VILNIAUS UNIVERSITETAS

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

MATEMATINĖS STATISTIKOS KATEDRA

Rimantė Žiaunytė ____________

(parašas)

HIERARCHINIS DVIEJŲ ETAPŲ KLASIFIKAVIMAS

Magistro baigiamasis darbas

Vilnius, 2012

Darbo vadovas:

doc. Rūta Levulienė

(parašas)

Recenzentas:

doc. Pranas Vaitkus

(parašas)

Registracijos Nr.: ....

Darbo gynimo data: ....

TURINYS

Sutartinių terminų sąrašas

a. d. – atsitiktinis dydis
a. v. – atsitiktinis vektorius
X, Y, Z, ... – atsitiktiniai dydžiai
X, **Y**, **Z**, ... – atsitiktiniai vektoriai

ĮVADAS

Klasifikavimo uždaviniai dažnai sprendžiami įvairiose mokslo srityse bei praktikoje. Medicinoje taikomi diagnozavimo – klasifikavimo uždaviniai paskiriant pacientui vienokį ar kitokį gydymą, atsižvelgiant į paciento apibūdintus ligos požymius, tyrimų rezultatus, papildomų tyrimų rezultatus bei reakciją į jau paskirtą gydymą. Pavyzdžiui, vėžio susirgimų rizikos grupėje, esantiems pacientams, skiriami pirminiai ankstyvosios stadijos vėžio žymenų laboratoriniai tyrimai, po šių tyrimų rezultatų, esant įtarimui, gali būti skiriami papildomi pakartotiniai arba sudėtingesni tyrimai. Gamyboje, išleidžiamosios kontrolės metu, klasifikuojami gaminiai į kokybiškus ir brokuotus, atsižvelgiant į gaminio parametrų matavimus. Chemijoje klasifikuojamos cheminės medžiagos bei jų mišiniai, genetikoje sprendžiami DNR klasifikavimo uždaviniai.

Dažniausiai objektai klasifikuojami pagal tam tikrus turimus pirminius parametrus, kurie nereikalauja brangių kaštų bei laiko jiems surinkti. Tačiau pasitaiko atvejų, kai pagal šiuos parametrus dalis objektų gali atitikti kelių klasių reikalavimus. Tokiu atveju galima rinktis dviejų etapų hierarchinį klasifikavimą. Pirmuoju klasifikavimo etapu remiantis pirmine informacija klasifikuojami objektai su abiejų rūšių klaidingų sprendimų tikimybių apribojimais, o objektai, kuriems atsisakoma priimti sprendimą, klasifikuojami antruoju etapu. Šiuo atveju atsiranda papildomas reikalavimas, kad atsisakymas priimti galutinį sprendimą būtų kuo retesnis, tačiau abiejų rūšių klaidingų sprendimų tikimybės neviršytų apribojimų. Jei atsisakymai nuo sprendimo būtų dažni, o papildomos informacijos surinkimo kaštai – pakankamai brangūs, prarastumėme išlaidų, skirtų kontrolei, ekonomiją, pavyzdžiui, gaminio savikaina taptų brangesnė nei jo rinkos kaina.

Po pirmojo klasifikavimo etapo, atsiranda galimybė rinktis, kaip bus elgiamasi su objektais, kurie pirmuoju etapu nebuvo suklasifikuoti: mažinti gaminio kainą, rūšį, nurašyti arba surinkti papildomą informaciją, kuri gali užimti laiko bei kainuoti brangiau nei pirminiai duomenys, pagal kurią objektas bus priskiriamas vienai iš klasių, kitaip sakant, atliekamas antro etapo klasifikavimas. Naudojant pirminio klasifikavimo be galimybės atsisakyti sprendimo taisyklę galime valdyti tik vieną iš pasirinktų klasifikavimo klaidingų sprendimų tikimybių, todėl kelių etapų hierarchinis klasifikavimas yra pranašesnis, nes įtartinais atvejais, kai galutinis sprendimas nėra priimamas, atsiranda galimybė valdyti abiejų rūšių klaidas. Jeigu antrojo etapo klasifikavimo metu surinkta papildoma informacija taip pat nepakankama pilnam objektų suskirstymui, galime rinktis trečiojo etapo hierarchinį klasifikavimą bei rinkti naują papildomą informaciją. Taip pat galime rinktis tiek klasifikavimo etapų, kol bus suklasifikuoti visi objektai į klases arba nuspręsti, kuriuo klasifikavimo atveju turi būti suklasifikuota likusi objektų dalis, kuri nebuvo priskirta vienai iš klasių. Šiame darbe tariama, kad visi stebėjimai bus suklasifikuoti į atitinkamas klases sprendžiant dviejų etapų hierarchinį klasifikavimą.

Šio darbo pirmame skyrelyje supažindinama su klasifikavimo uždavinio pagrindinėmis sąvokomis ir žymenimis, kurie bus naudojami kituose skyriuose. Kiekvienu klasės atveju sprendžiami du skirtingi sąlyginio ekstremumo uždaviniai, t.y. apribojant klaidingų sprendimų klasifikavimo tikimybes α_{ij}, $i, j = 1, 2, .., m$, (m – klasių skaičius) arba apribojant aposteriorines klasifikavimo tikimybes β_{ji}, $i, j = 1, 2, .., m$, kurios apibūdina po klasifikavimo gautų aibių užterštumą kitų aibių elementais. Moksliniuose straipsniuose dažniausiai naudojami dviejų klasių klasifikavimo pavyzdžiai, kuriuose optimizuojama atsisakymo nuo sprendimo taisyklė, tačiau neužsimenama apie detalesnę analizę objektų, kuriems buvo atsisakyta priimti sprendimą. Šaltinyje [6] užsimename apie galimą tolimesnio klasifikavimo eigą, taip pat, šaltinyje [7] trumpai aprašyta dviejų klasių atvejo hierarchinio klasifikavimo procedūra. Šio darbo tikslas yra detalizuoti objektų, kuriems buvo atsisakyta priimti sprendimą, klasifikavimo etapą dviejų ir trijų klasių atveju apribojant klaidingų sprendimų klasifikavimo tikimybes α_{ij}, $i, j = 1, 2, .., m$, arba aposteriorines klasifikavimo tikimybes β_{ji}, $i, j = 1, 2, .., m$. Antrame skyriuje yra aprašomi dviejų klasių hierarchinio klasifikavimo etapai, apribojant tikimybes α_{ij}. Trečiajame etape aprašyti antrojo skyriaus sąlyginio ekstremumo uždaviniai su β_{ji} tikimybių apribojimais. Ketvirtame skyriuje analizuojami sąlyginio ekstremumo uždaviniai, sprendžiami 1 etape 1 ir 2 žingsniuose, atsižvelgiant į sprendimų priėmimo sritis, kurios yra priklausomos nuo sprendimo priėmimo taisyklių. 1 etape 1 žingsnyje maksimizuojamos teisingų sprendimų klasifikavimo tikimybės apribojant klaidingas sprendimų tikimybes bei minimizuojamos sprendimų priėmimo atsisakymo tikimybės. 1 etape 2 žingsnyje detalizuojami sprendimų priėmimo atsisakymo tipai objektams, kuriems 1 etape 1 žingsnyje sprendimų priėmimo taisyklė $\varphi_0^*(\boldsymbol{x}) > 0$. Objektai priskiriami $\overline{1}, \overline{2}$ arba $\overline{3}$ klasei, t.y. priskiriamas ne pirmai, ne antrai arba atitinkamai ne trečiai klasei, ir 0, jei yra atsisakoma priimti sprendimą. 2 etape sprendžiami 4 klasifikavimo uždaviniai, kurie objektus priskirtus $\overline{1}, \overline{2}$, $\overline{3}$ arba 0 klasei suklasifikuoja į 1, 2 ir 3 klases. Penktame skyriuje sprendžiami sąlyginio ekstremumo uždaviniai nagrinėti prieš tai buvusiame skyriuje apribojant aposteriorines klasifikavimo tikimybes β_{ji}. 6 skyriuje pateikiamas teorinės dalies trijų klasių hierarchinio 2 etapų klasifikavimo uždavinio iliustracinis pavyzdys. Skaičiavimus atlikau naudodama SAS ir MS Excel programinę įrangą, sprendimų priėmimo sričių grafikai buvo braižomi Microsoft Office Visio Drawing programa.

Darbo pabaigoje pateikiamos gautų rezultatų išvados, darbo reziumė lietuvių ir anglų kalbomis, literatūros ir naudotų šaltinių sąrašas. SAS programinės įrangos uždavinių skaičiavimo kodai pateikti kompaktiniame diske.

1. Pagrindinės sąvokos ir žymenys

Pagrindines sąvokas bei žymenis aprašysiu dviejų klasių atveju be atsisakymo priimti sprendimą. Klasifikuojamus objektus apibūna a. v. $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)^T$. Dėl paprastumo tegu a. d. ξ įgyja reikšmę 1 arba 2, jei objektas atitinkamai priklauso pirmai ar antrai klasei. A. d. η įgyja reikšmes 1 arba 2, jei objektas priskiriamas pirmai arba antrai klasei.

Tikimybės, apibūdinančios klasifikavimo tikslumą, yra

$$\alpha_{ij} = \mathbf{P}\{\eta = i | \xi = j\},\ i, j = 1, 2. \tag{1.1}$$

1.1 lentelė. Klasifikavimo tikslumo tikimybės

$\xi \backslash \eta$	1	2	Σ
1	α_{11}	α_{21}	1
2	α_{12}	α_{22}	1

1.1 lentelėje α_{11} ir α_{22} yra teisingų sprendimų tikimybės, α_{12} ir α_{21} – klaidingų sprendimų tikimybės. Klasifikavimo taisyklė tuo geresnė, kuo didesnės teisingų sprendimų tikimybės α_{11} ir α_{22} ir kuo mažesnės klaidingų sprendimų tikimybės α_{12} ir α_{21}.

Aposteriorinės klasifikavimo tikimybės (po sprendimo priėmimo) yra

$$\beta_{ji} = \mathbf{P}\{\xi = j | \eta = i\} = \frac{\alpha_{ij}\omega_j}{\alpha_{i1}\omega_1 + \alpha_{i2}\omega_2},\ i, j = 1,2. \tag{1.2}$$

1.2 lentelė. Aposteriorinės klasifikavimo tikimybės

$\xi \backslash \eta$	1	2
1	β_{11}	β_{12}
2	β_{21}	β_{22}
Σ	1	1

Aposteriorinės klasifikavimo tikimybės β_{ji} apibūdina klaidas, kurios buvo gautos po atlikto klasifikavimo. Šios tikimybės apibūdina po klasifikavimo gautų aibių užterštumą kitų aibių elementais.

Apriorinės klasių tikimybės, nusakančios kiekvienos klasės objektų pasikartojimą, yra:

$$\omega_1 = \mathbf{P}(\boldsymbol{\xi} = 1),\ \omega_2 = \mathbf{P}(\boldsymbol{\xi} = 2),\ \omega_1 + \omega_2 = 1. \tag{1.3}$$

A. v. $\mathbf{X}$ tankis σ - baigtinio mato $\boldsymbol{\mu}$ atžvilgiu, kai $\xi = i$, yra $f_i(\boldsymbol{x})$, t.y. $(\mathbf{X}|\xi = i) \sim f_i(\boldsymbol{x})$, (1.4) $i = 1, 2$.

Sprendimų priėmimo taisyklė nusakoma dvimate funkcija $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) = (\varphi_1(\boldsymbol{x}), \varphi_2(\boldsymbol{x}))$, $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^k$; čia $\varphi_i(\boldsymbol{x})$ reiškia tikimybę priskirti objektą i - ajai klasei, kai a. v. $\mathbf{X}$ įgijo reikšmę $\boldsymbol{x}$:

$$\varphi_i(\boldsymbol{x}) = \mathbf{P}\{\eta = i | \mathbf{X} = \boldsymbol{x}\},\ 0 \le \varphi_i(\boldsymbol{x}) \le 1,\ i = 1, 2;\ \varphi_1(\boldsymbol{x}) + \varphi_2(\boldsymbol{x}) \equiv 1. \tag{1.5}$$

Tokių funkcijų $\varphi_i(\boldsymbol{x})$, $i = 1,2$, aibė žymima $\boldsymbol{\Phi}$. Tikimybės α_{ij} yra sprendimų priėmimo taisyklės $\varphi_i(\boldsymbol{x})$ funkcijos:

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ij}(\boldsymbol{\varphi}) = \int \varphi_i(\boldsymbol{x}) f_j(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{\mu},\ i, j = 1, 2. \tag{1.6}$$

Literatūroje dažniausiai nagrinėjami uždaviniai, kuriuose parinkta klasifikavimo taisyklė turi minimizuoti tiesinę tikimybių α_{ij} funkciją, t.y. *nuostolių funkciją*:

$$F = \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}\alpha_{ij} \to \min. \tag{1.7}$$

Skiriami tokie funkcijos atvejai:

1) minimizuojama suminė klasifikavimo klaida $\alpha_{12} + \alpha_{21}$, kai $a_{ij} = 1,\ i \neq j$, ir $a_{ii} = 0$, $i = 1, 2$;
2) Bejeso klasifikavimo taisyklė, kai $a_{ij} = \omega_j,\ i \neq j$, ir $a_{ii} = 0,\ i = 1, 2$; čia ω_1 ir ω_2 – apriorinės klasių tikimybės;

3) Atsižvelgiama į nevienodus klaidingų sprendimų padarinius įvedant svorius $c_{21} > 0$ ir $c_{12} > 0$, t.y. $a_{ij} = c_{ij}\omega_j,\ i \neq j$, ir $a_{ii} = 0,\ i = 1, 2$.

Tačiau ne visada galima apsiriboti tik nuostolių funkcijos minimizavimu, reikia, kad būtų patenkinti tam tikri apribojimai. Jeigu esant apribotai vienai iš klaidingų sprendimų tikimybių (α_{12} arba α_{21}) minimizuojama kitos klaidos tikimybė (arba maksimizuojama teisingo sprendimo tikimybė):

$$\begin{cases}\alpha_{21} \to \min, \\ \alpha_{12} \leq \alpha,\end{cases} \quad \text{arba} \quad \begin{cases}\alpha_{11} \to \max, \\ \alpha_{12} \leq \alpha,\end{cases} \tag{1.8}$$

Kadangi $\alpha_{11} + \alpha_{21} = 1$, tai minimizavimo uždavinys yra ekvivalentus maksimizavimo uždaviniui. (1.8) uždavinys vadinamas *hipotezių tikrinimo uždaviniu*.

Tikrinama paprastoji hipotezė $H: \xi = 1$, kai alternatyva $\bar{H}: \xi = 2$ irgi paprastoji. Skaičius $0 < \alpha < 1$ vadinamas *kriterijaus reikšmingumo lygmeniu*; tikimybė α_{11} vadinama *kriterijaus galia*, o uždavinio (1.8) sprendinys $\boldsymbol{\varphi}^* \in \boldsymbol{\Phi}$ vadinamas *galingiausiu kriterijumi*.

Uždavinio sprendinys $\boldsymbol{\varphi}^*$, tariant, kad sprendimų priėmimo taisyklė yra randomizuotoji, pagal fundamentaliąją Neimano - Pirsono lemą lygus [8]:

$$\varphi_1^*(\boldsymbol{x}) = \begin{cases}1, & f_1(\boldsymbol{x}) > cf_2(\boldsymbol{x}), \\ \delta, & f_1(\boldsymbol{x}) = cf_2(\boldsymbol{x}), \\ 0, & f_1(\boldsymbol{x}) < cf_2(\boldsymbol{x}).\end{cases} \tag{1.9}$$

Konstantos $c \geq 0$, $\delta \in [0,1]$ randamos iš sąlygos $\alpha_{12}(\ \varphi_1^*) = \alpha$.

2. Hierarchinis klasifikavimas dviejų klasių atveju atsisakant priimti sprendimą

1 etapas. Tegu a. d. ξ įgyja reikšmę 1 arba 2, jei objektas atitinkamai priklauso pirmai ar antrai klasei, o a. d. η įgyja reikšmes 1 arba 2, jei objektas priskiriamas pirmai ar antrai klasei, ir 0, jei atsisakoma priimti sprendimą priskirti objektą vienai iš dviejų klasių. Klasifikavimo tikslumą apibūdinančios tikimybės yra:

$$\alpha_{ij} = \mathbf{P}\{\eta = i | \xi = j\},\ i = 1, 2, 0;\ j = 1,2.$$

2.1 lentelė. Klasifikavimo tikslumo tikimybės

ξ \ η	1	2	0	Σ
1	α_{11}	α_{21}	α_{01}	1
2	α_{12}	α_{22}	α_{02}	1

2.1 lentelėje α_{01} ir α_{02} yra tikimybės, kai atsisakoma priimti sprendimą priskirti objektą pirmai arba antrai klasei. Tai nėra klasifikavimo klaidos, tačiau pageidautina, kad šios tikimybės būtų kuo mažesnės.

Tarkime sprendimas priimamas remiantis a. v. **X**, kurio tankio funkcija *σ* – baigtinio mato **μ** atžvilgiu yra

$$(\mathbf{X} | \xi = i) \sim f_i(\boldsymbol{x}),\ i = 1, 2.$$

Tegu $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) = (\varphi_1(\boldsymbol{x}), \varphi_2(\boldsymbol{x}), \varphi_0(\boldsymbol{x}))$ yra randomizuota sprendimų priėmimo taisyklė nusakoma trimate funkcija; čia

$$\varphi_i(\boldsymbol{x}) = \mathbf{P}\{\eta = i | \mathbf{X} = \boldsymbol{x}\},\ 0 \leq \varphi_i(\boldsymbol{x}) \leq 1,\ i = 0, 1, 2;\ \ \varphi_1(\boldsymbol{x}) + \varphi_2(\boldsymbol{x}) + \varphi_0(\boldsymbol{x}) \equiv 1.$$

Sprendimų priėmimo aibę žymėsiu $\mathbf{\Phi}$.

Tikimybė α_{ij} yra $\varphi_i(\boldsymbol{x})$ tiesinis funkcionalas:

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ij}(\boldsymbol{\varphi}) = \int \varphi_i(\boldsymbol{x}) f_j\,(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{\mu}, i = 0, 1\,, 2; j = 1, 2.$$

Sprendžiame sąlyginio ekstremumo radimo uždavinį apribojant abiejų rūšių klaidingų sprendimų tikimybes α_{12}, α_{21} ir minimizuojant sprendimų priėmimo atsisakymo tikimybes:

$$\begin{cases} \alpha_{01} \to \min, \\ \alpha_{02} \to \min, \\ \alpha_{12} \le \alpha_1, \\ \alpha_{21} \le \alpha_2, \end{cases} \quad \text{arba} \quad \begin{cases} \alpha_{11} \to \max, \\ \alpha_{22} \to \max, \\ \alpha_{12} \le \alpha_1, \\ \alpha_{21} \le \alpha_2, \end{cases} \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{\Phi}. \tag{2.1}$$

Kadangi α_{11} ir α_{12} priklauso tik nuo $\varphi_1(\boldsymbol{x})$, o α_{22} ir α_{21} - tik nuo $\varphi_2(\boldsymbol{x})$, todėl (2.1) galime spręsti kaip du atskirus uždavinius:

$$\begin{cases} \alpha_{11} \to \max, \\ \alpha_{12} \le \alpha_1, \end{cases} \quad (2.2) \qquad \text{ir} \qquad \begin{cases} \alpha_{22} \to \max, \\ \alpha_{21} \le \alpha_2. \end{cases} \quad (2.3)$$

Sprendžiame uždavinį (2.2), taikome Lagranžo neapibrėžtinių daugiklių metodą:
$\alpha_{11} - c_1\alpha_{12} \to \max,\ \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{\Phi}$,
$\int \left[\varphi_1(\boldsymbol{x})\big(f_1(\boldsymbol{x}) - c_1 f_2(\boldsymbol{x})\big)\right] d\boldsymbol{\mu} \to \max,\ \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{\Phi}$.
Pagal fundamentaliąją Neimano – Pirsono lemą uždavinio (2.2) sprendinys yra:

$$\varphi_1^*(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, \text{ kai } f_1(\boldsymbol{x}) > c_1 f_2(\boldsymbol{x}), \\ \delta_1, \text{kai } f_1(\boldsymbol{x}) = c_1 f_2(\boldsymbol{x}), \\ 0, \text{ kai } f_1(\boldsymbol{x}) < c_1 f_2(\boldsymbol{x}), \end{cases} \tag{2.4}$$

kur konstantos $c_1 \ge 0, \delta_1 \in [0{,}1]$ randamos iš sąlygos: $\alpha_{12}(\varphi_1^*) = \alpha_1$,
t.y. $\alpha_{12}(\varphi_1^*) = \int \varphi_1^*(\boldsymbol{x}) f_2(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{\mu} = \mathrm{P}\{f_1(\boldsymbol{x}) \ge c_1 f_2(\boldsymbol{x}) | \xi = 2\} = \alpha_1$.
Jei $h(c_1 - 0) = \mathrm{P}\{f_1(\boldsymbol{x}) > c_1 f_2(\boldsymbol{x}) | \xi = 2\} > \alpha_1 > \mathrm{P}\{f_1(\boldsymbol{x}) \ge c_1 f_2(\boldsymbol{x}) | \xi = 2\} = h(c_1)$ teisingos nelygybės, tai konstanta δ_1 randama taip: $\delta_1 = \frac{\alpha_1 - h(c_1)}{h(c_1 - 0) - h(c_1)}$. Jei $h(c_1) = h(c_1 - 0)$, tai δ_1 galime pasirinkti laisvai iš intervalo $[0; 1]$. Patogiausia imti $\delta_1 = 0$ arba $\delta_1 = 1$.

Sprendžiame uždavinį (2.3), taikome Lagranžo neapibrėžtinių daugiklių metodą:
$\alpha_{22} - c_2\alpha_{21} \to \max,\ \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{\Phi}$,
$\int \left[\varphi_2(\boldsymbol{x})\big(f_2(\boldsymbol{x}) - c_2 f_1(\boldsymbol{x})\big)\right] d\boldsymbol{\mu} \to \max,\ \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{\Phi}$.
Uždavinio (2.3) sprendinys lygus

$$\varphi_2^*(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, \text{ kai } f_2(\boldsymbol{x}) > c_2 f_1(\boldsymbol{x}), \\ \delta_2, \text{kai } f_2(\boldsymbol{x}) = c_2 f_1(\boldsymbol{x}), \\ 0, \text{ kai } f_2(\boldsymbol{x}) < c_2 f_1(\boldsymbol{x}), \end{cases} \tag{2.5}$$

kur konstantos $c_2 \ge 0, \delta_2 \in [0{,}1]$ randamos iš sąlygos: $\alpha_{21}(\varphi_2^*) = \alpha_2$,
t.y. $\alpha_{21}(\varphi_2^*) = \int \varphi_2^*(\boldsymbol{x}) f_1(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{\mu} = \mathrm{P}\{f_2(\boldsymbol{x}) \ge c_2 f_1(\boldsymbol{x}) | \xi = 1\} = \alpha_2$.
Jei $h(c_2 - 0) = \mathrm{P}\{f_2(\boldsymbol{x}) > c_2 f_1(\boldsymbol{x}) | \xi = 1\} > \alpha_2 > \mathrm{P}\{f_2(\boldsymbol{x}) \ge c_2 f_1(\boldsymbol{x}) | \xi = 1\} = h(c_2)$ teisingos nelygybės, tai konstanta δ_2 randama taip: $\delta_2 = \frac{\alpha_2 - h(c_2)}{h(c_2 - 0) - h(c_2)}$. Jei $h(c_2) = h(c_2 - 0)$, tai δ_2 galime pasirinkti laisvai iš intervalo $[0; 1]$. Patogiausia imti $\delta_2 = 0$ arba $\delta_2 = 1$.

Sprendiniai φ_1^*, φ_2^* maksimizuoja tikimybes α_{11} ir α_{22}. Jei $\varphi_1^*(\boldsymbol{x}) + \varphi_2^*(\boldsymbol{x}) \leq 1$, t.y. $c_1 c_2 > 1$, arba $c_1 c_2 = 1$, bet $\delta_1 + \delta_2 < 1$, tai galima apibrėžti $\varphi_0^*(\boldsymbol{x}) = 1 - \varphi_1^*(\boldsymbol{x}) - \varphi_2^*(\boldsymbol{x})$. Gaunamas daugiaekstremaliojo uždavinio (2.1) sprendinys $\boldsymbol{\varphi}^* = (\varphi_1^*, \varphi_2^*, \varphi_0^*) \in \boldsymbol{\Phi}$.
Priešingu atveju, jei $\varphi_1^*(\boldsymbol{x}) + \varphi_2^*(\boldsymbol{x}) > 1$, abi tikimybės α_{11} ir α_{22} nėra maksimizuojamos; sprendimo priėmimo atsisakymo aibė yra tuščia. Tada galime maksimizuoti teisingų sprendimų tikimybių α_{11} ir α_{22} sumą (minimizuoti klaidingų sprendimų tikimybių α_{12} ir α_{21} sumą). Apribojimai (2.1) automatiškai yra tenkinami.

Maksimizuojame teisingų sprendimų tikimybių α_{11} ir α_{22} sumą:

$$\alpha_{11} + \alpha_{22} \to \max, \boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2) \in \boldsymbol{\Phi}.$$

Sprendžiame uždavinį, kur sprendimo priėmimo taisyklės $\varphi_i(\boldsymbol{x})$, $i = 1,2$, tenkina (1.5) sąlygas:
$\alpha_{11} + \alpha_{22} \to \max,\ \boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{\Phi}$,
$\int [\varphi_1(\boldsymbol{x}) f_1(\boldsymbol{x}) + \varphi_2(\boldsymbol{x}) f_2(\boldsymbol{x})]\, d\boldsymbol{\mu} =$
$\left[\int f_2(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{\mu} = 1\right]$
$= \int \left[\varphi_1(\boldsymbol{x}) f_1(\boldsymbol{x}) + \left(1 - \varphi_1(\boldsymbol{x})\right) f_2(\boldsymbol{x})\right] d\boldsymbol{\mu} =$
$= \int [\varphi_1(\boldsymbol{x})(f_1(\boldsymbol{x}) - f_2(\boldsymbol{x}))]\, d\boldsymbol{\mu} \to \max,\ \boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{\Phi}$.
Uždavinio sprendinys lygus:

$$\varphi_1^*(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & f_1(\boldsymbol{x}) > f_2(\boldsymbol{x}), \\ 0, & f_1(\boldsymbol{x}) < f_2(\boldsymbol{x}), \end{cases} \quad \varphi_2^*(\boldsymbol{x}) = 1 - \varphi_1^*(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{\varphi}^* = (\varphi_1^*, \varphi_2^*) \in \boldsymbol{\Phi}. \quad (2.6)$$

2 etapas. Pirmame etape buvo priimti sprendimai priskirti objektus pirmai ar antrai klasei arba atsisakyta priimti sprendimą. Tarkime, kad dalis objektų pirmajame etape lieka nesuklasifikuoti, t.y. atsisakyta priimti sprendimą ($\varphi_0^* > 0$). Tokiu atveju, greta a. v. **X** galima surinkti papildomą informaciją a. v. **Y**, kuris yra informatyvesnes negu vektorius **X**. Tada sprendžiamas uždavinys nagrinėjant jungtinį vektorių $(\mathbf{X}^T, \mathbf{Y}^T)^T$, kurio tankio funkcija yra $g_{i0} \sim \left((\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \middle| \varphi_0^* > 0, \xi = i\right)$, $i = 1, 2$.

Tarkime, kad antrajame etape suklasifikuojame visus likusius objektus, kuriems pirmajame etape buvo atsisakyta priimti sprendimą.

