VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

Jaroslav Jusel

Stochastinio genetinio modelio ir CKLS lygties parametrų vertinimas

Magistro darbas

VILNIUS 2006

Matematinės analizės katedra

Darbo vadovas **prof. V. Mackevičius**

Recenzentas **prof. R. Leipus**

Darbas apgintas 2006 06 01

Gynimo posėdžio protokolo Nr. ___________

Registravimo Nr. _______________

2006 05 20 ___________________

Turinys

Santrauka

Darbe yra vertinami stochastinio genetinio modelio ir CKLS lygties parametrai pasinaudojant sprendinio stacionariuoju tankiu. Atlikti skaičiavimai parodo, kad SDL parametrai yra „gerai" įvertinami, esant pakankamai dideliam stebėjimų skaičiui, pvz.: $N = 10000$. Skaičiavimams atlikti sukurta kompiuterinė programa.

Abstract

In this work estimation of parameters of stochastic genetic model and CKLS equation using process stationary density is presented. The research shows that SDE parameters are estimated "well" when we have large number of observations, e.g. $N = 10000$. Application is created to carry out calculations.

Įvadas

Stochastinės diferencialinės lygtys (SDL) – tai palyginti neseniai atsiradusi tikimybių teorijos sritis, kuri šiuo metu tampa vis populiaresnė. Jos vis dažniau yra naudojamos aprašant daugelį fizinių ir matematinių reiškinių. Tai yra susiję su tuo, kad deterministinės diferencialinės lygtys aprašo tik vidurkinę sistemų elgseną, tuo tarpu realios sistemos yra veikiamos daugybės atsitiktinių trikdžių, kurie sukelia ne tik kiekybinius (kaip dažnai įprasta manyti), bet ir kokybinius sistemų pokyčius. Ne mažiau svarbus uždavinys yra stochatinių diferencialinių lygčių parametrų vertinimas. Šiai užduočiai spręsti yra naudojama nemažai įvairių metodų. Verta paminėti didžiausio tikėtinumo metodą ir sąlyginį mažiausių kvadratų metodą. Šio darbo tiklas yra stochastinių diferencialinių lygčių sprendinių parametrų vertinimas pasinaudojant sprendinio stacionariuoju tankiu. Vertinimo esmė tokia: atsitiktinio proceso – SDL sprendinio parametrai parenkami taip, kad stacionariojo tankio grafikas būtų „kaip galima panašesnis" į proceso reikšmių histogramą stebint jį pakankamai ilgai. Žinoma, šis metodas gali būti taikomas tik tada, kai proceso stacionarusis tankis egzistuoja.

Pirmoje šio darbo dalyje pateikiamas Ito difuzinio proceso apibrėžimas, jo stacionariojo tankio apibrėžimas bei jo pavidalas difuziniam procesui. Nagrinėjamos konkrečios, dažnai taikymuose naudojamos lygtys: *Vasicek'o* (1977)*, CKLS (Chan, Karolyi, Longstaff, Sanders (*1992*)), bei vadinamojo genetinio modelio lygtis*. Randamos stacionariųjų tankių išraiškos duotosioms lygtims.

Antroje darbo dalyje yra aprašyta veiksmų seka, naudojama minėtų stochastinių diferecialinių lygčių parametrams vertinti, pateikiami rezultatai, priklausantys nuo tam tikrų iš anksto parinktų kintamųjų (pvz., imties dydžio, histogramos žingsnio ir t.t.) ir konkretūs modeliavimo pavyzdžiai.

Svarbi šio darbo dalis yra C# kalba parašyta kompiuterinė programa, sukurta naudojantis *Microsoft Visual C#* 2005 *Express Edition* aplinka. *Microsoft Windows* terpėje veikianti programa nesunkiai leidžia vartotojui, keičiant algoritmo parametrus, modeliuoti stochastinių diferencialinių lygčių sprendinius ir vertinti jų parametrus. Grafikai nubrėžti naudojantis matematiniu Maple paketu bei mano ir Povilo Banio bakalauro darbuose sukurta programa, skirta tiesinių stochastinių diferencialinių lygčių modeliavimui (plačiau žr. [5] arba 4.4).

Darbe nagrinėjamą vertinimo algoritmą savo magistriniame darbe nepriklausomai modeliavo ir P. Banys [6]. Jis nagrinėjo kitokias SDL bei naudojo kitą programinę įrangą.

1. Teorinė dalis.

1.1. Stochastinė diferencialinė lygtis. Difuzinis procesas.

Nagrinėkime lygtį:

$$X_t = x_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s, t \in I \tag{1}$$

Dažnai dėl praktinio patogumo ši lygtis užrašoma formaliu diferencialiniu pavidalu

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, X_0 = x_0 \tag{2}$$

Abi lygtys vadinamos *stochastinėmis diferencialinėmis lygtimis*. Formalus apibrėžimas būtų toks:

1 apibrėžimas. Sakoma, kad tolydusis atsitiktinis procesas $X_t, t \in I$, yra stochastinės diferencialinės lygties (1) sprendinys intervale $t \in I$ jei jis tenkina (2) lygtį (su tikimybe 1).

Toliau tarkime, kad lygties koeficjentai tenkina Lipšico ir tiesiško augimo sąlygas:

1. $|b(t, x) - b(t, y)|^2 + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)^2 \leq C|x - y|^2 x, y \in R, t \in R_+$
2. $|b(t, x)|^2 + |\sigma(t, x)|^2 \leq C(1 + |x|^2), x \in R, t \in R_+$

1 teorema. *Jei išpildytos 1 ir 2 sąlygos, tai egzistuoja vienintelis tolydusis atsitiktinis procesas X, kuris yra stochastinės diferencialinės lygties* (2) *sprendinys intervale* $[0, \infty)$.

2 apibrėžimas. Stochastinės diferencialinės lygties

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s, t \geq 0, \tag{3}$$

su koeficjentais b, σ, tenkinančiais sprendinio egzistavimo ir vienaties sąlygas, sprendinys X vadinamas (Ito) *difuzijos procesu*. Jei koeficjentai b ir σ nepriklauso nuo laiko t, tai X vadinamas *homogeniniu* (laike) difuzijos procesu. Koeficjentas b vadinamas difuzinio proceso X *poslinkio* koeficjentu, o σ - *difuzijos* koeficjentu. Norėdami pabrėžti sprendinio X priklausomybė nuo pradinio taško x, jį žymėsime X^x, o difuziniu procesu X vadinsime visą šeimą sprendinių $\{X^x, x \in R\}$. $X^{s,x}$ žymėsime atsitiktinį procesą, apibrėžtą intervale $[s, \infty)$ $(s \geq 0)$ ir tenkinantį lygtį

$$X_t^{s,x} = x + \int_s^t b(u, X_u^{s,x})du + \int_s^t \sigma(u, X_u^{s,x})dB_u, t \geq s. \tag{4}$$

1.2. Stacionarusis tankis.

3 apibrėžimas. Atsitiktinis procesas X vadinamas Markovo procesu, jei sąlyginis tankis

$$P_{X_t|X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_k}, X_s}(y|x_1), x_2, \ldots, x_k, x) = p(s, x, t, y) := p_{X_t|X_s}(y|x) \tag{5}$$

su visais $0 = t_1 < t_2 < \cdots < t_k < s < t,\ x_1, x_2, \ldots, x_k,\ x, y \in R$. Tada funkcija $p = p(s, x, t, y),\ 0 < s < t,\ x, y \in R$, vadinama Markovo proceso perėjimo tankiu.

4 apibrėžimas. Homogeninio difuzinio proceso $\{X^x\}$ perėjimo tankis $p(s,x,t,y)$ priklauso tik nuo skirtumo $t-s$ ir todėl pakanka nagrinėti funkciją $p(t,x,y) := p(0,x,t,y) = p(s,x,s+t,y)$. Pastaroji taip pat vadinama proceso $\{X^x\}$ perėjimo tankiu.

5 apibrėžimas. Difuzinio proceso X su perėjimo tankiu $p(t,x,y), t > 0,\ x,y \in R$ *stacionariuoju tankiu* vadinama tankio funkcija $p_0(y),\ y \in R$, tenkinanti lygtį

$$p_0(y) = \int_R p(t,x,y)p_0(x)dx, t > 0, x \in R \tag{6}$$

Jei difuzinio proceso X pradinė reikšmė X_0 yra atsitiktinis dydis X_0 su tankiu p_0, tai difuzinio proceso reikšmės X_t turi tą patį skirstinį su tankiu p_0 visais laiko momentais $t \geq 0$. Be to, jo reikšmių baigtinių rinkinių $(X_{t_1+t}, X_{t_2+t}, \ldots, X_{t_k+t})$ skirstiniai yra tie patys su visais $t \geq 0$. Tokie procesai vadinami stacionariais.

6 apibrėžimas. Difuzinių procesų, turinčių stacionarųjį tankį p_0, elgsenos stabilizaciją dideliuose laiko intervaluose nusako *ergodiškumas:* su bet kokia aprėžta (mačiąja) funkcija $f : R \to R$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(X_t^x)dt = \int_R f(y)p_0(y)dy. \tag{7}$$

Gana dažnai, difuzinio proceso X trajektorijos pasižymi tam tikru uždarumu kokio nors intervalo $(a,b) \in R$ atžvilgiu, t.y. procesas išėjęs iš bet kurio taško $x \in (a,b)$, pasilieka intervale (a,b) visą laiką. Pavyzdžiui,*Ginzburgo-Landau* lygčiai egzistuoja du tokie intervalai: $(0,+\infty)$ ir $(-\infty,0)$. Tokioje situacijoje verta kalbėti apie stacionaraus tankio išraišką intervale (a,b).

7 apibrėžimas. Difuzinis procesas X, kurio perėjimo tankis $p = p(t,x,y)$, turi stacionarųjį tankį p_0 intervale $(a,b) \in R$, jei

$$\int_a^b p(t,x,y)dy = 1,\ t > 0,\ x \in (a,b), \tag{8}$$

ir

$$p_0(y) = \int_a^b p(t,x,y)p_0(x)dx,\ t > 0,\ y \in (a,b), \tag{9}$$

2 teorema. *Sakykime, difuzinis procesas X, kurio perėjimo tankis $p = p(t,x,y)$, turi stacionarųjį tankį $p_0 = p_0(y)$ intervale $(a,b) \in R$. Tarkime, kad p ir p_0 yra tolydžios funkcijos, turinčios tolydžiąsias išvestines $\partial p/\partial t, \partial p/\partial y, \partial^2 p/\partial y^2, \partial p_0/\partial y, \partial^2 p_0/\partial y_2$. Be to, jei $\sigma(x) > 0, x \in (a,b)$, tai difuzinio proceso X stacionarusis tankis p_0 yra pavidalo*

$$p_0(y) = \frac{N}{\sigma^2(y)} \exp\left\{2\int_c^y \frac{b(u)}{\sigma^2(u)}du\right\}, y \in (a,b); \tag{10}$$

čia c - bet koks taškas iš intervalo (a,b), o N yra normuojanti konstanta, su kuria $\int_a^b p_0(y)dy = 1$.

Įrodymas. Šios teoremos įrodymą galima rasti [1], *psl.* 138.

1 pastaba. Jei difuzinis procesas $X = \{X_x\}$ aprašomas *Stratonovičiaus* lygtimi

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t) \circ dB_t, \tag{11}$$

tai jos stacionariojo tankio formulė gaunama vietoje poslinkio koeficjento b įrašant $b' := b + \frac{1}{2}\sigma\sigma'$.

$$\begin{aligned}
p_0(y) &= \frac{N}{\sigma^2(y)} \exp\left\{2\int_c^y \frac{b(u) + \frac{1}{2}\sigma\sigma'(u)}{\sigma^2(u)} du\right\} \\
&= \frac{N}{\sigma^2(y)} \exp\left\{2\int_c^y \frac{b(u)}{\sigma^2(u)} du + \int_c^y \frac{\sigma\sigma'(u)}{\sigma^2(u)} du\right\} \\
&= \frac{N}{\sigma^2(y)} \exp\left\{2\int_c^y \frac{b(u)}{\sigma^2(u)} du + \int_c^y \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} du\right\} \\
&= \frac{N}{\sigma^2(y)} \exp\left\{2\int_c^y \frac{b(u)}{\sigma^2(u)} du\right\} \exp\left\{ \ln\sigma(y) - \ln\sigma(c)\right\} \\
&= \frac{N}{\sigma^2(y)} \exp\left\{2\int_c^y \frac{b(u)}{\sigma^2(u)} du\right\}\sigma(y)\sigma^{-1}(c) \\
&= \frac{N}{\sigma(y)}\sigma^{-1}(c) \exp\left\{2\int_c^y \frac{b(u)}{\sigma^2(u)} du\right\} \\
&= \frac{N_1}{\sigma(y)} \exp\left\{2\int_c^y \frac{b(u)}{\sigma^2(u)} du\right\},
\end{aligned}$$

čia $N_1 := N\sigma^{-1}(c)$. Apjungę Ito ir Stratonovičiaus lygčių atvejus, gauname:

$$p_0(y) = \frac{N}{\sigma^\nu(y)} \exp\left\{2\int_c^y \frac{b(u)}{\sigma^2(u)} du\right\}, y \in (a, b), \tag{12}$$

čia Ito lygčiai $\nu = 2$, Stratonovičiaus lygčiai $\nu = 1$.

2 pastaba. Stacionarusis tankis suteikia mums gana svarbią pradinę informaciją apie proceso tikimybinę elgseną.

