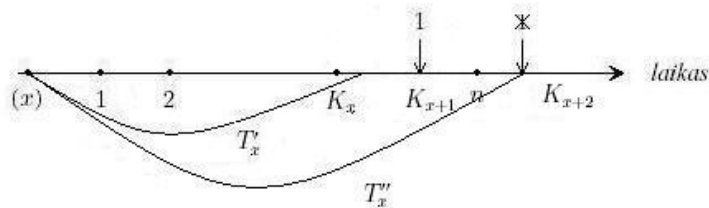
“Belieka” į gautą formulę įstatyti ${}_k p_{65}$ ir q_k reikšmes, kai $k = 0, 1, \dots, 50$.

5.2.2. Terminuotas n -metų gyvybės draudimas

Terminuoto n -metų gyvybės draudimo schemoje pagrindinis vaidmuo suteikiamas sutarties galiojimo terminui. Būtent nuo šio iš anksto apibrėžto fiksuoto skaičiaus priklauso, ar pavyks iš draudimo gauti numatytą draudimo sumą nelaimės atveju.

Draudimo išmokos dydis nustatomas atvirkščiai proporcingai sutarties galiojimo laikotarpiui, t.y. ilgėjant draudimo terminui draudimo suma mažėja. Tarkime, kad į draudimo kompaniją kreipiasi asmuo (pavadinkime jį Tomu), kuriam dabar 35-eri. Jei Tomas norėtų apsidrausti dviejų metų terminui, kompanija jį draustų 10 000 litų sumai. Jei Tomas sumanytų draustis ilgesniam laikotarpiui, pavyzdžiui, dvidešimčiai metų, draudimo kompanija jam pasiūlytų draustis žymiai mažesne suma. Juk žmogui mirti per 20 metų yra labiau tikėtina nei per 2 metus.

Taip draudimo kompanijos, reguliuodamos pinigines sumas, apsaugo nuo rizikos.



Paveiksliuke pavaizduoti pinigų srautai, atsirandantys terminuoto n -metų diskretaus gyvybės draudimo sąlygomis.

Jei draudėjas miršta per pirmuosius n -metų nuo sutarties sudarymo, tai draudikas išmoka vienetinę sumą jo mirties metų gale. Jei atsitinka taip, kad apdraustojų gyvenimo siūlas nenu-trūksta ties lemtingaisiais n -aisiais metais, tai iš draudimo kompanijos jis negauna nieko, net jei už draudimą sumokėjo stambiai įmoką.

Būsimų draudiko įsipareigojimų dabartinė vertė šiuo atveju lygi:

$$Z_{x:\bar{n}}^1 = \begin{cases} \nu^{K_x}, & K_x < n; \\ 0, & K_x \geq n. \end{cases} \quad (10)$$

Kadangi premija lygi atsitiktinio dydžio $Z_{x:\bar{n}}^1$ vidurkiui, tai nagrinėjamu atveju premija:

$$A_{x:\bar{n}}^1 = \mathbb{E}Z_{x:\bar{n}}^1 = \sum_{k=0}^{n-1} \nu^{k+1} P(K_x = k) = \sum_{k=0}^{n-1} \nu^{k+1} {}_k p_x q_{x+k}. \quad (11)$$

26 pavyzdys. Tarkime, keturių asmenų šeima nusprendė nusipirkti prabangų BMW markės automobilį, kainuojantį 150 000 EUR. 35 metų tėtis pasiėmė iš banko paskolą, kurią privalės išmokėti per 3 metus. Jis draudžiasi savo gyvybę terminuotu gyvybės draudimu su išmoka mirties metų pabaigoje. Nelaimės atveju draudikas bankui padengs visą naujo pirkinio sumą. Kiek šiandien privalo sumokėti draudikui tėtis, kad draudimo sąlygos įsigaliotų, esant 0,04 metinei palūkanų normai?

Sprendimas. Šiame pavyzdyje $i = 0,04$, $x = 35$, $n = 3$.

Remiantis (11) formule ir mirtingumo lentele, gausime:

$$\begin{aligned} A_{35:\bar{3}}^1 &= \sum_{k=0}^2 \nu^{k+1} {}_k p_{35} q_{35+k} = \nu q_{35} + \nu^2 p_{35} q_{36} + \nu^3 {}_2 p_{35} q_{37} \\ &= \frac{1}{1 + 0,04} \frac{l_{35} - l_{36}}{l_{35}} + \left(\frac{1}{1 + 0,04} \right)^2 \frac{l_{36}}{l_{35}} \cdot \frac{l_{36} - l_{37}}{l_{36}} \\ &\quad + \left(\frac{1}{1 + 0,04} \right)^3 \frac{l_{37}}{l_{35}} \cdot \frac{l_{37} - l_{38}}{l_{37}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 0,9615 \cdot \frac{91774 - 91186}{91774} + 0,9246 \cdot \frac{91186}{91774} \cdot \frac{91186 - 90570}{91186} \\
&+ 0,8890 \cdot \frac{90570}{91774} \cdot \frac{90570 - 89924}{90570} \\
&\approx 0,0061 + 0,0062 + 0,0063 = 0,0186 \approx 0,02.
\end{aligned}$$

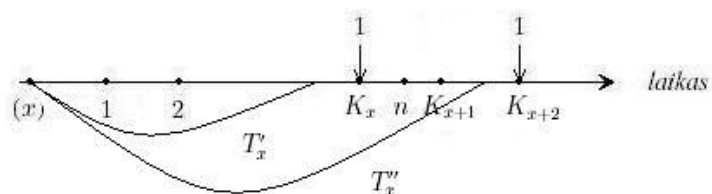
Taigi suma, kurią tėtis turės sumokėti už gyvybės draudimą, lygi:

$$150\,000 \cdot 0,02 = 3000 \text{ EUR}.$$

Jei tėtis pirtų nebrangų “VW Golf”, tai draudimo kaina gerokai nukristų. Jei ši mašina kainuoja 5 000 EUR, tai jos savininko gyvybės draudimas kainuotų tik 100 EUR.