Tegu $\boldsymbol{\varphi}^{(2)} = \boldsymbol{\varphi}^{(2)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\varphi_{10}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \varphi_{20}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}))$ yra randomizuota sprendimų priėmimo taisyklė nusakoma dvimate funkcija; čia

$$\varphi_{i0}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \mathbf{P}\{\eta = i | \mathbf{X} = \boldsymbol{x}, \mathbf{Y} = \boldsymbol{y}\},\ 0 \leq \varphi_{i0}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leq 1;\ i = 1, 2; \quad (2.7)$$
$$\varphi_{10}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \varphi_{20}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \equiv \varphi_0^*.$$

Sprendimų priėmimo aibę žymėsiu $\boldsymbol{\Phi}^{(2)}$.

2.2 lentelė. Klasifikavimo tikslumo tikimybės 2 etape

$\xi \backslash \eta$	1	2	Σ
1	$\alpha_{11}^{(2)}$	$\alpha_{21}^{(2)}$	1
2	$\alpha_{12}^{(2)}$	$\alpha_{22}^{(2)}$	1

Tikimybė $\alpha_{ij}^{(2)}$ yra $\varphi_{i0}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ tiesinis funkcionalas:

$$\alpha_{ij}^{(2)} = \alpha_{ij}^{(2)}\left(\boldsymbol{\varphi}^{(2)}\right) = \int \varphi_{i0}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) g_{j0}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) d\boldsymbol{\mu},\ i = 1, 2;\ j = 1, 2. \quad (2.8)$$

Maksimizuojame teisingų sprendimų tikimybių sumą:

$$\alpha_{11}^{(2)} + \alpha_{22}^{(2)} \to \max, \ \boldsymbol{\varphi}^{(2)} = (\varphi_{10}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), \ \varphi_{20}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})) \in \boldsymbol{\Phi}^{(2)}. \tag{2.9}$$

Taikome Lagranžo neapibrėžtinių daugiklių metodą:
$\alpha_{11}^{(2)} + \alpha_{22}^{(2)} \to \max, \ \boldsymbol{\varphi}^{(2)} \in \boldsymbol{\Phi}^{(2)}$,
$\int [\varphi_{10}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) g_{10}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \varphi_{20}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) g_{20}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})] \, d\boldsymbol{\mu} =$
$\left[\int g_{20}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 1\right]$
$\int [\varphi_{10}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) g_{10}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + (1 - \varphi_{10}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})) g_{20}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})] \, d\boldsymbol{\mu} =$
$= \int \left[\varphi_{10}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \left(g_{10}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - g_{20}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right)\right] d\boldsymbol{\mu} \to \max, \ \boldsymbol{\varphi}^{(2)} \in \boldsymbol{\Phi}^{(2)}$.
Uždavinio sprendinys lygus:

$$\varphi_{10}^{*}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \begin{cases} 1, \ g_{10}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) > g_{20}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), \\ 0, \ g_{10}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) < g_{20}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), \end{cases} \quad \varphi_{20}^{*}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \varphi_0^{*} - \varphi_{10}^{*}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), \tag{2.10}$$

$$\boldsymbol{\varphi}^{(2)*} = (\varphi_{10}^{*}, \ \varphi_{20}^{*}) \in \boldsymbol{\Phi}^{(2)}.$$

3. Hierarchinis klasifikavimas dviejų klasių atveju atsisakant priimti sprendimą, kai apribojamos aposteriorinės klaidų tikimybės

1 etapas. Jei yra žinomos apriorinės klasių tikimybės ω_1, ω_2 sąlyginio ekstremumo radimo uždavinį (2.1) galima spręsti apribojant aposteriorines tikimybes β_{12}, β_{21}:

$$\begin{cases} \alpha_{01} \to \min, \\ \alpha_{02} \to \min, \\ \beta_{21} \le \beta_1, \\ \beta_{12} \le \beta_2, \end{cases} \quad \text{arba} \quad \begin{cases} \alpha_{11} \to \max, \\ \alpha_{22} \to \max, \\ \beta_{21} \le \beta_1, \\ \beta_{12} \le \beta_2, \end{cases} \quad \boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_0) \in \boldsymbol{\Phi}. \tag{3.1}$$

Aposteriorinės klasifikavimo tikslumo tikimybės yra

$$\beta_{ji} = \mathbf{P}\{\xi = j | \eta = i\} = \frac{\alpha_{ij}\omega_j}{\alpha_{i1}\omega_1 + \alpha_{i2}\omega_2}, \ i = 1, 2, 0; \ j = 1,2;$$

čia $\omega_j = \mathbf{P}(\boldsymbol{\xi} = j), \ j = 1, 2; \ \omega_1 + \omega_2 = 1$, apriorinės klasių tikimybės. A. v. **X** tankio funkcija, sprendimų priėmimo taisyklė bei klasifikavimo tikslumo tikimybės $\alpha_{ij}, \ i = 1, 2, 0; \ j = 1,2$, aprašytos 2 skyriuje 1 etape.

3.1 lentelė. Aposteriorinės klasifikavimo tikslumo tikimybės

$\xi \backslash \eta$	1	2	0
1	β_{11}	β_{12}	β_{10}
2	β_{21}	β_{22}	β_{20}
Σ	1	1	1

Kadangi, kai $\alpha_{12} = \alpha_{11} = 1$, tai $\beta_{21} = \frac{\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} = \omega_2$, o kai $\alpha_{21} = \alpha_{22} = 1$, tai $\beta_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_1 + \omega_2} = \omega_1$, β_1 ir β_2 imame taip, kad $0 < \beta_1 < \omega_2$, o $0 < \beta_2 < \omega_1$. α_{11} ir β_{21} priklauso tik nuo $\varphi_1(\boldsymbol{x})$, o α_{22} ir β_{12} - tik nuo $\varphi_2(\boldsymbol{x})$, todėl (3.1) galime išskaidyti į du atskirus uždavinius:

$$\begin{cases} \alpha_{11} \to \max, \\ \beta_{21} \le \beta_1, \end{cases} \quad (3.2) \qquad \text{ir} \qquad \begin{cases} \alpha_{22} \to \max, \\ \beta_{12} \le \beta_2, \end{cases} \quad \boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{\Phi}. \tag{3.3}$$

Sprendžiame (3.2) uždavinį. Visų pirma suvedame apribojimą β_{21} į tiesinį pavidalą:

$\alpha_{12}\omega_2(1-\beta_1)-\alpha_{11}\omega_1\beta_1 \le 0$. Įrašius tiesinį pavidalą į (3.2) uždavinį gauname:

$$\begin{cases} \alpha_{11} \to \max, \\ \alpha_{12}\omega_2(1-\beta_1)-\alpha_{11}\omega_1\beta_1 \le 0, \end{cases} \tag{3.4}$$

Taikome Lagranžo neapibrėžtinių daugiklių metodą:
$\alpha_{11}-c_1(\alpha_{12}\omega_2(1-\beta_1)-\alpha_{11}\omega_1\beta_1) \to \max,\ \boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{\Phi}$,
$\int\left[\varphi_1(\boldsymbol{x})\big((1+c_1\omega_1\beta_1)f_1(\boldsymbol{x})-c_1\omega_2(1-\beta_1)f_2(\boldsymbol{x})\big)\right]d\boldsymbol{\mu} =$
$\int\left[\varphi_1(\boldsymbol{x})\big((1+c_1\gamma_1)f_1(\boldsymbol{x})-c_1\gamma_2 f_2(\boldsymbol{x})\big)\right]d\boldsymbol{\mu} \to \max,\ \boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{\Phi}$.
čia $\gamma_1=\omega_1\beta_1,\ \gamma_2=\omega_2(1-\beta_1)$. Pažymėkime $\tilde{c}_1=\frac{c_1\gamma_2}{1+c_1\gamma_1}$.
Pagal fundamentaliąją Neimano – Pirsono lemą uždavinio (3.2) sprendinys lygus:

$$\varphi_1^*(\boldsymbol{x})=\begin{cases} 1, \text{ kai } f_1(\boldsymbol{x}) > \tilde{c}_1 f_2(\boldsymbol{x}), \\ \delta_1, \text{kai } f_1(\boldsymbol{x}) = \tilde{c}_1 f_2(\boldsymbol{x}), \\ 0, \text{ kai } f_1(\boldsymbol{x}) < \tilde{c}_1 f_2(\boldsymbol{x}), \end{cases} \tag{3.5}$$

konstantos $c_1 \ge 0$, $\delta_1 \in [0,1]$ randamos iš sąlygos: $\beta_{21}(\varphi_1^*)=\beta_1$,
t.y. $\alpha_{12}\omega_2(1-\beta_1)-\alpha_{11}\omega_1\beta_1=0$.

Analogiškai sprendžiamas (3.3) uždavinys. Apribojimą β_{12} suvedame į tiesinį pavidalą:
$\alpha_{21}\omega_1(1-\beta_2)-\alpha_{22}\omega_2\beta_2 \le 0$.
Įrašius tiesinį pavidalą į (3.3) uždavinį gauname:

$$\begin{cases} \alpha_{22} \to \max, \\ \alpha_{21}\omega_1(1-\beta_2)-\alpha_{22}\omega_2\beta_2 \le 0, \end{cases} \tag{3.6}$$

Taikome Lagranžo neapibrėžtinių daugiklių metodą:
$\alpha_{22}-c_2(\alpha_{21}\omega_1(1-\beta_2)-\alpha_{22}\omega_2\beta_2) \to \max,\ \boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{\Phi}$,
$\int\left[\varphi_2(\boldsymbol{x})\big((1+c_2\omega_2\beta_2)f_2(\boldsymbol{x})-c_2\omega_1(1-\beta_2)f_1(\boldsymbol{x})\big)\right]d\boldsymbol{\mu} =$
$\int\left[\varphi_2(\boldsymbol{x})\big((1+c_2\gamma_3)f_2(\boldsymbol{x})-c_2\gamma_4 f_1(\boldsymbol{x})\big)\right]d\boldsymbol{\mu} \to \max,\ \boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{\Phi}$,
čia $\gamma_3=\omega_2\beta_2,\ \gamma_4=\omega_1(1-\beta_2)$. Pažymėkime $\tilde{c}_2=\frac{c_2\gamma_4}{1+c_2\gamma_3}$.
Uždavinio (3.3) sprendinys lygus:

$$\varphi_2^*(\boldsymbol{x})=\begin{cases} 1, \text{ kai } f_2(\boldsymbol{x}) > \tilde{c}_2 f_1(\boldsymbol{x}), \\ \delta_2, \text{kai } f_2(\boldsymbol{x}) = \tilde{c}_2 f_1(\boldsymbol{x}), \\ 0, \text{ kai } f_2(\boldsymbol{x}) < \tilde{c}_2 f_1(\boldsymbol{x}), \end{cases} \tag{3.7}$$

konstantos $c_2 \ge 0$, $\delta_2 \in [0,1]$ randamos iš sąlygos: $\beta_{12}(\varphi_2^*)=\beta_2$,
t.y. $\alpha_{21}\omega_1(1-\beta_2)-\alpha_{22}\omega_2\beta_2=0$.

Sprendiniai φ_1^*, φ_2^* maksimizuoja tikimybes α_{11} ir α_{22}. Jei $\varphi_1^*(\boldsymbol{x})+\varphi_2^*(\boldsymbol{x}) \le 1$, t.y. $c_1c_2 > 1$, arba $c_1c_2=1$, bet $\delta_1+\delta_2<1$, tai galima apibrėžti $\varphi_0^*(\boldsymbol{x})=1-\varphi_1^*(\boldsymbol{x})-\varphi_2^*(\boldsymbol{x})$. Gaunamas daugiaekstremaliojo uždavinio (3.1) sprendinys $\boldsymbol{\varphi}^*=(\varphi_1^*,\varphi_2^*,\varphi_0^*) \in \boldsymbol{\Phi}$. Priešingu atveju, jei $\varphi_1^*(\boldsymbol{x})+\varphi_2^*(\boldsymbol{x}) > 1$, abi tikimybės α_{11} ir α_{22} nėra maksimizuojamos; sprendimo priėmimo atsisakymo aibė yra tuščia. Taip pat, kaip ir 2 skyriuje, galime maksimizuoti teisingų sprendimų tikimybių α_{11} ir α_{22} sumą (minimizuoti klaidingų sprendimų tikimybių α_{12} ir α_{21} sumą).

$$\alpha_{11}+\alpha_{22} \to \max,\ \boldsymbol{\varphi}=(\varphi_1,\varphi_2) \in \boldsymbol{\Phi}. \tag{3.8}$$

Uždavinio (3.7) sprendinys yra lygus (2.6) sprendiniui.

2 etapas. Tarkime, kad antrajame etape suklasifikuojame visus likusius objektus, kuriems pirmajame etape buvo atsisakyta priimti sprendimą. Tokiu atveju maksimizuojame teisingų sprendimų tikimybių sumą, t.y. sprendžiame (2.9) uždavinį, kuris yra aprašytas 2 skyriuje 2 etape.

Tačiau, jeigu 2 etapu klasifikavimo uždavinys nesibaigia, ir, jei yra žinomos apriorinės klasių tikimybės ω_1, ω_2, sąlyginio ekstremumo radimo uždavinį galima spręsti apribojant aposteriorines tikimybes (abiejų rūšių klaidingų sprendimų tikimybių apribojimai sutampa su (3.1)):

$$\begin{cases} \alpha_{12}^{(2)} \to \min, \\ \beta_{21}^{(2)} \le \beta_1, \end{cases} \quad \text{arba} \quad \begin{cases} \alpha_{11}^{(2)} \to \max, \\ \beta_{21}^{(2)} \le \beta_1, \end{cases} \boldsymbol{\varphi}^{(2)} = (\varphi_{10}, \varphi_{20}) \in \boldsymbol{\Phi}^{(2)}, \quad (3.8)$$

čia $0 \le \beta_1 \le \omega_2^{(2)}, 0 \le \beta_2 \le \omega_1^{(2)}$.

3.2 lentelė. Aposteriorinės klasifikavimo tikslumo tikimybės 2 etape

$\xi \backslash \eta$	1	2
1	$\beta_{11}^{(2)}$	$\beta_{12}^{(2)}$
2	$\beta_{21}^{(2)}$	$\beta_{22}^{(2)}$
Σ	1	1

Jungtino vektoriaus $(\mathbf{X}^T, \mathbf{Y}^T)^T$ tankio funkcija, sprendimų priėmimo taisyklė bei klasifikavimo tikslumo tikimybės α_{ij}, $i = 1, 2, 0$; $j = 1,2$, aprašytos 2 skyrelyje 2 etape.

Suvedame apribojimą $\beta_{21}^{(2)}$ į tiesinį pavidalą: $\alpha_{12}^{(2)}\, \omega_2^{(2)}(1-\beta_1) - \alpha_{11}^{(2)}\, \omega_1^{(2)}\beta_1 \le 0$. Pažymėkime $\gamma_1^{(2)} = \omega_1^{(2)}\beta_1$, $\gamma_2^{(2)} = \omega_2^{(2)}(1-\beta_1)$. Įrašius į (3.8) uždavinį tiesinį pavidalą bei naujus pažymėjimus gauname tokį uždavinį:

Sprendžiame (3.8) uždavinį. Visų pirma suvedame apribojimą $\beta_{21}^{(2)}$ į tiesinį pavidalą: $\alpha_{12}^{(2)}\, \omega_2^{(2)}(1-\beta_1) - \alpha_{11}^{(2)}\, \omega_1^{(2)}\beta_1 \le 0$. Įrašius į (3.8) uždavinį tiesinį pavidalą gauname:

$$\begin{cases} \alpha_{11}^{(2)} \to \max, \\ \alpha_{12}^{(2)}\omega_2^{(2)}(1-\beta_1) - \alpha_{11}^{(2)}\, \omega_1^{(2)}\beta_1 \le 0, \end{cases} \quad (3.9)$$

Taikome Lagranžo neapibrėžtinių daugiklių metodą:
$\alpha_{11}^{(2)} - c^{(2)}\left(\alpha_{12}^{(2)}\, \omega_2^{(2)}(1-\beta_1) - \alpha_{11}^{(2)}\, \omega_1^{(2)}\beta_1\right) \to \max, \boldsymbol{\varphi}^{(2)} \in \boldsymbol{\Phi}^{(2)}$,
$\int \left[\varphi_{10}(\boldsymbol{x})\left(\left(1 + c^{(2)}\, \omega_1^{(2)}\beta_1\right) g_{10}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - c^{(2)}\omega_2^{(2)}(1-\beta_1) g_{20}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right)\right] d\boldsymbol{\mu} =$
$\int \left[\varphi_{10}(\boldsymbol{x})\left(\left(1 + c^{(2)}\gamma_1^{(2)}\right) g_{10}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - c^{(2)}\gamma_2^{(2)} g_{20}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right)\right] d\boldsymbol{\mu} \to \max,\ \boldsymbol{\varphi}^{(2)} \in \boldsymbol{\Phi}^{(2)}$,

čia $\gamma_1 = \omega_1\beta_1,\ \gamma_2 = \omega_2(1-\beta_1)$. Pažymėkime $\tilde{c}^{(2)} = \frac{c^{(2)}\gamma_2^{(2)}}{1+c^{(2)}\gamma_1^{(2)}}$.

Pagal fundamentaliąją Neimano – Pirsono lemą uždavinio (3.8) sprendinys lygus:

$$\varphi_{10}^*(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & \text{kai } g_{10}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) > \tilde{c}^{(2)} g_{20}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), \\ \delta^{(2)}, & \text{kai } g_{10}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \tilde{c}^{(2)} g_{20}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), \\ 0, & \text{kai } g_{10}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) < \tilde{c}^{(2)} g_{20}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), \end{cases} \quad \varphi_{20}^*(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 1 - \varphi_{10}^*(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), \quad (3.10)$$

$$\boldsymbol{\varphi}^{(2)*} = (\varphi_{10}^*, \varphi_{20}^*) \in \boldsymbol{\Phi}^{(2)},$$

konstantos $c^{(2)} \ge 0,\ \delta^{(2)} \in [0,1]$ randamos iš sąlygos: $\beta_{21}^{(2)}(\varphi_{10}^*) = \beta_1$.
t.y. $\alpha_{12}^{(2)}\, \omega_2^{(2)}(1-\beta_1) - \alpha_{11}^{(2)}\, \omega_1^{(2)}\beta_1 = 0$.

4. Hierarchinis klasifikavimas trijų klasių atveju atsisakant priimti sprendimą

Tarkime objektai klasifikuojami į tris klases. Kaip ir dviejų klasių atveju, klasifikuojamus objektus apibūdina a. v. $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)^T$, kurio tankio funkcija σ – baigtinio mato $\boldsymbol{\mu}$ atžvilgiu yra $(\mathbf{X}|\xi = i) \sim f_i(\boldsymbol{x}),\ i = 1, 2, 3$.

Tegu $\omega_i = \mathbf{P}\{\xi = i\}$ – apriorinės klasių tikimybės, $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1$. Randomizuota sprendimų priėmimo taisyklė yra $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) = (\varphi_1(\boldsymbol{x}), \varphi_2(\boldsymbol{x}), \varphi_3(\boldsymbol{x}), \varphi_{\bar{1}}(\boldsymbol{x}), \varphi_{\bar{2}}(\boldsymbol{x}), \varphi_{\bar{3}}(\boldsymbol{x}), \varphi_0(\boldsymbol{x}))$ funkcija, kurios i - toji koordinatė $\varphi_i(\boldsymbol{x})$, $i = 1, 2, 3; \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}; 0$, reiškia tikimybę priimti sprendimą $\eta = i$, kai a. v. $\mathbf{X}$ įgijo reikšmę $\boldsymbol{x}$:

$$\varphi_i(\boldsymbol{x}) = \mathbf{P}\{\eta = i | \mathbf{X} = \boldsymbol{x}\},\ 0 \le \varphi_i(\boldsymbol{x}) \le 1;\ i = 1, 2, 3; \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}; 0; \qquad (4.1)$$
$$\varphi_1(\boldsymbol{x}) + \varphi_2(\boldsymbol{x}) + \varphi_3(\boldsymbol{x}) + \varphi_{\bar{1}}(\boldsymbol{x}) + \varphi_{\bar{2}}(\boldsymbol{x}) + \varphi_{\bar{3}}(\boldsymbol{x}) + \varphi_0(\boldsymbol{x}) \equiv 1.$$

Sprendimų priėmimo aibę žymėsiu $\boldsymbol{\Phi}$.

4.1 lentelė. Klasifikavimo tikslumo tikimybės

ξ \ η	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	0	Σ
1	α_{11}	α_{21}	α_{31}	$\alpha_{\bar{1}1}$	$\alpha_{\bar{2}1}$	$\alpha_{\bar{3}1}$	α_{01}	1
2	α_{12}	α_{22}	α_{32}	$\alpha_{\bar{1}2}$	$\alpha_{\bar{2}2}$	$\alpha_{\bar{3}2}$	α_{02}	1
3	α_{13}	α_{23}	α_{33}	$\alpha_{\bar{1}3}$	$\alpha_{\bar{2}3}$	$\alpha_{\bar{3}3}$	α_{03}	1

Dėl paprastumo tegu a. d. ξ įgyja reikšmę 1, 2 arba 3, jei objektas atitinkamai priklauso pirmai, antrai ar trečiai klasei. A. d. η įgyja reikšmes 1, 2 arba 3, jei objektas priskiriamas pirmai, antrai arba trečiai klasei. Taip pat a. d. η gali įgyti reikšmę 0, jei yra atsisakoma priimti sprendimą priskirti objektą vienai iš trijų klasių. Be to, priešingai negu dviejų klasių atveju, trijų ir daugiau klasių atvejais gali atsirasti papildoma galimybė detalizuoti sprendimo atsisakymo atvejus. Dėl šios galimybės atsiranda papildomos η reikšmės. Trijų klasių atveju šios reikšmės yra: $\bar{1}$, kai priimamas sprendimas, kad objektas nepriklauso pirmai klasei; $\bar{2}$, kai priimamas sprendimas, kad objektas nepriklauso antrai klasei; $\bar{3}$, kai priimamas sprendimas, kad objektas nepriklauso trečiai klasei.

4.1 lentelėje pateiktos klasifikavimo tikslumo tikimybės:

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ij}(\boldsymbol{\varphi}) = \mathbf{P}\{\eta = i | \xi = j\} = \int \varphi_i(\boldsymbol{x}) f_j(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{\mu},\ i = 1, 2, 3; \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}; 0;\ j = 1, 2, 3. \qquad (4.3)$$

Klasifikavimo klaidingų sprendimų tikimybės yra α_{ij}, $i \neq j; i, j = 1,2,3$, ir $\alpha_{\bar{i}i}$, $i = 1,2,3$. Visos likusios tikimybės rodo teisingus sprendimus. Pirmiausia pageidautina, kad tikimybės α_{ii}, $i = 1,2,3$, būtų kuo didesnės. Antra - tikimybės $\alpha_{\bar{i}j}$, $i \neq j; i, j = 1,2,3$, būtų kuo didesnės, taip pat. Todėl 1 etape uždavinį, kai priimami visi septyni sprendimai, surašyti 4.1 lentelėje, patogiausia spręsti dviem žingsniais. [6]

1 etapas. <u>1 žingsnis.</u> Pirmiausia priimami sprendimai objektus priskirti vienai iš trijų klasių arba atsisakoma priimti sprendimą nedetalizuojant atsisakymo tipo.

Tegu a. d. ξ įgyja reikšmę 1, 2 arba 3, jei objektas atitinkamai priklauso pirmai, antrai ar trečiai klasei, o a. d. η įgyja reikšmes 1, 2 arba 3, jei objektas priskiriamas pirmai, antrai arba trečiai klasei, ir $\tilde{0}$, jei yra atsisakoma priimti sprendimą priskirti objektą vienai iš trijų klasių nedetalizuojant atsisakymo tipo.

4.2 lentelė. Klasifikavimo tikslumo tikimybės 1 etapas 1 žingsnis

$\xi \setminus \eta$	1	2	3	$\tilde{0}$	Σ
1	α_{11}	α_{21}	α_{31}	$\alpha_{\tilde{0}1}$	1
2	α_{12}	α_{22}	α_{32}	$\alpha_{\tilde{0}2}$	1
3	α_{13}	α_{23}	α_{33}	$\alpha_{\tilde{0}3}$	1

Pagal 4.1 lentelę klasifikavimo tikslumo tikimybės $\alpha_{\tilde{0}i}, i = 1,2,3$ yra:
$\alpha_{\tilde{0}1} = \alpha_{\bar{1}1} + \alpha_{\bar{2}1} + \alpha_{\bar{3}1} + \alpha_{01}$,
$\alpha_{\tilde{0}2} = \alpha_{\bar{1}2} + \alpha_{\bar{2}2} + \alpha_{\bar{3}2} + \alpha_{02}$,
$\alpha_{\tilde{0}3} = \alpha_{\bar{1}3} + \alpha_{\bar{2}3} + \alpha_{\bar{3}3} + \alpha_{03}$.

Klasifikavimo tikslumo tikimybės yra:

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ij}(\boldsymbol{\varphi}) = \mathbf{P}\{\eta = i | \xi = j\} = \int \varphi_i(\boldsymbol{x}) f_j(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{\mu}, i = 1, 2, 3, \tilde{0};\ j = 1,2,3. \quad (4.2)$$

Įvesiu pažymėjimą visų tipų sprendimų atsisakymo galimybių komponentės, kuris bus naudojamas sąlyginio ekstremumo uždavinio sprendime:

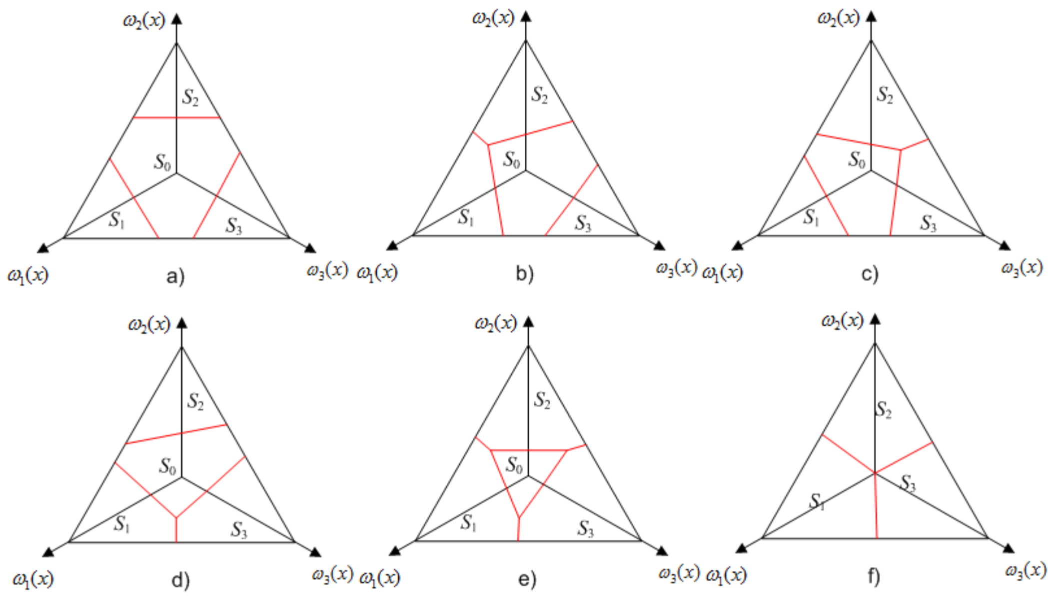
$$\varphi_{\tilde{0}}(\boldsymbol{x}) = \varphi_{\bar{1}}(\boldsymbol{x}) + \varphi_{\bar{2}}(\boldsymbol{x}) + \varphi_{\bar{3}}(\boldsymbol{x}) + \varphi_0(\boldsymbol{x}), \text{ todėl } \varphi_1(\boldsymbol{x}) + \varphi_2(\boldsymbol{x}) + \varphi_3(\boldsymbol{x}) + \varphi_{\tilde{0}}(\boldsymbol{x}) \equiv 1, \quad (4.3)$$
$$\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1(\boldsymbol{x}), \varphi_2(\boldsymbol{x}), \varphi_3(\boldsymbol{x}), \varphi_{\tilde{0}}(\boldsymbol{x})) \in \boldsymbol{\Phi}$$

Įvedame aposteriorines klasių tikimybes

$$\omega_i(\boldsymbol{x}) = \mathbf{P}\{\xi = i | \mathbf{X} = \boldsymbol{x}\} = \frac{f_i(x)\omega_i}{f_1(x)\omega_1 + f_2(x)\omega_2 + f_3(x)\omega_3},\ i = 1, 2, 3. \quad (4.4)$$

Kintamieji $\omega_i(\boldsymbol{x}),\ i = 1, 2, 3,$ įgyja reikšmes iš simplekso $\{0 \le \omega_i(\boldsymbol{x}) \le 1,\ i = 1, 2, 3;\ \omega_1(\boldsymbol{x}) + \omega_2(\boldsymbol{x}) + \omega_3(\boldsymbol{x}) = 1\}$. Sprendimų priėmimo taisyklės hiperplokštumas padalina šį simpleksą į 3 dalis. Tada kintamųjų $\omega_i(\boldsymbol{x}),\ i = 1, 2, 3,$ terminais, sprendimų priėmimo sritys turi gana paprastą pavidalą, o kintamojo $\boldsymbol{x}$ terminais, jos gali būti kur kas sudėtingesnės. [6] Todėl uždavinių sprendinius patogiausia perrašyti naudojant aposteriorines tikimybes.