1.3. Adityvus triukšmas: bendras atvejis

Nagrinėkime lygtį su *adityviuoju triukšmu*:

$$dX_t = f(X_t)dt + \sigma dB_t, (\sigma > 0)$$

Jei atitinkamo difuzinio proceso stacionarusis tankis egzistuoja, tai jis turi būti pavidalo:

$$p_0(y) = \frac{N}{\sigma^2} \exp\left\{\frac{2}{\sigma^2}\int_c^y f(u)du\right\}. \tag{13}$$

Tam, kad tai iš tikrųjų būtų tankis, būtinas funkcijos p_0 integruojamumas. Tada normuojanti konstanta būtų lygi:

$$N = \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma^2} \exp\left\{ \frac{2}{\sigma^2} \int\limits_{c}^{y} f(u)du \right\} dy \right). \tag{14}$$

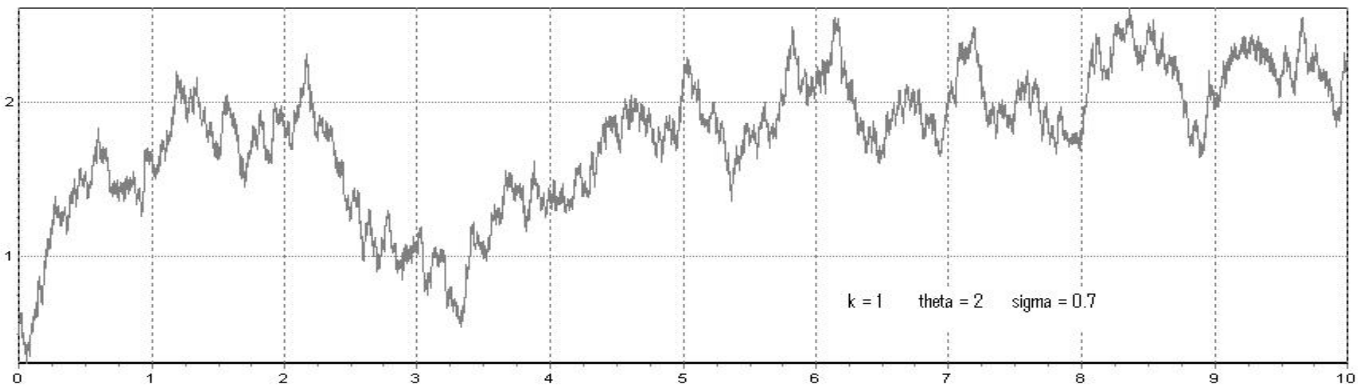
3 pastaba. Adityvusis triukšmas *kokybine prasme* nekeičia difuzinio proceso stacionarios elgsenos. Keičiant trukšmo intensyvumą (σ) keičiasi tik stacionariojo tankio ekstremumų dydis, bet nesikeičia jų padėtis ir skaičius.

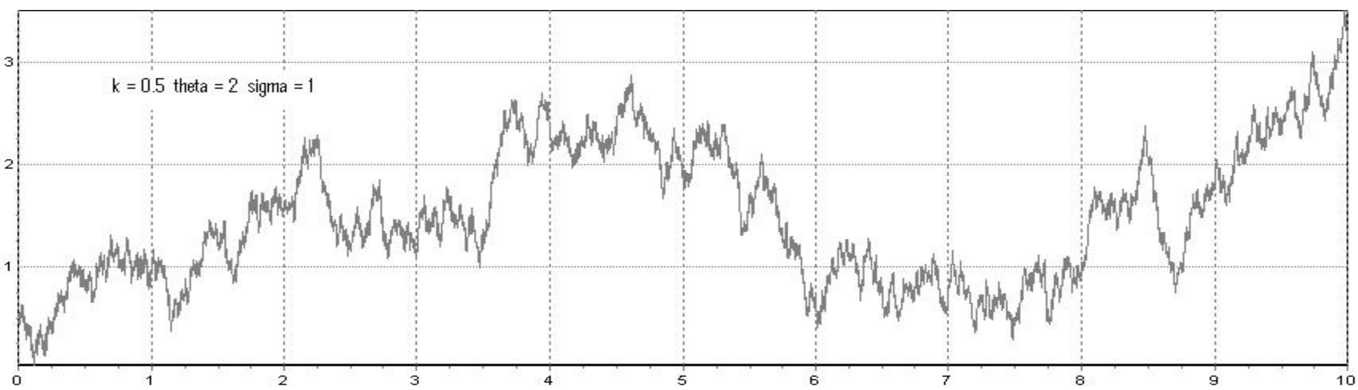
1.4. Vasicek'o lygtis (1977) (arba CKLS, kai $\nu = 0$)

Nagrinėkime lygtį:

$$dX_t = k(\theta - X_t)dt + \sigma dB_t.$$

Žemiau pateikiama keletas tipiškų Vasicek'o lygties trajektorijų (trajektorijos nubraižytos naudojantis mano minėta bakalauro darbe sukurta programa, plačiau žr. 4.4 arba [5]):





Gausime stacionaraus tankio išraišką. Remiantis (13) formule gauname:

$$\begin{aligned}
p_0(y) &= \frac{N}{\sigma^2}\exp\Big\{\frac{2}{\sigma^2}\int\limits_c^y k(\theta-u)du\Big\}\\
&= \frac{N}{\sigma^2}\exp\Big\{\frac{2k}{\sigma^2}\int\limits_c^y (\theta-u)du\Big\}\\
&= \frac{N}{\sigma^2}\exp\Big\{\frac{2k}{\sigma^2}(\theta u-\frac{u^2}{2})\Big|_c^y\Big\}\\
&= \frac{N}{\sigma^2}\exp\Big\{\frac{2k}{\sigma^2}\Big((\theta y-\frac{y^2}{2})-(\theta c-\frac{c^2}{2})\Big)\Big\}\\
&= \frac{N}{\sigma^2}\exp\Big\{\frac{2k}{\sigma^2}(\theta y-\frac{y^2}{2})\Big\}\exp\Big\{-\frac{2k}{\sigma^2}(\theta c-\frac{c^2}{2})\Big\}.
\end{aligned}$$

Imkime $c=0$. Tada

$$p_0(y)=\frac{N}{\sigma^2}\exp\Big\{\frac{2k}{\sigma^2}(\theta y-\frac{y^2}{2})\Big\}. \tag{15}$$

Rasime konstantos N išraišką:

$$\begin{aligned}
N &= \Big(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sigma^2}\exp\Big\{\frac{2}{\sigma^2}\int\limits_c^y k(\theta-u)du\Big\}dy\Big)^{-1}\\
&= \cdots =\\
&= \Big(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sigma^2}\exp\Big\{\frac{2k}{\sigma^2}(\theta y-\frac{y^2}{2})\Big\}dy\Big)^{-1}\\
&= \Big(\frac{1}{\sigma^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\Big\{\frac{2k\theta y}{\sigma^2}-\frac{ky^2}{\sigma^2}\Big\}dy\Big)^{-1}\\
&= \Big(\frac{1}{\sigma^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\Big\{-\frac{1}{2}\Big[\Big(\frac{\sqrt{2k}y}{\sigma}\Big)^2-2\Big(\frac{\sqrt{2k}y}{\sigma}\Big)\Big(\frac{\sqrt{2k}\theta}{\sigma}\Big)+\Big(\frac{\sqrt{2k}\theta}{\sigma}\Big)^2\Big]+\frac{k\theta^2}{\sigma^2}\Big\}dy\Big)^{-1}\\
&= \Big(\frac{1}{\sigma^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\Big\{-\frac{1}{2}\Big(\frac{\sqrt{2k}y}{\sigma}-\frac{\sqrt{2k}\theta}{\sigma}\Big)^2+\frac{k\theta^2}{\sigma^2}\Big\}dy\Big)^{-1}\\
&= \Big(\frac{1}{\sigma^2}\exp\Big\{\frac{k\theta^2}{\sigma^2}\Big\}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\Big\{-\frac{1}{2}\Big(\frac{\sqrt{2k}y}{\sigma}-\frac{\sqrt{2k}\theta}{\sigma}\Big)^2\Big\}dy\Big)^{-1}\\
&= \Big(\frac{1}{\sigma^2}\exp\Big\{\frac{k\theta^2}{\sigma^2}\Big\}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\Big\{-\frac{t^2}{2}\Big\}\frac{\sigma}{\sqrt{2k}}dt\Big)^{-1}\\
&= \Big(\frac{1}{\sigma^2}\frac{\sigma}{\sqrt{2k}}\exp\Big\{\frac{k\theta^2}{\sigma^2}\Big\}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\Big\{-\frac{t^2}{2}\Big\}dt\Big)^{-1}\\
&= \Big(\frac{1}{\sqrt{2k}\sigma}\exp\Big\{\frac{k\theta^2}{\sigma^2}\Big\}\sqrt{2\pi}\Big)^{-1}=\Big(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{k}\sigma}\exp\Big\{\frac{k\theta^2}{\sigma^2}\Big\}\Big)^{-1}.
\end{aligned}$$

Gavome, kad

$$N = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{k}\sigma} \exp\left\{ \frac{k\theta^2}{\sigma^2} \right\} \right)^{-1}. \tag{16}$$

1.5. Multiplikatyvus triukšmas: bendras atvejis

Skirtingai nei adityvaus triukšmo atveju, multiplikatyvus triukšmas gali sukelti ne tik kiekybinius, bet ir kokybinius sistemos pokyčius.

Tarkime, kad difuzinis procesas $X = X_t^x$ aprašomas lygtimi

$$dX_t = f(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t \tag{17}$$

turi stacionarųjį tankį p_0 intervale (a, b). Tankio pavidalas yra toks:

$$p_0(y) = \frac{N}{\sigma^2(y)} \exp\left\{ 2\int_c^y \frac{f(u)}{\sigma^2(u)} du \right\},\ y \in (a, b),\ c \in (a, b). \tag{18}$$

Konstanta N užrašoma tokiu būdu:

$$N = \left(\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sigma^2(y)} \exp\left\{ 2\int_c^y \frac{f(u)}{\sigma^2(u)} du \right\} dy \right),\ y \in (a, b),\ c \in (a, b). \tag{19}$$

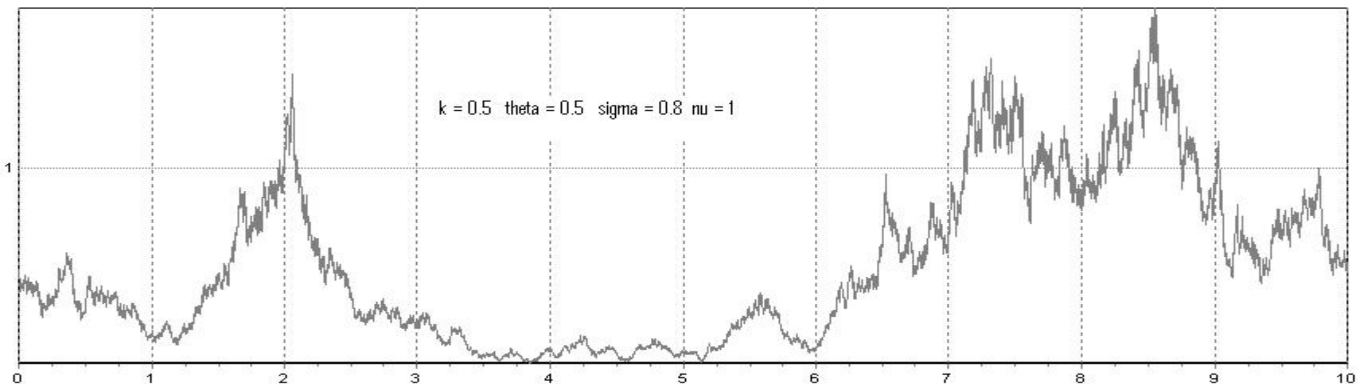
Labai svarbu yra tai, kad propocingas multiplikatyvaus triukšmo didinimas, gali "kokybiškai" pakeisti proceso elgseną. Tai pasireiškia ne tik stacionaraus tankio ekstremumų dydžiu, bet ir jų padėties, bei skaičiaus pakitimais. Tokie kokybiniai stacionariojo tankio pakitimai vadinami triukšmo indukuotais virsmais.