5.2.3. Kaupiamasis n -metų gyvybės draudimas

Pasirašydamas kaupiamąjį n -metų gyvybės draudimo sutartį, draudėjas siekia sau dvigubos naudos. Iš vienos pusės, tokia gyvybės draudimo rūšis atlieka draudimo funkciją – užtikrina fiksuotas pajamas draudėjo šeimai jo mirties atveju. Iš kitos pusės, tokia draudimo rūšimi atliekama kaupimo funkcija, kuri užtikrina iš anksto numatytas pajamas pačiam apdraustajam. Kartais kaupiamąjo n -metų gyvybės draudimo sąlygomis draudimo suma, išmokama draudėjo mirties atveju, ir draudimo suma, išmokama draudėjui išgyvenus n -metų, skiriasi.



Paveiksluke pavaizduoti piniginiai srautai kaupiamąjo n -metų diskretaus gyvybės draudimo sąlygomis.

Draudimo sumos išmokėjimo procedūra tokia: suma 1 išmokama, jei apdraustasis miršta nepaėjęs sutartyje numatytam n -metų laikotarpiui. Išmoka mokama draudėjo nurodytam gavėjui mirties metų pabaigoje. Jei nuo gyvybės draudimo sutarties pasirašymo momento praeina daugiau nei n -metų, o apdraustasis dar gyvena, tai sukaupta suma jam bus išmokėta momentu n . Pavyzdžiui, aštuoniolikmetis nusprendė iki pensijos (t.y. 47 metų laikotarpiui) apsidrausti kaupiamuoju draudimu. Jei atsitiktų taip, kad jaunuolis mirtų nesulaukęs pensijinio amžiaus, tai jaunuolio šeima gautų sumą 1 jo mirties metų pabaigoje. Jei draudėjas laimingai išėitų į

pensiją, tai iš draudimo kompanijos jis gautų prieš 47 metus sutartą pinigų sumą. Kad ir kiek metų praeitų nuo sutarties termino pabaigos, suma, kuri bus išmokėta jau seneliui, laikui bėgant nekis.

Draudiko būsimos išmokos vertė kaupiamojo n -metų diskretaus gyvybės draudimo atveju yra lygi:

$$Z_{x:\overline{n}} = \begin{cases} \nu^{K_x+1}, & K_x < n; \\ \nu^n, & K_x \geq n. \end{cases} \quad (12)$$

Kadangi draudiko ir draudėjo įsipareigojimai sutarties pasirašymo momentu turėtų būti ekvivalentūs (t.y. premija už suteiktą gyvybės draudimą turi būti lygi dydžio $Z_{x:\overline{n}}$ vidurkiui), tai:

$$A_{x:\overline{n}} = \mathbb{E}Z_{x:\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n-1} \nu^{k+1} P(K_x = k) + \nu^n {}_n p_x = \sum_{k=0}^{n-1} \nu^{k+1} {}_k p_x q_{x+k} + \nu^n {}_n p_x. \quad (13)$$

27 pavyzdys. Mokyklos devintokų rankinio komandos, kurią sudaro 16 žaidėjų, treneris nusprendė apdrausti savo auklėtinius kaupiamuoju 3 metų gyvybės draudimu. Suma, lygi 3 000 Lt, mokama mirties metų pabaigoje, kol jaunieji rankininkai baigs vidurinę mokyklą. Laikysime, kad visi komandos nariai yra bendraamžiai ir visi sulaukę 16-os metų. Be to, tarkime, kad komanda yra mišri. Kiek mokykla turi skirti pinigų, jei vietinė draudimo kompanija siūlo 0,06 metinę palūkanų normą?

Sprendimas. Remiantis ką tik išvesta (13) formule ir mirtingumo lentele:

$$\begin{aligned} A_{x:\overline{n}} &= \sum_{k=0}^2 \nu^{k+1} {}_k p_{16} q_{16+k} + \nu^3 {}_3 p_{16} \\ &= \nu q_{16} + \nu^2 {}_1 p_{16} q_{17} + \nu^3 {}_2 p_{16} q_{18} + \nu^2 {}_2 p_{16} \\ &= \frac{1}{1 + 0,06} \cdot \frac{l_{16} - l_{17}}{l_{16}} + \left(\frac{1}{1 + 0,06} \right)^2 \frac{l_{17}}{l_{16}} \cdot \frac{l_{17} - l_{18}}{l_{17}} \\ &\quad + \left(\frac{1}{1 + 0,06} \right)^3 \frac{l_{18}}{l_{16}} \cdot \frac{l_{18} - l_{19}}{l_{18}} + \left(\frac{1}{1 + 0,06} \right)^3 \frac{l_{19}}{l_{16}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{1,06} \cdot \frac{97840 - 97771}{97840} + \frac{1}{1,1236} \cdot \frac{97771 - 97679}{97840} \\
&+ \frac{1}{1,1910} \cdot \frac{97679 - 97555}{97840} + \frac{1}{1,1910} \cdot \frac{97555}{97840} \\
&\approx 0,0007 + 0,0008 + 0,0011 + 0,8372 = 0,8398 \approx 0,84.
\end{aligned}$$

Vadinasi, vienam žaidėjui apdrausti turi būti skiriama suma, lygi:

$$3\,000 \cdot 0,84 = 2\,520 \text{ Lt},$$

todėl apdrausti visą komandą mokyklai kainuos:

$$16 \cdot 2\,520 = 40\,320 \text{ Lt}.$$

5.2.4. Pakartokime

- Koks yra pagrindinis skirtumas tarp “tolydžios” ir “diskrečios” gyvybės draudimo sutarčių?
- Teigiamoje laiko atkarpoje pavaizduokite gyvybės draudimo sutarties galiojimo laikotarpį, kai išmoka mokama iš karto po mirties, ir kai išmokama mirties metų gale.
- Ką reiškia ir kaip apskaičiuojamas atsitiktinis dydis K_x ?
- Įrodykite, kad $P(K_x = k) = {}_k p_x q_{x+k}$.