Trijų klasių atveju aposteriorinės tikimybės $\omega_i(\boldsymbol{x}), i = 1, 2, 3,$ įgyja reikšmes taisyklingajame trikampyje, kuris gaunamas susikertant plokštumai, einančiai per taškus (1, 0, 0), (0, 1, 0) ir (0, 0, 1), su koordinačių plokštumomis. Sprendimo priėmimo taisyklės padalina šį trikampį į sprendimų $\eta = i$ sritis. Šios sritys 4.1 pav. pažymėtos simboliais S_i.



4.1.pav. Pirmojo etapo 1 žingsnio sprendimų priėmimo sritys

Sprendžiame sąlyginio ekstremumo radimo uždavinį apribojant klaidingų sprendimų tikimybes α_{ij}, $i \neq j$; $i, j = 1,2,3$.

$$\begin{cases} \alpha_{ii} \to \max, i = 1,2,3, \\ \alpha_{ij} \le a_{ij}, i \neq j; i, j = 1,2,3, \end{cases} \boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1(\boldsymbol{x}), \varphi_2(\boldsymbol{x}), \varphi_3(\boldsymbol{x}), \varphi_{\tilde{0}}(\boldsymbol{x})) \in \boldsymbol{\Phi}. \quad (4.5)$$

Kadangi α_{11}, α_{12} ir α_{13} priklauso tik nuo $\varphi_1(\boldsymbol{x})$, α_{22}, α_{21} ir α_{23} - tik nuo $\varphi_2(\boldsymbol{x})$, o α_{33}, α_{31} ir α_{33} - tik nuo $\varphi_3(\boldsymbol{x})$, uždavinį (4.5) suskaidome į tris atskirus uždavinius:

$$\begin{cases} \alpha_{11} \to \max, \\ \alpha_{12} \le a_{12}, \\ \alpha_{13} \le a_{13}, \end{cases} \quad (4.6) \qquad \begin{cases} \alpha_{22} \to \max, \\ \alpha_{21} \le a_{21}, \\ \alpha_{23} \le a_{23}, \end{cases} \quad (4.7) \qquad \begin{cases} \alpha_{33} \to \max, \\ \alpha_{31} \le a_{31}, \\ \alpha_{32} \le a_{32}. \end{cases} \quad (4.8)$$

Sprendžiame (4.6) Lagranžo neapibrėžtinių daugiklių metodu:
$\alpha_{11} - c_{12}\alpha_{12} - c_{13}\alpha_{13} \to \max,\ \boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{\Phi}$.
$\int [\varphi_1(\boldsymbol{x}) f_1(\boldsymbol{x}) - \varphi_1(\boldsymbol{x}) c_{12} f_2(\boldsymbol{x}) - \varphi_1(\boldsymbol{x}) c_{13} f_3(\boldsymbol{x})]\, d\boldsymbol{\mu} =$
$= \int \varphi_1(\boldsymbol{x}) \left(f_1(\boldsymbol{x}) - c_{12} f_2(\boldsymbol{x}) - c_{13} f_3(\boldsymbol{x}) \right) d\boldsymbol{\mu} =$
$= \int \varphi_1(\boldsymbol{x}) \left(\omega_1(\boldsymbol{x}) - c_{12}\omega_2(\boldsymbol{x}) - c_{13}\omega_3(\boldsymbol{x}) \right) d\boldsymbol{\mu} \to \max,\ \boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{\Phi}$.

Uždavinio (4.6) sprendinys:

$$\varphi_1^*(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, \text{ kai } \omega_1(\boldsymbol{x}) > c_{12}\omega_2(\boldsymbol{x}) + c_{13}\omega_3(\boldsymbol{x}), \\ \delta_1, \text{kai } \omega_1(\boldsymbol{x}) = c_{12}\omega_2(\boldsymbol{x}) + c_{13}\omega_3(\boldsymbol{x}), \\ 0, \text{ kai } \omega_1(\boldsymbol{x}) < c_{12}\omega_2(\boldsymbol{x}) + c_{13}\omega_3(\boldsymbol{x}), \end{cases} \quad (4.9)$$

kur konstantos $c_{12} \ge 0$, $c_{13} \ge 0$, $\delta_1 \in [0,1]$ randamos iš sąlygų:
$\alpha_{12}(\varphi_1^*) = a_{12}$, $\alpha_{13}(\varphi_1^*) = a_{13}$, t.y.
$\alpha_{12}(\varphi_1^*) = \int \varphi_1^*(\boldsymbol{x}) f_2(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{\mu} = \mathrm{P}\{f_1(\boldsymbol{x}) \ge c_{12} f_2(\boldsymbol{x}) | \xi = 2\} = a_{12}$,
$\alpha_{13}(\varphi_1^*) = \int \varphi_1^*(\boldsymbol{x}) f_3(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{\mu} = \mathrm{P}\{f_1(\boldsymbol{x}) \ge c_{13} f_3(\boldsymbol{x}) | \xi = 3\} = a_{13}$.
Jei $h(c_{12} - 0) = \mathrm{P}\{f_1(\boldsymbol{x}) > c_{12} f_2(\boldsymbol{x}) | \xi = 2\} > \alpha_{12} > \mathrm{P}\{f_1(\boldsymbol{x}) \ge c_{12} f_2(\boldsymbol{x}) | \xi = 2\} = h(c_{12})$

$h(c_{13}-0) = \mathrm{P}\{f_1(\boldsymbol{x}) > c_{13}f_3(\boldsymbol{x}) | \xi = 3\} > \alpha_{13} > \mathrm{P}\{f_1(\boldsymbol{x}) \geq c_{13}f_3(\boldsymbol{x}) | \xi = 3\} = h(c_{13})$ teisingos nelygybės, tai konstanta δ_1 randama taip: $\delta_1 = \max(\frac{\alpha_{12}-h(c_{12})}{h(c_{12}-0)-h(c_{12})}, \frac{\alpha_{13}-h(c_{13})}{h(c_{13}-0)-h(c_{13})})$. Jei $h(c_{12}) = h(c_{12}-0)$ ir $h(c_{13}) = h(c_{13}-0)$, tai δ_1 galime pasirinkti laisvai iš intervalo$[0; 1]$. Patogiausia imti $\delta_1 = 0$ arba $\delta_1 = 1$.

Analogiškai sprendžiame (4.7) ir (4.8) uždavinius. Sprendžiame (4.7) uždavinį:
$\alpha_{22} - c_{21}\alpha_{21} - c_{23}\alpha_{23} \to \max,\ \boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{\Phi}$.
$\int [\varphi_2(\boldsymbol{x})f_2(\boldsymbol{x}) - \varphi_2(\boldsymbol{x})c_{21}f_1(\boldsymbol{x}) - \varphi_2(\boldsymbol{x})c_{23}f_3(\boldsymbol{x})]d\boldsymbol{\mu} =$
$= \int \varphi_2(\boldsymbol{x})\big(f_2(\boldsymbol{x}) - c_{21}f_1(\boldsymbol{x}) - c_{23}f_3(\boldsymbol{x})\big)d\boldsymbol{\mu} =$
$= \int \varphi_2(\boldsymbol{x})\big(\omega_2(\boldsymbol{x}) - c_{21}\omega_1(\boldsymbol{x}) - c_{23}\omega_3(\boldsymbol{x})\big)\, d\boldsymbol{\mu} \to \max,\ \boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{\Phi}$.

$$\varphi_2^*(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, \text{ kai } \omega_2(\boldsymbol{x}) > c_{21}\omega_1(\boldsymbol{x}) + c_{23}\omega_3(\boldsymbol{x}), \\ \delta_2, \text{kai } \omega_2(\boldsymbol{x}) = c_{21}\omega_1(\boldsymbol{x}) + c_{23}\omega_3(\boldsymbol{x}), \\ 0, \text{ kai } \omega_2(\boldsymbol{x}) < c_{21}\omega_1(\boldsymbol{x}) + c_{23}\omega_3(\boldsymbol{x}), \end{cases} \tag{4.10}$$

kur konstantos $c_{21} \geq 0,\ c_{23} \geq 0, \delta_2 \in [0,1]$ randamos iš sąlygų:
$\alpha_{21}(\varphi_2^*) = a_{21},\ \alpha_{23}(\varphi_2^*) = a_{23}$.

Sprendžiame (4.8) uždavinį:
$\alpha_{33} + c_{31}\alpha_{31} + c_{32}\alpha_{32} \to \max,\ \boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{\Phi}$.
$\int [\varphi_3(\boldsymbol{x})f_3(\boldsymbol{x}) - \varphi_3(\boldsymbol{x})c_{31}f_1(\boldsymbol{x}) - \varphi_3(\boldsymbol{x})c_{32}f_2(\boldsymbol{x})]\, d\boldsymbol{\mu} =$
$= \int \varphi_3(\boldsymbol{x})\big(f_3(\boldsymbol{x}) - c_{31}f_1(\boldsymbol{x}) - c_{32}f_2(\boldsymbol{x})\big)d\boldsymbol{\mu} =$
$= \int \varphi_3(\boldsymbol{x})\big(\omega_3(\boldsymbol{x}) - c_{31}\omega_1(\boldsymbol{x}) - c_{32}\omega_2(\boldsymbol{x})\big)\, d\boldsymbol{\mu} \to \max, \boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{\Phi}$

$$\varphi_3^*(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, \text{ kai } \omega_3(\boldsymbol{x}) > c_{31}\omega_1(\boldsymbol{x}) + c_{32}\omega_2(\boldsymbol{x}), \\ \delta_3, \text{kai } \omega_3(\boldsymbol{x}) = c_{31}\omega_1(\boldsymbol{x}) + c_{32}\omega_2(\boldsymbol{x}), \\ 0, \text{ kai } \omega_3(\boldsymbol{x}) < c_{31}\omega_1(\boldsymbol{x}) + c_{32}\omega_2(\boldsymbol{x}), \end{cases} \tag{4.11}$$

kur konstantos $c_{31} \geq 0,\ c_{32} \geq 0, \delta_3 \in [0,1]$ randamos iš sąlygų:
$\alpha_{31}(\varphi_3^*) = a_{31},\ \alpha_{32}(\varphi_3^*) = a_{32}$.

Išsprendę visus tris uždavinius gauname sprendimų sritis S_1, S_2, S_3, pažymėtas taisyklingajame trikampyje. Jeigu sprendiniai yra tokie, kaip pažymėta 4.1 pav. a), tai imdami visų tipų atsisakymo komponentę $\varphi_0^*(\boldsymbol{x}) = 1 - \varphi_1^*(\boldsymbol{x}) - \varphi_2^*(\boldsymbol{x}) - \varphi_3^*(\boldsymbol{x})$ gauname, kad $\boldsymbol{\varphi}^* = (\varphi_1^*(\boldsymbol{x}), \varphi_2^*(\boldsymbol{x}), \varphi_3^*(\boldsymbol{x}), \varphi_0^*(\boldsymbol{x}))$ yra uždavinio (4.5) sprendinys.

Jeigu sritys S_1 ir S_2 kertasi, gausime, kad kai kuriuose taškuose $\boldsymbol{x}$ suma $\varphi_1^*(\boldsymbol{x}) + \varphi_2^*(\boldsymbol{x}) = 2$, tokiu atveju uždavinio (4.5) sprendinys neegzistuoja. Tada sprendžiamas uždavinys:

$$\begin{cases} \alpha_{11} + \alpha_{22} \to \max, \\ \alpha_{33} \to \max, \\ \alpha_{ij} \leq a_{ij}, i \neq j; i,j = 1,2,3. \end{cases} \tag{4.12}$$

Uždavinį (4.12) suskaidome į du atskirus uždavinius:

$$\begin{cases}\alpha_{11}+\alpha_{22}\to\max,\\ \alpha_{12}\le a_{12},\\ \alpha_{13}\le a_{13},\\ \alpha_{21}\le a_{21},\\ \alpha_{23}\le a_{23},\end{cases} \quad (4.13) \qquad \text{ir} \qquad \begin{cases}\alpha_{33}\to\max,\\ \alpha_{31}\le a_{31},\\ \alpha_{32}\le a_{32}.\end{cases} \quad (4.14)$$

Sprendžiame (4.13) uždavinį:
$\alpha_{11}+\alpha_{22}-c_{12}\alpha_{12}-c_{13}\alpha_{13}-c_{21}\alpha_{21}-c_{23}\alpha_{23}\to\max,\ \boldsymbol{\varphi}\in\boldsymbol{\Phi}$.
$\int[\varphi_1(\boldsymbol{x})f_1(\boldsymbol{x})+\varphi_2(\boldsymbol{x})f_2(\boldsymbol{x})-\varphi_1(\boldsymbol{x})c_{12}f_2(\boldsymbol{x})-\varphi_1(\boldsymbol{x})c_{13}f_3(\boldsymbol{x})-\varphi_2(\boldsymbol{x})c_{21}f_1(\boldsymbol{x})-\varphi_2(\boldsymbol{x})c_{23}f_3(\boldsymbol{x})]\,d\boldsymbol{\mu}=$
$=\int\Big[\varphi_1(\boldsymbol{x})\big[f_1(\boldsymbol{x})-\big(c_{12}f_2(\boldsymbol{x})+c_{13}f_3(\boldsymbol{x})\big)\big]+\varphi_2(\boldsymbol{x})\big[f_2(\boldsymbol{x})-\big(c_{21}f_1(\boldsymbol{x})+c_{23}f_3(\boldsymbol{x})\big)\big]\Big]\,d\boldsymbol{\mu}=$
$=\int\Big[\varphi_1(\boldsymbol{x})\big[\omega_1(\boldsymbol{x})-\big(c_{12}\omega_2(\boldsymbol{x})+c_{13}\omega_3(\boldsymbol{x})\big)\big]+\varphi_2(\boldsymbol{x})\big[\omega_2(\boldsymbol{x})-\big(c_{21}\omega_1(\boldsymbol{x})+c_{23}\omega_3(\boldsymbol{x})\big)\big]\Big]\,d\boldsymbol{\mu}=$
$=\int[\varphi_1(\boldsymbol{x})G_1(\boldsymbol{x})+\varphi_2(\boldsymbol{x})G_2(\boldsymbol{x})]d\boldsymbol{\mu}\to\max,\ \boldsymbol{\varphi}\in\boldsymbol{\Phi}$.
Uždavinio (4.13) sprendiniai yra lygūs:

$$\varphi_1^*(\boldsymbol{x})=\begin{cases}1,\ \text{kai}, G_1(\boldsymbol{x})>G_2(\boldsymbol{x}),\\ \delta_1, \text{kai}, G_1(\boldsymbol{x})=G_2(\boldsymbol{x}),\\ 0,\ \text{kai}, G_1(\boldsymbol{x})<G_2(\boldsymbol{x}),\end{cases} \quad (4.15)$$

$$\varphi_2^*(\boldsymbol{x})=\begin{cases}1,\ \text{kai}, G_1(\boldsymbol{x})<G_2(\boldsymbol{x}),\\ \delta_2, \text{kai}, G_1(\boldsymbol{x})=G_2(\boldsymbol{x}),\\ 0,\ \text{kai}, G_1(\boldsymbol{x})>G_2(\boldsymbol{x}),\end{cases} \quad (4.16)$$

kur konstantos $c_{12}\ge 0$, $c_{13}\ge 0$, $c_{21}\ge 0$, $c_{23}\ge 0, \delta_1\in[0,1]$, $\delta_2\in[0,1]$ randamos iš sąlygų: $\alpha_{12}(\varphi_1^*)=a_{12}$, $\alpha_{13}(\varphi_1^*)=a_{13}$, $\alpha_{21}(\varphi_2^*)=a_{21}$, $\alpha_{23}(\varphi_2^*)=a_{23}$.
Uždavinys (4.14) buvo išspręstas anksčiau, šio uždavinio sprendinys yra lygus (4.11).

Jeigu sprendiniai yra tokie, kaip pažymėta 4.1 pav. b), tai imdami visų tipų atsisakymo komponentę $\varphi_0^*(\boldsymbol{x})=1-\varphi_1^*(\boldsymbol{x})-\varphi_2^*(\boldsymbol{x})-\varphi_3^*(\boldsymbol{x})$ gauname, kad $\boldsymbol{\varphi}^*=(\varphi_1^*(\boldsymbol{x}),\varphi_2^*(\boldsymbol{x}),\varphi_3^*(\boldsymbol{x}),\varphi_0^*(\boldsymbol{x}))$ yra uždavinio (4.12) sprendinys.

Jeigu sritys S_2 ir S_3 kertasi, gausime, kad kai kuriuose taškuose $\boldsymbol{x}$ suma $\varphi_2^*(\boldsymbol{x})+\varphi_3^*(\boldsymbol{x})=2$, tokiu atveju uždavinio (4.12) sprendinys taip pat neegzistuoja. Sprendžiame:

$$\begin{cases}\alpha_{22}+\alpha_{33}\to\max,\\ \alpha_{11}\to\max\\ \alpha_{ij}\le a_{ij}, i\ne j; i,j=1,2,3.\end{cases} \quad (4.17)$$

Uždavinį (4.17) suskaidome į du atskirus uždavinius:

$$\begin{cases}\alpha_{22}+\alpha_{33}\to\max,\\ \alpha_{21}\le a_{21},\\ \alpha_{23}\le a_{23},\\ \alpha_{31}\le a_{31},\\ \alpha_{32}\le a_{32},\end{cases} \quad (4.18) \qquad \text{ir} \qquad \begin{cases}\alpha_{11}\to\max,\\ \alpha_{12}\le a_{12},\\ \alpha_{13}\le a_{13}.\end{cases} \quad (4.19)$$

Sprendžiame (4.18) uždavinį:
$\alpha_{22}+\alpha_{33}-c_{21}\alpha_{21}-c_{23}\alpha_{23}-c_{31}\alpha_{31}-c_{32}\alpha_{32}\to \max,\ \boldsymbol{\varphi}\in\boldsymbol{\Phi}$.
$\int[\varphi_2(\boldsymbol{x})f_2(\boldsymbol{x})+\varphi_3(\boldsymbol{x})f_3(\boldsymbol{x})-\varphi_2(\boldsymbol{x})c_{21}f_1(\boldsymbol{x})-\varphi_2(\boldsymbol{x})c_{23}f_3(\boldsymbol{x})-\varphi_3(\boldsymbol{x})c_{31}f_1(\boldsymbol{x})-\varphi_3(\boldsymbol{x})c_{32}f_2(\boldsymbol{x})]\,d\boldsymbol{\mu}$
$=\int\Big[\varphi_2(\boldsymbol{x})\big[f_2(\boldsymbol{x})-\big(c_{21}f_1(\boldsymbol{x})+c_{23}f_3(\boldsymbol{x})\big)\big]+\varphi_3(\boldsymbol{x})\big[f_3(\boldsymbol{x})-\big(c_{31}f_1(\boldsymbol{x})+c_{32}f_2(\boldsymbol{x})\big)\big]\Big]\,d\boldsymbol{\mu}=$
$=\int\Big[\varphi_2(\boldsymbol{x})\big[\omega_2(\boldsymbol{x})-\big(c_{21}\omega_1(\boldsymbol{x})+c_{23}\omega_3(\boldsymbol{x})\big)\big]+\varphi_3(\boldsymbol{x})\big[\omega_3(\boldsymbol{x})-\big(c_{31}\omega_1(\boldsymbol{x})+c_{32}\omega_2(\boldsymbol{x})\big)\big]\Big]\,d\boldsymbol{\mu}=$
$=\int[\varphi_2(\boldsymbol{x})G_2(\boldsymbol{x})+\varphi_3(\boldsymbol{x})G_3(\boldsymbol{x})]d\boldsymbol{\mu}\to \max,\ \boldsymbol{\varphi}\in\boldsymbol{\Phi}$.
Uždavinio (4.18) sprendiniai:

$$\varphi_2^*(\boldsymbol{x})=\begin{cases}1,\ \text{kai}, G_2(\boldsymbol{x})>G_3(\boldsymbol{x}),\\ \delta_2, \text{kai}, G_2(\boldsymbol{x})=G_3(\boldsymbol{x}),\\ 0,\ \text{kai}, G_2(\boldsymbol{x})<G_3(\boldsymbol{x}),\end{cases} \tag{4.20}$$

$$\varphi_3^*(\boldsymbol{x})=\begin{cases}1,\ \text{kai}, G_2(\boldsymbol{x})<G_3(\boldsymbol{x}),\\ \delta_3, \text{kai}, G_2(\boldsymbol{x})=G_3(\boldsymbol{x}),\\ 0,\ \text{kai}, G_2(\boldsymbol{x})>G_3(\boldsymbol{x}),\end{cases} \tag{4.21}$$

kur konstantos $c_{21}\geq 0$, $c_{23}\geq 0$, $c_{31}\geq 0$, $c_{32}\geq 0$, $\delta_2\in[0,1]$, $\delta_3\in[0,1]$ randamos iš sąlygų: $\alpha_{21}(\varphi_2^*)=a_{21}$, $\alpha_{23}(\varphi_2^*)=a_{23}$, $\alpha_{31}(\varphi_3^*)=a_{31}$, $\alpha_{32}(\varphi_3^*)=a_{32}$.
Uždavinys (4.19) buvo išspręstas anksčiau, šio uždavinio sprendinys yra lygus (4.9).

Jeigu sprendiniai yra tokie, kaip pažymėta 4.1 pav. c), tai imdami visų tipų atsisakymo komponentę $\varphi_0^*(\boldsymbol{x})=1-\varphi_1^*(\boldsymbol{x})-\varphi_2^*(\boldsymbol{x})-\varphi_3^*(\boldsymbol{x})$ gauname, kad $\boldsymbol{\varphi}^*=(\varphi_1^*(\boldsymbol{x}),\varphi_2^*(\boldsymbol{x}),\varphi_3^*(\boldsymbol{x}),\varphi_0^*(\boldsymbol{x}))$ yra uždavinio (4.17) sprendinys.

Jeigu sritys S_1 ir S_3 kertasi, gausime, kad kai kuriuose taškuose $\boldsymbol{x}$ suma $\varphi_1^*(\boldsymbol{x})+\varphi_3^*(\boldsymbol{x})=2$, tokiu atveju uždavinio (4.17) sprendinys taip pat neegzistuoja. Sprendžiame:

$$\begin{cases}\alpha_{11}+\alpha_{33}\to\max,\\ \alpha_{22}\to\max,\\ \alpha_{ij}\leq a_{ij}, i\neq j; i,j=1,2,3.\end{cases} \tag{4.22}$$

(4.22) suskaidome į du atskirus uždavinius:

$$\begin{cases}\alpha_{11}+\alpha_{33}\to\max,\\ \alpha_{12}\leq a_{12},\\ \alpha_{13}\leq a_{13},\\ \alpha_{31}\leq a_{31},\\ \alpha_{32}\leq a_{32},\end{cases} \tag{4.23}$$

ir

$$\begin{cases}\alpha_{22}\to\max,\\ \alpha_{21}\leq a_{21},\\ \alpha_{23}\leq a_{23}.\end{cases} \tag{4.24}$$

Sprendžiame (4.23):
$\alpha_{11}+\alpha_{33}-c_{12}\alpha_{12}-c_{13}\alpha_{13}-c_{31}\alpha_{31}-c_{32}\alpha_{32}\to \max,\ \boldsymbol{\varphi}\in\boldsymbol{\Phi}$.
$\int[\varphi_1(\boldsymbol{x})f_1(\boldsymbol{x})+\varphi_3(\boldsymbol{x})f_3(\boldsymbol{x})-\varphi_1(\boldsymbol{x})c_{12}f_2(\boldsymbol{x})-\varphi_1(\boldsymbol{x})c_{13}f_3(\boldsymbol{x})-\varphi_3(\boldsymbol{x})c_{31}f_1(\boldsymbol{x})-\varphi_3(\boldsymbol{x})c_{32}f_2(\boldsymbol{x})]\,d\boldsymbol{\mu}$
$=\int\Big[\varphi_1(\boldsymbol{x})\big[f_1(\boldsymbol{x})-\big(c_{12}f_2(\boldsymbol{x})+c_{13}f_3(\boldsymbol{x})\big)\big]+\varphi_3(\boldsymbol{x})\big[f_3(\boldsymbol{x})-\big(c_{31}f_1(\boldsymbol{x})+c_{32}f_2(\boldsymbol{x})\big)\big]\Big]\,d\boldsymbol{\mu}=$
$=\int\Big[\varphi_1(\boldsymbol{x})\big[\omega_1(\boldsymbol{x})-\big(c_{12}\omega_2(\boldsymbol{x})+c_{13}\omega_3(\boldsymbol{x})\big)\big]+\varphi_3(\boldsymbol{x})\big[\omega_3(\boldsymbol{x})-\big(c_{31}\omega_1(\boldsymbol{x})+c_{32}\omega_2(\boldsymbol{x})\big)\big]\Big]\,d\boldsymbol{\mu}=$
$=\int[\varphi_1(\boldsymbol{x})G_1(\boldsymbol{x})+\varphi_3(\boldsymbol{x})G_3(\boldsymbol{x})]d\boldsymbol{\mu}\to \max,\ \boldsymbol{\varphi}\in\boldsymbol{\Phi}$.
Uždavinio (4.23) sprendiniai:

$$\varphi_1^*(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, \text{ kai}, G_1(\boldsymbol{x}) > G_3(\boldsymbol{x}), \\ \delta_1, \text{kai}, G_1(\boldsymbol{x}) = G_3(\boldsymbol{x}), \\ 0, \text{ kai}, G_1(\boldsymbol{x}) < G_3(\boldsymbol{x}), \end{cases} \tag{4.25}$$

$$\varphi_3^*(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, \text{ kai}, G_1(\boldsymbol{x}) < G_3(\boldsymbol{x}), \\ \delta_3, \text{kai}, G_1(\boldsymbol{x}) = G_3(\boldsymbol{x}), \\ 0, \text{ kai}, G_1(\boldsymbol{x}) > G_3(\boldsymbol{x}). \end{cases} \tag{4.26}$$

kur konstantos $c_{12} \geq 0$, $c_{13} \geq 0$, $c_{31} \geq 0$, $c_{32} \geq 0$, $\delta_1 \in [0,1]$, $\delta_3 \in [0,1]$ randamos iš sąlygų: $\alpha_{12}(\varphi_1^*) = a_{12}$, $\alpha_{13}(\varphi_1^*) = a_{13}$, $\alpha_{31}(\varphi_3^*) = a_{31}$, $\alpha_{32}(\varphi_3^*) = a_{32}$.
Uždavinys (4.27) buvo išspręstas anksčiau, šio uždavinio sprendinys yra lygus (4.10).