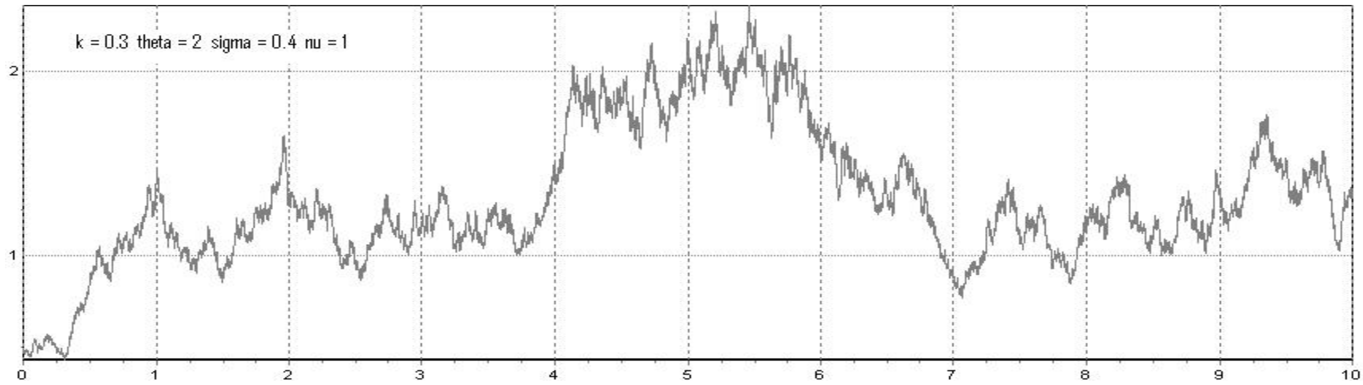
1.6. CKLS lygtis

Nagrinėkime CKLS (*Chan, Karolyi, Longstaff, Sanders (1992)*) stochastinę diferencialinę lygtį:

$$dX_t = k(\theta - X_t)dt + \sigma X_t^{\nu} dB_t \tag{20}$$

Bus išnagrinėti du atvejai. Kai $\nu = 1$ ir $\nu > 1/2; \nu \neq 1$. Žemiau pateikiama keletas tipiškų CKLS lygties trajektorijų:





Dabar gausime stacionaraus tankio, bei konstantos išraiškas. Remiantis (18) ir (19) formulėmis gauname:

$$p_0(y) = \frac{N}{\sigma^2 y^{2\nu}} \exp\left\{2\int\limits_c^y \frac{k(\theta-u)}{\sigma^2 u^{2\nu}} du\right\}, \tag{21}$$

$$N = \left(\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{\sigma^2 y^{2\nu}} \exp\left\{2\int\limits_c^y \frac{k(\theta-u)}{\sigma^2 u^{2\nu}} du\right\} dy\right)^{-1}. \tag{22}$$

Tarkime $\nu = 1$. Tada

$$\begin{aligned}
p_0(y) &= \frac{N}{\sigma^2 y^2} \exp\left\{2\int\limits_c^y \frac{k(\theta-u)}{\sigma^2 u^2} du\right\} \\
&= \frac{N}{\sigma^2 y^2} \exp\left\{\frac{2k}{\sigma^2}\int\limits_c^y \frac{(\theta-u)}{u^2} du\right\} \\
&= \frac{N}{\sigma^2 y^2} \exp\left\{\frac{2k}{\sigma^2}\int\limits_c^y \left(\frac{\theta}{u^2} - \frac{1}{u}\right) du\right\} \\
&= \frac{N}{\sigma^2 y^2} \exp\left\{\frac{2k}{\sigma^2}\left(-\frac{\theta}{u} - \ln u\right)\Big|_c^y\right\} \\
&= \frac{N}{\sigma^2 y^2} \exp\left\{-\frac{2k}{\sigma^2}\left(\frac{\theta}{u} + \ln u\right)\Big|_c^y\right\} \\
&= \frac{N}{\sigma^2 y^2} \exp\left\{-\frac{2k}{\sigma^2}\left(\frac{\theta}{y} + \ln y - \left(\frac{\theta}{c} + \ln c\right)\right)\right\} \\
&= \frac{N}{\sigma^2 y^2} \exp\left\{-\frac{2k}{\sigma^2}\left(\frac{\theta}{y} + \ln y\right)\right\} \exp\left\{\frac{2k}{\sigma^2}\left(\frac{\theta}{c} + \ln c\right)\right\} \\
&= \frac{N}{\sigma^2 y^2} \exp\left\{-\frac{2k\theta}{\sigma^2 y}\right\} \exp\left\{-\frac{2k}{\sigma^2}\ln y\right\} \exp\left\{\frac{2k}{\sigma^2}\left(\frac{\theta}{c} + \ln c\right)\right\} \\
&= \frac{N}{\sigma^2 y^2} \exp\left\{-\frac{2k\theta}{\sigma^2 y}\right\} \exp\left\{\ln(y)^{-\frac{2k}{\sigma^2}}\right\} \exp\left\{\frac{2k}{\sigma^2}\left(\frac{\theta}{c} + \ln c\right)\right\} \\
&= \frac{N}{\sigma^2 y^2} \exp\left\{-\frac{2k\theta}{\sigma^2 y}\right\} y^{-\frac{2k}{\sigma^2}} \exp\left\{\frac{2k}{\sigma^2}\left(\frac{\theta}{c} + \ln c\right)\right\} \\
&= \frac{N}{\sigma^2} \exp\left\{\frac{2k}{\sigma^2}\left(\frac{\theta}{c} + \ln c\right)\right\} \exp\left\{-\frac{2k\theta}{\sigma^2 y}\right\} y^{-\frac{2k}{\sigma^2}-2}.
\end{aligned}$$

Tarkime $c = 1$. Tada

$$p_0(y) = \frac{N}{\sigma^2}\exp\left\{\frac{2k\theta}{\sigma^2}\right\}\exp\left\{-\frac{2k\theta}{\sigma^2 y}\right\}y^{-\frac{2k}{\sigma^2}-2} = N_1\exp\left\{-\frac{2k\theta}{\sigma^2 y}\right\}y^{-\frac{2k}{\sigma^2}-2}. \tag{23}$$

Konstanta N_1 lygi (kai $c = 1$):

$$\begin{aligned}
N_1 &= \frac{N}{\sigma^2}\exp\left\{\frac{2k\theta}{\sigma^2}\right\} = \frac{1}{\sigma^2}\exp\left\{\frac{2k\theta}{\sigma^2}\right\}\Bigg(\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{\sigma^2 y^2}\exp\left\{2\int\limits_c^y\frac{k(\theta-u)}{\sigma^2u^2}du\right\}dy\Bigg)^{-1} \\
&= \ldots = \\
&= \frac{1}{\sigma^2}\exp\left\{\frac{2k\theta}{\sigma^2}\right\}\Bigg(\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{\sigma^2}\exp\left\{\frac{2k\theta}{\sigma^2}\right\}\exp\left\{-\frac{2k\theta}{\sigma^2 y}\right\}y^{-\frac{2k}{\sigma^2}-2}dy\Bigg)^{-1} \\
&= \Bigg(\int\limits_0^{+\infty}\exp\left\{-\frac{2k\theta}{\sigma^2 y}\right\}y^{-\frac{2k}{\sigma^2}-2}dy\Bigg)^{-1}.
\end{aligned}$$

Tarkime, kad $\nu > 1/2; \nu \neq 1$. Tada tankio pavidalas yra toks:

$$\begin{aligned}
p_0(y) &= \frac{N}{\sigma^2y^{2\nu}}\exp\left\{2\int\limits_c^y\frac{k(\theta-u)}{\sigma^2u^{2\nu}}du\right\} \\
&= \frac{N}{\sigma^2y^{2\nu}}\exp\left\{\frac{2k}{\sigma^2}\int\limits_c^y\frac{\theta-u}{u^{2\nu}}du\right\} \\
&= \frac{N}{\sigma^2y^{2\nu}}\exp\left\{\frac{2k}{\sigma^2}\int\limits_c^y\left(\frac{\theta}{u^{2\nu}}-\frac{1}{u^{2\nu-1}}\right)du\right\} \\
&= \frac{N}{\sigma^2y^{2\nu}}\exp\left\{\frac{2k}{\sigma^2}\left(\frac{\theta u^{1-2\nu}}{1-2\nu}-\frac{u^{2-2\nu}}{2-2\nu}\right)\Bigg|_c^y\right\} \\
&= \frac{N}{\sigma^2y^{2\nu}}\exp\left\{\frac{2k}{\sigma^2}\left(\frac{\theta}{1-2\nu}\left(y^{1-2\nu}-c^{1-2\nu}\right)-\frac{1}{2-2\nu}\left(y^{2-2\nu}-c^{2-2\nu}\right)\right)\right\} \\
&= \frac{N}{\sigma^2y^{2\nu}}\exp\left\{\frac{2k}{\sigma^2}\left(-\frac{\theta c^{1-2\nu}}{1-2\nu}+\frac{c^{2-2\nu}}{2-2\nu}\right)\right\}\exp\left\{\frac{2k}{\sigma^2}\left(\frac{\theta y^{1-2\nu}}{1-2\nu}-\frac{y^{2-2\nu}}{2-2\nu}\right)\right\}
\end{aligned}$$

Kai $c = 1$, turime:

$$\begin{aligned}
p_0(y) &= \frac{N}{\sigma^2y^{2\nu}}\exp\left\{\frac{2k}{\sigma^2}\left(-\frac{\theta}{1-2\nu}+\frac{1}{2-2\nu}\right)\right\}\exp\left\{\frac{2k}{\sigma^2}\left(\frac{\theta y^{1-2\nu}}{1-2\nu}-\frac{y^{2-2\nu}}{2-2\nu}\right)\right\} && (24)\\
&= \frac{N_1}{y^{2\nu}}\exp\left\{\frac{2k}{\sigma^2}\left(\frac{\theta y^{1-2\nu}}{1-2\nu}-\frac{y^{2-2\nu}}{2-2\nu}\right)\right\}. && (25)
\end{aligned}$$

Konstanta N ($c = 1$):

$$N_1 = \Bigg(\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{y^{2\nu}}\exp\left\{\frac{2k}{\sigma^2}\left(\frac{\theta y^{1-2\nu}}{1-2\nu}-\frac{y^{2-2\nu}}{2-2\nu}\right)\right\}\Bigg)^{-1}. \tag{26}$$

1.7. Genetinis modelis.

Determinuota lygtis

$$dX_t = (\alpha - X_t + \lambda X_t(1 - X_t))dt, X_0 \in (0, 1),$$

su parametrais $\alpha \in (0, 1)$ ir $\lambda \in R$ vadinama *genetiniu modeliu*. Ši lygtis dažnai naudojama praktikoje, pvz.: ji aprašo tam tikras chemines reakcijas, kuriose dalyvauja dvi medžiagos, ir X_t, reiškia vienos iš jų santykinį kiekį laiko momentu t. Laikydami, kad parametras λ yra veikiamas triukšmo, gausime Stratonovičiaus stochastinę diferencialinę lygtį

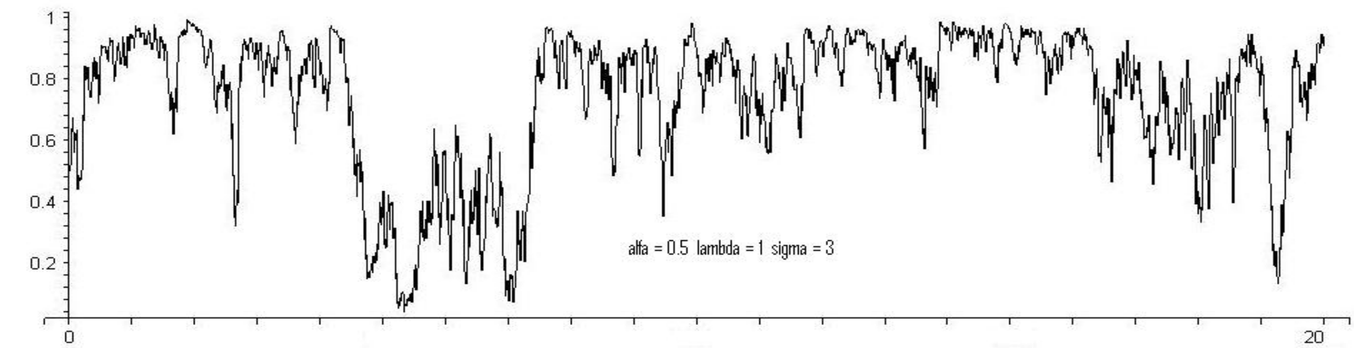
$$dX_t = (\alpha - X_t + \lambda X_t(1 - X_t))dt + \sigma X_t(1 - X_t) \circ dB_t, X_0 \in (0, 1).$$

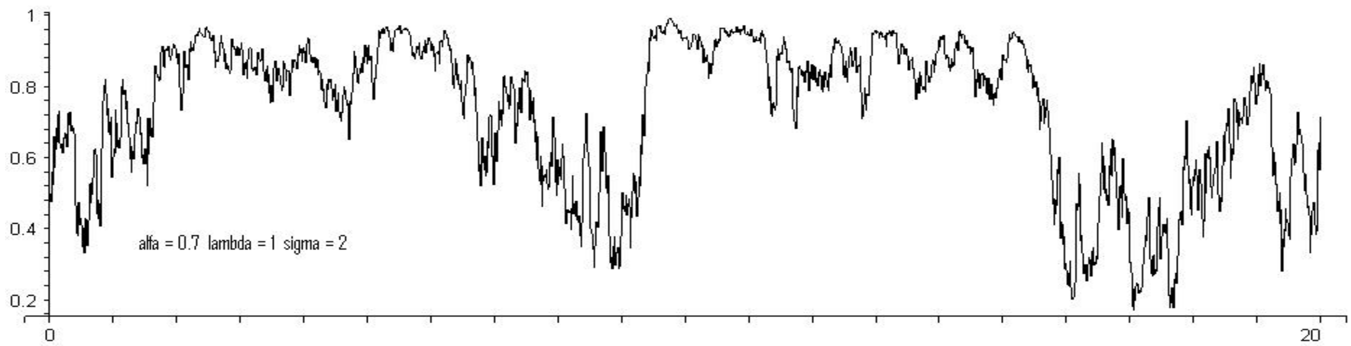
Ekvivalenti Ito lygtis:

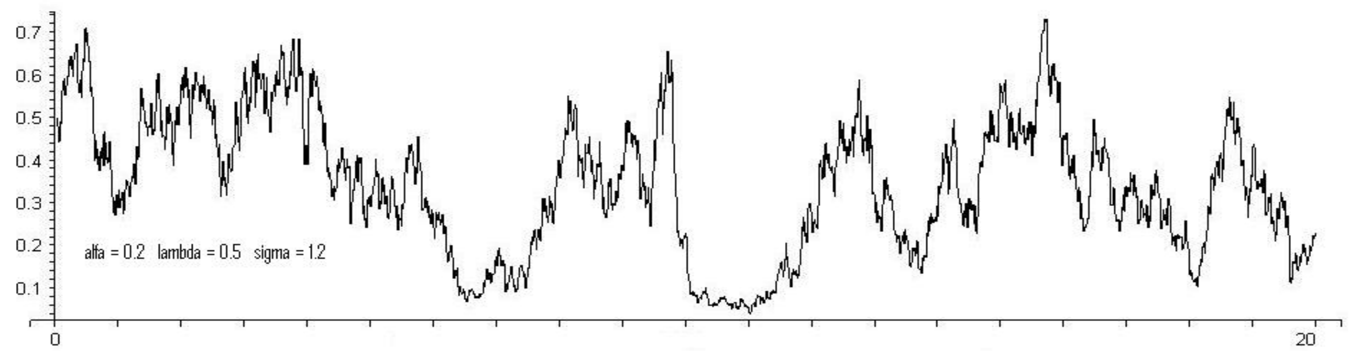
$$dX_t = (\alpha - X_t + \lambda X_t(1 - X_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 X_t(1 - X_t)(2 - X_t))dt + \sigma X_t(1 - X_t)dB_t, X_0 \in (0, 1).$$

4 pastaba. Jei $X_0 \in (0, 1)$, tai ir $X_t \in (0, 1)$ su visais $t \geq 0$ $(r.[1]psl.151)$.