5.2.5. Uždaviniai

11 uždavinys. Mama planuoja apdrausti savo dukrą abiturientę terminuota 4 metų diskrečia gyvybės draudimo rūšimi, visam dukros studijų laikotarpiui. Ponia Angelė kreipėsi į draudimo brokerių kompaniją “Tavo pasirinkimas”, kuri interesantei pasiūlė du draudimo sutarties variantus. Vienu atveju draudimo suma siekia 100 000 Lt, o $i = 0,03$. Kitu atveju draudžiantis draudimo suma bus perpus mažesnė, tačiau metinė palūkanų norma dvigubės. Kiek kartų skiriasi siūlomų variantų vienkartinės įmokos – premijos – dydis?

Sprendimas. Remiantis (10) formule ir mirtingumo lentele, apskaičiuosime įmokos dydį esant pirmojo pasiūlymo sąlygoms:

$$\begin{aligned}
 100\,000 \cdot A'_{18:\overline{4}|} &= 100\,000 \cdot \left(\sum_{k=0}^3 \nu^{k+1} {}_k p_{18} q_{18+k} \right) \\
 &= 100\,000 \cdot (\nu {}_0 p_{18} q_{18} + \nu^2 {}_1 p_{18} q_{19} + \nu^3 {}_2 p_{18} q_{20} + \nu^4 {}_3 p_{18} q_{21}) \\
 &= 100\,000 \cdot \left(\frac{1}{1,03} \cdot \frac{l_{18} - l_{19}}{l_{18}} + \left(\frac{1}{1,03} \right)^2 \frac{l_{19}}{l_{18}} \cdot \frac{l_{19} - l_{20}}{l_{19}} \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{1}{1,03} \right)^3 \frac{l_{20}}{l_{18}} \cdot \frac{l_{20} - l_{21}}{l_{20}} + \left(\frac{1}{1,03} \right)^4 \frac{l_{21}}{l_{18}} \cdot \frac{l_{21} - l_{22}}{l_{21}} \right) \\
 &= 100\,000 \cdot \left(\frac{60,1958 + 43,3596 + 57,6513 + 48,862}{98049} \right) \\
 &= 100\,000 \cdot 0,002142487 \approx 214,25 \text{ Lt}.
 \end{aligned}$$

Atliksime analogiškus skaičiavimus antrojo pasiūlymo atveju:

$$\begin{aligned}
 50\,000 \cdot A''_{18:\overline{4}|} &= 50\,000 \cdot \left(\sum_{k=0}^3 \nu^{k+1} {}_k p_{18} q_{18+k} \right) \\
 &= \frac{50\,000}{98049} \cdot \left(\frac{1}{1,06} \cdot 62 + \left(\frac{1}{1,06} \right)^2 \cdot 46 + \left(\frac{1}{1,06} \right)^3 \cdot 63 + \left(\frac{1}{1,06} \right)^4 \cdot 55 \right) \\
 &= 50\,000 \cdot 0,0019978946 \approx 99,89 \text{ Lt}.
 \end{aligned}$$

12 uždavinys. Saulius, kuris šiandien mini 18-ąją gimimo dieną, gavo dovanų 10 metų kaupiamojo draudimo polisą, kurio sąlygose nurodyta, kad nelaimės atveju mirties metų gale jo

artimiesiems bus išmokama 100 000 Lt dydžio suma. Draudimo kompanija taiko 0,06 metinę palūkanų normą. Kiek kainavo šis draudimo polisas Sauliaus krikštatėviui Pauliui?

Sprendimas.

$$\begin{aligned}
 100\,000 \cdot A_{18:\overline{6}|} &= 100\,000 \left(\sum_{k=0}^5 \nu^{k+1} {}_k p_{18} q_{18+k} + \nu^6 {}_6 p_{18} \right) \\
 &= 100\,000 \left(\nu q_{18} + \nu^2 {}_1 p_{18} q_{19} + \nu^3 {}_2 p_{18} q_{20} + \nu^4 {}_3 p_{18} q_{21} + \nu^5 {}_4 p_{18} q_{22} + \nu^6 {}_5 p_{18} q_{23} + \nu^6 {}_6 p_{18} \right) \\
 &= 100\,000 \left(\frac{1}{1,06} \cdot 0,0019 + \left(\frac{1}{1,06} \right)^2 \frac{97141}{97325} \cdot 0,0024 \right. \\
 &\quad + \left(\frac{1}{1,06} \right)^3 \frac{96905}{97325} \cdot 0,0024 + \left(\frac{1}{1,06} \right)^4 \frac{96670}{97325} \cdot 0,0030 + \left(\frac{1}{1,06} \right)^5 \frac{96383}{97325} \cdot 0,0028 \\
 &\quad \left. + \left(\frac{1}{1,06} \right)^6 \frac{96113}{97325} \cdot 0,0027 + \left(\frac{1}{1,06} \right)^6 \frac{95855}{97325} \right) \\
 &= 100\,000 (0,0017925 + 0,0021320 + 0,0020064 + 0,0023603 + 0,0020721 \\
 &\quad + 0,0018797 + 0,6943) = 100\,000 \cdot 0,706543 = 70\,654,30 \text{ Lt.}
 \end{aligned}$$