Jeigu sprendiniai yra tokie, kaip pažymėta 4.1 pav. d), tai imdami visų tipų atsisakymo komponentę $\varphi_{\tilde{0}}^*(\boldsymbol{x}) = 1 - \varphi_1^*(\boldsymbol{x}) - \varphi_2^*(\boldsymbol{x}) - \varphi_3^*(\boldsymbol{x})$ gauname, kad $\boldsymbol{\varphi}^* = (\varphi_1^*(\boldsymbol{x}), \varphi_2^*(\boldsymbol{x}), \varphi_3^*(\boldsymbol{x}), \varphi_{\tilde{0}}^*(\boldsymbol{x}))$ yra uždavinio (4.22) sprendinys.

Jeigu visos trys sritys S_1, S_2, S_3 kertasi, maksimizuojame teisingų sprendimų tikimybių sumą apribojant klaidingų sprendimų tikimybes:

$$\begin{cases} \alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33} \to \max, \\ \alpha_{ij} \leq a_{ij}, i \neq j; i, j = 1,2,3. \end{cases} \tag{4.27}$$

Sprendžiame (4.27) uždavinį:

$\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33} - c_{12}\alpha_{12} - c_{13}\alpha_{13} - c_{21}\alpha_{21} - c_{23}\alpha_{23} - c_{31}\alpha_{31} - c_{32}\alpha_{32} \to \max$, $\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{\Phi}$.

$\int [\varphi_1(\boldsymbol{x}) f_1(\boldsymbol{x}) + \varphi_2(\boldsymbol{x}) f_2(\boldsymbol{x}) + \varphi_3(\boldsymbol{x}) f_3(\boldsymbol{x}) - \varphi_1(\boldsymbol{x}) c_{12} f_2(\boldsymbol{x}) - \varphi_1(\boldsymbol{x}) c_{13} f_3(\boldsymbol{x}) - \varphi_2(\boldsymbol{x}) c_{21} f_1(\boldsymbol{x}) -$
$- \varphi_2(\boldsymbol{x}) c_{23} f_3(\boldsymbol{x}) - \varphi_3(\boldsymbol{x}) c_{31} f_1(\boldsymbol{x}) - \varphi_3(\boldsymbol{x}) c_{32} f_2(\boldsymbol{x})]\, d\boldsymbol{\mu} =$
$= \int \Big[\varphi_1(\boldsymbol{x})\big[f_1(\boldsymbol{x}) - \big(c_{12} f_2(\boldsymbol{x}) + c_{13} f_3(\boldsymbol{x})\big)\big] + \varphi_2(\boldsymbol{x})\big[f_2(\boldsymbol{x}) - \big(c_{21} f_1(\boldsymbol{x}) + c_{23} f_3(\boldsymbol{x})\big)\big] + \varphi_3(\boldsymbol{x})\big[f_3(\boldsymbol{x}) -$
$-\big(c_{31} f_1(\boldsymbol{x}) + c_{32} f_2(\boldsymbol{x})\big)\big]\Big]\, d\boldsymbol{\mu} =$
$= \int \Big[\varphi_1(\boldsymbol{x})\big[\omega_1(\boldsymbol{x}) - \big(c_{12}\omega_2(\boldsymbol{x}) + c_{13}\omega_3(\boldsymbol{x})\big)\big] + \varphi_2(\boldsymbol{x})\big[\omega_2(\boldsymbol{x}) - \big(c_{21}\omega_1(\boldsymbol{x}) + c_{23}\omega_3(\boldsymbol{x})\big)\big] +$
$\varphi_3(\boldsymbol{x})\big[\omega_3(\boldsymbol{x}) - \big(c_{31}\omega_1(\boldsymbol{x}) + c_{32}\omega_2(\boldsymbol{x})\big)\big]\Big]\, d\boldsymbol{\mu} =$
$= \int [\varphi_1(\boldsymbol{x}) G_1(\boldsymbol{x}) + \varphi_2(\boldsymbol{x}) G_2(\boldsymbol{x}) + \varphi_3(\boldsymbol{x}) G_3(\boldsymbol{x})] d\boldsymbol{\mu} \to \max$, $\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{\Phi}$.

Uždavinio (4.27) sprendiniai

$$\varphi_1^*(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, \text{ kai}, G_1(\boldsymbol{x}) > G_2(\boldsymbol{x}), G_1(\boldsymbol{x}) > G_3(\boldsymbol{x}), \\ \delta_1, \text{ kai}, G_1(\boldsymbol{x}) = G_2(\boldsymbol{x}) = G_3(\boldsymbol{x}), \\ 0, \text{ kai}, G_1(\boldsymbol{x}) < G_2(\boldsymbol{x}), G_1(\boldsymbol{x}) < G_3(\boldsymbol{x}), \end{cases} \tag{4.28}$$

$$\varphi_2^*(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, \text{ kai}, G_2(\boldsymbol{x}) > G_1(\boldsymbol{x}), G_2(\boldsymbol{x}) > G_3(\boldsymbol{x}), \\ \delta_2, \text{ kai}, G_1(\boldsymbol{x}) = G_2(\boldsymbol{x}) = G_3(\boldsymbol{x}), \\ 0, \text{ kai}, G_2(\boldsymbol{x}) < G_1(\boldsymbol{x}), G_2(\boldsymbol{x}) < G_3(\boldsymbol{x}), \end{cases} \tag{4.29}$$

$$\varphi_3^*(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, \text{ kai}, G_3(\boldsymbol{x}) > G_1(\boldsymbol{x}), G_3(\boldsymbol{x}) > G_2(\boldsymbol{x}), \\ \delta_3, \text{ kai}, G_1(\boldsymbol{x}) = G_2(\boldsymbol{x}) = G_3(\boldsymbol{x}), \\ 0, \text{ kai}, G_3(\boldsymbol{x}) < G_1(\boldsymbol{x}), G_3(\boldsymbol{x}) < G_2(\boldsymbol{x}), \end{cases} \tag{4.30}$$

kur konstantos $c_{12} \geq 0$, $c_{13} \geq 0$, $c_{21} \geq 0$, $c_{23} > 0$, $c_{31} \geq 0$, $c_{32} \geq 0$, $\delta_1 \in [0,1]$, $\delta_2 \in [0,1]$, $\delta_3 \in [0,1]$ randamos iš sąlygų:
$\alpha_{12}(\varphi_1^*) = a_{12}$, $\alpha_{13}(\varphi_1^*) = a_{13}$, $\alpha_{21}(\varphi_2^*) = a_{21}$, $\alpha_{23}(\varphi_2^*) = a_{23}$, $\alpha_{31}(\varphi_3^*) = a_{31}$,

$\alpha_{32}(\varphi_3^*) = a_{32}$.

Jeigu sprendiniai yra tokie, kaip pažymėta 4.1 pav. e), tai imdami visų tipų atsisakymo komponentę $\varphi_{\bar{0}}^*(\boldsymbol{x}) = 1 - \varphi_1^*(\boldsymbol{x}) - \varphi_2^*(\boldsymbol{x}) - \varphi_3^*(\boldsymbol{x})$ gauname, kad $\boldsymbol{\varphi}^* = (\varphi_1^*(\boldsymbol{x}), \varphi_2^*(\boldsymbol{x}), \varphi_3^*(\boldsymbol{x}), \varphi_{\bar{0}}^*(\boldsymbol{x}))$ yra uždavinio (4.27) sprendinys.

Tarkime po pirmojo klasifikavimo nesuklasifikuotų objektų nelieka, $\varphi_{\bar{0}}^*(\boldsymbol{x}) = 0$. Tada $\varphi_3^*(\boldsymbol{x}) = 1 - \varphi_1^*(\boldsymbol{x}) - \varphi_2^*(\boldsymbol{x})$. Maksimizuojame teisingų sprendimų tikimybių sumą:

$$\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33} \to \max,\ \boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1(\boldsymbol{x}), \varphi_2(\boldsymbol{x}), \varphi_3(\boldsymbol{x})) \in \boldsymbol{\Phi}. \tag{4.31}$$

Sprendžiame (4.31) uždavinį:

$\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33} \to \max,\ \boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{\Phi}$.

$\int [\varphi_1(\boldsymbol{x}) f_1(\boldsymbol{x}) + \varphi_2(\boldsymbol{x}) f_2(\boldsymbol{x}) + \varphi_3(\boldsymbol{x}) f_3(\boldsymbol{x})]\, d\boldsymbol{\mu} =$

$= \int [\varphi_1(\boldsymbol{x})\omega_1(\boldsymbol{x}) + \varphi_2(\boldsymbol{x})\omega_2(\boldsymbol{x}) + \varphi_3(\boldsymbol{x})\omega_3(\boldsymbol{x})] d\boldsymbol{\mu} \to \max,\ \boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{\Phi}$.

Uždavinio (4.31) sprendiniai:

$$\varphi_1^*(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, \text{kai}, \omega_1(\boldsymbol{x}) > \omega_2(\boldsymbol{x}), \omega_1(\boldsymbol{x}) > \omega_3(\boldsymbol{x}), \\ 0, \text{kai}, \omega_1(\boldsymbol{x}) < \omega_2(\boldsymbol{x}), \omega_1(\boldsymbol{x}) < \omega_3(\boldsymbol{x}), \end{cases} \tag{4.32}$$

$$\varphi_2^*(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, \text{kai}, \omega_2(\boldsymbol{x}) > \omega_1(\boldsymbol{x}), \omega_2(\boldsymbol{x}) > \omega_3(\boldsymbol{x}), \\ 0, \text{kai}, \omega_2(\boldsymbol{x}) > \omega_1(\boldsymbol{x}), \omega_2(\boldsymbol{x}) > \omega_3(\boldsymbol{x}), \end{cases} \tag{4.33}$$

$$\varphi_3^*(\boldsymbol{x}) = 1 - \varphi_1^*(\boldsymbol{x}) - \varphi_2^*(\boldsymbol{x}). \tag{4.34}$$

Išsprendę uždavinį gauname sprendimų sritis S_1, S_2, S_3, pažymėtas taisyklingajame trikampyje (žiūrėti 4.1 pav. f)). $\boldsymbol{\varphi}^* = (\varphi_1^*(\boldsymbol{x}), \varphi_2^*(\boldsymbol{x}), \varphi_3^*(\boldsymbol{x}))$ yra uždavinio (4.31) sprendinys.

1 etapas. 2 žingsnis. Detalizuojama atsisakymo priežastis objektams, kuriems pirmajame žingsnyje buvo atsisakyta priimti sprendimą, t.y., kai $\varphi_{\bar{0}}^*(\boldsymbol{x}) > 0$. Tegu a. d. ξ įgyja reikšmę 1, 2 arba 3, jei objektas atitinkamai priklauso pirmai, antrai ar trečiai klasei, o a. d. η įgyja reikšmes $\bar{1}, \bar{2}$ arba $\bar{3}$, jei objektas priskiriamas ne pirmai, ne antrai arba ne trečiai klasei, ir 0, jei yra atsisakoma priimti sprendimą. Klasifikavimo tikslumo tikimybės yra:

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ij}(\boldsymbol{\varphi}) = \mathbf{P}\{\eta = i | \xi = j\} = \int \varphi_i(\boldsymbol{x}) \tilde{f}_j(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{\mu}, i = \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, 0;\ j = 1,2,3.$$

Aposteriorinės klasių tikimybės aprašytos 1 etape 1 žingsnyje (4.4). Sprendimų priėmimo taisyklė $\widetilde{\boldsymbol{\varphi}} = \widetilde{\boldsymbol{\varphi}}(\boldsymbol{x}) = (\varphi_{\bar{1}}(\boldsymbol{x}), \varphi_{\bar{2}}(\boldsymbol{x}), \varphi_{\bar{3}}(\boldsymbol{x}), \varphi_0(\boldsymbol{x}))$ tenkina sąlygas:

$$\varphi_i(\boldsymbol{x}) = \mathbf{P}\{\eta = i | \mathbf{X} = \boldsymbol{x}\}, 0 \le \varphi_i(\boldsymbol{x}) \le 1;\ i = \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, 0;$$
$$\varphi_{\bar{1}}(\boldsymbol{x}) + \varphi_{\bar{2}}(\boldsymbol{x}) + \varphi_{\bar{3}}(\boldsymbol{x}) + \varphi_0(\boldsymbol{x}) \equiv \varphi_{\bar{0}}^*(\boldsymbol{x}).$$

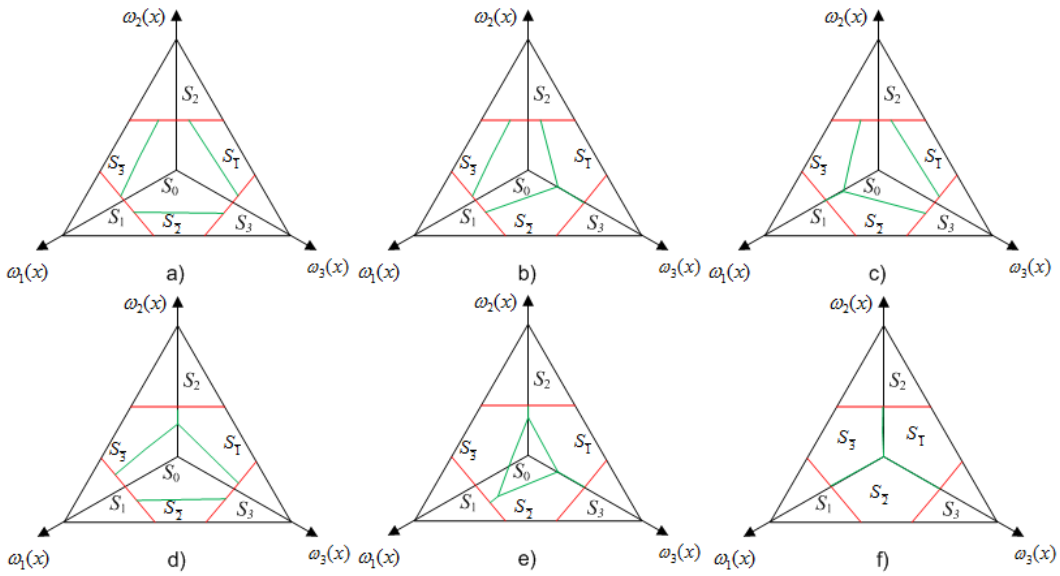
Sprendimų priėmimo aibę žymėsiu $\widetilde{\boldsymbol{\Phi}}$.

Sprendžiame sąlyginio ekstremumo radimo uždavinį maksimizuojant klasifikavimo tikimybes priskirti objektus vienai iš klasių: $\bar{1}, \bar{2}$ arba $\bar{3}$, ir apribojant klaidingų sprendimų tikimybes $\alpha_{\bar{i}i}$, $i = 1, 2, 3$, (4.1 lentelė):

$$
\begin{cases}
\alpha_{\bar{1}2} + \alpha_{\bar{1}3} \to \max, \\
\alpha_{\bar{2}1} + \alpha_{\bar{2}3} \to \max, \\
\alpha_{\bar{3}1} + \alpha_{\bar{3}2} \to \max, \\
\alpha_{\bar{i}i} \le b_i, i = 1,2,3,
\end{cases}
\qquad \tilde{\boldsymbol{\varphi}} \in \tilde{\boldsymbol{\Phi}}, \tag{4.35}
$$

Uždavinį (4.35) suskaidome į tris atskirus uždavinius:

$$
\begin{cases}
\alpha_{\bar{1}2} + \alpha_{\bar{1}3} \to \max, \\
\alpha_{\bar{1}1} \le b_1,
\end{cases} \quad (4.36)
\qquad
\begin{cases}
\alpha_{\bar{2}1} + \alpha_{\bar{2}3} \to \max, \\
\alpha_{\bar{2}2} \le b_2,
\end{cases} \quad (4.37)
\qquad
\begin{cases}
\alpha_{\bar{3}1} + \alpha_{\bar{3}2} \to \max, \\
\alpha_{\bar{3}3} \le b_3.
\end{cases} \quad (4.38)
$$



4.2.pav. Pirmojo etapo abiejų žingsnių sprendimų priėmimo sritys (4.1 pav. a) variantas)

Sprendžiame (4.36) uždavinį Lagranžo neapibrėžtinių daugiklių metodu:
$\alpha_{\bar{1}2} + \alpha_{\bar{1}3} - d_1\alpha_{\bar{1}1} \to \max,\ \tilde{\boldsymbol{\varphi}} \in \tilde{\boldsymbol{\Phi}}$.
$\int [\varphi_{\bar{1}}(\boldsymbol{x}) f_2(\boldsymbol{x}) + \varphi_{\bar{1}}(\boldsymbol{x}) f_3(\boldsymbol{x}) - \varphi_{\bar{1}}(\boldsymbol{x}) d_1 f_1(\boldsymbol{x})]\, d\boldsymbol{\mu} = \int \varphi_{\bar{1}}(\boldsymbol{x})\big(f_2(\boldsymbol{x}) + f_3(\boldsymbol{x}) - d_1 f_1(\boldsymbol{x})\big) d\boldsymbol{\mu} =$
$= \int \varphi_{\bar{1}}(\boldsymbol{x})\big(\omega_2(\boldsymbol{x}) + \omega_3(\boldsymbol{x}) - d_1\omega_1(\boldsymbol{x})\big)\, d\boldsymbol{\mu} = \int \varphi_{\bar{1}}(\boldsymbol{x})(1 - \omega_1(\boldsymbol{x})(1 + d_1))\, d\boldsymbol{\mu} \to \max,\ \tilde{\boldsymbol{\varphi}} \in \tilde{\boldsymbol{\Phi}}$.

Uždavinio (4.36) sprendinys:

$$
\varphi_{\bar{1}}^*(\boldsymbol{x}) = \begin{cases}
1, & \text{kai } \omega_1(\boldsymbol{x}) < \tilde{d}_1, \\
\delta_1, & \text{kai } \omega_1(\boldsymbol{x}) = \tilde{d}_1, \\
0, & \text{kai } \omega_1(\boldsymbol{x}) > \tilde{d}_1,
\end{cases} \tag{4.39}
$$

kur $\tilde{d}_1 = \frac{1}{1+d_1}$, o konstantos $d_1 \ge 0,\ \delta_1 \in [0,1]$ randamos iš sąlygos: $\alpha_{\bar{1}1}(\varphi_{\bar{1}}^*) = b_1$.

Sprendžiame (4.37) uždavinį:
$\alpha_{\bar{2}1} + \alpha_{\bar{2}3} - d_2\alpha_{\bar{2}2} \to \max,\ \tilde{\boldsymbol{\varphi}} \in \tilde{\boldsymbol{\Phi}}$.
$\int [\varphi_{\bar{2}}(\boldsymbol{x}) f_1(\boldsymbol{x}) + \varphi_{\bar{2}}(\boldsymbol{x}) f_3(\boldsymbol{x}) - \varphi_{\bar{2}}(\boldsymbol{x}) d_2 f_2(\boldsymbol{x})]\, d\boldsymbol{\mu} = \int \varphi_{\bar{2}}(\boldsymbol{x})\big(f_1(\boldsymbol{x}) + f_3(\boldsymbol{x}) - d_2 f_2(\boldsymbol{x})\big) d\boldsymbol{\mu} =$
$= \int \varphi_{\bar{2}}(\boldsymbol{x})\big(\omega_1(\boldsymbol{x}) + \omega_3(\boldsymbol{x}) - d_2\omega_2(\boldsymbol{x})\big)\, d\boldsymbol{\mu} = \int \varphi_{\bar{2}}(\boldsymbol{x})(1 - \omega_2(\boldsymbol{x})(1 + d_2))\, d\boldsymbol{\mu} \to \max,\ \tilde{\boldsymbol{\varphi}} \in \tilde{\boldsymbol{\Phi}}$.

Uždavinio (4.37) sprendinys:

$$\varphi_{\bar{2}}^*(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, \text{ kai } \omega_2(\boldsymbol{x}) < \tilde{d}_2, \\ \delta_2, \text{kai } \omega_2(\boldsymbol{x}) = \tilde{d}_2, \\ 0, \text{ kai } \omega_2(\boldsymbol{x}) > \tilde{d}_2, \end{cases} \tag{4.40}$$

kur $\tilde{d}_2 = \frac{1}{1+d_2}$, o konstantos $d_2 \geq 0,\ \delta_2 \in [0,1]$ randamos iš sąlygos: $\alpha_{\bar{2}2}(\varphi_{\bar{2}}^*) = b_2$.

Sprendžiame (4.38) uždavinį:
$\alpha_{\bar{3}1} + \alpha_{\bar{3}2} - d_3\alpha_{\bar{3}3} \to \max,\ \widetilde{\boldsymbol{\varphi}} \in \widetilde{\boldsymbol{\Phi}}$.
$\int[\varphi_{\bar{3}}(\boldsymbol{x})f_1(\boldsymbol{x}) + \varphi_{\bar{3}}(\boldsymbol{x})f_2(\boldsymbol{x}) - \varphi_{\bar{3}}(\boldsymbol{x})d_3f_3(\boldsymbol{x})]d\boldsymbol{\mu} = \int \varphi_{\bar{3}}(\boldsymbol{x})\big(f_1(\boldsymbol{x}) + f_2(\boldsymbol{x}) - d_3f_3(\boldsymbol{x})\big)d\boldsymbol{\mu} =$
$= \int \varphi_{\bar{3}}(\boldsymbol{x})\big(\omega_1(\boldsymbol{x}) + \omega_2(\boldsymbol{x}) - d_3\omega_3(\boldsymbol{x})\big)\, d\boldsymbol{\mu} = \int \varphi_{\bar{3}}(\boldsymbol{x})(1 - \omega_3(\boldsymbol{x})(1 + d_3))\, d\boldsymbol{\mu} \to \max,\ \widetilde{\boldsymbol{\varphi}} \in \widetilde{\boldsymbol{\Phi}}$.
Uždavinio (4.38) sprendinys:

$$\varphi_{\bar{3}}^*(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, \text{ kai } \omega_3(\boldsymbol{x}) < \tilde{d}_3, \\ \delta_3, \text{kai } \omega_3(\boldsymbol{x}) = \tilde{d}_3, \\ 0, \text{ kai } \omega_3(\boldsymbol{x}) > \tilde{d}_3, \end{cases} \tag{4.41}$$

kur $\tilde{d}_3 = \frac{1}{1+d_3}$, o konstantos $d_3 \geq 0,\ \delta_3 \in [0,1]$ randamos iš sąlygos: $\alpha_{\bar{3}3}(\varphi_{\bar{3}}^*) = b_3$.

Išsprendę visus tris uždavinius gauname sprendimų sritis $S_{\bar{1}}$, $S_{\bar{2}}$, $S_{\bar{3}}$, pažymėtas taisyklingajame trikampyje. Jeigu sprendiniai yra tokie, kaip pažymėta 4.2 pav. a), tai imdami visų tipų atsisakymo komponentę $\varphi_0^*(\boldsymbol{x}) = \varphi_{\bar{0}}^*(\boldsymbol{x}) - \varphi_{\bar{1}}^*(\boldsymbol{x}) - \varphi_{\bar{2}}^*(\boldsymbol{x}) - \varphi_{\bar{3}}^*(\boldsymbol{x})$ gauname, kad $\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}^* = (\varphi_{\bar{1}}^*(\boldsymbol{x}), \varphi_{\bar{2}}^*(\boldsymbol{x}), \varphi_{\bar{3}}^*(\boldsymbol{x}), \varphi_0^*(\boldsymbol{x}))$ yra uždavinio (4.35) sprendinys.

Jeigu sritys $S_{\bar{1}}$ ir $S_{\bar{2}}$ kertasi, tokiu atveju gausime, kad uždavinio (4.35) sprendinys neegzistuoja. Analogiškai sprendžiami uždaviniai, jeigu sritys $S_{\bar{1}}$ ir $S_{\bar{3}}$ arba $S_{\bar{2}}$ ir $S_{\bar{3}}$ kertasi. Tada sprendžiamas uždavinys maksimizuojant sumas $\alpha_{\bar{1}2} + \alpha_{\bar{1}3} + \alpha_{\bar{2}1} + \alpha_{\bar{2}3}$ ir $\alpha_{\bar{3}1} + \alpha_{\bar{3}2}$ arba minimizuojant atsisakymo nuo sprendimo klasifikavimo tikimybių sumą $\alpha_{01} + \alpha_{02}$ ir α_{03}:

$$\begin{cases} \alpha_{01} + \alpha_{02} \to \min, \\ \alpha_{03} \to \min, \\ \alpha_{\bar{i}i} \leq b_i, i = 1,2,3, \end{cases} \quad \text{arba} \quad \begin{cases} \alpha_{\bar{1}2} + \alpha_{\bar{1}3} + \alpha_{\bar{2}1} + \alpha_{\bar{2}3} \to \max, \\ \alpha_{\bar{3}1} + \alpha_{\bar{3}2} \to \max, \\ \alpha_{\bar{i}i} \leq b_i, i = 1,2,3. \end{cases} \tag{4.42}$$

Išskaidome (4.42) uždavinį į du atskirus (4.43) ir (4.44) uždavinius:

$$\begin{cases} \alpha_{\bar{1}2} + \alpha_{\bar{1}3} + \alpha_{\bar{2}1} + \alpha_{\bar{2}3} \to \max \\ \alpha_{\bar{1}1} \leq b_1, \\ \alpha_{\bar{2}2} \leq b_2, \end{cases} \quad (4.43) \quad \text{ir} \quad \begin{cases} \alpha_{\bar{3}1} + \alpha_{\bar{3}2} \to \max, \\ \alpha_{\bar{3}3} \leq b_3. \end{cases} \quad (4.44)$$

Sprendžiame (4.43) uždavinį:
$\alpha_{\bar{1}2} + \alpha_{\bar{1}3} + \alpha_{\bar{2}1} + \alpha_{\bar{2}3} - d_1\alpha_{\bar{1}1} - d_2\alpha_{\bar{2}2} \to \max,\ \widetilde{\boldsymbol{\varphi}} \in \widetilde{\boldsymbol{\Phi}}$.
$\int[\varphi_{\bar{1}}(\boldsymbol{x})f_2(\boldsymbol{x}) + \varphi_{\bar{1}}(\boldsymbol{x})f_3(\boldsymbol{x}) + \varphi_{\bar{2}}(\boldsymbol{x})f_1(\boldsymbol{x}) + \varphi_{\bar{2}}(\boldsymbol{x})f_3(\boldsymbol{x}) - \varphi_{\bar{1}}(\boldsymbol{x})d_1f_1(\boldsymbol{x}) - \varphi_{\bar{2}}(\boldsymbol{x})d_2f_2(\boldsymbol{x})]d\boldsymbol{\mu} =$
$= \int\big[\varphi_{\bar{1}}(\boldsymbol{x})\big(f_2(\boldsymbol{x}) + f_3(\boldsymbol{x}) - d_1f_1(\boldsymbol{x})\big) + \varphi_{\bar{2}}(\boldsymbol{x})\big(f_1(\boldsymbol{x}) + f_3(\boldsymbol{x}) - d_2f_2(\boldsymbol{x})\big)\big]d\boldsymbol{\mu} =$
$= \int\big[\varphi_{\bar{1}}(\boldsymbol{x})\big(\omega_2(\boldsymbol{x}) + \omega_3(\boldsymbol{x}) - d_1\omega_1(\boldsymbol{x})\big) + \varphi_{\bar{2}}\big(\omega_1(\boldsymbol{x}) + \omega_3(\boldsymbol{x}) - d_2\omega_2(\boldsymbol{x})\big)\big]\, d\boldsymbol{\mu} =$
$= \int[\varphi_{\bar{1}}(\boldsymbol{x})(1 - \omega_1(\boldsymbol{x})(1 + d_1)) + \varphi_{\bar{2}}(\boldsymbol{x})(1 - \omega_2(\boldsymbol{x})(1 + d_2))]\, d\boldsymbol{\mu} \to \max,\ \widetilde{\boldsymbol{\varphi}} \in \widetilde{\boldsymbol{\Phi}}$.