Žemiau pateikiama keletas tipiškų trajektorijų:







Stacionarusis proceso tankis turi pavidalą (žr. Pastaba 1):

$$
\begin{aligned}
p_0(y) &= \frac{N}{\sigma^2 y(1-y)} \exp\left\{ \frac{2}{\sigma^2} \int\limits_c^y \frac{\alpha - u + \lambda u(1-u)}{u^2(1-u)^2} du \right\} \\
&= \frac{N}{\sigma^2 y(1-y)} \exp\left\{ \frac{2}{\sigma^2} \int\limits_c^y \left(\frac{\alpha - u}{u^2(1-u)^2} + \frac{\lambda}{u(1-u)} \right) du \right\} \\
&= \frac{N}{\sigma^2 y(1-y)} \exp\left\{ \frac{2}{\sigma^2} \int\limits_c^y \Big(I_1 + I_2 \Big) du \right\}.
\end{aligned}
$$

Rasime I_1 ir I_2 išraiškas:

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int\limits_c^y \frac{\alpha - u}{u^2(1-u)^2} du = \int\limits_c^y \left(\frac{\alpha}{u^2} + \frac{2\alpha - 1}{u} + \frac{\alpha - 1}{(1-u)^2} + \frac{2\alpha - 1}{1-u} \right) du \\
&= \left(-\frac{\alpha}{u} + \frac{\alpha - 1}{1-u} + (2\alpha - 1) \ln \frac{u}{1-u} \right) \Bigg|_c^y \\
&= \left(-\frac{\alpha}{y} + \frac{\alpha - 1}{1-y} + (2\alpha - 1) \ln \frac{y}{1-y} \right) \\
&- \left(-\frac{\alpha}{c} + \frac{\alpha - 1}{1-c} + (2\alpha - 1) \ln \frac{c}{1-c} \right). \\
I_2 &= \int\limits_c^y \frac{\lambda}{u(1-u)} du = \int\limits_c^y \lambda \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{1-u} \right) du \\
&= \lambda \Big(\ln u - \ln(1-u) \Big) \Bigg|_c^y = \lambda \left(\ln \frac{y}{1-y} - \ln \frac{c}{1-c} \right).
\end{aligned}
$$

Tarkime $c = 1/2$. Tada:

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \left(-\frac{\alpha}{y} + \frac{\alpha - 1}{1-y} + (2\alpha - 1) \ln \frac{y}{1-y} \right) + 2. \\
I_2 &= \lambda \ln \frac{y}{1-y}.
\end{aligned}
$$

Įstatę gauname:

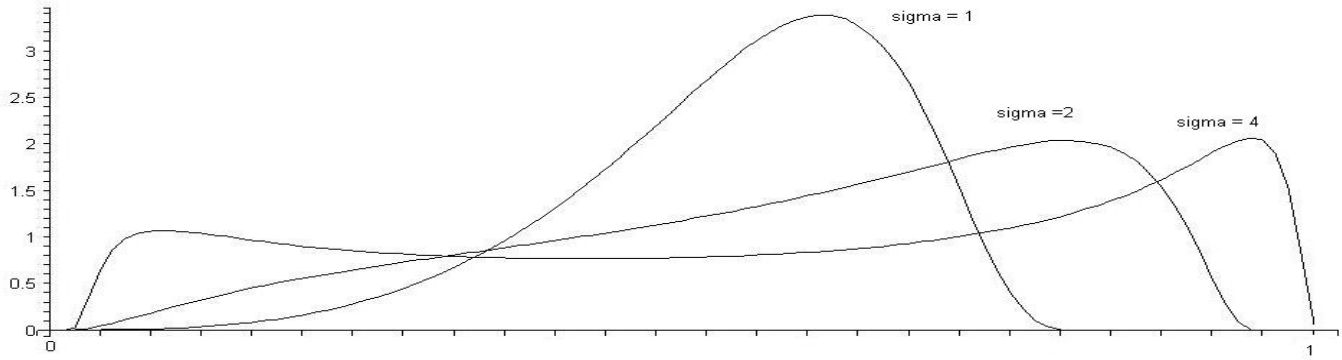
$$
\begin{aligned}
p_0(y) &= \frac{N}{\sigma^2 y(1-y)} \exp\left\{ \frac{2}{\sigma^2} \left(-\frac{\alpha}{y} + \frac{\alpha - 1}{1-y} + (2\alpha - 1) \ln \frac{y}{1-y} + 2 + \lambda \ln \frac{y}{1-y} \right) \right\} \\
&= \frac{N}{\sigma^2 y(1-y)} \exp\left\{ \frac{2}{\sigma^2} \left(-\frac{\alpha}{y} + \frac{\alpha - 1}{1-y} + (2\alpha + \lambda - 1) \ln \frac{y}{1-y} + 2 \right) \right\} \\
&= \frac{N}{\sigma^2 y(1-y)} \exp\left\{ \frac{2}{\sigma^2} \left(-\frac{\alpha}{y} + \frac{\alpha - 1}{1-y} \right) + \frac{4}{\sigma^2} + \ln \left(\frac{y}{1-y} \right)^{\frac{2}{\sigma^2}(2\alpha + \lambda - 1)} \right\} \\
&= \frac{N}{\sigma^2 y(1-y)} \exp\left\{ \frac{4}{\sigma^2} \right\} \exp\left\{ \frac{2}{\sigma^2} \left(-\frac{\alpha}{y} + \frac{\alpha - 1}{1-y} \right) \right\} \left(\frac{y}{1-y} \right)^{\frac{2}{\sigma^2}(2\alpha + \lambda - 1)} \\
&= \frac{N_1}{y(1-y)} \exp\left\{ \frac{2}{\sigma^2} \left(-\frac{\alpha}{y} + \frac{\alpha - 1}{1-y} \right) \right\} \left(\frac{y}{1-y} \right)^{\frac{2}{\sigma^2}(2\alpha + \lambda - 1)}.
\end{aligned}
$$

Tokiu būdu gavome formulę tankiui ir konstantai N:

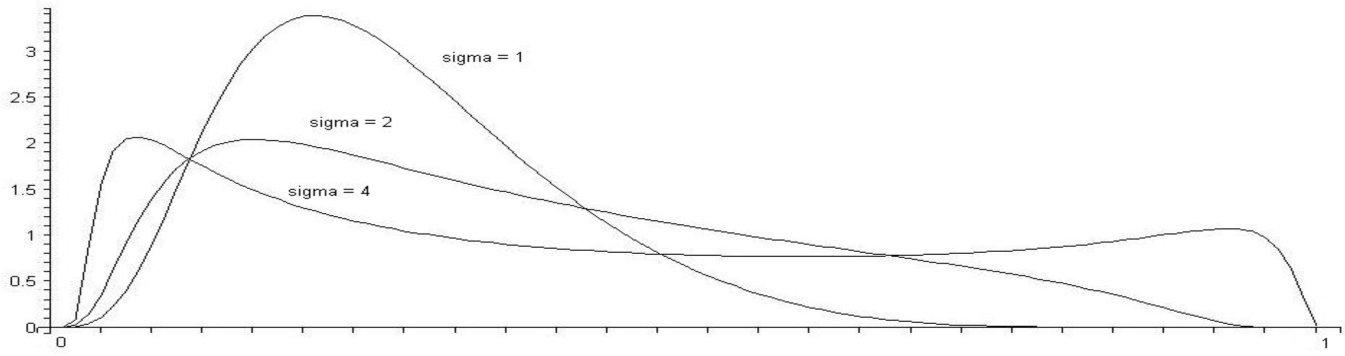
$$p_0(y) = \frac{N_1}{y(1-y)} \exp\left\{\frac{2}{\sigma^2}\Big(-\frac{\alpha}{y} + \frac{\alpha-1}{1-y}\Big)\right\}\Big(\frac{y}{1-y}\Big)^{\frac{2}{\sigma^2}(2\alpha+\lambda-1)}. \qquad \textbf{(27)}$$

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{N}{\sigma^2}\exp\left\{\frac{4}{\sigma^2}\right\} = \frac{1}{\sigma^2}\exp\left\{\frac{4}{\sigma^2}\right\}\Big(\int_0^1 \frac{1}{\sigma^2 y(1-y)}\exp\left\{\frac{4}{\sigma^2}\right\} \\ &\times \exp\left\{\frac{2}{\sigma^2}\Big(-\frac{\alpha}{y} + \frac{\alpha-1}{1-y}\Big)\right\}\Big(\frac{y}{1-y}\Big)^{\frac{2}{\sigma^2}(2\alpha+\lambda-1)} dy\Big)^{-1} \\ &= \Big(\int_0^1 \frac{1}{y(1-y)}\exp\left\{\frac{2}{\sigma^2}\Big(-\frac{\alpha}{y} + \frac{\alpha-1}{1-y}\Big)\right\}\Big(\frac{y}{1-y}\Big)^{\frac{2}{\sigma^2}(2\alpha+\lambda-1)} dy\Big)^{-1}. \end{aligned}$$

Gauta funcija integruojama intervale $(0,1)$ su visomis parametrų $\sigma > 0$ ir $\lambda \in R$ reikšmėmis, taigi ir nagrinėjama lygtis visada turi stacionarųjį tankį. Žemiau pavaizduota keletas genetinio modelio asimetrinių ($\lambda > 0$ arba $\lambda < 0$) tankių su parametrais $\alpha = 0.5, \lambda = 1$. Matome, kad didėjant σ, kinta tankio ekstremumų padėtis, bei skaičius.



Kai $\alpha = 0.5, \lambda = -1$ gauname:



2. Praktinė dalis.

2.1. Parametrų vertinimas: bendras atvejis

Sakykime, turime stochastinės diferencialinės lygties bei jos stacionaraus tankio išraiškas. Tada:

(1) Naudodamiesi *Oilerio-Marujama* aproksimacija skaičiuojame lygties sprendinį intervale $(0, T]$ su iš anksto nustatytu žingsniu h. Gautas stebėjimų skaičius yra T/h.

$$X_{k+1}^h = X_k^h + b(X_k^h)h + \sigma(X_k^h)\triangle B_k. \tag{28}$$

(2) Pradinė proceso reikšmė $X_0 = x_0$. Dažnai dalis pradinių sprendinio reikšmių yra atmetama, norint išvengti priklausomybės nuo pradinio taško.

(3) Nubraižoma stebėjimų histograma H su žingsniu h_1.

(4) Tada bandoma parinkti „geriausią" tankį, atitinkantį šią histogramą, tokį, kad:

$$F = \sum_{i=1}^{n} \Big(p_0(x_i) - H(x_i)\Big)^2 \to \min, \tag{29}$$

čia n - skaičius taškų, kuriuose skaičiuojamas skirtumas, $H(x_i)$ - histogramos reikšmė taške x_i.

(5) Funkcijai minimizuoti naudojamas *LUDE (Line-up Differential Evolution)* algoritmas (žr. 4.3). Pateiktuose rezultatuose buvo generuojama 20 sprendinių ir atliekama 100 iteracijų.

(6) Visą šį darbą atlieka mano parašyta kompiuterinė programa, veikianti *Microsoft Windows* terpėje (žr. 2.5).