13 uždavinys. VU Matematikos ir informatikos fakulteto pirmakursis informatikas Karolis, sėkmingai išlaikęs pirmosios sesijos egzaminus, dovanų gavo nešiojamą kompiuterį, o jo brolis dvynys Kipras – chemikas, taip pat pasižymėjęs puikiais rezultatais, – motorolerį. Bendra dovanų vertė lygi 6 000 Lt. Dvynių motina, norėdama sūnums nupirkti šiuos daiktus, banke paėmė vatomąją paskolą šešeriems metams.

Pasirašant paskolos dokumentus, jai rekomendavo apsidrausti gyvybę ir iškart nukreipė į bankę įsikūrusią draudimo bendrovę, kuri gautas lėšas investuoja su 0,21 metine palūkanų norma. Motinai beliko tik apsispręsti, kokią terminuoto draudimo rūšį pasirinkti: ar tą, kai išmoka mokama iš karto po mirties, ar tą, kai išmoka mokama mirties metų gale. Padėkite apsispręsti 40-metei moteriškei!

Sprendimas. Iš to, kad

$$\mu_x = -\frac{s'(x)}{s(x)}$$

bei

$$s'(x) = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_0} \quad \text{ir} \quad s(x) = \frac{l_x}{l_0},$$

turime, kad

$$\mu_x \approx \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x}.$$

Tam, kad gautume kuo tikslesnę μ_x reikšmę, suskaičiuosime kelias μ_x reikšmes, iš kurių išvesime bendrą vidurkį:

$$\mu_{40} \approx \frac{l_{40} - l_{41}}{l_{40}} = \frac{95830 - 95565}{95830} \approx 0,0027653,$$

$$\mu_{41} \approx \frac{l_{41} - l_{42}}{l_{41}} = \frac{95565 - 95307}{95565} \approx 0,0026997,$$

$$\mu_{42} \approx \frac{l_{42} - l_{43}}{l_{42}} = \frac{95307 - 95021}{95307} \approx 0,003001.$$

$$\mu_{vid} = \frac{\mu_{40} + \mu_{41} + \mu_{42}}{3} = \frac{0,008466}{3} = 0,002822.$$

Skaičiuosime premijos dydį tuo atveju, kai išmoka mokama iš karto po mirties:

$$\begin{aligned} 6\,000 \cdot \bar{A}_{40:\overline{6}|}^1 &= 6\,000 \int_0^6 \nu^t {}_t p_{40} \mu_{vid} dt = 6\,000 \cdot 0,002822 \int_0^6 e^{-\delta t} e^{-\mu_{vid} t} dt \\ &= 16,932 \int_0^6 e^{-(\delta+0,002822)t} dt. \end{aligned}$$

Čia

$$\delta = -\ln\left(\frac{1}{1+i}\right) = -\ln\left(\frac{1}{1,21}\right) = -(-0,19) = 0,19.$$

Taigi

$$\begin{aligned} 6\,000 \cdot \bar{A}_{40:\overline{6}|}^1 &= 16,932 \int_0^6 e^{-0,192822 \cdot t} dt = \frac{16,932}{-0,192822} e^{-0,192822 \cdot t} \Big|_0^6 \\ &= -87,81156(e^{-1,156932} - 1) \approx -87,81156(0,314449 - 1) \approx 60,20. \end{aligned}$$

Dabar skaičiuosime premijos dydį tuo atveju, kai išmoka mokama mirties metų gale:

$$\begin{aligned}
 6\,000 \cdot A_{40:\overline{6}|}^1 &= 6\,000 \sum_{k=0}^5 \nu^{k+1} {}_k p_{40} q_{40+k} \\
 &= 6\,000 \left[\nu q_{40} + \nu^2 {}_1 p_{40} q_{41} + \nu^3 {}_2 p_{40} q_{42} + \nu^4 {}_3 p_{40} q_{43} + \nu^5 {}_4 p_{40} q_{44} + \nu^6 {}_5 p_{40} q_{45} \right] \\
 &= 6\,000 \left[0,8264 \cdot 0,0028 + 0,6830 \frac{95665}{95830} \cdot 0,0027 + 0,5645 \frac{95007}{95830} \cdot 0,0030 \right. \\
 &\quad \left. + 0,4665 \frac{95027}{95830} \cdot 0,0034 + 0,3855 \frac{94700}{95830} \cdot 0,0036 + 0,3186 \frac{94361}{95830} \cdot 0,0038 \right] \\
 &= 6\,000 \left[0,0023 + 0,0018 + 0,0017 + 0,0016 + 0,0014 + 0,0012 \right] = 60.
 \end{aligned}$$

Išvada: 40-ies metų Karolio ir Kipro mamai nežymiai naudingiau pasirašyti gyvybės draudimo sutartį, kai išmoka mokama mirties metų gale, nes nelaimės atveju draudimo kompanija išmokėtų tą pačią sumą, t.y. 6 000 Lt, o už draudimą reikėtų mokėti 20 centų mažiau.