Uždavinio (4.43) sprendiniai:

$$\varphi_{\bar{1}}^{*}(\boldsymbol{x})=\begin{cases}1, \text{ kai } \omega_1(\boldsymbol{x})<\tilde{d}_2\omega_2(\boldsymbol{x}),\\ \delta_1, \text{kai } \omega_1(\boldsymbol{x})=\tilde{d}_2\omega_2(\boldsymbol{x}),\\ 0, \text{ kai } \omega_1(\boldsymbol{x})>\tilde{d}_2\omega_2(\boldsymbol{x}),\end{cases} \tag{4.45}$$

$$\varphi_{\bar{2}}^{*}(\boldsymbol{x})=\begin{cases}1, \text{ kai } \omega_2(\boldsymbol{x})<\tilde{d}_1\omega_1(\boldsymbol{x}),\\ \delta_2, \text{kai } \omega_2(\boldsymbol{x})=\tilde{d}_1\omega_1(\boldsymbol{x}),\\ 0, \text{ kai } \omega_2(\boldsymbol{x})>\tilde{d}_1\omega_1(\boldsymbol{x}),\end{cases} \tag{4.46}$$

kur $\tilde{d}_1=\frac{1+d_1}{1+d_2}$, $\tilde{d}_2=\frac{1+d_2}{1+d_1}$ o konstantos $d_1\geq 0$, $d_2\geq 0$, $\delta_1\in[0,1]$, $\delta_2\in[0,1]$ randamos iš sąlygų: $\alpha_{\bar{1}1}(\varphi_{\bar{1}}^{*})=b_1$, $\alpha_{\bar{2}2}(\varphi_{\bar{2}}^{*})=b_2$.
Uždavinys (4.44) buvo išspręstas anksčiau, šio uždavinio sprendinys yra lygus (4.41).

Jeigu sprendiniai yra tokie, kaip pažymėta 4.2 pav. b), tai imdami visų tipų atsisakymo komponentę $\varphi_0^*(\boldsymbol{x})=\varphi_{\bar{0}}^*(\boldsymbol{x})-\varphi_{\bar{1}}^*(\boldsymbol{x})-\varphi_{\bar{2}}^*(\boldsymbol{x})-\varphi_{\bar{3}}^*(\boldsymbol{x})$ gauname, kad $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^*=(\varphi_{\bar{1}}^*(\boldsymbol{x}),\varphi_{\bar{2}}^*(\boldsymbol{x}),\varphi_{\bar{3}}^*(\boldsymbol{x}),\varphi_0^*(\boldsymbol{x}))$ yra uždavinio (4.42) sprendinys.

Jeigu visos trys sritys $S_{\bar{1}}$, $S_{\bar{2}}$, $S_{\bar{3}}$ kertasi, tokiu atveju gausime, kad uždavinio (4.42) sprendinys taip pat neegzistuoja. Tada sprendžiamas uždavinys maksimizuojantis teisingų sprendimų tikimybių sumą $\alpha_{\bar{1}2}+\alpha_{\bar{1}3}+\alpha_{\bar{2}1}+\alpha_{\bar{2}3}+\alpha_{\bar{3}1}+\alpha_{\bar{3}2}$ arba minimizuojantis atsisakymo nuo sprendimo klasifikavimo tikimybių sumą $\alpha_{01}+\alpha_{02}+\alpha_{03}$:

$$\begin{cases}\alpha_{01}+\alpha_{02}+\alpha_{03}\to\min,\\ \alpha_{\bar{i}i}\leq b_i, i=1,2,3,\end{cases} \quad \text{arba} \quad \begin{cases}\alpha_{\bar{1}2}+\alpha_{\bar{1}3}+\alpha_{\bar{2}1}+\alpha_{\bar{2}3}+\alpha_{\bar{3}1}+\alpha_{\bar{3}2}\to\max,\\ \alpha_{\bar{i}i}\leq b_i, i=1,2,3.\end{cases} \tag{4.47}$$

Sprendžiame (4.47) uždavinį:

$\alpha_{\bar{1}2}+\alpha_{\bar{1}3}+\alpha_{\bar{2}1}+\alpha_{\bar{2}3}+\alpha_{\bar{3}1}+\alpha_{\bar{3}2}-d_1\alpha_{\bar{1}1}-d_2\alpha_{\bar{2}2}-d_3\alpha_{\bar{3}3}\to\max,\ \tilde{\boldsymbol{\varphi}}\in\tilde{\boldsymbol{\Phi}}$.

$\int[\varphi_{\bar{1}}(\boldsymbol{x})f_2(\boldsymbol{x})+\varphi_{\bar{1}}(\boldsymbol{x})f_3(\boldsymbol{x})+\varphi_{\bar{2}}(\boldsymbol{x})f_1(\boldsymbol{x})+\varphi_{\bar{2}}(\boldsymbol{x})f_3(\boldsymbol{x})+\varphi_{\bar{3}}(\boldsymbol{x})f_1(\boldsymbol{x})+\varphi_{\bar{3}}(\boldsymbol{x})f_2(\boldsymbol{x})-$
$-\varphi_{\bar{1}}(\boldsymbol{x})d_1f_1(\boldsymbol{x})-\varphi_{\bar{2}}(\boldsymbol{x})d_2f_2(\boldsymbol{x})-\varphi_{\bar{3}}(\boldsymbol{x})d_3f_3(\boldsymbol{x})]d\boldsymbol{\mu}=$
$=\int\big[\varphi_{\bar{1}}(\boldsymbol{x})\big(f_2(\boldsymbol{x})+f_3(\boldsymbol{x})-d_1f_1(\boldsymbol{x})\big)+\varphi_{\bar{2}}(\boldsymbol{x})\big(f_1(\boldsymbol{x})+f_3(\boldsymbol{x})-d_2f_2(\boldsymbol{x})\big)+\varphi_{\bar{3}}(\boldsymbol{x})\big(f_1(\boldsymbol{x})+f_2(\boldsymbol{x})-$
$-d_3f_3(\boldsymbol{x})\big)\big]d\boldsymbol{\mu}=$
$=\int\big[\varphi_{\bar{1}}(\boldsymbol{x})\big(\omega_2(\boldsymbol{x})+\omega_3(\boldsymbol{x})-d_1\omega_1(\boldsymbol{x})\big)+\varphi_{\bar{2}}\big(\omega_1(\boldsymbol{x})+\omega_3(\boldsymbol{x})-d_2\omega_2(\boldsymbol{x})\big)+\varphi_{\bar{3}}\big(\omega_1(\boldsymbol{x})+\omega_2(\boldsymbol{x})-$
$-d_3\omega_3(\boldsymbol{x})\big)\big]\,d\boldsymbol{\mu}=$
$=\int[\varphi_{\bar{1}}(\boldsymbol{x})(1-\omega_1(\boldsymbol{x})(1+d_1))+\varphi_{\bar{2}}(\boldsymbol{x})(1-\omega_2(\boldsymbol{x})(1+d_2))+\varphi_{\bar{3}}(\boldsymbol{x})(1-\omega_3(\boldsymbol{x})(1+d_3))]\,d\boldsymbol{\mu}=$
$=\int[\varphi_{\bar{1}}(\boldsymbol{x})(1-H_1)+\varphi_{\bar{2}}(\boldsymbol{x})(1-H_2)+\varphi_{\bar{3}}(\boldsymbol{x})(1-H_3)]\,d\boldsymbol{\mu}\to\max,\ \tilde{\boldsymbol{\varphi}}\in\tilde{\boldsymbol{\Phi}}$.

Uždavinio (4.47) sprendiniai:

$$\varphi_{\bar{1}}^{*}(\boldsymbol{x})=\begin{cases}1, \text{ kai } H_1<H_2, H_1<H_3,\\ \delta_1, \text{ kai } H_1=H_2=H_3,\\ 0, \text{ kai } H_1<H_2, H_1<H_3,\end{cases} \tag{4.48}$$

$$\varphi_{\bar{2}}^{*}(\boldsymbol{x})=\begin{cases}1, \text{ kai } H_2<H_1, H_2<H_3,\\ \delta_2, \text{ kai } H_2=H_1=H_3,\\ 0, \text{ kai } H_2>H_1, H_2>H_3,\end{cases} \tag{4.49}$$

$$\varphi_{\bar{3}}^*(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, \text{ kai } H_3 < H_1, H_3 < H_2, \\ \delta_3, \text{ kai } H_3 = H_1 = H_2, \\ 0, \text{ kai } H_3 > H_1, H_3 > H_2, \end{cases} \tag{4.50}$$

kur konstantos $d_1 \geq 0$, $d_2 \geq 0$, $d_3 \geq 0$, $\delta_1 \in [0,1]$, $\delta_2 \in [0,1]$, $\delta_3 \in [0,1]$ randamos iš sąlygų: $\alpha_{\bar{1}1}(\varphi_{\bar{1}}^*) = b_1$, $\alpha_{\bar{2}2}(\varphi_{\bar{2}}^*) = b_2$, $\alpha_{\bar{3}3}(\varphi_{\bar{3}}^*) = b_3$.

Jeigu sprendiniai yra tokie, kaip pažymėta 4.2 pav. e), tai imdami visų tipų atsisakymo komponentę $\varphi_0^*(\boldsymbol{x}) = \varphi_{\bar{0}}^* - \varphi_{\bar{1}}^*(\boldsymbol{x}) - \varphi_{\bar{2}}^*(\boldsymbol{x}) - \varphi_{\bar{3}}^*(\boldsymbol{x})$ gauname, kad $\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}^* = (\varphi_{\bar{1}}^*(\boldsymbol{x}), \varphi_{\bar{2}}^*(\boldsymbol{x}), \varphi_{\bar{3}}^*(\boldsymbol{x}), \varphi_0^*(\boldsymbol{x}))$ yra uždavinio (4.47) sprendinys.

Tarkime po antrojo klasifikavimo nesuklasifikuotų objektų nelieka, $\varphi_0^*(\boldsymbol{x}) = 0$, tada $\varphi_{\bar{3}}^*(\boldsymbol{x}) = \varphi_{\bar{0}}^* - \varphi_{\bar{1}}^*(\boldsymbol{x}) - \varphi_{\bar{2}}^*(\boldsymbol{x})$. Maksimizuojame teisingų sprendimų tikimybių sumą:

$$\alpha_{\bar{1}2} + \alpha_{\bar{1}3} + \alpha_{\bar{2}1} + \alpha_{\bar{2}3} + \alpha_{\bar{3}1} + \alpha_{\bar{3}2} \to \max, \ \widetilde{\boldsymbol{\varphi}} = (\varphi_{\bar{1}}(\boldsymbol{x}), \varphi_{\bar{2}}(\boldsymbol{x}), \varphi_{\bar{3}}(\boldsymbol{x})) \in \widetilde{\boldsymbol{\Phi}} \tag{4.51}$$

Sprendžiame (4.51) uždavinį:

$\alpha_{\bar{1}2} + \alpha_{\bar{1}3} + \alpha_{\bar{2}1} + \alpha_{\bar{2}3} + \alpha_{\bar{3}1} + \alpha_{\bar{3}2} \to \max,\ \widetilde{\boldsymbol{\varphi}} \in \widetilde{\boldsymbol{\Phi}}$.

$\int [\varphi_{\bar{1}}(\boldsymbol{x}) f_2(\boldsymbol{x}) + \varphi_{\bar{1}}(\boldsymbol{x}) f_3(\boldsymbol{x}) + \varphi_{\bar{2}}(\boldsymbol{x}) f_1(\boldsymbol{x}) + \varphi_{\bar{2}}(\boldsymbol{x}) f_3(\boldsymbol{x}) + \varphi_{\bar{3}}(\boldsymbol{x}) f_1(\boldsymbol{x}) + \varphi_{\bar{3}}(\boldsymbol{x}) f_2(\boldsymbol{x})] d\boldsymbol{\mu} =$

$= \int \left[\varphi_{\bar{1}}(\boldsymbol{x})\left(f_2(\boldsymbol{x}) + f_3(\boldsymbol{x})\right) + \varphi_{\bar{2}}(\boldsymbol{x})\left(f_1(\boldsymbol{x}) + f_3(\boldsymbol{x})\right) + \varphi_{\bar{3}}(\boldsymbol{x})\left(f_1(\boldsymbol{x}) + f_2(\boldsymbol{x})\right)\right] d\boldsymbol{\mu} =$

$= \int \left[\varphi_{\bar{1}}(\boldsymbol{x})\left(\omega_2(\boldsymbol{x}) + \omega_3(\boldsymbol{x})\right) + \varphi_{\bar{2}}\left(\omega_1(\boldsymbol{x}) + \omega_3(\boldsymbol{x})\right) + \varphi_{\bar{3}}\left(\omega_1(\boldsymbol{x}) + \omega_2(\boldsymbol{x})\right)\right] d\boldsymbol{\mu} =$

$= \int \left[\varphi_{\bar{1}}(\boldsymbol{x})\left(1 - \omega_1(\boldsymbol{x})\right) + \varphi_{\bar{2}}(\boldsymbol{x})\left(1 - \omega_2(\boldsymbol{x})\right) + \varphi_{\bar{3}}(\boldsymbol{x})\left(1 - \omega_3(\boldsymbol{x})\right)\right] d\boldsymbol{\mu},\ \widetilde{\boldsymbol{\varphi}} \in \widetilde{\boldsymbol{\Phi}}$.

Uždavinio (4.51) sprendiniai:

$$\varphi_{\bar{1}}^*(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, \text{ kai } \omega_1(\boldsymbol{x}) < \omega_2(\boldsymbol{x}), \omega_1(\boldsymbol{x}) < \omega_3(\boldsymbol{x}), \\ \delta_1, \text{ kai } \omega_1(\boldsymbol{x}) = \omega_2(\boldsymbol{x}) = \omega_3(\boldsymbol{x}), \\ 0, \text{ kai } \omega_1(\boldsymbol{x}) < \omega_2(\boldsymbol{x}), \omega_1(\boldsymbol{x}) < \omega_3(\boldsymbol{x}), \end{cases} \tag{4.52}$$

$$\varphi_{\bar{2}}^*(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, \text{ kai } \omega_2(\boldsymbol{x}) < \omega_1(\boldsymbol{x}), \omega_2(\boldsymbol{x}) < \omega_3(\boldsymbol{x}), \\ \delta_2, \text{ kai } \omega_2(\boldsymbol{x}) = \omega_1(\boldsymbol{x}) = \omega_3(\boldsymbol{x}), \\ 0, \text{ kai } \omega_2(\boldsymbol{x}) > \omega_1(\boldsymbol{x}), \omega_2(\boldsymbol{x}) > \omega_3(\boldsymbol{x}), \end{cases} \tag{4.53}$$

$$\varphi_{\bar{3}}^*(\boldsymbol{x}) = \varphi_{\bar{0}}^* - \varphi_{\bar{1}}^*(\boldsymbol{x}) - \varphi_{\bar{2}}^*(\boldsymbol{x}). \tag{4.54}$$

Išsprendę uždavinį gauname sprendimų sritis $S_{\bar{1}}$, $S_{\bar{2}}$, $S_{\bar{3}}$, pažymėtas taisyklingajame trikampyje (žiūrėti 4.2 pav. f)). $\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}^* = (\varphi_{\bar{1}}^*(\boldsymbol{x}), \varphi_{\bar{2}}^*(\boldsymbol{x}), \varphi_{\bar{3}}^*(\boldsymbol{x}))$ yra uždavinio (4.51) sprendinys.

Apibendrinant 2 žingsnio uždavinius, sprendimų variantų gali būti pakankamai daug. 1 etapo 1 žingsnio sprendimas gali baigtis bet kuriuo variantu iš 4.1 pav.; 2 žingsnyje šis sprendimas gali būti komponuojamas su bet kuriuo variantu iš 4.2 pav., išskyrus 4.1 pav. f) variantą, kuriame 1 etape 1 žingsnyje suklasifikuojami visi objektai be atsisakymo nuo sprendimo priėmimo.

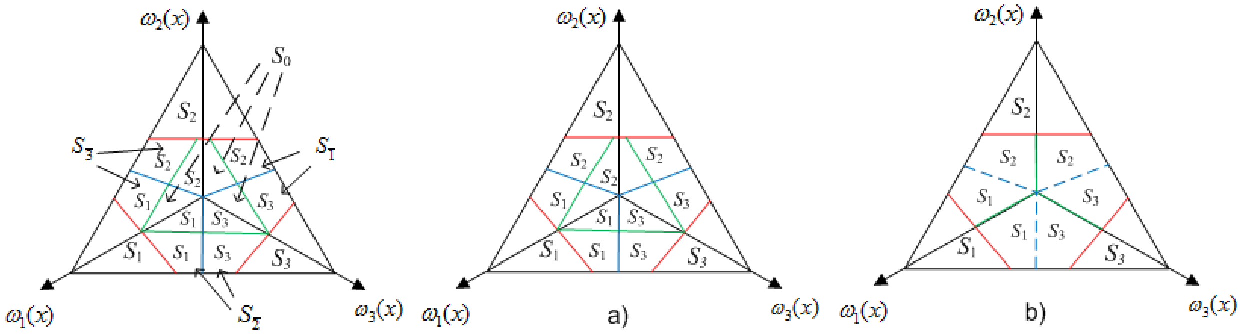
2 etapas. 1 etape 2 žingsnyje buvo detalizuota atsisakymo priežastis objektams, kuriems 1 etape 1 žingsnyje buvo atsisakyta priimti sprendimą, t.y. $\varphi_{\bar{0}}^*(\boldsymbol{x}) > 0$, ir suklasifikuoti į klases: ne pirma, ne antra arba ne trečia klasė arba atsisakyta priimti sprendimą. Taip pat tarkime, kad dalis objektų pirmajame etape lieka nesuklasifikuoti, t.y. $\varphi_0^*(\boldsymbol{x}) > 0$. Norint objektus, kuriems buvo detalizuota atsisakymo priežastis arba atsisakyta priimti sprendimą 1 etape 2 žingsnyje, atitinkamai suklasifikuoti į vieną iš trijų klasių (pirma, antra arba trečia) reikalinga papildoma informacija apie kiekvieną iš šių objektų. Tokiu atveju, greta a. v. **X** galima surinkti papildomą informaciją a. v. **Y**, kuris yra informatyvesnes negu vektorius **X**. Tačiau skirtingai, negu dviejų klasių atveju nagrinėtame 2 etape, šiuo atveju kiekvienai iš skirtingų klasių (ne pirmai, ne antrai ir ne trečiai klasei arba sprendimo atsisakymui) tikslinga parinkti skirtingą a. v. **Y** informaciją, t.y. $\mathbf{Y}_{\bar{1}}, \mathbf{Y}_{\bar{2}}, \mathbf{Y}_{\bar{3}}, \mathbf{Y}_0$. Tada sprendžiami 4 skirtingi uždaviniai nagrinėjant jungtinius vektorius: $(\mathbf{X}^T, {\mathbf{Y}_{\bar{1}}}^T)^T$, $(\mathbf{X}^T, {\mathbf{Y}_{\bar{2}}}^T)^T$, $(\mathbf{X}^T, {\mathbf{Y}_{\bar{3}}}^T)^T$, $(\mathbf{X}^T, {\mathbf{Y}_0}^T)^T$, kurių tankiai σ – baigtinio mato $\boldsymbol{\mu}$ atžvilgiu atitinkamai yra:

$$g_{j0}^{\bar{1}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \sim \left((\mathbf{X}, \mathbf{Y}_{\bar{1}}) \middle| \varphi_{\bar{1}}^*(\boldsymbol{x}) > 0, \xi = j\right), j = 1, 2, 3. \tag{4.55}$$

$$g_{j0}^{\bar{2}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \sim \left((\mathbf{X}, \mathbf{Y}_{\bar{2}}) \middle| \varphi_{\bar{2}}^*(\boldsymbol{x}) > 0, \xi = j\right), j = 1, 2, 3. \tag{4.56}$$

$$g_{j0}^{\bar{3}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \sim \left((\mathbf{X}, \mathbf{Y}_{\bar{3}}) \middle| \varphi_{\bar{3}}^*(\boldsymbol{x}) > 0, \xi = j\right), j = 1, 2, 3. \tag{4.57}$$

$$g_{j0}^{0}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \sim \left((\mathbf{X}, \mathbf{Y}_0) \middle| \varphi_0^*(\boldsymbol{x}) > 0, \xi = j\right), j = 1, 2, 3. \tag{4.58}$$



4.3.pav. Antrojo etapo sprendimų priėmimo sritys

Nagrinėjame atvejį, kai objektams po 1 etapo priimtas sprendimas $\eta = \bar{1}$, t.y. $\varphi_{\bar{1}}^*(\boldsymbol{x}) > 0$. Tegu a. d. ξ įgyja reikšmę 2 arba 3, jei objektas atitinkamai priklauso antrai arba trečiai klasei, tačiau neatsisakome galimybės, kad tarp suklasifikuotų objektų liko dalis ir 1 klasės, o a. d. η įgyja reikšmes 2 arba 3, jei objektas priskiriamas antrai ar trečiai klasei ir taip pat neatsisakome galimybės, kad tarp suklasifikuotų objektų liko dalis ir 1 klasės. Tarkime, kad surinkus papildomą informaciją apie objektus, vis dėl to buvo priimtas klaidingas sprendimas juos suklasifikuoti į ne 1 klasę. Sprendimas priimamas remiantis a. v. $(\mathbf{X}^T, {\mathbf{Y}_{\bar{1}}}^T)^T$, kurio tankio funkcija σ – baigtinio mato $\boldsymbol{\mu}$ atžvilgiu yra (4.55).

Tegu randomizuota sprendimų priėmimo taisyklė yra funkcija

$\boldsymbol{\varphi}^{\bar{1}} = \boldsymbol{\varphi}^{\bar{1}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\varphi_{10}^{\bar{1}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \varphi_{20}^{\bar{1}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \varphi_{30}^{\bar{1}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}))$; čia

$\varphi_{i0}^{\bar{1}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \mathbf{P}\{\eta = i | \mathbf{X} = \boldsymbol{x}, \mathbf{Y} = \boldsymbol{y}\}$, $0 \le \varphi_{i0}^{\bar{1}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \le 1$; $i = 1, 2, 3$;

$\varphi_{10}^{\bar{1}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \varphi_{20}^{\bar{1}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \varphi_{30}^{\bar{1}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \varphi_{\bar{1}}^*(\boldsymbol{x})$.

Sprendimų priėmimo aibę žymėsiu $\boldsymbol{\Phi}^{\bar{1}}$.

4.3 lentelė. Klasifikavimo tikslumo tikimybės 2 etape

ξ \ η	1	2	3	Σ
1	$\alpha_{11}^{\bar{1}}$	$\alpha_{21}^{\bar{1}}$	$\alpha_{31}^{\bar{1}}$	$\alpha_{\bar{1}1}$
2	$\alpha_{12}^{\bar{1}}$	$\alpha_{22}^{\bar{1}}$	$\alpha_{32}^{\bar{1}}$	$\alpha_{\bar{1}2}$
3	$\alpha_{13}^{\bar{1}}$	$\alpha_{23}^{\bar{1}}$	$\alpha_{33}^{\bar{1}}$	$\alpha_{\bar{1}3}$

Tikimybė $\alpha_{ij}^{\bar{1}}$ yra $\varphi_{i0}^{\bar{1}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ tiesinis funkcionalas:

$$\alpha_{ij}^{\bar{1}} = \alpha_{ij}^{\bar{1}}(\boldsymbol{\varphi}^{\bar{1}}) = \int \varphi_{i0}^{\bar{1}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\, g_{j0}^{\bar{1}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{\mu},\ i,j = 1,2,3. \tag{4.59}$$

Maksimizuojame teisingų sprendimų tikimybių $\alpha_{11}^{\bar{1}}$, $\alpha_{22}^{\bar{1}}$ ir $\alpha_{33}^{\bar{1}}$ sumą:

$$\alpha_{11}^{\bar{1}} + \alpha_{22}^{\bar{1}} + \alpha_{33}^{\bar{1}} \to \max,\ \boldsymbol{\varphi}^{\bar{1}} \in \boldsymbol{\Phi}^{\bar{1}}. \tag{4.60}$$

Taikome Lagranžo neapibrėžtinių daugiklių metodą:
$\alpha_{11}^{\bar{1}} + \alpha_{22}^{\bar{1}} + \alpha_{33}^{\bar{1}} \to \max,\ \boldsymbol{\varphi}^{\bar{1}} \in \boldsymbol{\Phi}^{\bar{1}}$,
$\int \left[\varphi_{10}^{\bar{1}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) g_{10}^{\bar{1}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \varphi_{20}^{\bar{1}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) g_{20}^{\bar{1}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \varphi_{30}^{\bar{1}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) g_{30}^{\bar{1}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right] d\boldsymbol{\mu} =$
$\int \left[\varphi_{10}^{\bar{1}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \omega_{10}^{\bar{1}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \varphi_{20}^{\bar{1}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \omega_{20}^{\bar{1}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \varphi_{30}^{\bar{1}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \omega_{30}^{\bar{1}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right] d\boldsymbol{\mu},\ \boldsymbol{\varphi}^{\bar{1}} \in \boldsymbol{\Phi}^{\bar{1}}$.
Uždavinio sprendinys lygus:

$$\varphi_{10}^{\bar{1}*}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \begin{cases} 1, & \omega_{10}^{\bar{1}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) > \omega_{20}^{\bar{1}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\ \omega_{10}^{\bar{1}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) > \omega_{30}^{\bar{1}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), \\ 0, & \omega_{10}^{\bar{1}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) < \omega_{20}^{\bar{1}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\ \omega_{10}^{\bar{1}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) < \omega_{30}^{\bar{1}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), \end{cases} \tag{4.61}$$

$$\varphi_{20}^{\bar{1}*}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \begin{cases} 1, & \omega_{20}^{\bar{1}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) > \omega_{10}^{\bar{1}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\ \omega_{20}^{\bar{1}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) > \omega_{30}^{\bar{1}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), \\ 0, & \omega_{20}^{\bar{1}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) < \omega_{10}^{\bar{1}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\ \omega_{20}^{\bar{1}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) < \omega_{30}^{\bar{1}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), \end{cases} \tag{4.62}$$

$$\varphi_{30}^{\bar{1}*}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \varphi_{\bar{1}}^{*}(\boldsymbol{x}) - \varphi_{10}^{\bar{1}*}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - \varphi_{20}^{\bar{1}*}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), \tag{4.63}$$

$$\boldsymbol{\varphi}^{\bar{1}*} = (\varphi_{10}^{\bar{1}*}, \varphi_{20}^{\bar{1}*}, \varphi_{30}^{\bar{1}*}) \in \boldsymbol{\Phi}^{\bar{1}}.$$

Nagrinėjame atvejį, kai objektams po 1 etapo priimtas sprendimas $\eta = \bar{2}$, t.y. $\varphi_{\bar{2}}^{*}(\boldsymbol{x}) > 0$. Tegu a. d. ξ įgyja reikšmę 1 arba 3, jei objektas atitinkamai priklauso antrai arba trečiai klasei, tačiau neatsisakome galimybės, kad tarp suklasifikuotų objektų liko dalis ir 2 klasės, o a. d. η įgyja reikšmes 1 arba 3, jei objektas priskiriamas antrai ar trečiai klasei, taip pat neatsisakome galimybės, kad tarp suklasifikuotų objektų liko dalis ir 2 klasės. Sprendimas priimamas remiantis a. v. $(\mathbf{X}^T, \mathbf{Y}_{\bar{2}}{}^T)^T$, kurio tankio funkcija σ – baigtinio mato $\boldsymbol{\mu}$ atžvilgiu yra (4.56).
Tegu randomizuota sprendimų priėmimo taisyklė yra funkcija
$\boldsymbol{\varphi}^{\bar{2}} = \boldsymbol{\varphi}^{\bar{2}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (\varphi_{10}^{\bar{2}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), \varphi_{20}^{\bar{2}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), \varphi_{30}^{\bar{2}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))$; čia
$\varphi_{i0}^{\bar{2}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \mathbf{P}\{\eta = i | \mathbf{X} = \boldsymbol{x}, \mathbf{Y} = \boldsymbol{y}\}, 0 \le \varphi_{i0}^{\bar{2}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \le 1;\ i = 1, 2, 3;$
$\varphi_{10}^{\bar{2}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \varphi_{20}^{\bar{2}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \varphi_{30}^{\bar{2}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \varphi_{\bar{2}}^{*}(\boldsymbol{x})$.
Sprendimų priėmimo aibę žymėsiu $\boldsymbol{\Phi}^{\bar{2}}$.