2.2. Parametrų vertinimas: Vasicek'o lygtis

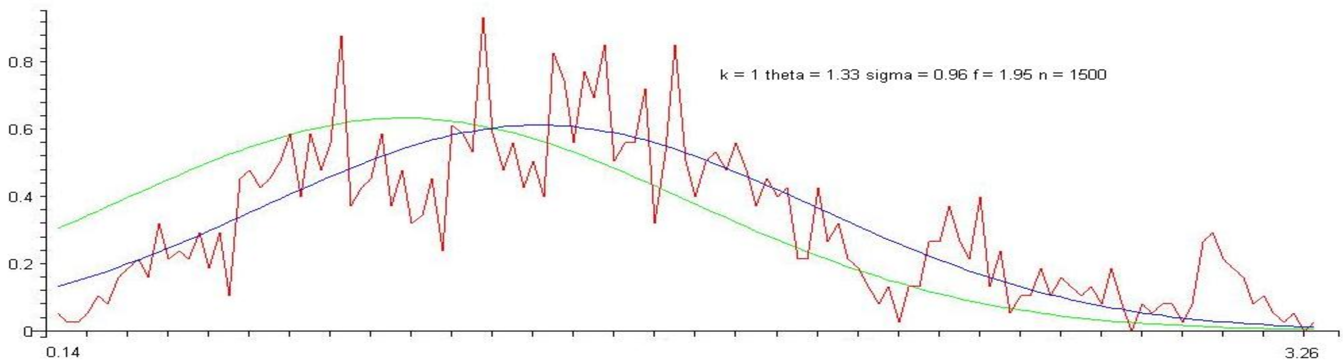
Vasicek'o lygties atveju stacionaraus tankio ir konstantos N išraiškos remiantis (15) ir (16) formulėmis yra:

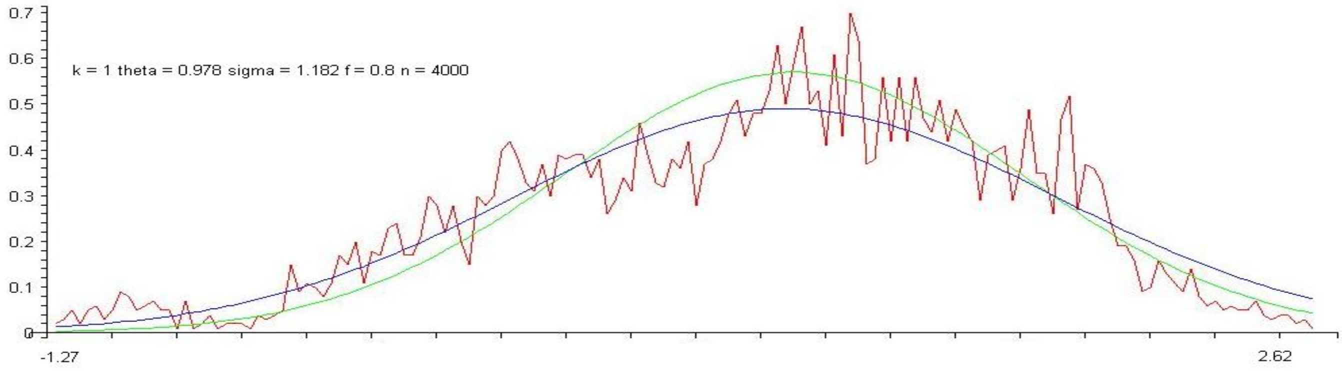
$$p_0(y) = \frac{N}{\sigma^2}\exp\left\{\frac{2k}{\sigma^2}(\theta y - \frac{y^2}{2})\right\} = N_1 \exp\left\{\frac{2k}{\sigma^2}(\theta y - \frac{y^2}{2})\right\}.$$
$$N_1 = \frac{N}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{k}\sigma}\exp\left\{\frac{k\theta^2}{\sigma^2}\right\}\right)^{-1} = \left(\frac{\sqrt{\pi}\sigma}{\sqrt{k}}\exp\left\{\frac{k\theta^2}{\sigma^2}\right\}\right)^{-1}.$$

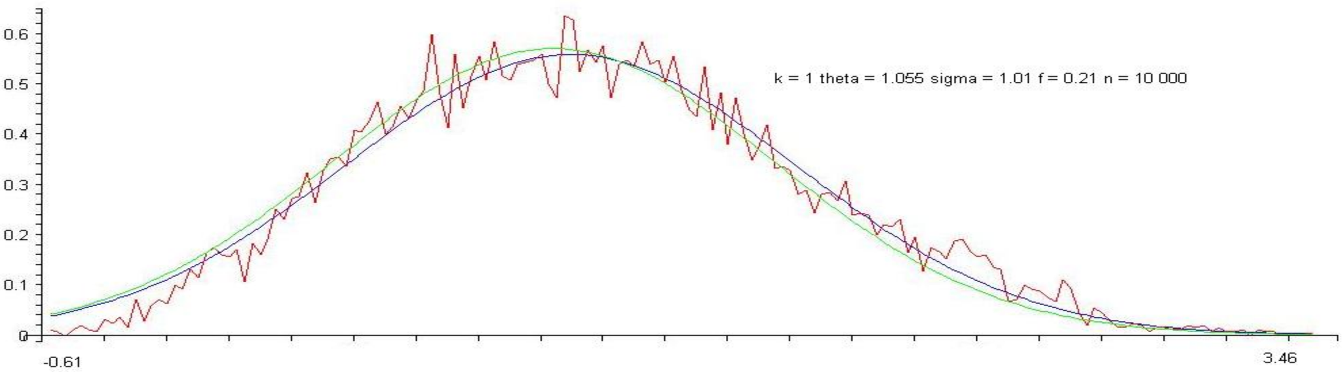
Matome, kad į tankio išraišką įeina $\frac{k}{\sigma^2}$, todėl mano taikomas metodas sugeba „pagauti" tik šį santykį, bet ne pačius parametrus. Lentelėje f - tikslo funkcijos reikšmė, n - imties dydis, naudotas histogramos žingsnis $h = 0.1$.

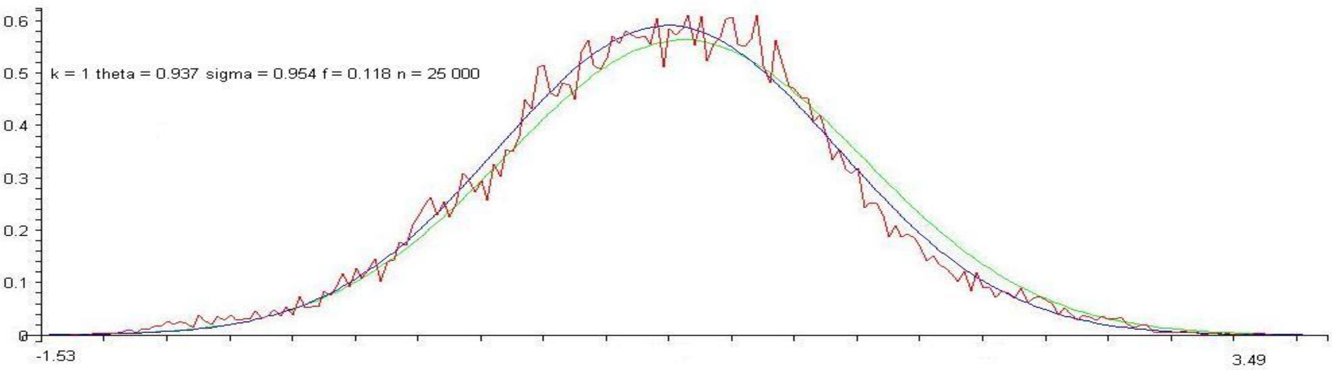
	Teoriniai parametrai		Gauti rezultatai		
1000 n	θ	k / σ^2	θ	k / σ^2	f
1	1	1	0.66656	0.99320	0.01959
5			0.86957	1.03476	0.04986
10			0.85920	1.01977	0.07567
100			0.99021	1.02733	0.00334
1000			0.94615	0.98450	0.00045
1	0.7	0.5	0.63960	0.65451	0.52190
5			0.58205	0.51579	0.03804
10			0.76357	0.58612	0.03423
100			0.67511	0.53592	0.00630
1000			0.63527	0.46945	0.00555
1	0.9	0.3(1)	1.51315	0.77305	0.17882
5			0.64662	0.40515	0.13204
10			0.90544	0.37381	0.03517
100			0.73150	0.28279	0.00220
1000			0.86021	0.30685	0.00073

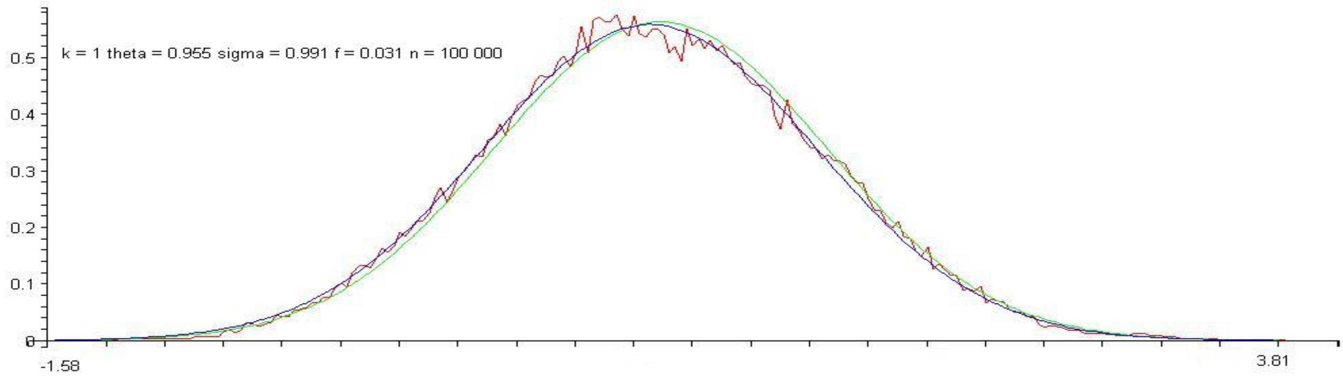
Žemiau pateikiama keletas grafikų (raudona spalva - duomenų histograma, žalia spalva - tankis su teoriniais parametrais, mėlyna spalva - tankis su mano įvertintais parametrais, imant iš anksto žinoma parametro k reikšmę, kad iš įvertinto santykio galėtume išskaičiuoti σ^2). Teoriniai parametrai $k = 1$, $\theta = 1$, $\sigma = 1$. Tada $k/\sigma^2 = 1$. Histogramos žingsnis $h = 0.025$




0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
k = 1 theta = 0.978 sigma = 1.182 f = 0.8 n = 4000
-1.27
2.62


0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
k = 1 theta = 1.055 sigma = 1.01 f = 0.21 n = 10 000
-0.61
3.46


0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
k = 1 theta = 0.937 sigma = 0.954 f = 0.118 n = 25 000
-1.53
3.49


0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
k = 1 theta = 0.955 sigma = 0.991 f = 0.031 n = 100 000
-1.58
3.81

2.3. Parametrų vertinimas: CKLS lygtis

Kai $\nu = 1$, gavome tokias formules:

$$\begin{aligned} p_0(y) &= N_1 \exp\Big\{-\frac{2k\theta}{\sigma^2 y}\Big\} y^{-\frac{2k}{\sigma^2}-2}. \\ N_1 &= \Big(\int\limits_0^{+\infty} \exp\Big\{-\frac{2k\theta}{\sigma^2 y}\Big\} y^{-\frac{2k}{\sigma^2}-2} dy\Big)^{-1}. \end{aligned}$$

Kai $\nu > 0$ ir $\nu \neq 1/2; \nu \neq 1$, tai:

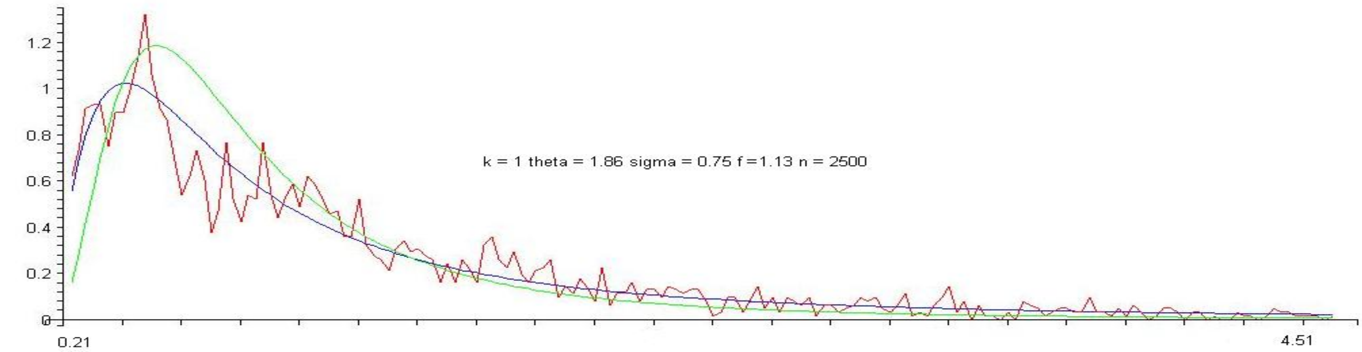
$$\begin{aligned} p_0(y) &= \frac{N_1}{y^{2\nu}} \exp\Big\{\frac{2k}{\sigma^2}\Big(\frac{\theta y^{1-2\nu}}{1-2\nu} - \frac{y^{2-2\nu}}{2-2\nu}\Big)\Big\}. \\ N_1 &= \Big(\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{y^{2\nu}} \exp\Big\{\frac{2k}{\sigma^2}\Big(\frac{\theta y^{1-2\nu}}{1-2\nu} - \frac{y^{2-2\nu}}{2-2\nu}\Big)\Big\}\Big)^{-1}. \end{aligned}$$

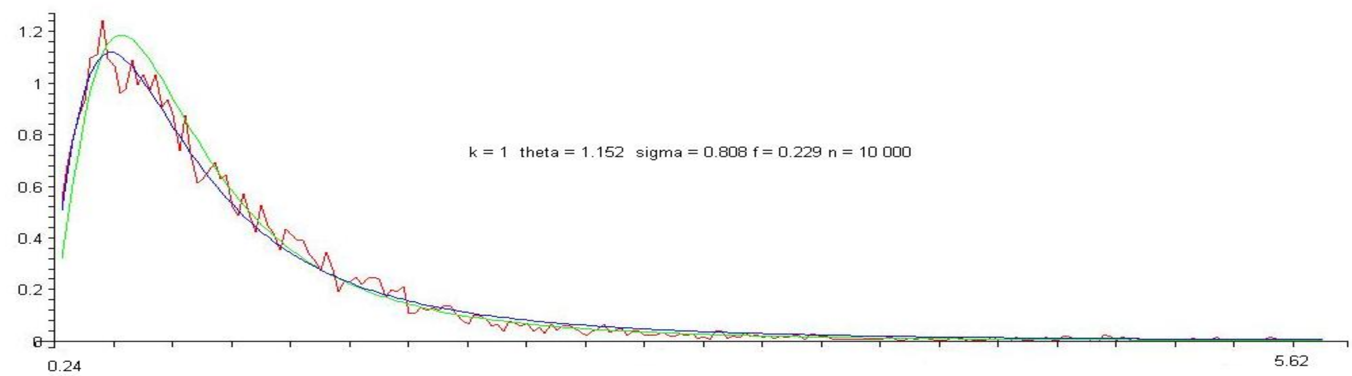
Konstantos N_1 išraiškoje intergralas skaičiuojamas intervale $(\min x_i, \max x_i)$, čia $i = 1 \ldots T/h$, bet ne intervale $(0, +\infty)$ (naudojama *Oilerio* aproksimacija (žr. 4.2)). Lentelėse f - tikslo funkcijos reikšmė, n - imties dydis, naudotas histogramos žingsnis $h = 0.025$. Pirmoje lentelėje pateikiami rezultatai, kai $\nu = 1$, antroje $\nu > 1/2,\ \nu \neq 1$.