6. Reziūmė

Dėdamos tašką paskutiniame šio magistro darbo puslapyje, savęs paklausėme, ar mums pavyko pasiekti savo tikslą? Drąsiai galime atsakyti, kad pirminis tikslas – parašyti aktuarinės matematikos knygelės, skirtos vyresnių klasių moksleiviams, rankraštį – yra sėkmingai įgyvendintas. Knygelę galima traktuoti ir naudoti kaip literatūrą susipažinimui su aktuarine matematika, kaip mokymo proceso uždavinių rinkinį, kaip metodinę medžiagą fakultatyvui arba kaip naujo dalyko vadovėlį. Pateikta medžiaga yra naudinga ketinantiems studijuoti (netgi studijuojantiems) matematikos taikymų studijų programas, ypač – finansų ir draudimo matematiką.

Knygelės esmė – jos šerdis – tai skyrius, kuriame supažindinama su paprasčiausiomis gyvybės draudimo rūšimis. Tačiau šis skyrius negalėjo apseiti be prieš tai esančiojo – savotiško aktuarinės matematikos “ABC”, kuriame dėstomos pagrindinės gyvybės draudimo sąvokos, apibrėžiami aktuariniai dydžiai, pateikiami svarbiausi draudimo matematikos apibrėžimai, be kurių visa aktuarinė matematika – nė iš vietos. Klydome, nes manėme, kad šie aktuarinės matematikos pagrindai tilps į nedidelį skyrelį. Teko gerokai išsiplėsti, nes pateikiama teorija – nauja ir nepažįstama. Ir tik gerai susipažindinus skaitytoją su ateityje reikalinga informacija, galėjome pradėti rašyti skyrių apie gyvybės draudimo modelius. Taip atsirado 5-asis skyrius.

Priklausomai nuo išmokos mokėjimo laiko, šį skyrių padalinome į du analogiškus skyrelius: kai išmoka mokama iš karto po draudėjo mirties, ir, kai išmoka mokama draudėjo mirties metų pabaigoje. Kiekvienas iš skyrelių sudarytas iš penkių skirsnių. Kadangi pasirinkome nagrinėti po tris gyvybės draudimo rūšis kiekvienam išmokos mokėjimo atvejui, tai tris skirsnius sudaro atskirų draudimo rūšių: viso gyvenimo gyvybės draudimas, n -metų terminuotas gyvybės draudimas ir n -metų kaupiamasis gyvybės draudimas, – aprašymas. Šiuose skirsniuose atitinkamai pateikiami draudimo modeliai, reikalingi apibrėžimai ir situacijas iliustruojantys pavyzdžiai. Teorinė medžiaga yra pajvairinta istoriniais faktais, statistinių duomenų pavyzdžiais. Taip pat vizualizuota grafikais, brėžiniais, diagramomis. Tokiu būdu lavinama skaitytojo regimoji atmintis. Be to, vaizdinė teorijos interpretacija leidžia susisteminti ir geriau įsisąmoninti išnagrinėtą medžiagą. Formulų numeracijoje supaprastinimui atsisakėme skyriaus ar skyrelio indekso, kad skaitytojas mokėtų pats surasti, tai ko reikalauja uždavinio sąlyga ar klausimas. Aktuarinių dydžių simboliai išliko originalūs. Jų supaprastinti net nebandėme, kad susidūrus su aktuariniais terminais ateityje, jie būtų atpažįstami, nereikėtų iš naujo mokytis žymėjimų.

Dar viena skyrelio dalis – skirnis pavadinimu “Pakartokime”. Čia pateikėme klausimus, ska-

tinančius atkreipti skaitytojo dėmesį į esminius poskyrio aspektus, kadangi perskaitytos medžiagos kartojimas padeda geriau įsisavinti informaciją. Sugalvoti klausimai sudėtingi, verčiantys pamąstyti, o ne žodis žodin atkartoti pirmuose skirsniuose išdėstytą teoriją. Na, o pasitikrinti, kiek ir ko išmokta, galima kiekvieno skyrelio pabaigoje skirsnyje “Uždaviniai”.

Knygelėje didžiulis dėmesys skirtas pavyzdžiams ir uždaviniams. Visoje knygelėje suformuluota ir išspręsta virš 40 pavyzdžių ir uždavinių. Pažymime, kad kiekvienas naujas apibrėžimas yra lydimas konkretaus pavyzdžio, tiesiogiai iliustruojančio pateiktą sąvoką. Uždavinių sąlygos sukonstruotos taip tarsi tai būtų realių situacijų fragmentai. Skaitytoją stengėmės sudominti nuotaikingomis (kiek įmanoma tokiose situacijose, neatsiejamose nuo žodžio “mirtis”) sąlygomis ir aktualiomis gyvenimo temomis. Uždavinių sąlygos pateiktos taip, kad skaitytojas ne tik išmoktų operuoti naujomis sąvokomis, bet ir mokėtų pritaikyti vieną ar kitą papildomą formulę, prisimintų mokyklos kurso žinias. Taip pat pateikėme detalius tiek pavydžių, tiek uždavinių sprendimus, juk kiekvieną sugalvotą uždavinį reikėjo perspręsti, kad įsitikintumėme, jog sąlygos yra korektiškos. Norėtume pastebėti, kad knygelė skirta Lietuvos skaitytojui, praktiniai uždaviniai taip pat orientuoti į Lietuvos draudimo rinkos dalyvius. Nors teorinė knygelės dalis tinka visų šalių (nesvarbu ar tai būtų Lietuvos, ar JAV, Rusijos, ar kitų šalių) aktuariniams skaičiavimams atlikti, tačiau uždavinių sąlygos sudarytos Lietuvos gyventojų draudimo uždaviniams spręsti, suderintos su Lietuvos gyventojų duomenimis. Šis faktas pagrindžia uždavinių originalumą ir savitumą, bei mūsų, kaip autorių, kūrybiškumą.