4.4 lentelė. Klasifikavimo tikslumo tikimybės 2 etape

$\xi \backslash \eta$	1	2	3	Σ
1	$\alpha_{11}^{\bar{2}}$	$\alpha_{21}^{\bar{2}}$	$\alpha_{31}^{\bar{2}}$	$\alpha_{\bar{2}1}$
2	$\alpha_{12}^{\bar{2}}$	$\alpha_{22}^{\bar{2}}$	$\alpha_{32}^{\bar{2}}$	$\alpha_{\bar{2}2}$
3	$\alpha_{13}^{\bar{2}}$	$\alpha_{23}^{\bar{2}}$	$\alpha_{33}^{\bar{2}}$	$\alpha_{\bar{2}3}$

Tikimybė $\alpha_{ij}^{\bar{2}}$ yra $\varphi_{i0}^{\bar{2}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ tiesinis funkcionalas:

$$\alpha_{ij}^{\bar{2}} = \alpha_{ij}^{\bar{2}}(\boldsymbol{\varphi}^{\bar{2}}) = \int \varphi_{i0}^{\bar{2}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\, g_{j0}^{\bar{2}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{\mu},\ i,j = 1,2,3. \tag{4.64}$$

Maksimizuojame teisingų sprendimų tikimybių $\alpha_{11}^{\bar{2}}$, $\alpha_{22}^{\bar{2}}$ ir $\alpha_{33}^{\bar{2}}$ sumą:

$$\alpha_{11}^{\bar{2}} + \alpha_{22}^{\bar{2}} + \alpha_{33}^{\bar{2}} \to \max, \ \boldsymbol{\varphi}^{\bar{2}} \in \boldsymbol{\Phi}^{\bar{2}}. \tag{4.65}$$

Taikome Lagranžo neapibrėžtinių daugiklių metodą:
$\alpha_{11}^{\bar{2}} + \alpha_{22}^{\bar{2}} + \alpha_{33}^{\bar{2}} \to \max, \ \boldsymbol{\varphi}^{\bar{2}} \in \boldsymbol{\Phi}^{\bar{2}},$
$\int \left[\varphi_{10}^{\bar{2}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) g_{10}^{\bar{2}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \varphi_{20}^{\bar{2}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) g_{20}^{\bar{2}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \varphi_{30}^{\bar{2}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) g_{30}^{\bar{2}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right] d\boldsymbol{\mu} =$
$= \int \left[\varphi_{10}^{\bar{2}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \omega_{10}^{\bar{2}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \varphi_{20}^{\bar{2}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \omega_{20}^{\bar{2}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \varphi_{30}^{\bar{2}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \omega_{30}^{\bar{2}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right] d\boldsymbol{\mu} \to \max, \ \boldsymbol{\varphi}^{\bar{2}} \in \boldsymbol{\Phi}^{\bar{2}}.$
Uždavinio (4.65) sprendinys lygus:

$$\varphi_{10}^{\bar{2}*}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \begin{cases} 1, & \omega_{10}^{\bar{2}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) > \omega_{20}^{\bar{2}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\ \omega_{10}^{\bar{2}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) > \omega_{30}^{\bar{2}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), \\ 0, & \omega_{10}^{\bar{2}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) < \omega_{20}^{\bar{2}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\ \omega_{10}^{\bar{2}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) < \omega_{30}^{\bar{2}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), \end{cases} \tag{4.66}$$

$$\varphi_{20}^{\bar{2}*}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \begin{cases} 1, & \omega_{20}^{\bar{2}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) > \omega_{10}^{\bar{2}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\ \omega_{20}^{\bar{2}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) > \omega_{30}^{\bar{2}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), \\ 0, & \omega_{20}^{\bar{2}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) < \omega_{10}^{\bar{2}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\ \omega_{20}^{\bar{2}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) < \omega_{30}^{\bar{2}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), \end{cases} \tag{4.67}$$

$$\varphi_{30}^{\bar{2}*}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \varphi_{\bar{2}}^{*}(\boldsymbol{x}) - \varphi_{10}^{\bar{2}*}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - \varphi_{20}^{\bar{2}*}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), \tag{4.68}$$

$$\boldsymbol{\varphi}^{\bar{2}*} = (\varphi_{10}^{\bar{2}*}, \varphi_{20}^{\bar{2}*}, \varphi_{30}^{\bar{2}*}) \in \boldsymbol{\Phi}^{\bar{2}}.$$

Nagrinėjame atvejį, kai objektams po 1 etapo priimtas sprendimas $\eta = \bar{3}$, t.y. $\varphi_{\bar{3}}^{*}(\boldsymbol{x}) > 0$. Tegu a. d. ξ įgyja reikšmę 1 arba 2, jei objektas atitinkamai priklauso antrai arba trečiai klasei, tačiau neatsisakome galimybės, kad tarp suklasifikuotų objektų liko dalis ir 3 klasės, o a. d. η įgyja reikšmes 1 arba 2, jei objektas priskiriamas antrai ar trečiai klasei, bet taip pat neatsisakome galimybės, kad tarp suklasifikuotų objektų liko dalis ir 3 klasės. Sprendimas priimamas remiantis a. v. $(\mathbf{X}^T, \mathbf{Y}_{\bar{3}}{}^T)^T$, kurio tankio funkcija σ – baigtinio mato $\boldsymbol{\mu}$ atžvilgiu yra (4.57).
Tegu randomizuota sprendimų priėmimo taisyklė yra funkcija
$\boldsymbol{\varphi}^{\bar{3}} = \boldsymbol{\varphi}^{\bar{3}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (\varphi_{10}^{\bar{3}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), \varphi_{20}^{\bar{3}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), \varphi_{30}^{\bar{3}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))$; čia
$\varphi_{i0}^{\bar{3}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \mathbf{P}\{\eta = i | \mathbf{X} = \boldsymbol{x}, \mathbf{Y} = \boldsymbol{y}\}, 0 \le \varphi_{i0}^{\bar{3}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \le 1;\ i = 1, 2, 3;$
$\varphi_{10}^{\bar{3}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \varphi_{20}^{\bar{3}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \varphi_{30}^{\bar{3}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \varphi_{\bar{3}}^{*}(\boldsymbol{x}).$
Sprendimų priėmimo aibę žymėsiu $\boldsymbol{\Phi}^{\bar{3}}$.

4.5 lentelė. Klasifikavimo tikslumo tikimybės 2 etape

$\xi \backslash \eta$	1	2	3	Σ
1	$\alpha_{11}^{\bar{3}}$	$\alpha_{21}^{\bar{3}}$	$\alpha_{31}^{\bar{3}}$	$\alpha_{\bar{3}1}$
2	$\alpha_{12}^{\bar{3}}$	$\alpha_{22}^{\bar{3}}$	$\alpha_{32}^{\bar{3}}$	$\alpha_{\bar{3}2}$
3	$\alpha_{13}^{\bar{3}}$	$\alpha_{23}^{\bar{3}}$	$\alpha_{33}^{\bar{3}}$	$\alpha_{\bar{3}3}$

Tikimybė $\alpha_{ij}^{\bar{3}}$ yra $\varphi_{i0}^{\bar{3}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ tiesinis funkcionalas:

$$\alpha_{ij}^{\bar{3}} = \alpha_{ij}^{\bar{3}}(\boldsymbol{\varphi}^{\bar{3}}) = \int \varphi_{i0}^{\bar{3}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\, g_{j0}^{\bar{3}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{\mu},\ i,j = 1, 2, 3. \tag{4.69}$$

Maksimizuojame teisingų sprendimų tikimybių $\alpha_{11}^{\bar{3}}$, $\alpha_{22}^{\bar{3}}$ ir $\alpha_{33}^{\bar{3}}$ sumą:

$$\alpha_{11}^{\bar{3}} + \alpha_{22}^{\bar{3}} + \alpha_{33}^{\bar{3}} \to \max,\ \boldsymbol{\varphi}^{\bar{3}} \in \boldsymbol{\Phi}^{\bar{3}}. \tag{4.70}$$

Taikome Lagranžo neapibrėžtinių daugiklių metodą:
$\alpha_{11}^{\bar{3}} + \alpha_{22}^{\bar{3}} + \alpha_{33}^{\bar{3}} \to \max,\ \boldsymbol{\varphi}^{\bar{3}} \in \boldsymbol{\Phi}^{\bar{3}}$,
$\int\left[\varphi_{10}^{\bar{3}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})g_{10}^{\bar{3}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \varphi_{20}^{\bar{3}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})g_{20}^{\bar{3}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \varphi_{30}^{\bar{3}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})g_{30}^{\bar{3}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right] d\boldsymbol{\mu} =$
$= \int\left[\varphi_{10}^{\bar{3}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\omega_{10}^{\bar{3}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \varphi_{20}^{\bar{3}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\omega_{20}^{\bar{3}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \varphi_{30}^{\bar{3}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\omega_{30}^{\bar{3}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right] d\boldsymbol{\mu} \to \max,\ \boldsymbol{\varphi}^{\bar{3}} \in \boldsymbol{\Phi}^{\bar{3}}$.
Uždavinio (4.70) sprendinys lygus:

$$\varphi_{10}^{\bar{3}*}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \begin{cases} 1, & \omega_{10}^{\bar{3}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) > \omega_{20}^{\bar{3}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), \omega_{10}^{\bar{3}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) > \omega_{30}^{\bar{3}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), \\ 0, & \omega_{10}^{\bar{3}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) < \omega_{20}^{\bar{3}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), \omega_{10}^{\bar{3}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) < \omega_{30}^{\bar{3}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), \end{cases} \tag{4.71}$$

$$\varphi_{20}^{\bar{3}*}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \begin{cases} 1, & \omega_{20}^{\bar{3}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) > \omega_{10}^{\bar{3}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), \omega_{20}^{\bar{3}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) > \omega_{30}^{\bar{3}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), \\ 0, & \omega_{20}^{\bar{3}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) < \omega_{10}^{\bar{3}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), \omega_{20}^{\bar{3}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) < \omega_{30}^{\bar{3}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), \end{cases} \tag{4.72}$$

$$\varphi_{30}^{\bar{3}*}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \varphi_{\bar{3}}^{*}(\boldsymbol{x}) - \varphi_{10}^{\bar{3}*}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - \varphi_{20}^{\bar{3}*}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), \tag{4.73}$$

$$\boldsymbol{\varphi}^{\bar{3}*} = (\varphi_{10}^{\bar{3}*}, \varphi_{20}^{\bar{3}*}, \varphi_{30}^{\bar{3}*}) \in \boldsymbol{\Phi}^{\bar{3}}.$$

Nagrinėjame atvejį, kai objektams po 1 etapo priimtas sprendimas $\eta = 0$, t.y. $\varphi_0^*(\boldsymbol{x}) > 0$. Tegu a. d. ξ įgyja reikšmę 1, 2 arba 3, jei objektas atitinkamai priklauso pirmai, antrai arba trečiai klasei, o a. d. η įgyja reikšmes 1, 2 arba 3, jei objektas priskiriamas pirmai, antrai ar trečiai klasei. Sprendimas priimamas remiantis a. v. $(\mathbf{X}^T, \mathbf{Y}_0{}^T)^T$, kurio tankio funkcija σ – baigtinio mato $\boldsymbol{\mu}$ atžvilgiu yra (4.58).
Tegu randomizuota sprendimų priėmimo taisyklė yra funkcija
$\boldsymbol{\varphi}^0 = \boldsymbol{\varphi}^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (\varphi_{10}^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), \varphi_{20}^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), \varphi_{30}^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))$; čia
$\varphi_{i0}^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \mathbf{P}\{\eta = i | \mathbf{X} = \boldsymbol{x}, \mathbf{Y} = \boldsymbol{y}\}, 0 \le \varphi_{i0}^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \le 1;\ i = 1, 2, 3;$
$\varphi_{10}^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \varphi_{20}^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \varphi_{30}^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \varphi_0^*(\boldsymbol{x})$.
Sprendimų priėmimo aibę žymėsiu $\boldsymbol{\Phi}^0$.

4.6 lentelė. Klasifikavimo tikslumo tikimybės 2 etape

$\xi \backslash \eta$	1	2	3	Σ
1	α_{11}^0	α_{21}^0	α_{31}^0	α_{01}
2	α_{12}^0	α_{22}^0	α_{32}^0	α_{02}
3	α_{13}^0	α_{23}^0	α_{33}^0	α_{03}

Tikimybė α_{ij}^0 yra $\varphi_{i0}^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ tiesinis funkcionalas:

$$\alpha_{ij}^0 = \alpha_{ij}^0(\boldsymbol{\varphi}^0) = \int \varphi_{i0}^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\, g_{j0}^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{\mu},\ i,j = 1, 2, 3. \tag{4.74}$$

Maksimizuojame teisingų sprendimų tikimybių α_{11}^0, α_{22}^0 ir α_{33}^0 sumą:

$$\alpha_{11}^0 + \alpha_{22}^0 + \alpha_{33}^0 \to \max,\ \boldsymbol{\varphi}^0 \in \boldsymbol{\Phi}^0. \tag{4.75}$$

Taikome Lagranžo neapibrėžtinių daugiklių metodą:
$\alpha_{11}^0 + \alpha_{22}^0 + \alpha_{33}^0 \to \max,\ \boldsymbol{\varphi}^0 \in \boldsymbol{\Phi}^0$.
$\int[\varphi_{10}^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})g_{10}^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \varphi_{20}^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})g_{20}^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \varphi_{30}^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})g_{30}^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})]d\boldsymbol{\mu} =$

$$= \int [\varphi_{10}^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\omega_{10}^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \varphi_{20}^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\omega_{20}^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \varphi_{30}^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\omega_{30}^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})]d\boldsymbol{\mu} \to \max, \ \boldsymbol{\varphi}^0 \in \boldsymbol{\Phi}^0.$$

Uždavinio (4.75) sprendiniai:

$$\varphi_{10}^{0*}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \begin{cases} 1, & \omega_{10}^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) > \omega_{20}^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), \omega_{10}^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) > \omega_{30}^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), \\ 0, & \omega_{10}^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) < \omega_{20}^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), \omega_{10}^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) < \omega_{30}^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), \end{cases} \tag{4.76}$$

$$\varphi_{20}^{0*}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \begin{cases} 1, & \omega_{20}^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) > \omega_{10}^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), \omega_{20}^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) > \omega_{30}^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), \\ 0, & \omega_{20}^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) < \omega_{10}^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), \omega_{20}^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) < \omega_{30}^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), \end{cases} \tag{4.77}$$

$$\varphi_{30}^{0*}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \varphi_0^*(\boldsymbol{x}) - \varphi_{10}^{0*}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - \varphi_{20}^{0*}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), \tag{4.78}$$

$$\boldsymbol{\varphi}^{0*} = (\varphi_{10}^{0*}, \varphi_{20}^{0*}, \varphi_{30}^{0*}) \in \boldsymbol{\Phi}^0.$$

Išsprendę uždavinį gauname sprendimų sritis S_1, S_2, S_3, pažymėtas taisyklingajame trikampyje (žiūrėti 4.3 pav. a)). $\boldsymbol{\varphi}^{0*} = (\varphi_{10}^{0*}, \varphi_{20}^{0*}, \varphi_{30}^{0*}) \in \boldsymbol{\Phi}^0$ yra uždavinio (4.75) sprendinys.

5. Hierarchinis klasifikavimas trijų klasių atveju atsisakant priimti sprendimą, kai apribojamos aposteriorinės klaidų tikimybės

5.1 lentelė. Aposteriorinės klasifikavimo tikimybės

$\xi \backslash \eta$	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	0
1	β_{11}	β_{12}	β_{13}	$\beta_{1\bar{1}}$	$\beta_{1\bar{2}}$	$\beta_{1\bar{3}}$	β_{10}
2	β_{21}	β_{22}	β_{23}	$\beta_{2\bar{1}}$	$\beta_{2\bar{2}}$	$\beta_{2\bar{3}}$	β_{20}
3	β_{31}	β_{32}	β_{33}	$\beta_{3\bar{1}}$	$\beta_{3\bar{2}}$	$\beta_{3\bar{3}}$	β_{30}
Σ	1	1	1	1	1	1	1

1 etapas. 1 žingsnis. Jei yra žinomos apriorinės klasių tikimybės $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ sąlyginio ekstremumo radimo uždavinį (4.5) galima spręsti apribojant aposteriorines klasifikavimo tikimybes β_{ji}, $i \neq j$; $i, j = 1,2,3$.

Pažymėkime:

$$\beta_{ji} = \mathbf{P}\{\xi = j | \eta = i\} = \frac{\alpha_{ij}\omega_j}{\alpha_{i1}\omega_1 + \alpha_{i2}\omega_2 + \alpha_{i3}\omega_3}, \ i = 1, 2, 3, \tilde{0}; j = 1,2,3;$$

čia $\omega_j = \mathbf{P}(\boldsymbol{\xi} = j), j = 1, 2, 3$; $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1$, apriorinės klasių tikimybės.

5.2 lentelė. Aposteriorinės klasifikavimo tikimybės 1 etapas 1 žingsnis

$\xi \backslash \eta$	1	2	3	$\tilde{0}$
1	β_{11}	β_{12}	β_{13}	$\beta_{1\tilde{0}}$
2	β_{21}	β_{22}	β_{23}	$\beta_{2\tilde{0}}$
3	β_{31}	β_{32}	β_{33}	$\beta_{3\tilde{0}}$
Σ	1	1	1	1

Pagal 5.1 lentelę klasifikavimo tikslumo tikimybės $\beta_{i\tilde{0}}, i = 1,2,3$:
$\beta_{1\tilde{0}} = \beta_{1\bar{1}} + \beta_{1\bar{2}} + \beta_{1\bar{3}} + \beta_{10}$,
$\beta_{2\tilde{0}} = \beta_{2\bar{1}} + \beta_{2\bar{2}} + \beta_{2\bar{3}} + \beta_{20}$,
$\beta_{3\tilde{0}} = \beta_{3\bar{1}} + \beta_{3\bar{2}} + \beta_{3\bar{3}} + \beta_{30}$.

Priimami sprendimai objektus priskirti vienai iš trijų klasių arba atsisakoma priimti sprendimą nedetalizuojant atsisakymo priežasties. Sprendžiame sąlyginio ekstremumo radimo uždavinį apribojant tikimybes, kurios apibūdina suklasifikuotų objektų aibių užterštumą kitų klasių objektais, β_{ji}, $i \neq j$; $i, j = 1,2,3$:

$$\begin{cases} \alpha_{ii} \to \max, i = 1,2,3, \\ \beta_{ji} \le b_{ji}, i \neq j; i, j = 1,2,3, \end{cases} \boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1(\boldsymbol{x}), \varphi_2(\boldsymbol{x}), \varphi_3(\boldsymbol{x}), \varphi_{\tilde{0}}(\boldsymbol{x})) \in \boldsymbol{\Phi}. \quad (5.1)$$

Išskaidome uždavinį (5.1) į tris atskirus uždavinius:

$$\begin{cases} \alpha_{11} \to \max, \\ \beta_{21} \le b_{21}, \\ \beta_{31} \le b_{31}, \end{cases} \quad (5.2) \qquad \begin{cases} \alpha_{22} \to \max, \\ \beta_{12} \le b_{12}, \\ \beta_{32} \le b_{32}, \end{cases} \quad (5.3) \qquad \begin{cases} \alpha_{33} \to \max, \\ \beta_{13} \le b_{13}, \\ \beta_{23} \le b_{23}, \end{cases} \quad (5.4)$$

čia
$0 < b_{12}, b_{13} < \omega_1$;
$0 < b_{21}, b_{23} < \omega_2$;
$0 < b_{31}, b_{32} < \omega_3$.

Sprendžiame (5.2) uždavinį. Visų pirma suvedame apribojimus β_{21}, β_{31} į tiesinius pavidalus: $\alpha_{12}\omega_2(1 - b_{21}) - \alpha_{11}\omega_1 b_{21} - \alpha_{13}\omega_3 b_{21} \le 0$ ir $\alpha_{13}\omega_3(1 - b_{31}) - \alpha_{11}\omega_1 b_{31} - \alpha_{12}\omega_2 b_{31} \le 0$.
Pažymime:
$\gamma_1 = \omega_1 b_{21}$, $\gamma_2 = \omega_2(1 - b_{21})$, $\gamma_3 = \omega_3 b_{21}$,
$\vartheta_1 = \omega_1 b_{31}$, $\vartheta_2 = \omega_2 b_{31}$, $\vartheta_3 = \omega_3(1 - b_{31})$.
Įrašius tiesinius pavidalus ir pažymėjimus į (5.2) uždavinį gauname:

$$\begin{cases} \alpha_{11} \to \max, \\ \alpha_{12}\gamma_2 - \alpha_{11}\gamma_1 - \alpha_{13}\gamma_3 \le 0 \\ \alpha_{13}\vartheta_3 - \alpha_{11}\vartheta_1 - \alpha_{12}\vartheta_2 \le 0 \end{cases} \quad (5.5)$$

Taikome Lagranžo neapibrėžtinių daugiklių metodą:
$\alpha_{11} - c_{21}(\alpha_{12}\gamma_2 - \alpha_{11}\gamma_1 - \alpha_{13}\gamma_3) - c_{31}(\alpha_{13}\vartheta_3 - \alpha_{11}\vartheta_1 - \alpha_{12}\vartheta_2) \to \max$, $\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{\Phi}$,
$\int \varphi_1(\boldsymbol{x})[(1 + c_{21}\gamma_1 + c_{31}\vartheta_1)f_1(\boldsymbol{x}) - (c_{21}\gamma_2 - c_{31}\vartheta_2)f_2(\boldsymbol{x}) - (c_{31}\vartheta_3 - c_{21}\gamma_3)f_3(\boldsymbol{x})]\, d\boldsymbol{\mu} =$
$\int \varphi_1(\boldsymbol{x})[(1 + c_{21}\gamma_1 + c_{31}\vartheta_1)\omega_1(\boldsymbol{x}) - (c_{21}\gamma_2 - c_{31}\vartheta_2)\omega_2(\boldsymbol{x}) - (c_{31}\vartheta_3 - c_{21}\gamma_3)\omega_3(\boldsymbol{x})]d\boldsymbol{\mu} \to \max$,
$\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{\Phi}$.
Pagal fundamentaliąją Neimano – Pirsono lemą uždavinio (5.2) sprendinys lygus:

$$\varphi_1^*(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, \text{ kai } \omega_1(\boldsymbol{x}) > \frac{(c_{21}\gamma_2 - c_{31}\vartheta_2)\omega_2(x) + (c_{31}\vartheta_3 - c_{21}\gamma_3)\omega_3(x)}{(1 + c_{21}\gamma_1 + c_{31}\vartheta_1)}, \\ \delta_1, \text{ kai } \omega_1(\boldsymbol{x}) = \frac{(c_{21}\gamma_2 - c_{31}\vartheta_2)\omega_2(x) + (c_{31}\vartheta_3 - c_{21}\gamma_3)\omega_3(x)}{(1 + c_{21}\gamma_1 + c_{31}\vartheta_1)}, \\ 0, \text{ kai } \omega_1(\boldsymbol{x}) < \frac{(c_{21}\gamma_2 - c_{31}\vartheta_2)\omega_2(x) + (c_{31}\vartheta_3 - c_{21}\gamma_3)\omega_3(x)}{(1 + c_{21}\gamma_1 + c_{31}\vartheta_1)}, \end{cases} \quad (5.6)$$

kur konstantos $c_{21} \ge 0$, $c_{31} \ge 0$, $\delta_1 \in [0,1]$ randamos iš sąlygos: $\beta_{21}(\varphi_1^*) = b_{21}$,

$\beta_{31}(\varphi_1^*) = b_{31}$, t.y. $\alpha_{12}\omega_2(1 - b_{21}) - \alpha_{11}\omega_1 b_{21} - \alpha_{13}\omega_3 b_{21} = 0$ ir
$\alpha_{13}\omega_3(1 - b_{31}) - \alpha_{11}\omega_1 b_{31} - \alpha_{12}\omega_2 b_{31} = 0$.
Analogiškai sprendžiami (5.3) ir (5.4) uždaviniai.

Sprendžiame (5.3) uždavinį. Suvedame apribojimus β_{12}, β_{32} į tiesinius pavidalus:
$\alpha_{21}\omega_1(1 - b_{12}) - \alpha_{22}\omega_2 b_{12} - \alpha_{23}\omega_3 b_{12} \leq 0$ ir $\alpha_{23}\omega_3(1 - b_{32}) - \alpha_{22}\omega_2 b_{32} - \alpha_{21}\omega_1 b_{32} \leq 0$.
Pažymime:
$\gamma_1 = \omega_1(1 - b_{12}),\ \gamma_2 = \omega_2 b_{12},\ \gamma_3 = \omega_3 b_{12}$,
$\vartheta_1 = \omega_1 b_{32},\ \vartheta_2 = \omega_2 b_{32},\ \vartheta_3 = \omega_3(1 - b_{32})$.
Įrašius tiesinius pavidalus ir pažymėjimus į (5.3) uždavinį gauname:

$$\begin{cases} \alpha_{22} \to \max, \\ \alpha_{21}\gamma_1 - \alpha_{22}\gamma_2 - \alpha_{23}\gamma_3 \leq 0 \\ \alpha_{23}\vartheta_3 - \alpha_{22}\vartheta_2 - \alpha_{21}\vartheta_1 \leq 0 \end{cases} \tag{5.7}$$

Taikome Lagranžo neapibrėžtinių daugiklių metodą:
$\alpha_{22} - c_{12}(\alpha_{21}\gamma_1 - \alpha_{22}\gamma_2 - \alpha_{23}\gamma_3) - c_{32}(\alpha_{23}\vartheta_3 - \alpha_{22}\vartheta_2 - \alpha_{21}\vartheta_1) \to \max,\ \boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{\Phi}$,
$\int \varphi_2(\boldsymbol{x})[(1 + c_{12}\gamma_2 + c_{32}\vartheta_2)f_2(\boldsymbol{x}) - (c_{12}\gamma_1 - c_{32}\vartheta_1)f_1(\boldsymbol{x}) - (c_{32}\vartheta_3 - c_{12}\gamma_3)f_3(\boldsymbol{x})]\, d\boldsymbol{\mu} =$
$\int \varphi_2(\boldsymbol{x})[(1 + c_{12}\gamma_2 + c_{32}\vartheta_2)\omega_2(\boldsymbol{x}) - (c_{12}\gamma_1 - c_{32}\vartheta_1)\omega_1(\boldsymbol{x}) - (c_{32}\vartheta_3 - c_{12}\gamma_3)\omega_3(\boldsymbol{x})]d\boldsymbol{\mu} \to \max$,
$\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{\Phi}$.
Pagal fundamentaliąją Neimano – Pirsono lemą uždavinio (5.3) sprendinys lygus:

$$\varphi_2^*(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, \text{ kai } \omega_2(\boldsymbol{x}) > \frac{(c_{12}\gamma_1 - c_{32}\vartheta_1)\omega_1(\boldsymbol{x}) + (c_{32}\vartheta_3 - c_{12}\gamma_3)\omega_3(\boldsymbol{x})}{(1 + c_{12}\gamma_2 + c_{32}\vartheta_2)}, \\ \delta_2, \text{ kai } \omega_2(\boldsymbol{x}) = \frac{(c_{12}\gamma_1 - c_{32}\vartheta_1)\omega_1(\boldsymbol{x}) + (c_{32}\vartheta_3 - c_{12}\gamma_3)\omega_3(\boldsymbol{x})}{(1 + c_{12}\gamma_2 + c_{32}\vartheta_2)}, \\ 0, \text{ kai } \omega_2(\boldsymbol{x}) < \frac{(c_{12}\gamma_1 - c_{32}\vartheta_1)\omega_1(\boldsymbol{x}) + (c_{32}\vartheta_3 - c_{12}\gamma_3)\omega_3(\boldsymbol{x})}{(1 + c_{12}\gamma_2 + c_{32}\vartheta_2)}, \end{cases} \tag{5.8}$$

kur konstantos $c_{12} \geq 0,\ c_{32} \geq 0,\ \delta_2 \in [0,1]$ randamos iš sąlygos: $\beta_{12}(\varphi_2^*) = b_{12}$,
$\beta_{32}(\varphi_2^*) = b_{32}$, t.y. $\alpha_{21}\omega_1(1 - b_{12}) - \alpha_{22}\omega_2 b_{12} - \alpha_{23}\omega_3 b_{12} = 0$ ir
$\alpha_{23}\omega_3(1 - b_{32}) - \alpha_{22}\omega_2 b_{32} - \alpha_{21}\omega_1 b_{32} = 0$.