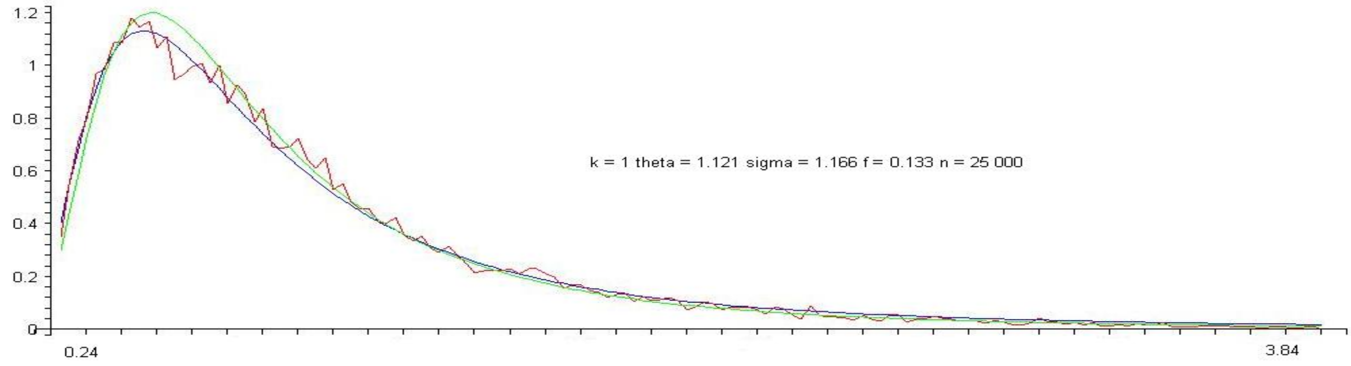
	Teoriniai parametrai		Gauti rezultatai		
1000 n	θ	k / σ^2	θ	k / σ^2	f
1	1	1	0.75619	1.418447	2.63112
5			1.35251	0.81723	0.40096
10			1.31228	0.83045	0.20683
100			0.95967	0.98897	0.02372
1000			1.01211	0.97807	0.01367
1	0.7	0.5	1.07807	0.19682	6.87914
5			0.70823	0.59995	0.92040
10			0.71392	0.41739	0.30993
100			0.69858	0.46080	0.13422
1000			0.62742	0.53453	0.08855
1	0.9	0.3(1)	1.35393	0.30916	2.27132
5			0.74723	0.40169	0.43688
10			1.37817	0.16840	0.23605
100			0.97360	0.24885	0.05058
1000			1.06005	0.22379	0.01905
1	1.5	1.2	1.58244	0.83120	2.16149
5			1.30031	1.66532	0.52242
10			1.76556	0.91728	0.30136
100			1.42642	1.22559	0.02686
1000			1.40904	1.31226	0.06340

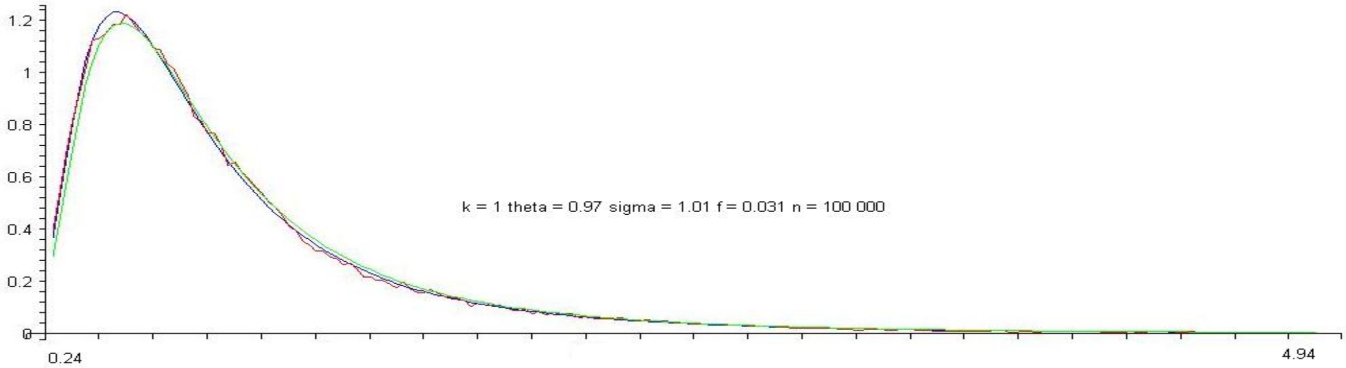
	Teoriniai parametrai			Gauti rezultatai			
1000 n	θ	k / σ^2	ν	θ	k / σ^2	ν	f
1	1	1	0.7	1.55007	0.50064	0.67976	2.64770
5				0.98124	0.96131	0.70624	0.54741
10				0.94251	1.01169	0.72103	0.33659
100				1.07510	0.92530	0.63984	0.06725
1	0.7	0.5	0.6	0.94143	0.40034	0.59153	4.31410
5				1.02439	0.32676	0.55311	1.42216
10				0.80757	0.50385	0.59802	0.88656
100				0.78736	0.56405	0.51753	1.49876
1	0.9	0.3(1)	1.2	1.37939	0.24170	1.20094	1.22905
5				0.95070	0.19414	1.20732	0.39231
10				1.01404	0.24610	1.17351	0.30539
100				0.90064	0.30322	1.14508	0.05283
1	1.5	1.2	1.1	1.79470	0.64400	1.24764	2.01783
5				1.57005	1.16670	1.13062	0.45946
10				1.51199	1.12473	1.13701	0.49924
100				1.36493	1.36879	0.91117	0.03525

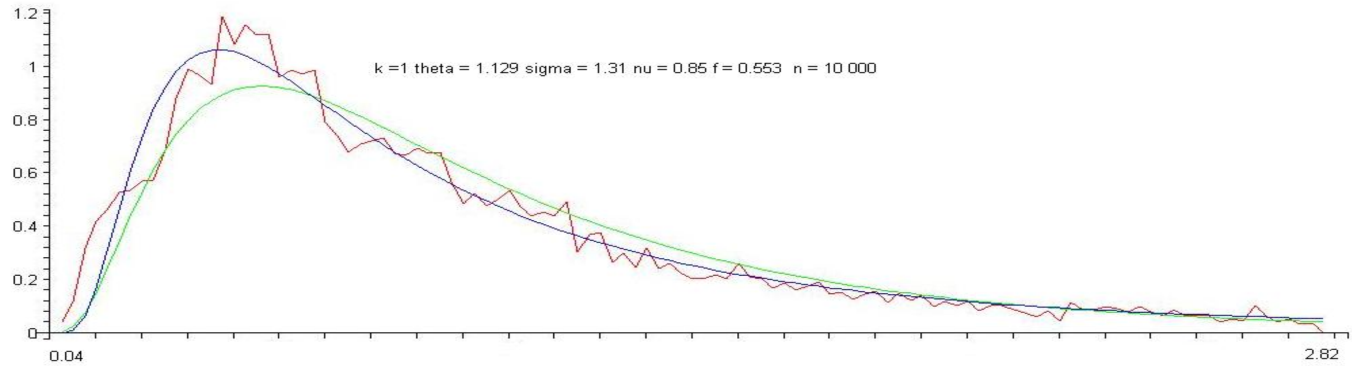
Žemiau pateikiama keletas grafikų (raudona spalva - duomenų histograma, žalia spalva - tankis su teoriniais parametrais, mėlyna spalva - tankis su mano įvertintais parametrais, imant iš anksto žinomą parametro k reikšmę). Histogramos žingsnis $h = 0.025$, teorinės parametrų reikšmės $k = 1,\ \theta = 1,\ \sigma = 1,\ \nu = 1$.

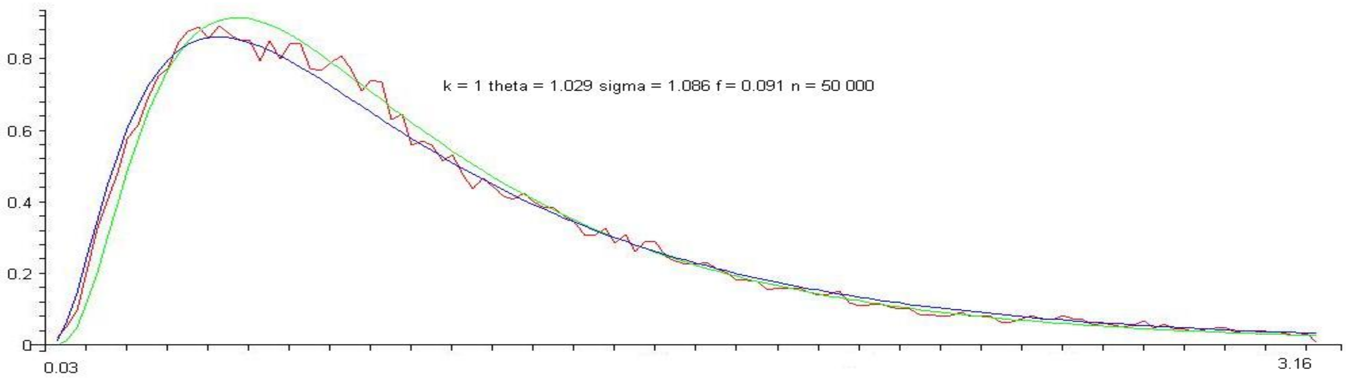





k = 1 theta = 1.121 sigma = 1.166 f = 0.133 n = 25 000
0.24
3.84


k = 1 theta = 0.97 sigma = 1.01 f = 0.031 n = 100 000
0.24
4.94


k =1 theta = 1.129 sigma = 1.31 nu = 0.85 f = 0.553 n = 10 000
0.04
2.82


k = 1 theta = 1.029 sigma = 1.086 f = 0.091 n = 50 000
0.03
3.16

2.4. Parametrų vertinimas: Genetinis modelis

Genetinio modelio atveju gautos tokios formulės:

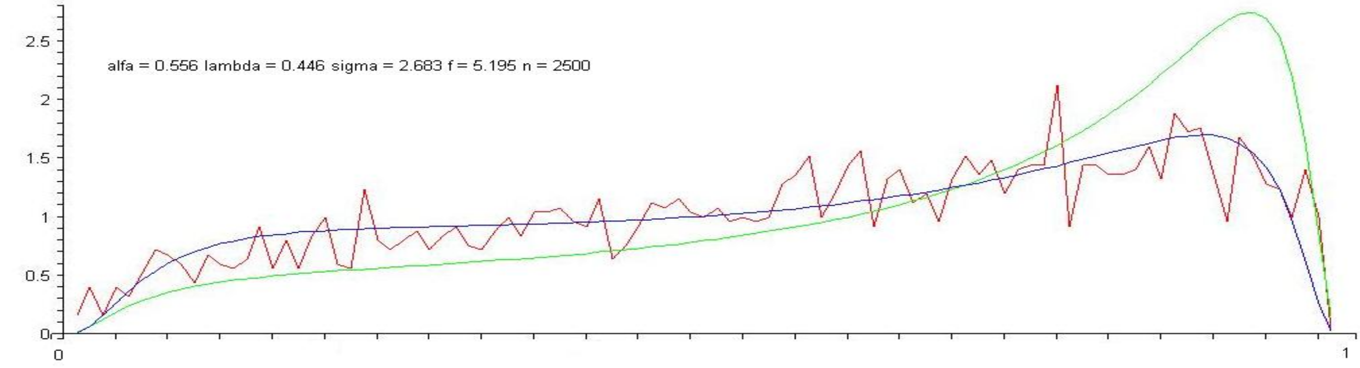
$$p_0(y) = \frac{N_1}{y(1-y)} \exp\left\{\frac{2}{\sigma^2}\left(-\frac{\alpha}{y}+\frac{\alpha-1}{1-y}\right)\right\}\left(\frac{y}{1-y}\right)^{\frac{2}{\sigma^2}(2\alpha+\lambda-1)}.$$