Knygelės pavadinimas negimė iš karto. “Pirmieji žingsniai į aktuarinę matematiką” – tokį variantą pasirinkome, nusprendę, kad jis plačiausiai atspindi knygelės turinį, kuriame išdėstytos pačios pirmosios aktuarinės matematikos teorijos formulės, reikalingos draudimo teorijos nagrinėjimui dabar ir vėliau. Tikimės, kad atsiras dalis skaitytojų, norinčių žengti toliau.

1 priedas. Gyvybės draudimo formulių santrauka

Draudimo rūšis Išmoka mokama	Viso gyvenimo	Terminuotas n -metų	Kaupiamasis n -metų
Iškart po mirties	$\bar{A}_x = \int_0^{\infty} \nu^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt$	$\bar{A}_{x:\overline{n} }^1 = \int_0^n \nu^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt$	$\bar{A}_{x:\overline{n} } = \int_0^n \nu^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt + \nu^n {}_n p_x$
Mirties metų gale	$A_x = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^{k+1} {}_k p_x q_{x+k}$	$A_{x:\overline{n} }^1 = \sum_{k=0}^{n-1} \nu^{k+1} {}_k p_x q_{x+k}$	$A_{x:\overline{n} } = \sum_{k=0}^{n-1} \nu^{k+1} {}_k p_x q_{x+k} + \nu^n {}_n p_x$

2 priedas. Lietuvos 1993 m. – 1996 m. gyventojų mirtingumo lentelė

Amžius	Išgyvenę iš 100000			Mirę per metus			Mirties tikimybė			Išgyvenimo f-ja		
x	l_{x_v}	l_{x_m}	l_x	d_{x_v}	d_{x_m}	d_x	q_{x_v}	q_{x_m}	q_x	$s(x)_v$	$s(x)_m$	$s(x)$
0	100000	100000	100000	1546	1255	1405	0,0155	0,0126	0,0141	1,000	1,000	1,000
1	98454	98745	98595	118	91	105	0,0012	0,0009	0,0011	0,9845	0,9875	0,9860
2	98336	98654	98490	102	70	86	0,0010	0,0007	0,0009	0,9834	0,9865	0,9849
3	98234	98584	98404	71	59	65	0,0007	0,0006	0,0007	0,9823	0,9858	0,9840
4	98163	98525	98339	52	45	49	0,0005	0,0005	0,0005	0,9816	0,9853	0,9834
5	98111	98480	98290	58	45	51	0,0006	0,0005	0,0005	0,9811	0,9848	0,9829
6	98053	98435	98239	40	39	40	0,0004	0,0004	0,0004	0,9805	0,9844	0,9824
7	98013	98396	98199	44	29	37	0,0004	0,0003	0,0004	0,9801	0,9840	0,9820
8	97969	98367	98162	58	29	43	0,0006	0,0003	0,0004	0,9797	0,9837	0,9816
9	97911	98338	98119	37	24	30	0,0004	0,0002	0,0003	0,9791	0,9834	0,9812
10	97874	98314	98089	50	15	34	0,0005	0,0002	0,0003	0,9787	0,9831	0,9809
11	97824	98299	98055	38	27	32	0,0004	0,0003	0,0003	0,9782	0,9830	0,9806
12	97786	98272	98023	44	23	34	0,0004	0,0002	0,0003	0,9779	0,9827	0,9802
13	97742	98249	97989	47	28	38	0,0005	0,0003	0,0004	0,9774	0,9825	0,9799
14	97695	98221	97951	65	32	49	0,0007	0,0003	0,0005	0,9770	0,9822	0,9795
15	97630	98189	97902	82	42	62	0,0008	0,0004	0,0006	0,9763	0,9819	0,9790
16	97548	98147	97840	93	45	69	0,0010	0,0005	0,0007	0,9755	0,9815	0,9784
17	97455	98102	97771	130	53	92	0,0013	0,0005	0,0009	0,9746	0,9810	0,9777
18	97325	98049	97679	184	62	124	0,0019	0,0006	0,0013	0,9733	0,9805	0,9768
19	97141	97987	97555	236	46	143	0,0024	0,0005	0,0015	0,9714	0,9799	0,9756
20	96905	97941	97412	235	63	150	0,0024	0,0006	0,0015	0,9691	0,9794	0,9741
21	96670	97878	97262	287	55	174	0,0030	0,0006	0,0018	0,9667	0,9788	0,9726
22	96383	97823	97088	170	58	168	0,0028	0,0006	0,0017	0,9638	0,9782	0,9709
23	96113	97765	96920	258	54	160	0,0027	0,0006	0,0017	0,9611	0,9777	0,9692
24	95855	97711	96760	264	70	170	0,0028	0,0007	0,0018	0,9586	0,9771	0,9676
25	95591	97641	96590	283	76	184	0,0030	0,0008	0,0019	0,9559	0,9764	0,9659
26	95308	97565	96406	320	69	199	0,0034	0,0007	0,0021	0,9531	0,9757	0,9641

2 priedas. 1 Lietuvos 1993 m. – 1996 m. gyventojų mirtingumo lentelė (tęsinys)