Sprendžiame (5.4) uždavinį. Suvedame apribojimus β_{13}, β_{23} į tiesinius pavidalus:
$\alpha_{31}\omega_1(1 - b_{13}) - \alpha_{32}\omega_2 b_{13} - \alpha_{33}\omega_3 b_{13} \leq 0$ ir $\alpha_{32}\omega_2(1 - b_{23}) - \alpha_{31}\omega_1 b_{23} - \alpha_{33}\omega_3 b_{23} \leq 0$.
Pažymime:
$\gamma_1 = \omega_1(1 - b_{13}),\ \gamma_2 = \omega_2 b_{13},\ \gamma_3 = \omega_3 b_{13}$,
$\vartheta_1 = \omega_1 b_{23},\ \vartheta_2 = \omega_2(1 - b_{23}),\ \vartheta_3 = \omega_3 b_{23}$.
Įrašius į (5.4) uždavinį tiesinius pavidalus gauname ir pažymėjimus:

$$\begin{cases} \alpha_{33} \to \max, \\ \alpha_{31}\gamma_1 - \alpha_{32}\gamma_2 - \alpha_{33}\gamma_3 \leq 0 \\ \alpha_{32}\vartheta_2 - \alpha_{31}\vartheta_1 - \alpha_{33}\vartheta_3 \leq 0 \end{cases} \tag{5.9}$$

Taikome Lagranžo neapibrėžtinių daugiklių metodą:
$\alpha_{33} - c_{13}(\alpha_{31}\gamma_1 - \alpha_{32}\gamma_2 - \alpha_{33}\gamma_3) - c_{32}(\alpha_{32}\vartheta_2 - \alpha_{31}\vartheta_1 - \alpha_{33}\vartheta_3) \to \max,\ \boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{\Phi}$,
$\int \varphi_3(\boldsymbol{x})[(1 + c_{13}\gamma_3 + c_{32}\vartheta_3)f_3(\boldsymbol{x}) - (c_{32}\vartheta_2 - c_{13}\gamma_2)f_2(\boldsymbol{x}) - (c_{13}\gamma_1 - c_{23}\vartheta_1)f_1(\boldsymbol{x})]\, d\boldsymbol{\mu} =$
$\int \varphi_3(\boldsymbol{x})[(1 + c_{13}\gamma_3 + c_{32}\vartheta_3)\omega_3(\boldsymbol{x}) - (c_{32}\vartheta_2 - c_{13}\gamma_2)\omega_2(\boldsymbol{x}) - (c_{13}\gamma_1 - c_{23}\vartheta_1)\omega_1(\boldsymbol{x})]\, d\boldsymbol{\mu} \to \max$,
$\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{\Phi}$.
Pagal fundamentaliąją Neimano – Pirsono lemą uždavinio (5.4) sprendinys lygus:

$$\varphi_3^*(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, \text{ kai } \omega_3(\boldsymbol{x}) > \frac{(c_{32}\vartheta_2 - c_{13}\gamma_2)\omega_2(\boldsymbol{x}) + (c_{13}\gamma_1 - c_{23}\vartheta_1)\omega_1(\boldsymbol{x})}{(1 + c_{13}\gamma_3 + c_{32}\vartheta_3)}, \\ \delta_3, \text{ kai } \omega_3(\boldsymbol{x}) = \frac{(c_{32}\vartheta_2 - c_{13}\gamma_2)\omega_2(\boldsymbol{x}) + (c_{13}\gamma_1 - c_{23}\vartheta_1)\omega_1(\boldsymbol{x})}{(1 + c_{13}\gamma_3 + c_{32}\vartheta_3)}, \\ 0, \text{ kai } \omega_3(\boldsymbol{x}) < \frac{(c_{32}\vartheta_2 - c_{13}\gamma_2)\omega_2(\boldsymbol{x}) + (c_{13}\gamma_1 - c_{23}\vartheta_1)\omega_1(\boldsymbol{x})}{(1 + c_{13}\gamma_3 + c_{32}\vartheta_3)}, \end{cases} \quad (5.10)$$

kur konstantos $c_{13} \geq 0,\ c_{23} \geq 0,\ \delta_3 \in [0,1]$ randamos iš sąlygos: $\beta_{13}(\varphi_3^*) = b_{13}$, $\beta_{23}(\varphi_3^*) = b_{23}$, t.y. $\alpha_{31}\omega_1(1 - b_{13}) - \alpha_{32}\omega_2 b_{13} - \alpha_{33}\omega_3 b_{13} = 0$ ir $\alpha_{32}\omega_2(1 - b_{23}) - \alpha_{31}\omega_1 b_{23} - \alpha_{33}\omega_3 b_{23} = 0$.

Išsprendę visus tris uždavinius (5.2), (5.3) ir (5.4) gauname sprendimų sritis S_1, S_2, S_3, pažymėtas taisyklingajame trikampyje. Jeigu sprendiniai yra tokie, kaip pažymėta 4.1 pav. a), tai imdami visų tipų atsisakymo komponentę $\varphi_{\bar{0}}^*(\boldsymbol{x}) = 1 - \varphi_1^*(\boldsymbol{x}) - \varphi_2^*(\boldsymbol{x}) - \varphi_3^*(\boldsymbol{x})$ gauname, kad $\boldsymbol{\varphi}^* = (\varphi_1^*(\boldsymbol{x}), \varphi_2^*(\boldsymbol{x}), \varphi_3^*(\boldsymbol{x}), \varphi_{\bar{0}}^*(\boldsymbol{x}))$ yra uždavinio (5.1) sprendinys.
Analogiškai sprendžiami uždaviniai, jeigu sprendimų sritys S_1, S_2, S_3 tarpusavyje kertasi, kaip pavaizduota 4.1 pav. b)-f) pagal 4 skyriaus 1 etapo 1 žingsnio uždavinius.

1 etapas. 2 žingsnis. Jei yra žinomos apriorinės klasių tikimybės $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ sąlyginio ekstremumo radimo uždavinį (4.35) galima spręsti apribojant aposteriorines klasifikavimo tikimybes β_{ji}, $i \neq j$; $i, j = 1,2,3$.

Pažymėkime:

$$\beta_{ji} = \mathbf{P}\{\xi = j | \eta = i\} = \frac{\alpha_{ij}\omega_j}{\alpha_{i1}\omega_1 + \alpha_{i2}\omega_2 + \alpha_{i3}\omega_3}, i = \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, 0;\ j = 1,2,3,$$

čia $\omega_j = \mathbf{P}(\boldsymbol{\xi} = j),\ j = 1,2,3;\ \ \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1$, apriorinės klasių tikimybės.

Detalizuojama atsisakymo priežastis objektams, kuriems pirmame žingsnyje buvo atsisakyta priimti sprendimą. Sprendžiame sąlyginio ekstremumo radimo uždavinį (4.35) apribojant aposteriorines tikimybes $\beta_{j\bar{i}}$, $i \neq j$; $i, j = 1,2,3$.

$$\begin{cases} \alpha_{\bar{1}2} + \alpha_{\bar{1}3} \to \max, \\ \alpha_{\bar{2}1} + \alpha_{\bar{2}3} \to \max, \\ \alpha_{\bar{3}1} + \alpha_{\bar{3}2} \to \max, \\ \beta_{i\bar{i}} \leq a_i, i = 1,2,3, \end{cases} \quad \widetilde{\boldsymbol{\varphi}} \in \widetilde{\boldsymbol{\Phi}}, \quad (5.11)$$

čia $0 \leq a_i \leq \omega_i,\ i = 1, 2, 3$.
Uždavinį (5.11) suskaidome į tris atskirus uždavinius:

$$\begin{cases} \alpha_{\bar{1}2} + \alpha_{\bar{1}3} \to \max, \\ \beta_{1\bar{1}} \leq a_1, \end{cases} \quad (5.12) \qquad \begin{cases} \alpha_{\bar{2}1} + \alpha_{\bar{2}3} \to \max, \\ \beta_{2\bar{2}} \leq a_2, \end{cases} \quad (5.13) \qquad \begin{cases} \alpha_{\bar{3}1} + \alpha_{\bar{3}2} \to \max, \\ \beta_{3\bar{3}} \leq a_3. \end{cases} \quad (5.14)$$

Sprendžiame (5.12) uždavinį. Apribojimą $\beta_{1\bar{1}}$ suvedame į tiesinį pavidalą:
$\alpha_{\bar{1}1}\omega_1(1 - a_1) - \alpha_{\bar{1}2}\omega_2 a_1 - \alpha_{\bar{1}3}\omega_3 a_1 \leq 0$.
Pažymime: $\gamma_1 = \omega_1(1 - a_1),\ \gamma_2 = \omega_2 a_1,\ \gamma_3 = \omega_3 a_1$.
Įrašius tiesinius pavidalus ir pažymėjimus į (5.12) uždavinį gauname:

$$\begin{cases} \alpha_{\bar{1}2} + \alpha_{\bar{1}3} \to \max, \\ \alpha_{\bar{1}1}\gamma_1 - \alpha_{\bar{1}2}\gamma_2 - \alpha_{\bar{1}3}\gamma_3 \leq 0. \end{cases} \quad (5.15)$$

Taikome Lagranžo neapibrėžtinių daugiklių metodą:
$\alpha_{\bar{1}2} + \alpha_{\bar{1}3} - c_1(\alpha_{\bar{1}1}\gamma_1 - \alpha_{\bar{1}2}\gamma_2 - \alpha_{\bar{1}3}\gamma_3) \to \max,\ \widetilde{\boldsymbol{\varphi}} \in \widetilde{\boldsymbol{\Phi}}$,

$\int[\varphi_{\bar{1}}(\boldsymbol{x})f_2(\boldsymbol{x}) + \varphi_{\bar{1}}(\boldsymbol{x})f_3(\boldsymbol{x}) - c_1(\varphi_{\bar{1}}(\boldsymbol{x})\gamma_1 f_1(\boldsymbol{x}) - \varphi_{\bar{1}}(\boldsymbol{x})\gamma_2 f_2(\boldsymbol{x}) - \varphi_{\bar{1}}(\boldsymbol{x})\gamma_3 f_3(\boldsymbol{x}))]\, d\boldsymbol{\mu} =$
$\int \varphi_{\bar{1}}(\boldsymbol{x})[(1 + c_1\gamma_2)f_2(\boldsymbol{x}) + (1 + c_1\gamma_3)f_3(\boldsymbol{x}) - c_1\gamma_1 f_1(\boldsymbol{x})]\, d\boldsymbol{\mu} =$
$\int \varphi_{\bar{1}}(\boldsymbol{x})[(1 + c_1\gamma_2)\omega_2(\boldsymbol{x}) + (1 + c_1\gamma_3)\omega_3(\boldsymbol{x}) - c_1\gamma_1\omega_1(\boldsymbol{x})]d\boldsymbol{\mu} \to \max, \widetilde{\boldsymbol{\varphi}} \in \widetilde{\boldsymbol{\Phi}}.$
Pagal fundamentaliąją Neimano – Pirsono lemą uždavinio (5.12) sprendinys lygus:

$$\varphi_{\bar{1}}^*(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, \text{ kai } \omega_1(\boldsymbol{x}) < \frac{(1+c_1\gamma_2)\omega_2(x)+(1+c_1\gamma_3)\omega_3(x)}{c_1\gamma_1}, \\ \delta_1, \text{ kai } \omega_1(\boldsymbol{x}) = \frac{(1+c_1\gamma_2)\omega_2(x)+(1+c_1\gamma_3)\omega_3(x)}{c_1\gamma_1}, \\ 0, \text{ kai } \omega_1(\boldsymbol{x}) > \frac{(1+c_1\gamma_2)\omega_2(x)+(1+c_1\gamma_3)\omega_3(x)}{c_1\gamma_1}, \end{cases} \tag{5.16}$$

kur konstantos $c_1 \geq 0$, $\delta_1 \in [0,1]$ randamos iš sąlygos: $\beta_{\bar{1}1}(\varphi_{\bar{1}}^*) = a_1$,
t.y. $\alpha_{\bar{1}1}\omega_1(1 - a_1) - \alpha_{\bar{1}2}\omega_2 a_1 - \alpha_{\bar{1}3}\omega_3 a_1 = 0$.
Analogiškai sprendžiami (5.13) ir (5.14) uždaviniai.

Sprendžiame (5.13) uždavinį. Apribojimą $\beta_{2\bar{2}}$ suvedame į tiesinį pavidalą:
$\alpha_{\bar{2}2}\omega_2(1 - a_2) - \alpha_{\bar{2}1}\omega_1 a_2 - \alpha_{\bar{2}3}\omega_3 a_2 \leq 0$.
Pažymime: $\gamma_1 = \omega_1 a_2$, $\gamma_2 = \omega_2(1 - a_2)$, $\gamma_3 = \omega_3 a_2$.
Įrašius tiesinius pavidalus ir pažymėjimus į (5.13) uždavinį gauname:

$$\begin{cases} \alpha_{\bar{2}1} + \alpha_{\bar{2}3} \to \max, \\ \alpha_{\bar{2}2}\gamma_2 - \alpha_{\bar{2}1}\gamma_1 - \alpha_{\bar{2}3}\gamma_3 \leq 0. \end{cases} \tag{5.15}$$

Taikome Lagranžo neapibrėžtinių daugiklių metodą:
$\alpha_{\bar{2}1} + \alpha_{\bar{2}3} - c_2(\alpha_{\bar{2}2}\gamma_2 - \alpha_{\bar{2}1}\gamma_1 - \alpha_{\bar{2}3}\gamma_3) \to \max,\ \widetilde{\boldsymbol{\varphi}} \in \widetilde{\boldsymbol{\Phi}},$
$\int[\varphi_{\bar{2}}(\boldsymbol{x})f_1(\boldsymbol{x}) + \varphi_{\bar{2}}(\boldsymbol{x})f_3(\boldsymbol{x}) - c_2(\varphi_{\bar{2}}(\boldsymbol{x})\gamma_2 f_2(\boldsymbol{x}) - \varphi_{\bar{2}}(\boldsymbol{x})\gamma_1 f_1(\boldsymbol{x}) - \varphi_{\bar{2}}(\boldsymbol{x})\gamma_3 f_3(\boldsymbol{x}))]\, d\boldsymbol{\mu} =$
$\int \varphi_{\bar{2}}(\boldsymbol{x})[(1 + c_2\gamma_1)f_1(\boldsymbol{x}) + (1 + c_2\gamma_3)f_3(\boldsymbol{x}) - c_2\gamma_2 f_2(\boldsymbol{x})]\, d\boldsymbol{\mu} =$
$\int \varphi_{\bar{2}}(\boldsymbol{x})[(1 + c_2\gamma_1)\omega_1(\boldsymbol{x}) + (1 + c_2\gamma_3)\omega_3(\boldsymbol{x}) - c_2\gamma_2\omega_2(\boldsymbol{x})]d\boldsymbol{\mu} \to \max,\ \widetilde{\boldsymbol{\varphi}} \in \widetilde{\boldsymbol{\Phi}}.$
Pagal fundamentaliąją Neimano – Pirsono lemą uždavinio (5.13) sprendinys lygus:

$$\varphi_{\bar{2}}^*(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, \text{ kai } \omega_2(\boldsymbol{x}) < \frac{(1+c_2\gamma_1)\omega_1(x)+(1+c_2\gamma_3)\omega_3(x)}{c_2\gamma_2}, \\ \delta_2, \text{ kai } \omega_2(\boldsymbol{x}) = \frac{(1+c_2\gamma_1)\omega_1(x)+(1+c_2\gamma_3)\omega_3(x)}{c_2\gamma_2}, \\ 0, \text{ kai } \omega_2(\boldsymbol{x}) > \frac{(1+c_2\gamma_1)\omega_1(x)+(1+c_2\gamma_3)\omega_3(x)}{c_2\gamma_2}, \end{cases} \tag{5.16}$$

kur konstantos $c_2 \geq 0$, $\delta_2 \in [0,1]$ randamos iš sąlygos: $\beta_{\bar{2}2}(\varphi_{\bar{2}}^*) = a_2$,
t.y. $\alpha_{\bar{2}2}\omega_2(1 - a_2) - \alpha_{\bar{2}1}\omega_1 a_2 - \alpha_{\bar{2}3}\omega_3 a_2 = 0$.

Sprendžiame (5.14) uždavinį. Apribojimą $\beta_{3\bar{3}}$ suvedame į tiesinį pavidalą:
$\alpha_{\bar{3}3}\omega_3(1 - a_3) - \alpha_{\bar{3}1}\omega_1 a_3 - \alpha_{\bar{3}2}\omega_2 a_3 \leq 0$.
Pažymime: $\gamma_1 = \omega_1 a_3$, $\gamma_2 = \omega_2 a_3, \gamma_3 = \omega_3(1 - a_3)$.
Įrašius tiesinius pavidalus ir pažymėjimus į (5.14) uždavinį gauname:

$$\begin{cases} \alpha_{\bar{3}1} + \alpha_{\bar{3}2} \to \max, \\ \alpha_{\bar{3}3}\gamma_3 - \alpha_{\bar{3}1}\gamma_1 - \alpha_{\bar{3}2}\gamma_2 \leq 0. \end{cases} \tag{5.17}$$

Taikome Lagranžo neapibrėžtinių daugiklių metodą:
$\alpha_{\bar{3}1} + \alpha_{\bar{3}2} - c_3(\alpha_{\bar{3}3}\gamma_3 - \alpha_{\bar{3}1}\gamma_1 - \alpha_{\bar{3}2}\gamma_2) \to \max,\ \widetilde{\boldsymbol{\varphi}} \in \widetilde{\boldsymbol{\Phi}},$
$\int[\varphi_{\bar{3}}(\boldsymbol{x})f_1(\boldsymbol{x}) + \varphi_{\bar{3}}(\boldsymbol{x})f_2(\boldsymbol{x}) - c_3(\varphi_{\bar{3}}(\boldsymbol{x})\gamma_3 f_3(\boldsymbol{x}) - \varphi_{\bar{3}}(\boldsymbol{x})\gamma_1 f_1(\boldsymbol{x}) - \varphi_{\bar{3}}(\boldsymbol{x})\gamma_2 f_2(\boldsymbol{x}))]\, d\boldsymbol{\mu} =$
$\int \varphi_{\bar{3}}(\boldsymbol{x})[(1 + c_3\gamma_1)f_1(\boldsymbol{x}) + (1 + c_3\gamma_2)f_2(\boldsymbol{x}) - c_3\gamma_3 f_3(\boldsymbol{x})]\, d\boldsymbol{\mu} =$
$\int \varphi_{\bar{3}}(\boldsymbol{x})[(1 + c_3\gamma_1)\omega_1(\boldsymbol{x}) + (1 + c_3\gamma_2)\omega_2(\boldsymbol{x}) - c_3\gamma_3\omega_3(\boldsymbol{x})]d\boldsymbol{\mu} \to \max, \widetilde{\boldsymbol{\varphi}} \in \widetilde{\boldsymbol{\Phi}}.$

Pagal fundamentaliąją Neimano – Pirsono lemą uždavinio (5.14) sprendinys lygus:

$$\varphi_{\bar{3}}^{*}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, \text{ kai } \omega_3(\boldsymbol{x}) < \frac{(1+c_3\gamma_1)\omega_1(x)+(1+c_3\gamma_2)\omega_2(x)}{c_3\gamma_3}, \\ \delta_3, \text{ kai } \omega_3(\boldsymbol{x}) = \frac{(1+c_3\gamma_1)\omega_1(x)+(1+c_3\gamma_2)\omega_2(x)}{c_3\gamma_3}, \\ 0, \text{ kai } \omega_3(\boldsymbol{x}) > \frac{(1+c_3\gamma_1)\omega_1(x)+(1+c_3\gamma_2)\omega_2(x)}{c_3\gamma_3}, \end{cases} \tag{5.18}$$

kur konstantos $c_3 \geq 0, \delta_3 \in [0,1]$ randamos iš sąlygos: $\beta_{\bar{3}3}(\varphi_{\bar{3}}^{*}) = a_3$,
t.y. $\alpha_{\bar{3}3}\omega_3(1-a_3) - \alpha_{\bar{3}1}\omega_1 a_3 - \alpha_{\bar{3}2}\omega_2 a_3 = 0$.

Išsprendę visus tris uždavinius (5.12), (5.13) ir (5.14) gauname sprendimų sritis $S_{\bar{1}}$, $S_{\bar{2}}$, $S_{\bar{3}}$, pažymėtas taisyklingajame trikampyje. Jeigu sprendiniai yra tokie, kaip pažymėta 4.2 pav. a), tai imdami visų tipų atsisakymo komponentę $\varphi_0^{*}(\boldsymbol{x}) = \varphi_{\bar{0}}^{*}(\boldsymbol{x}) - \varphi_{\bar{1}}^{*}(\boldsymbol{x}) - \varphi_{\bar{2}}^{*}(\boldsymbol{x}) - \varphi_{\bar{3}}^{*}(\boldsymbol{x})$ gauname, kad
$\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^{*} = (\varphi_{\bar{1}}^{*}(\boldsymbol{x}), \varphi_{\bar{2}}^{*}(\boldsymbol{x}), \varphi_{\bar{3}}^{*}(\boldsymbol{x}), \varphi_0^{*}(\boldsymbol{x}))$ yra uždavinio (5.11) sprendinys.
Analogiškai sprendžiami uždaviniai, jeigu sprendimų sritys $S_{\bar{1}}$, $S_{\bar{2}}$, $S_{\bar{3}}$ tarpusavyje kertasi, kaip pavaizduota 4.2 pav. b)-f) pagal 4 skyriaus 1 etapo 2 žingsnio uždavinius..

2 etapas. Tarkime, kad antrajame etape suklasifikuojame visus likusius objektus, kuriems pirmajame etape buvo atsisakyta priimti sprendimą. Tokiu atveju maksimizuojame teisingų sprendimų tikimybių sumas, t.y. sprendžiame (4.60), (4.65), (4.70), (4.75) uždavinius, kurių sprendiniai yra aprašyti 4 skyriuje 2 etape.

Tačiau, jeigu 2 etapu klasifikavimo uždavinys nesibaigia, nagrinėjame atvejį, kai objektai po 1 etapo pateko į $\Omega_{\bar{1}}$ sritį, priimtas sprendimas $\eta = \bar{1}$. Sprendimas priimamas remiantis a. v. $(\mathbf{X}^T, \mathbf{Y}_{\bar{1}}{}^T)^T$, kurio tankio funkcija σ – baigtinio mato $\boldsymbol{\mu}$ atžvilgiu yra (4.55). Jei yra žinomos apriorinės klasių tikimybės $\omega_1^{\bar{1}}, \omega_2^{\bar{1}}, \omega_3^{\bar{1}}$ sąlyginio ekstremumo radimo uždavinį (4.60) galima spręsti apribojant aposteriorines tikimybes (tikimybių apribojimai sutampa su (5.1) uždavinio apribojimais).

Sprendžiame sąlyginio ekstremumo radimo uždavinį apribojant tikimybę $\beta_{32}^{\bar{1}}$ ir minimizuojant tikimybę $\alpha_{32}^{\bar{1}}$ (abiejų rūšių klaidingų sprendimų tikimybių apribojimai sutampa su (5.1) apribojimais:

$$\begin{cases} \alpha_{32}^{\bar{1}} \to \min, \\ \beta_{32}^{\bar{1}} \leq a_{32}, \end{cases} \quad \text{arba} \quad \begin{cases} \alpha_{22}^{\bar{1}} \to \max, \\ \beta_{32}^{\bar{1}} \leq a_{32}, \end{cases} \boldsymbol{\varphi}^{\bar{1}} \in \boldsymbol{\Phi}^{\bar{1}}. \tag{5.19}$$

čia $0 \leq a_{32} \leq \omega_3^{\bar{1}}$.

5.3 lentelė. Aposteriorinės klasifikavimo tikslumo tikimybės 2 etape

$\xi \backslash \eta$	1	2	3
1	$\beta_{11}^{\bar{1}}$	$\beta_{12}^{\bar{1}}$	$\beta_{13}^{\bar{1}}$
2	$\beta_{21}^{\bar{1}}$	$\beta_{22}^{\bar{1}}$	$\beta_{23}^{\bar{1}}$
3	$\beta_{31}^{\bar{1}}$	$\beta_{32}^{\bar{1}}$	$\beta_{33}^{\bar{1}}$
Σ	1	1	1

Suvedame apribojimą $\beta_{32}^{\bar{1}}$ į tiesinį pavidalą:
$\alpha_{23}^{\bar{1}}\, \omega_3^{\bar{1}}(1-a_{32}) - \alpha_{21}^{\bar{1}}\, \omega_1^{\bar{1}} a_{32} - \alpha_{22}^{\bar{1}} \omega_2^{\bar{1}} a_{32} \leq 0$.
Pažymėkime $\gamma_1^{\bar{1}} = \omega_1^{\bar{1}} a_{32}$, $\gamma_2^{\bar{1}} = \omega_2^{\bar{1}} a_{32}$, $\gamma_3^{\bar{1}} = \omega_3^{\bar{1}}(1-a_{32})$.
Įrašius į (5.19) uždavinį tiesinį pavidalą bei naujus pažymėjimus gauname:

$$\begin{cases} \alpha_{22}^{\bar{1}} \to \max, \\ \alpha_{23}^{\bar{1}}\, \gamma_3^{\bar{1}} - \alpha_{21}^{\bar{1}}\, \gamma_1^{\bar{1}} - \alpha_{22}^{\bar{1}} \gamma_2^{\bar{1}} \leq 0, \end{cases} \boldsymbol{\varphi}^{\bar{1}} \in \boldsymbol{\Phi}^{\bar{1}}. \tag{5.20}$$

Taikome Lagranžo neapibrėžtinių daugiklių metodą:

$\alpha_{22}^{\bar{1}} - c^{\bar{1}}(\alpha_{23}^{\bar{1}}\,\gamma_3^{\bar{1}} - \alpha_{21}^{\bar{1}}\,\gamma_1^{\bar{1}} - \alpha_{22}^{\bar{1}}\gamma_2^{\bar{1}}) \to \max,\ \boldsymbol{\varphi}^{\bar{1}} \in \boldsymbol{\Phi}^{\bar{1}},$
$\int\big[\varphi_{20}^{\bar{1}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})g_{20}^{\bar{1}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - c^{\bar{1}}(\varphi_{20}^{\bar{1}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\gamma_3^{\bar{1}}g_{30}^{\bar{1}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - \varphi_{20}^{\bar{1}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\gamma_1^{\bar{1}}g_{10}^{\bar{1}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) -$
$-\varphi_{20}^{\bar{1}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\gamma_2^{\bar{1}}g_{20}^{\bar{1}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))\big]\,d\boldsymbol{\mu} =$
$= \int \varphi_{20}^{\bar{1}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\left[(1 + c^{\bar{1}}\gamma_2^{\bar{1}})g_{20}^{\bar{1}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - c^{\bar{1}}\left(\gamma_3^{\bar{1}}g_{30}^{\bar{1}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - \gamma_1^{\bar{1}}g_{10}^{\bar{1}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right)\right]d\boldsymbol{\mu} \to \max,\ \boldsymbol{\varphi}^{\bar{1}} \in \boldsymbol{\Phi}^{\bar{1}}.$
Uždavinio (5.19) sprendinys lygus:

$$\varphi_{20}^{\bar{1}*}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \begin{cases} 1, & g_{20}^{\bar{1}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) > \frac{c^{\bar{1}}\left(\gamma_3^{\bar{1}}g_{30}^{\bar{1}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - \gamma_1^{\bar{1}}g_{10}^{\bar{1}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right)}{(1+c^{\bar{1}}\gamma_2^{\bar{1}})}, \\ \delta^{\bar{1}}, & g_{20}^{\bar{1}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{c^{\bar{1}}\left(\gamma_3^{\bar{1}}g_{30}^{\bar{1}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - \gamma_1^{\bar{1}}g_{10}^{\bar{1}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right)}{(1+c^{\bar{1}}\gamma_2^{\bar{1}})}, \\ 0, & g_{20}^{\bar{1}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) < \frac{c^{\bar{1}}\left(\gamma_3^{\bar{1}}g_{30}^{\bar{1}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - \gamma_1^{\bar{1}}g_{10}^{\bar{1}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right)}{(1+c^{\bar{1}}\gamma_2^{\bar{1}})}, \end{cases} \quad \varphi_{30}^{\bar{1}*}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 1 - \varphi_{20}^{\bar{1}*}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), \tag{5.21}$$

$$\boldsymbol{\varphi}^{\bar{1}*} = (\varphi_{20}^{\bar{1}*}, \varphi_{30}^{\bar{1}*}) \in \boldsymbol{\Phi}^{\bar{1}},$$

kur konstantos $c^{\bar{1}} \geq 0, \delta^{\bar{1}} \in [0,1]$ randamos iš sąlygos: $\beta_{32}^{\bar{1}}(\varphi_{20}^{\bar{1}*}) = a_{32}$,
t.y. $\alpha_{23}^{\bar{1}}\,\omega_3^{\bar{1}}(1 - a_{32}) - \alpha_{21}^{\bar{1}}\,\omega_1^{\bar{1}}a_{32} - \alpha_{22}^{\bar{1}}\omega_2^{\bar{1}}a_{32} = 0$.