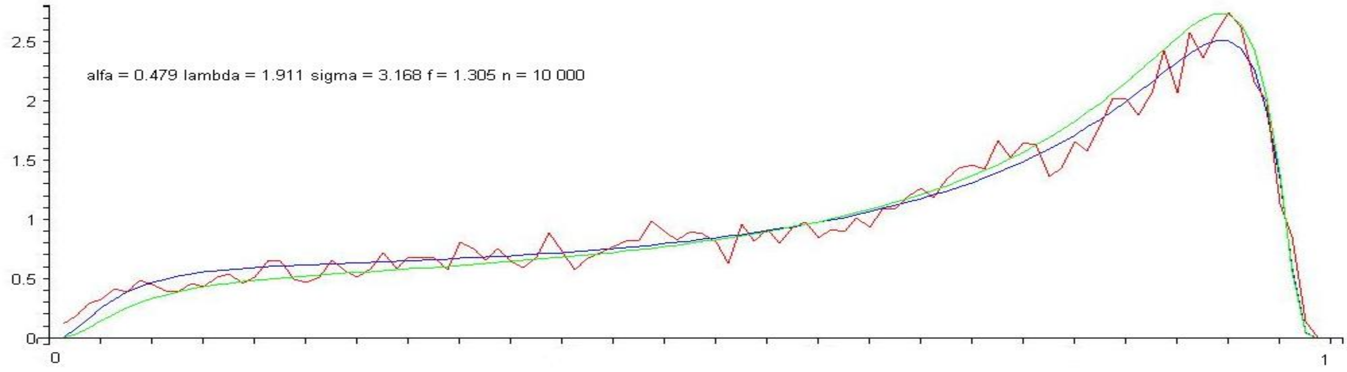
$$N_1 = \left(\int_0^1 \frac{1}{y(1-y)} \exp\left\{\frac{2}{\sigma^2}\left(-\frac{\alpha}{y}+\frac{\alpha-1}{1-y}\right)\right\}\left(\frac{y}{1-y}\right)^{\frac{2}{\sigma^2}(2\alpha+\lambda-1)} dy\right)^{-1}.$$

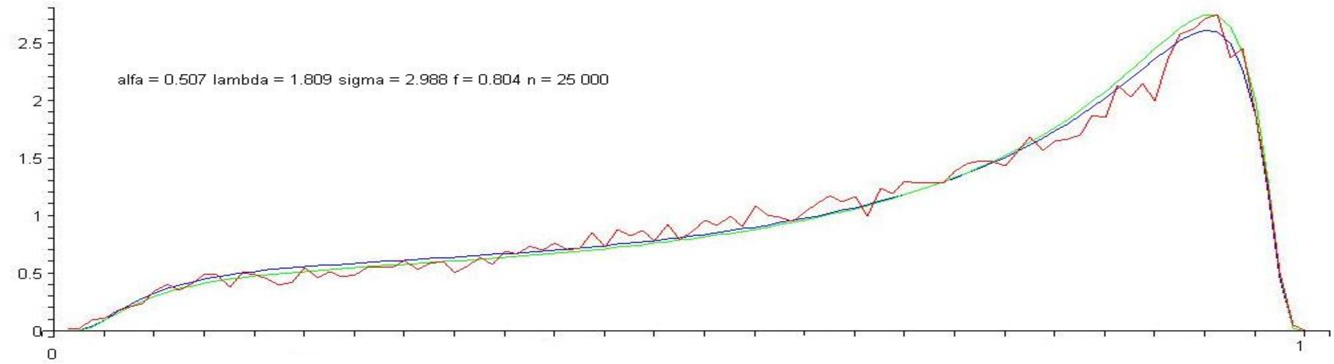
Pasinaudoję tankio ir konstantos išraiškomis vertiname parametrus α, λ, σ. Žemiau pateikiami rezultatai, gauti imant histogramos žingsnį $h = 0.01$:

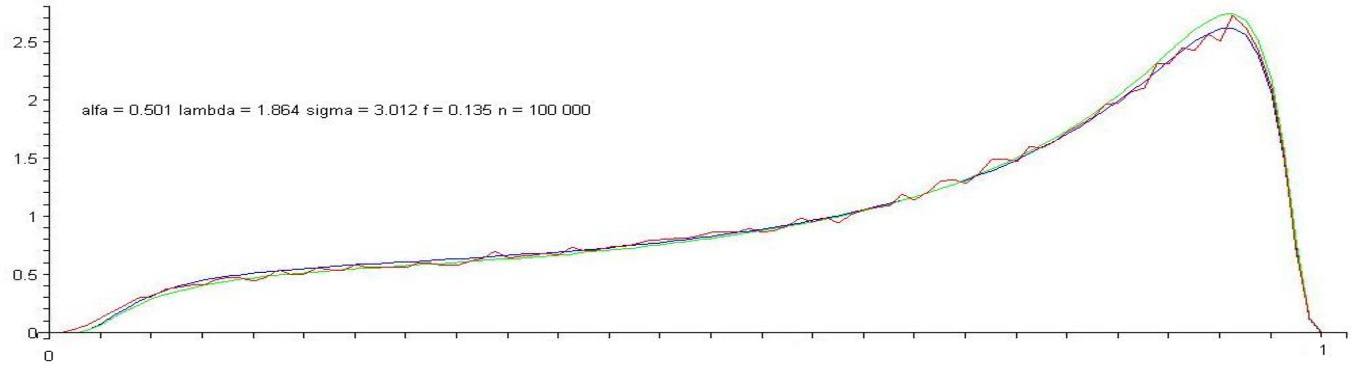
	Teoriniai parametrai			Gauti rezultatai			
1000 n	α	λ	σ	α	λ	σ	f
1	0.5	1	1	0.24656	1.46802	1.00492	24.98745
5				0.47851	0.94341	0.99908	4.563453
10				0.42174	1.32323	1.09234	2.106790
25				0.39467	1.41127	1.02669	0.578247
100				0.49150	1.02289	1.00568	0.205718
1	0.3	0.7	2	0.33465	0.60179	1.50717	16.14068
5				0.18026	1.04452	1.86528	3.098915
10				0.23114	1.43154	2.00556	1.729654
25				0.32846	0.45455	1.99249	0.902644
100				0.26466	0.88284	1.97940	0.214094
1	0.7	0.5	3	0.73413	0.58276	2.53685	17.46532
5				0.72122	0.69384	3.16144	3.311249
10				0.63044	0.25318	3.17761	1.492395
25				0.62178	0.64993	3.32081	0.949482
100				0.69344	0.39300	2.98577	0.168571
1	0.4	-1	2.5	0.32240	-1.52541	3.01470	18.82227
5				0.40981	-1.41188	2.55323	3.340878
10				0.38724	-1.02762	2.80091	1.407747
25				0.41577	-1.18389	2.62108	0.681430
100				0.34890	-0.69970	2.42337	0.399974
1	0.8	-3	1.5	0.67507	-3.15871	1.59774	11.02379
5				0.61450	-2.13305	1.34620	4.533296
10				0.81696	-3.24212	1.60453	4.232529
25				0.74033	-2.80429	1.80298	2.000021
100				0.74343	-2.85396	1.57428	0.544723
1	0.5	-8	3	0.46513	-7.86833	2.90325	7.295558
5				0.51519	-9.07045	3.64349	6.895383
10				0.38140	-6.98456	3.39003	6.127200
25				0.46127	-8.76654	3.54632	6.148012
100				0.36679	-6.29639	3.28809	5.500864

Keletas grafikų (spalvos, kaip ir anksčiau). Histogramos žingsnis $h = 0.01$, teorinės parametrų reikšmės $\alpha = 0.5,\ \lambda = 2,\ \sigma = 3,\ \nu = 1$.

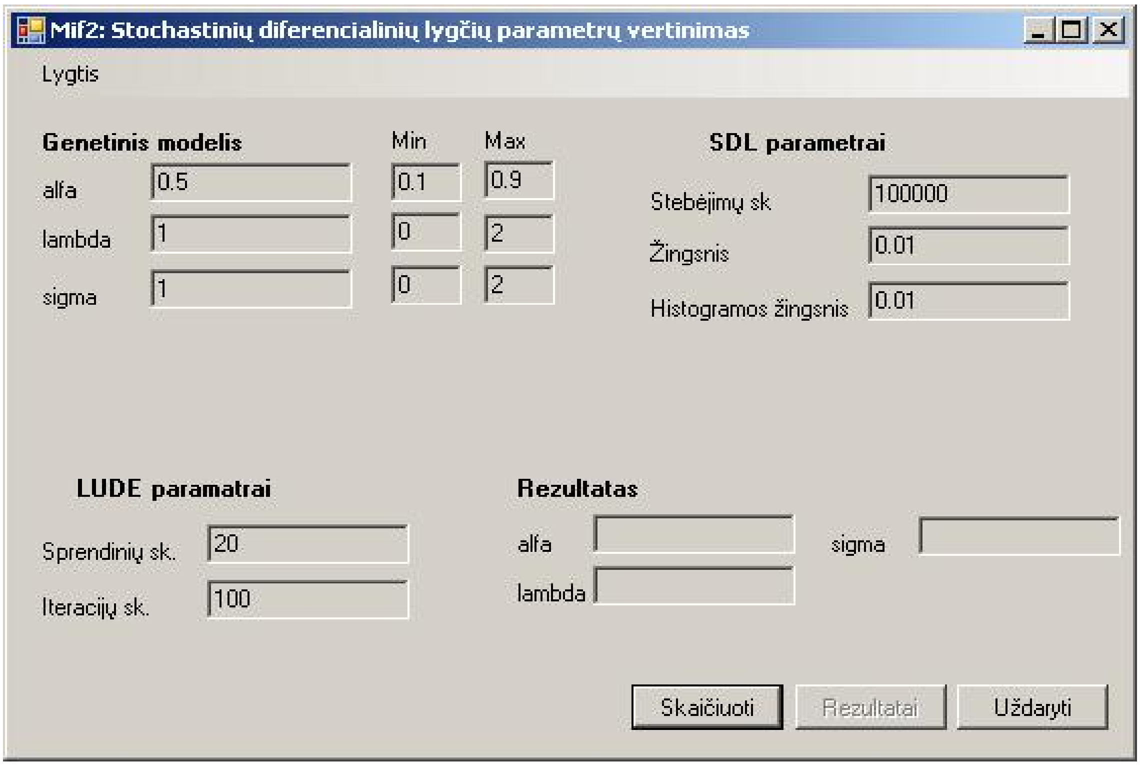








2.5. Programa



Stochastinių diferencialinių lygčių parametrams vertinti yra sukurta kompiuterinė programa, kurios vaizdas matomas šiame puslapyje. Vartotojas pasirenka norimą lygtį, lygties parametrus, bei intervalus, kuriuose bus ieškomi parametrų įverčiai. Be to, nustatomi LUDE algoritmui reikalingi: įteracijų skaičius ir generuojamų sprendinių skaičius, kurie bus naudojami tikslo funkcijos minimizavimui. Dešinėje lango dalyje esančiuose laukuose pasirenkami: stebėjimų skaičius (t.y. keliuose taškuose bus skaičiuojamas stochastinės diferencialinės lygties sprendinys), žingsnis h (t.y pasirenkamas tarpas tarp dviejų gretimų taškų, kuriuose skaičiuojamas sprendinys), histogramos žingsnis h_1.

Paspaudus mygtuką „Skaičiuoti" yra paskaičiuojami parametrų įvertinimai. Paspaudus mygtuką „Rezultatai" yra suformuojams dokumentas *PDF* formatu (žr. 4.5), kuriame yra išsaugojami gauti rezultatai, bei grafike pavaizduojami histograma iš duomenų ir tankiai: su teoriniais parametrais ir su programos apskaičiuotomis parametrų reikšmėmis.

Programą ir techninės įrangos reikalavimus galima rasti kartu su darbu pateikiamoje CD plokštelėje.

3. Išvados

Remiantis atliktais skaičiavimais galima teigti, kad kai stebėjimų skaičius yra labai didelis (pvz.: $N > 100000$) stochastinio genetinio modelio ir CKLS lygties parametrai yra įvertinami šimtųjų tikslumų. Kai imamas daug mažesnis N (pvz.: $N > 2000$) tikslumas sumažėja, tačiau nubrėžtas tankis su įvertintais parametrais gan „neblogai" aproksimuoja stebėjimų histogramą.

Išvedant formules pastebėta, kad CKLS lygties atveju į stacionariojo tankio išraiška visur įeina k/σ^2, todėl mano taikomas metodas nesugeba įvertinti šių parametrų atskirai, bet „gerai" įvertina jų santykį. Gauti rezultatai tai patvirtina.

Ateityje įdomų būtų panaudoti kitokias tikslo funkcijas, bei jų minimizavimui naudoti ne LUDE, bet kitokius algoritmus. Taip pat SDL sprendinį skaičiuoti naudojant aukštesnių eilių aproksimacijas.

Literatūra

[1] V. Mackevičius, *Stochastinė analizė*, Vilnius (2005).

[2] R. F. Bass, *The basics of financial mathematics*, Department of mathematics University of Connecticut (2003).

[3] P. Chalasani, S. Jha, *Stochastic calculus and finance*, Carnegie Mellon University (1997).

[4] H. Sarimveis, A. Niikolakopoulos, A line up evelutionary algorithm for solving nonlinear constrained optimization proglems, *Computers Operations Research*, **32**, 1499 – 1512 (2005).

[5] J. Jusel, *Tiesinių stochastinių diferencialinių lygčių modeliavimas*, *Bakalauro darbas*, Vilniaus Universitetas Matematikos ir Informatikos Fakultetas (2004).

[6] P. Banys, *Difuzijų, turinčių stacionarųjį tankį, parametrų vertinimas*, *Magistro darbas*, Vilniaus Universitetas Matematikos ir Informatikos Fakultetas (2006).

4. Priedai

4.1. Wienerio procesas arba Brauno judesys

Brauno judesys naudojamas aprašant daugelį fizinių ir matematinių reiskiniu. Pradžioje jis buvo skirtas mažos dalelės, veikiamos daugybės chaotišku molekulių smugių, judėjimo skystyje aprašymui. Pirmasis tokį judejimą aprašė anglų botanikas Robertas Braunas (Robert Brown) ($1827m.$).
Įdomu tai, kad Vynerio proceso prototipas pirmą kartą pasirodė siekiant matematiškai aprašyti akcijos kainos kurso kitimą. Iš esmės panašia matematine konstrukcija naudojosi Louis Bachelier savo 1900 metų darbe. Matematiškai korektiška šio proceso egzistavimo įrodymą pirmą kartą pateikė Norbertas Vyneris (Norbert Wiener) 1923 metais. Matematiškai šio proceso chaotiškumas pasireiškia tuo, kad jo trajektorijos, nors ir būdamos tolydžios, yra niekur nediferencijuojamos.