Amžius	Išgyvenę iš 100000			Mirę per metus			Mirties tikimybė			Išgyvenimo f-ja		
x	l_{x_v}	l_{x_m}	l_x	d_{x_v}	d_{x_m}	d_x	q_{x_v}	q_{x_m}	q_x	$s(x)_v$	$s(x)_m$	$s(x)$
27	94988	97496	96207	308	75	196	0,0032	0,0008	0,0020	0,9499	0,9750	0,9621
28	94680	97421	96011	329	78	208	0,0035	0,0008	0,0022	0,9468	0,9742	0,9601
29	94351	97343	95803	352	84	223	0,0037	0,0009	0,0023	0,9435	0,9734	0,9580
30	93999	97259	95580	402	91	251	0,0043	0,0009	0,0026	0,9400	0,9726	0,9558
31	93597	97168	95329	416	94	260	0,0044	0,0010	0,0027	0,9360	0,9717	0,9533
32	93181	97074	95069	447	99	276	0,0048	0,0010	0,0029	0,9318	0,9707	0,9507
33	92734	96974	94793	466	108	291	0,0050	0,0011	0,0031	0,9273	0,9698	0,9479
34	92268	96867	94502	494	122	311	0,0054	0,0013	0,0033	0,9227	0,9687	0,9450
35	91774	96745	94191	588	156	375	0,0064	0,0016	0,0040	0,9177	0,9675	0,9419
36	91186	96589	93816	616	161	392	0,0068	0,0017	0,0042	0,9119	0,9659	0,9382
37	90570	96428	93424	646	177	414	0,0071	0,0018	0,0044	0,9057	0,9643	0,9342
38	89924	96251	93010	689	200	448	0,0077	0,0021	0,0048	0,8992	0,9625	0,9301
39	89235	96051	92562	778	221	504	0,0087	0,0023	0,0054	0,8924	0,9605	0,9256
40	88457	95830	92058	768	265	519	0,0087	0,0028	0,0056	0,8846	0,9583	0,9206
41	87689	95565	91539	876	258	571	0,0100	0,0027	0,0062	0,8769	0,9557	0,9154
42	86813	95307	90968	938	286	615	0,0108	0,0030	0,0068	0,8681	0,9531	0,9097
43	85875	95021	90353	950	321	638	0,0111	0,0034	0,0071	0,8588	0,9502	0,9035
44	84925	94700	89715	1064	339	704	0,0125	0,0036	0,0078	0,8493	0,9470	0,8972
45	83861	94361	89011	1136	363	751	0,0135	0,0038	0,0084	0,8386	0,9436	0,8901
46	82725	93998	88260	1231	458	847	0,0149	0,0049	0,0096	0,8273	0,9400	0,8826
47	81494	93540	87413	1174	462	821	0,0144	0,0049	0,0094	0,8149	0,9354	0,8741
48	80320	93078	86592	1264	442	856	0,0157	0,0047	0,0099	0,8032	0,9308	0,8659
49	79056	92636	85736	1308	480	899	0,0156	0,0052	0,0105	0,7906	0,9264	0,8574
50	77748	92156	84837	1347	525	940	0,0173	0,0057	0,0111	0,7775	0,9216	0,8484
51	76401	91631	83897	1424	565	1002	0,0186	0,0062	0,0119	0,7640	0,9163	0,8390
52	74977	91066	82895	1399	558	987	0,0187	0,0061	0,0119	0,7498	0,9107	0,8290

2 priedas. Lietuvos 1993 m. – 1996 m. gyventojų mirtingumo lentelė (tęsinys)

Amžius	Išgyvenę iš 100000			Mirę per metus			Mirties tikimybė			Išgyvenimo f-ja		
x	l_{x_v}	l_{x_m}	l_x	d_{x_v}	d_{x_m}	d_x	q_{x_v}	q_{x_m}	q_x	$s(x)_v$	$s(x)_m$	$s(x)$
53	73578	90508	81908	1542	595	1080	0,0210	0,0066	0,0132	0,7358	0,9051	0,8191
54	72036	89913	80828	1594	662	1139	0,0221	0,0074	0,0141	0,7204	0,8991	0,8083
55	70442	89251	79689	1631	640	1135	0,0232	0,0072	0,0142	0,7044	0,8925	0,7969
56	68811	88611	78554	1615	725	1218	0,0235	0,0082	0,0155	0,6881	0,8861	0,7855
57	67196	87886	77336	1703	750	1207	0,0253	0,0085	0,0156	0,6720	0,8789	0,7734
58	65493	87136	76129	1787	812	1313	0,0273	0,0093	0,0172	0,6549	0,8714	0,7613
59	63706	86324	74816	1776	878	1340	0,0279	0,0102	0,0179	0,6371	0,8632	0,7482
60	61930	85446	73476	1775	894	1346	0,0287	0,0105	0,0183	0,6193	0,8545	0,7348
61	60155	84552	72130	1866	970	1429	0,0310	0,0115	0,0198	0,6016	0,8455	0,7213
62	58289	83582	70701	1863	1058	1470	0,0320	0,0127	0,0208	0,5829	0,8358	0,7070
63	56426	82524	69231	2027	1093	1570	0,0359	0,0132	0,0227	0,5643	0,8252	0,6923
64	54399	81431	67661	2063	1150	1613	0,0379	0,0141	0,0238	0,5440	0,8143	0,6766
65	52336	80281	66048	2067	1279	1677	0,0395	0,0159	0,0254	0,5234	0,8028	0,6605
66	50269	79002	64371	2077	1359	1711	0,0413	0,0172	0,0266	0,5027	0,7900	0,6437
67	48192	77643	62660	2219	1479	1827	0,0460	0,0190	0,0292	0,4819	0,7764	0,6266
68	45973	76164	60833	2330	1638	1942	0,0507	0,0215	0,0319	0,4597	0,7616	0,6083
69	43643	74526	58891	2253	1752	1961	0,0516	0,0235	0,0333	0,4364	0,7453	0,5889
70	41390	72774	56930	2212	1897	2026	0,0534	0,0261	0,0356	0,4139	0,7277	0,5693
71	39178	70877	54904	2334	2195	2248	0,0596	0,0310	0,0409	0,3918	0,7088	0,5490
72	36844	68682	52656	2259	2278	2265	0,0613	0,0332	0,0430	0,3684	0,6868	0,5266
73	34585	66404	50391	2323	2524	2427	0,0672	0,0380	0,0482	0,3459	0,6640	0,5039
74	32262	63880	47964	2380	2546	2468	0,0738	0,0399	0,0515	0,3226	0,6388	0,4796
75	29882	61334	45496	2334	2850	2592	0,0781	0,0465	0,0570	0,2988	0,6133	0,4550
76	27548	58484	42904	2223	2830	2528	0,0807	0,0484	0,0589	0,2755	0,5848	0,4290
77	25325	55654	40376	2061	2934	2500	0,0814	0,0527	0,0619	0,2533	0,5565	0,4038
78	23264	52720	37876	1863	2774	2319	0,0801	0,0526	0,0612	0,2326	0,5272	0,3788

2 priedas. Lietuvos 1993 m. – 1996 m. gyventojų mirtingumo lentelė (tęsinys)

Amžius	Išgyvenę iš 100000			Mirę per metus			Mirties tikimybė			Išgyvenimo f-ja		
x	l_{x_v}	l_{x_m}	l_x	d_{x_v}	d_{x_m}	d_x	q_{x_v}	q_{x_m}	q_x	$s(x)_v$	$s(x)_m$	$s(x)$
79	21401	49946	35557	1782	2896	2336	0,0833	0,0580	0,0657	0,2140	0,4995	0,3556
80	19619	47050	33221	1916	3152	2530	0,0977	0,0670	0,0762	0,1962	0,4705	0,3322
81	17703	43898	30691	1871	3493	2676	0,1057	0,0796	0,0872	0,1770	0,4390	0,3069
82	15832	40405	28015	1892	3655	2770	0,1195	0,0905	0,0989	0,1583	0,4041	0,2802
83	13940	36750	25245	1837	3702	2768	0,1318	0,1007	0,1096	0,1394	0,3675	0,2525
84	12103	33048	22477	1504	3654	2582	0,1243	0,1106	0,1149	0,1210	0,3305	0,2248
85	10599	29394	19895	1345	3591	2461	0,1269	0,1222	0,1237	0,1060	0,2939	0,1990
86	9254	25803	17434	1330	3430	2382	0,1437	0,1329	0,1366	0,0925	0,2580	0,1743
87	7924	22373	15052	1387	3316	2369	0,1750	0,1482	0,1574	0,0792	0,2237	0,1505
88	6537	19057	12683	1314	3046	2193	0,2010	0,1598	0,1729	0,0654	0,1906	0,1268
89	5223	16011	10490	1080	2777	1922	0,2068	0,1734	0,1832	0,0522	0,1601	0,1049
90	4143	13234	8568	880	2456	1654	0,2124	0,1856	0,1930	0,0414	0,1323	0,0857
91	3263	10778	6914	687	2184	1416	0,2105	0,2026	0,2048	0,0326	0,1078	0,0691
92	2576	8594	5498	580	1761	1157	0,2252	0,2049	0,2104	0,0258	0,0859	0,0550
93	1996	6833	4341	442	1529	968	0,2214	0,2238	0,2230	0,0200	0,0683	0,0434
94	1554	5304	3373	437	1438	920	0,2812	0,2711	0,2728	0,0155	0,0530	0,0337
95	1117	3866	2453	295	1156	708	0,2641	0,2990	0,2886	0,0112	0,0387	0,0245
96	822	2710	1745	241	804	520	0,2932	0,2967	0,2980	0,0082	0,0271	0,0175
97	581	1906	1225	116	574	242	0,1997	0,3012	0,1976	0,0058	0,0191	0,0123
98	465	1332	983	119	465	374	0,2559	0,3491	0,3805	0,0047	0,0133	0,0098
99	346	867	609	66	284	167	0,1908	0,3276	0,2742	0,0035	0,0087	0,0061
100	280	583	442	280	583	442	1,0000	1,0000	1,0000	0,0028	0,0058	0,0044

Summary

First steps into actuarial mathematics

The purpose of this work is the description of actuarial mathematics in more common way for students of secondary school. With the basic topic – *life insurance* – we want them to take a look at a small part of big actuarial world.

In fact, we introduce the readers with different ways of onetime instalment calculation, which depends on insurance benefit, terms of the contract, age and time of death of the insured. Regarding to time of death, we bring to the fore two cases of life insurances: insurances payable at the moment of death and insurances payable immediately on death. Later we mainly divide the theory into whole-life insurance, n-year term life insurance and n-year endowment life insurance.

In our textbook we give descriptions of main actuarial values. Also there are plenty of problems to solve in order to soak up the given theory of life insurance.

We do our best to simplify the readers' approach to actuarial mathematics.

Literatūra

- [1] N. L. Bowers, JR. H. U. Gerber, J. C. Hickman, D. A. Jones, C. J. Nesbitt, *Actuarial Mathematics*, Society of Actuaries, USA, 1986.
- [2] Г. И. Фалин, А. И. Фалин. *АктUARная математика в задачах*. Москва. Физматлит. 2003
- [3] A. Apynis, E. Stankus, *Matematika*, TEV, Vilnius, 2001.
- [4] Lietuvos Respublikos draudimo priežiūros komisija <http://www.dpk.lt>.
- [5] Lietuvos Respublikos Statistikos departamentas <http://www.std.lt>.
- [6] Kotak Mahindra Old Mutual Life Insurance Ltd. <http://www.kotaklifeinsurance.com>.
- [7] UADBB "Balto Link" <http://www.draudimas.lt>.
- [8] I - 549 - Lietuvos Respublikos draudimo įstatymas (1990).