3 teorema. *Egzistuoja toks atsitiktinis procesas $B = \{B_t, t \geq 0\}$, kad*

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i S_{t_i}^n \to \sum_{i=1}^{k} \lambda_i B_{t_i} \tag{30}$$

kai $n \to \infty$ su visais rinkiniais $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_k, \lambda_i \in R, i = 1, 2, \ldots, k, k \in N$. Šią savybę žymėsime $S^n \to B$ ir sakysime, kad procesų seka $\{S^n\}$ silpnai konverguoja į B (baigtiniamačių skirstinių prasme). Procesas B vadinamas Brauno judesiu.

4 teorema. *Brauno judesį charakterizuojančios savybės:*

(i) $B(0) = 0$ ir visiems $0 < s < t < \infty$, $B(t) - B(s)$ yra normalus atsitiktinis dydis su vidurkiu 0 ir dispersija $t - s$;

(ii) pokyčiai $B(t_1) - B(s_1), \ldots, B(t_n) - B(s_n)$ yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai bet kuriems $0 < s_1 < t_1 < \cdots < s_n < t_n < \infty$;

(iii) proceso trejktorijos $B(\cdot, \omega)$ yra tolydžios funkcijos beveik visiems $\omega \in \Omega$.

4.2. Skaitinis integravimas

Jei žinome funkcijos $f(x)$ pirmykštę funkciją $F(x)$, tai apibrėžtinį integralą apskaičiuojame pagal *Niutono - Leibnico* formulę. Tačiau tik nedaugeliui funkcijų galime rasti pirmykštę. Tuomet stengiamasi kuriuo nors būdu apskaičiuoti integralo reikšmę apytiksliai.

Nagrinėkime integralą:

$$X_t = \int_0^t b(s, X_s) ds$$

Pažymėkime $h = T/n, t_k = kh$ ir pakeiskime integralą apytikre jo reikšme pagal stačiakampių formulę:

$$X_{t_{k+1}} \approx X_{t_k} + \int_{t_k}^{t_{k+1}} b(t_k, X_{t_k}) ds = X_{t_k} + b(t_k, X_{t_k}) h,$$

kai $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Atmetus paklaidą ir vietoje apytikslės lygybės naudojant tikaliąją, gauname paprasčiausią *Eulerio* aproksimaciją:

$$X^h_{t_{k+1}} = X^h_{t_k} + b(t_k, X_{t_k})h,$$

kai $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Įrodoma, kad *Eulerio* aproksimacija yra pirmosios eilės:

$$\sup_{t \leq T} |X^h_t - X_t| = O(h), h \to 0.$$

4.3. LUDE algoritmas

LUDE *(Line-up Differential evolution)* algoritmas naudojamas netiesinės funkcijos globalaus ekstremumo aproksimavimui. Vieninteliai šio algoritmo apribojimai yra funkcijos kintamųjų viršutinių ir apatinių rėžių nustatymas. Sakykime sprendinys yra n-matis vektorius $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Be to turime viršutini $x^{up} = (x^{up}_1, \ldots, x^{up}_n)$ ir apatinį $x^{lo} = (x^{lo}_1, \ldots, x^{lo}_n)$ rėžius. Taip pat pasirenkame maksimalų įteracijų skaičių $mxiter$.

(1) Generuojame L sprendinių $x_i = (x_{1i}, \ldots, x_{ni}), i = 1, \ldots, L$. Čia x_{ki} yra imamas tolygiai pasiskirtęs intervale (x^{lo}_k, x^{up}_k);

(2) Iteracijų skaičius $iter = iter + 1$;

(3) Skaičiuojame tikslo funkcijos reikšmę kiekvienam mūsų sugeneruotam sprendiniui: $f(x_i), i = 1, \ldots, L$;

(4) Sprendiniai išrikiuojami tikslo funkcijos mažėjimo tvarka, t.y x_i eina prieš x_j, jei $f(x_i) > f(x_j)$, kai $i, j = 1, \ldots, L$;

(5) Toliau atliekama sekanti procedūra ($r \sim U[0,1]$):
$for(i = 0; i < L-1; i++)\{$
$x_{new} = x_i + r(x_{i+1} - x_i);$
$if(f(x_{new}) < f(x_{i+1}))x_i = x_{new};$
$\}$

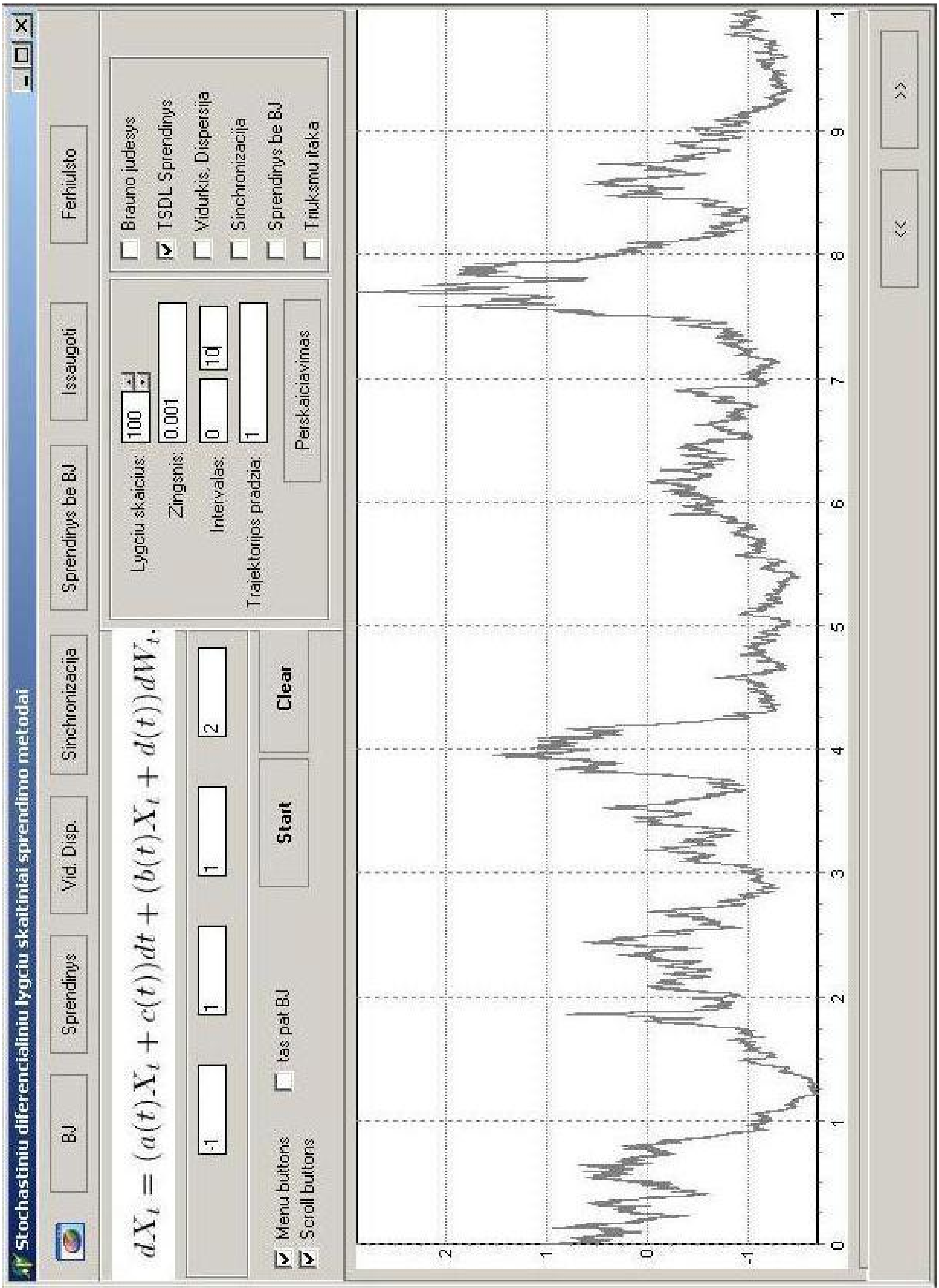
(6) Kartojamas (4) žingsnis;

(7) Atliekama sekanti procedūra ($r, r_1 \sim U[0,1]$ ir $P\{b=0\} = P\{b=1\} = 1/2$):
$for(i = 0; i < L; i++)\{$
$p_{m,i} = \frac{L-i+1}{L}$
$for(j = 0; j < N_1; j++)\{$
$if(r < p_{m,i})$
$if(b = 0)x_{i,new}(j) = x_i(j) + (x^{up}(j) - x_i(j))\frac{r_1}{d}\exp\{-2iter/mxiter\}$
$if(b = 1)x_{i,new}(j) = x_i(j) - (x_i(j) - x^{lo}(j))\frac{r_1}{d}\exp\{-2iter/mxiter\}$
$\}$
$if(f(x_{i,new}) < f(x_i))x_i = x_{i,new};$
$\}$

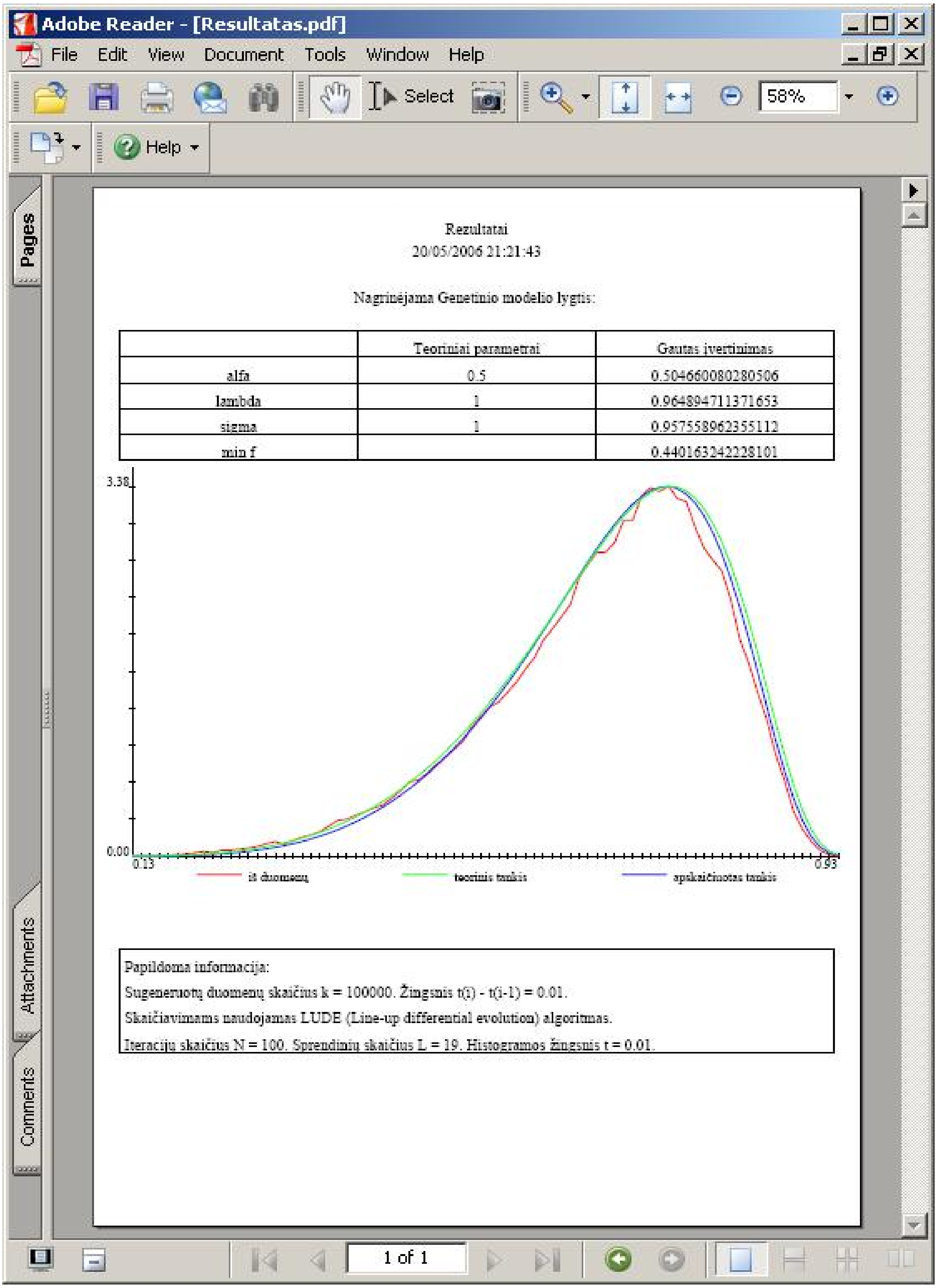
(8) Kartojamas (4) žingsnis;

(9) Jei $iter < mxiter$ grįžtame prie (2) žingsnio;

4.4. Balakauro darbo programa



4.5. Rezultatų atvaizdavimas



Rezultatai
20/05/2006 21:21:43

Nagrinėjama Genetinio modelio lygtis:

	Teoriniai parametrai	Gautas įvertinimas
alfa	0.5	0.504660080280506
lambda	1	0.964894711371653
sigma	1	0.957558962355112
min f		0.440163242228101

Papildoma informacija:
Sugeneruotų duomenų skaičius k = 100000. Žingsnis t(i) - t(i-1) = 0.01.
Skaičiavimams naudojamas LUDE (Line-up differential evolution) algoritmas.
Iteracijų skaičius N = 100. Sprendinių skaičius L = 19. Histogramos žingsnis t = 0.01.