Analogiškai nagrinėjami atvejai, kai objektai po 1 etapo pateko į $\Omega_i, i = \bar{2}, \bar{3}, 0$, sritis. Naudojame 4 skyriaus 2 etapo pažymėjimus.

6. Pavyzdys. Irisų veislių klasifikavimas

Spręsime iliustracinius trijų klasių klasifikavimo uždavinius naudojant R. Fišerio (1936) irisų (liet. vilkdalgių) duomenis [10]. Kartais šie duomenys dar vadinami Andersono irisų duomenimis, kadangi šiuos duomenis surinko Edgaras Andersonas norėdamas įvertinti morfologinius pakitimus tarpusavyje susijusių trijų irisų veislių. Tai klasikiniai testiniai duomenys, naudojami daugiamačių duomenų analizei.

Buvo išmatuota $N = 150$ trijų veislių gėlių (*iris setosa*, *iris virginica* ir *iris versicolor*) imtis $X_1, X_2, \dots, X_{150}$, pagal keturis parametrus: taurėlapio ilgį (*sepal length*), taurėlapio plotį (*sepal width*), vainiklapio ilgį (*petal length*), vainiklapio plotį (*petal width*). Kiekvienos veislės gėlių skaičius yra lygus $n_i = 50$, $i = 1, 2, 3$. Taigi apriorinės klasių tikimybės yra lygios, $\omega_i = \frac{1}{3}$, $i = 1, 2, 3$, o stebėjimas yra nusakomas keturmačiu parametrų vektoriumi $\mathrm{X}_i = (\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3, \mathrm{x}_4)$, $i = 1, 2, \dots, 150$. Tegu x_1 - taurėlapio ilgis (*sepal length*), x_2 - taurėlapio plotis (*sepal width*), x_3 – vainiklapio (*petal length*), o x_2 - vainiklapio plotis (*petal width*).

6 pav. *Iris setosa*, *Iris virginica* ir *Iris versicolor* gėlių veislės

Dėl trumpumo klasifikavimo uždaviniuose gėlių veisles žymėsiu klasėmis:

- *Iris setosa* – 1 klasė,

- *Iris virginica* – 2 klasė,
- *Iris versicolor* – 3 klasė.

6.1. Daugiamačio normalumo tikrinimas

Tarkime, kad stebėjimai $X_1, X_2, \dots, X_{150}$, $(n_i = 50, i = 1, 2, 3)$ gauti stebint a. v. $(\mathbf{X}|\xi = 1) \sim N_4(\boldsymbol{\mu}_1, \Sigma_1)$, $(\mathbf{X}|\xi = 2) \sim N_4(\boldsymbol{\mu}_2, \Sigma_2)$ ir $(\mathbf{X}|\xi = 3) \sim N_4(\boldsymbol{\mu}_3, \Sigma_3)$. Patikrinkime šiems vektoriams daugiamatį normalumą, taikydami kriterijus, grindžiamus eksceso ir asimetrijos koeficientais [13].

Tikriname hipotezę:

H_1: a. v. $(\mathbf{X}|\xi = 1)$ pasiskirstęs pagal keturmatį normalųjį skirstinį $N_4(\boldsymbol{\mu}_1, \Sigma_1)$.

SAS programinės įrangos PROC IML procedūra apskaičiuojamos kriterijų, grindžiamų eksceso ir asimetrijos koeficientais, p – reikšmės. Abiejų kriterijų gautos p – reikšmės yra didesnės už pasirinktą reikšmingumo lygmenį $\alpha = 0{,}05$ $(0.1771859 > \alpha,\ 0.1953229 > \alpha)$, todėl H_1 hipotezė apie a. v. $(\mathbf{X}|\xi = 1)$ normalumą neatmetama.

```
                        TESTS 1 klase:
                                betalhat  kappal   pvalskew
         Based on skewness: 3.0797213 25.664345 0.1771859
Hipotezė apie a. v. a. v. neatmetama, esant reikšmingumo lygmeniui 0.05.

                                beta2hat  kappa2   pvalkurt
         Based on kurtosis: 26.537656 1.2949922 0.1953229
   Hipotezė apie skirstinio a. v. Neatmetama, esant reikšmingumo lygmeniui 0.05.
```

Tikriname hipotezę:

H_2: a. v. $(\mathbf{X}|\xi = 2)$ pasiskirstęs pagal keturmatį normalųjį skirstinį $N_4(\boldsymbol{\mu}_2, \Sigma_2)$.

SAS programinės įrangos PROC IML procedūra apskaičiuojamos kriterijų, grindžiamų eksceso ir asimetrijos koeficientais, p – reikšmės. Abiejų kriterijų gautos p – reikšmės yra didesnės už pasirinktą reikšmingumo lygmenį $\alpha = 0{,}05$ $(0.194445 > \alpha,\ 0.5674125 > \alpha)$, todėl H_2 hipotezė apie a. v. $(\mathbf{X}|\xi = 2)$ normalumą neatmetama.

```
                        TESTS 2 klase:
                                betalhat  kappal  pvalskew
         Based on skewness: 3.0222014 25.185012 0.1944445
Hipotezė apie skirstinio a. v. Neatmetama, esant reikšmingumo lygmeniui 0.05.

                                beta2hat  kappa2  pvalkurt
         Based on kurtosis: 22.879375 -0.571866 0.5674125
Hipotezė apie skirstinio a. v. Neatmetama, esant reikšmingumo lygmeniui 0.05.
```

Tikriname hipotezę:

H_3: a. v. $(\mathbf{X}|\xi = 3)$ pasiskirstęs pagal keturmatį normalųjį skirstinį $N_4(\boldsymbol{\mu}_3, \Sigma_3)$.

SAS programinės įrangos PROC IML procedūra apskaičiuojamos kriterijų, grindžiamų eksceso ir asimetrijos koeficientais, p – reikšmės. Abiejų kriterijų gautos p – reikšmės yra didesnės už pasirinktą reikšmingumo lygmenį $\alpha = 0{,}05$ $(0.1593457 > \alpha,\ 0.8919043 > \alpha)$, todėl H_3 hipotezė apie a. v. $(\mathbf{X}|\xi = 3)$ normalumą neatmetama.

```
TESTS 3 klase:
                    beta1hat   kappa1   pvalskew
Based on skewness: 3.1438575 26.198812 0.1593457
Hipotezė apie skirstinio a. v. Neatmetama, esant reikšmingumo lygmeniui 0.05.

                    beta2hat   kappa2   pvalkurt
Based on kurtosis: 24.266299 0.135895 0.8919043
Hipotezė apie skirstinio a. v. Neatmetama, esant reikšmingumo lygmeniui 0.05.
```

Patikrinę hipotezes, gavome, kad visi trys a. v. pasiskirstę pagal normalius skirstinius. Todėl toliau spręsdami uždavinius tarsime, kad a. v. $(\mathbf{X}|\xi = 1) \sim N_4(\boldsymbol{\mu}_1, \Sigma_1)$, $(\mathbf{X}|\xi = 2) \sim N_4(\boldsymbol{\mu}_2, \Sigma_2)$ ir $(\mathbf{X}|\xi = 3) \sim N_4(\boldsymbol{\mu}_3, \Sigma_3)$.

6.2. Parametrų vertinimas

Tarkime turime a. v. $(\mathbf{X}|\xi = 1) \sim N_4(\boldsymbol{\mu}_1, \Sigma_1)$, $(\mathbf{X}|\xi = 2) \sim N_4(\boldsymbol{\mu}_2, \Sigma_2)$ ir $(\mathbf{X}|\xi = 3) \sim N_4(\boldsymbol{\mu}_3, \Sigma_3)$.

SAS programinės įrangos PROC IML procedūra vertiname a. v. $(\mathbf{X}|\xi = i)$ vidurkių ir nepaslinktuosius kovariacinių matricų $\hat{\mu}_i, \hat{\Sigma}_i, i = 1, 2, 3$ parametrus.

Gavome parametrų įverčius:

$$\hat{\mu}_1 = (5.006, 3.428, 1.462, 0.246), \tag{6.1}$$

$$\hat{\mu}_2 = (5.936, 2.77, 4.26, 1.326), \tag{6.2}$$

$$\hat{\mu}_3 = (6.589, 2.974, 5.552, 2.026), \tag{6.3}$$

$$\hat{\Sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0.1242 & 0.0992 & 0.0164 & 0.0103 \\ 0.0992 & 0.1437 & 0.0117 & 0.0093 \\ 0.0164 & 0.0117 & 0.0302 & 0.0061 \\ 0.0103 & 0.0093 & 0.0061 & 0.0111 \end{pmatrix}, \tag{6.4}$$

$$\hat{\Sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0.2664 & 0.0852 & 0.1829 & 0.0558 \\ 0.0852 & 0.0985 & 0.0827 & 0.0412 \\ 0.1829 & 0.0827 & 0.2208 & 0.0731 \\ 0.0558 & 0.0412 & 0.0731 & 0.0391 \end{pmatrix}, \tag{6.5}$$

$$\hat{\Sigma}_3 = \begin{pmatrix} 0.4023 & 0.0935 & 0.3026 & 0.0489 \\ 0.0935 & 0.1040 & 0.0714 & 0.0476 \\ 0.3026 & 0.0714 & 0.3046 & 0.0488 \\ 0.0489 & 0.0476 & 0.0488 & 0.0754 \end{pmatrix}. \tag{6.6}$$

Pagal vidurkių ir kovariacinių matricų gautus įverčius galime teigti, kad klasės yra skirtingos, pirmos klasės gėlių taurėlapiai yra platesnis lyginant su kitomis dviejomis klasėmis, taip pat šios klasės gėlių taurėlapiai yra trumpesni ir siauresni.

6.3. Hipotezės apie kovariacinių matricų lygybę tikrinimas

Tarkime, kad turime a. v. $(\mathbf{X}|\xi = 1) \sim N_4(\boldsymbol{\mu}_1, \Sigma_1)$, $(\mathbf{X}|\xi = 2) \sim N_4(\boldsymbol{\mu}_2, \Sigma_2)$ ir $(\mathbf{X}|\xi = 3) \sim N_4(\boldsymbol{\mu}_3, \Sigma_3)$. Remiantis šiais a. v. $(\mathbf{X}|\xi = i), i = 1, 2, 3$, patikrinkime, ar a. v. kovariacinės matricos yra lygios.

Tikriname hipotezę:

$$H_0: \Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma_3.$$

Hipotezei patikrinti naudojama modifikuota tikėtinumų santykio statistika $\widetilde{\Lambda}$, kuri gaunama imant nepaslinktuosius kovariacinių matricų įverčius.

SAS programinės įrangos PROC IML procedūra apskaičiuojama statistika $-2\ln\widetilde{\Lambda}$ bei chi kvadrato $\chi^2_\alpha(f)$ su $f = (m-1)k(k+1)/2$ laisvės laipsniais α – oji kritinė reikšmė, čia m – klasių skaičius.

TEST:

statistika
146.59428

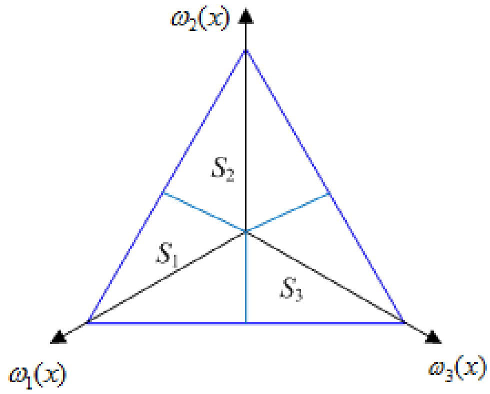
kritinė_reikšmė
31.410433

Hipotezė apie kovariacinių matricų lygybę atmetama, esant reikšmingumo lygmeniui 0.05.

Pagal asimptotinį modifikuotą tikėtinumų santykio kriterijų H_0 hipotezė atmetama su reikšmingumo lygmeniu $\alpha = 0{,}05$, t.y. $-2\ln\widetilde{\Lambda} > \chi^2_{0,05}(f)$. Galime teigti, kad a. v. $(\mathbf{X}|\xi = i)$, $i = 1, 2, 3$, kovariacinės matricos yra skirtingos.

6.4. Klasifikavimas į tris klases, kai nėra atsisakymo nuo sprendimo

Sprendžiame trijų klasių klasifikavimo uždavinį be atsisakymo priimti sprendimą. Pirmuoju atveju klasifikavimą atliksiu turint pilną informaciją $\mathrm{X}_i = (\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3, \mathrm{x}_4)$, $i = 1, 2, \ldots, 150$, t.y. imant keturis požymius: taurėlapio ilgį, taurėlapio plotį, vainiklapio ilgį ir vainiklapio plotį, antruoju atveju klasifikavimą atliksiu imant du požymius $\mathrm{X}_i = (\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2)$, $i = 1, 2, \ldots, 150$: taurėlapio ilgį ir plotį.



6.4.1 pav. Sprendimų priėmimo sritys trijų klasių atveju be atsisakymo priimti sprendimą

Pirmas atvejis. Tarkime, kad a. v. $(\mathbf{X}|\xi = 1) \sim N_4(\boldsymbol{\mu}_1, \Sigma_1)$, $(\mathbf{X}|\xi = 2) \sim N_4(\boldsymbol{\mu}_2, \Sigma_2)$ ir $(\mathbf{X}|\xi = 3) \sim N_4(\boldsymbol{\mu}_3, \Sigma_3)$ parametrai yra žinomi ir lygūs $\boldsymbol{\mu}_i$, Σ_i, $i = 1, 2, 3$, (6.1) – (6.6). Apriorinės klasių tikimybės yra lygios: $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \frac{1}{3}$. Uždavinį sprendžiame analogiškai (4.31) uždaviniui. Aposteriorinės klasių tikimybės pagal (4.4) yra:

$$\omega_1(\boldsymbol{x}) = \mathbf{P}\{\xi = 1|\mathbf{X} = \boldsymbol{x}\} = \frac{f_1(x)}{f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)},$$
$$\omega_2(\boldsymbol{x}) = \mathbf{P}\{\xi = 2|\mathbf{X} = \boldsymbol{x}\} = \frac{f_2(x)}{f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)},$$
$$\omega_3(\boldsymbol{x}) = \mathbf{P}\{\xi = 3|\mathbf{X} = \boldsymbol{x}\} = \frac{f_3(x)}{f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)},$$

kur $f_i(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^4 \frac{1}{|\Sigma_i|^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu}_i)^T \Sigma_i^{-1} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu}_i)\right\}$, $i = 1, 2, 3$, yra keturmačio normalaus skirstinio tankio funkcija.

Priimami sprendimai stebėjimą priskirti $\eta = i, i = 1, 2, 3$, klasei, kai:

$$\eta = 1, \text{kai } \omega_1(\boldsymbol{x}) > \omega_2(\boldsymbol{x}), \omega_1(\boldsymbol{x}) > \omega_3(\boldsymbol{x}),$$
$$\eta = 2, \text{kai } \omega_2(\boldsymbol{x}) > \omega_1(\boldsymbol{x}), \omega_2(\boldsymbol{x}) > \omega_3(\boldsymbol{x}),$$
$$\eta = 3, \text{kai } \omega_3(\boldsymbol{x}) > \omega_1(\boldsymbol{x}), \omega_3(\boldsymbol{x}) > \omega_2(\boldsymbol{x}).$$

Klasifikavimo tikslumo $\alpha_{i1}, i = 1, 2, 3$, tikimybes vertiname pagal šį algoritmą:

1. Modeliuojame a. v. $(\mathbf{X}|\xi = 1) \sim N_4(\boldsymbol{\mu}_1, \Sigma_1)$.
2. Tikriname, ar stebėjimas priklauso vienai iš šių sričių ir atitinkamai jai priskiriame:

$$\Omega_1 = \{\boldsymbol{x}: \omega_1(\boldsymbol{x}) > \omega_2(\boldsymbol{x}), \omega_1(\boldsymbol{x}) > \omega_3(\boldsymbol{x})\} \rightarrow \alpha_{11} = \mathbf{P}\{\mathrm{X} \in \Omega_1 | \xi = 1\},$$
$$\Omega_2 = \{\boldsymbol{x}: \omega_2(\boldsymbol{x}) > \omega_1(\boldsymbol{x}), \omega_2(\boldsymbol{x}) > \omega_3(\boldsymbol{x})\} \rightarrow \alpha_{21} = \mathbf{P}\{\mathrm{X} \in \Omega_2 | \xi = 1\},$$
$$\Omega_3 = \{\boldsymbol{x}: \omega_3(\boldsymbol{x}) > \omega_1(\boldsymbol{x}), \omega_3(\boldsymbol{x}) > \omega_2(\boldsymbol{x})\} \rightarrow \alpha_{31} = \mathbf{P}\{\mathrm{X} \in \Omega_3 | \xi = 1\}.$$

3. Kartojame algoritmą l = 100 000 kartų, apskaičiuojame $\alpha_{i1}, \; i = 1, 2, 3$, įverčius:

$\alpha_{11} = \text{sk}1/l$, kur sk1 yra skaičius, kiek kartų stebėjimai pateko į Ω_1 sritį,
$\alpha_{21} = \text{sk}2/l$, kur sk2 yra skaičius, kiek kartų stebėjimai pateko į Ω_2 sritį,
$\alpha_{31} = \text{sk}3/l$, kur sk3 yra skaičius, kiek kartų stebėjimai pateko į Ω_3 sritį.

Analogiškai skaičiavimai atliekami likusioms klasifikavimo tikslumo $\alpha_{i2}, \; i = 1, 2, 3$, ir $\alpha_{i3}, \; i = 1, 2, 3$ tikimybėms.

6.4.1 lentelė. Trijų klasių klasifikavimo tikslumo tikimybės be atsisakymo priimti sprendimą, turint pilną informaciją

$\xi \backslash \eta$	1	2	3	Σ
1	1	0	0	1
2	0	0,97737	0,02263	1
3	0	0,02707	0,97293	1

Antras atvejis. Tarkime, kad a. v. $(\mathbf{X}|\xi = 1) \sim N_2(\boldsymbol{\mu}_1, \Sigma_1)$, $(\mathbf{X}|\xi = 2) \sim N_2(\boldsymbol{\mu}_2, \Sigma_2)$ ir $(\mathbf{X}|\xi = 3) \sim N_2(\boldsymbol{\mu}_3, \Sigma_3)$ parametrai yra žinomi ir lygūs:

$$\mu_1 = (5.006, 3.428), \mu_2 = (5.936, 2.77), \mu_3 = (6.589, 2.974,), \tag{6.7}$$

$$\Sigma_1 = \begin{pmatrix} 0.1242 & 0.0992 \\ 0.0992 & 0.1437 \end{pmatrix}, \Sigma_2 = \begin{pmatrix} 0.2664 & 0.0852 \\ 0.0852 & 0.0985 \end{pmatrix}, \Sigma_3 = \begin{pmatrix} 0.4023 & 0.0935 \\ 0.0935 & 0.1040 \end{pmatrix}. \tag{6.8}$$

Apriorinės klasių tikimybės yra $\omega_1 = \omega_1 = \omega_1 = \frac{1}{3}$. Uždavinį sprendžiame analogiškai (4.31) uždaviniui. Aposteriorinės klasių tikimybės pagal (4.4):

$$\omega_1(\boldsymbol{x}) = \mathbf{P}\{\xi = 1 | \mathbf{X} = \boldsymbol{x}\} = \frac{f_1(x)}{f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)},$$
$$\omega_2(\boldsymbol{x}) = \mathbf{P}\{\xi = 2 | \mathbf{X} = \boldsymbol{x}\} = \frac{f_2(x)}{f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)},$$
$$\omega_3(\boldsymbol{x}) = \mathbf{P}\{\xi = 3 | \mathbf{X} = \boldsymbol{x}\} = \frac{f_3(x)}{f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)},$$

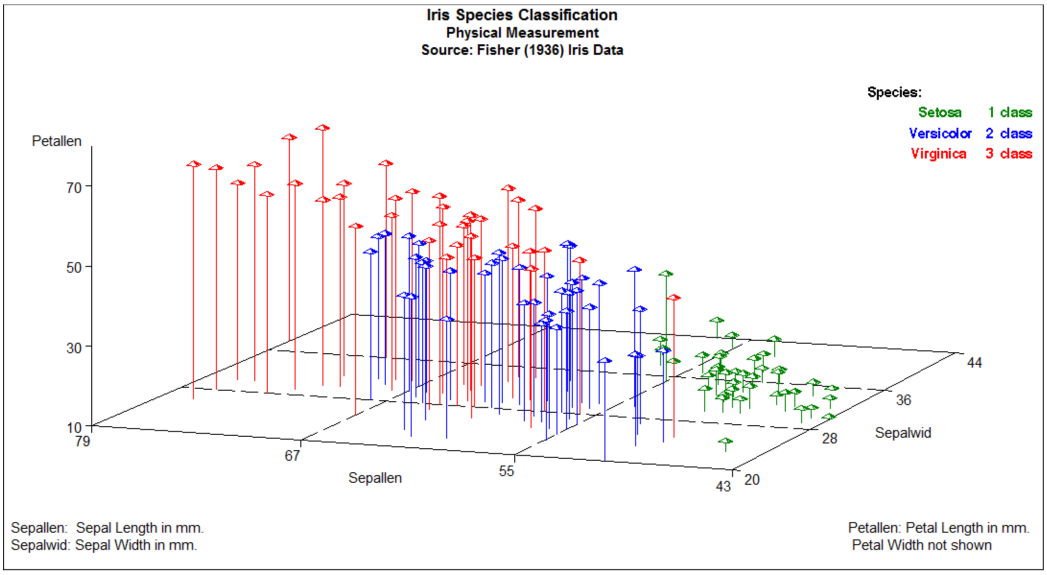
kur $f_i(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^2 \frac{1}{|\Sigma_i|^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu}_i)^T \Sigma_i^{-1} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu}_i)\right\}, i = 1, 2, 3.$

Klasifikavimo tikslumo $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \alpha_{i3}$, $i = 1, 2, 3$, tikimybes vertiname pagal tokį patį algoritmą kaip ir 1 atvejyje.

6.4.2 lentelė. Trijų klasių klasifikavimo tikslumo tikimybės be atsisakymo priimti sprendimą, turint du požymius (taurėlapio ilgis ir plotis)

ξ \ η	1	2	3	Σ
1	0,99119	0,00854	0,00027	1
2	0,01414	0,75722	0,22864	1
3	0,00676	0,32792	0,66532	1

Lyginame 6.4.1 ir 6.4.2 lentelėse gautus rezultatus. Kaip matome, turint pilną informaciją 1 klasės stebėjimai suklasifikuoja 100 % tikslumu, ne ką blogiau klasifikuojami ir 2 bei 3 klasės stebėjimai, jų tikslumas 97 - 98 %. Tačiau norint taip suklasifikuoti stebėjimus gali užtrukti pakankamai daug laiko bei kaštų surenkant pilną informaciją apie analizuojamus stebėjimus. Klasifikuojant stebėjimus be sprendimo atsisakymo ir turint tik pradinę informaciją, tarkime šiame uždavinyje ji bus taurėlapio ilgis ir plotis, prasčiau klasifikuojamos 2 ir 3 klasės. Pagal pradinę informaciją šių klasių stebėjimai yra sunkiau atskiriami, kaip matote 6.4.2 pav., stebėjimai dalis antros ir trečios klasės stebėjimų susimaišę tarpusavyje. Dėl šios priežasties, klaidingų sprendimų klasifikavimo tikimybės, taip pat, yra pakankamai didelės. Tokiu atveju, patartina spręsti hierarchinio klasifikavimo uždavinį, kurio metu atsisakoma priimti sprendimą, kai stebėjimų parametrai nėra pakankamai tikslūs, ir rinkti papildomą informaciją tolimesniam klasifikavimui.



6.4.2 pav. Irisų veislių išsibarstymas pagal taurėlapių ir vainiklapių ilgius bei taurėlapių pločius

6.5. Hierarchinis klasifikavimas trijų klasių atveju su atsisakymu priimti sprendimą

Sprendžiame trijų klasių klasifikavimo uždavinį su atsisakymu priimti sprendimą bei sprendimo atsisakymo detalizavimu. Pirmiausia 1 etape 1 žingsnyje klasifikuosime stebėjimus į tris klases arba atsisakysime priimti sprendimą nedetalizuojant atsisakymo priežasties. Tarsime, kad 1 etape turime pradinę informaciją, t.y. du požymius: taurėlapio ilgį ir plotį. Tada 1 etape 2 žingsnyje atliksime 1 žingsnio atsisakymo priežasties detalizavimą. Pabaigoje, 2 etape, prie turimos pradinės informacijos prijungsime papildomą informaciją: vainiklapio ilgį ir plotį, ir suklasifikuosime likusius stebėjimus į tris klases be atsisakymo priimti sprendimą. Galiausiai pateiksiu atliktų klasifikavimo uždavinių ekonomiškumo palyginimą pagal gautas klasifikavimo tikslumo tikimybes.

1 etapas 1 žingsnis. Tarkime, kad a. v. $(\mathbf{X}|\xi = 1) \sim N_2(\boldsymbol{\mu}_1, \Sigma_1)$, $(\mathbf{X}|\xi = 2) \sim N_2(\boldsymbol{\mu}_2, \Sigma_2)$ ir $(\mathbf{X}|\xi = 3) \sim N_2(\boldsymbol{\mu}_3, \Sigma_3)$ parametrai yra žinomi ir lygūs (6.7), (6.8). Apriorinės klasių tikimybės yra $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \frac{1}{3}$. Sprendžiame sąlyginio ekstremumo radimo uždavinį (4.5) apribojant klaidingų sprendimų tikimybes α_{ij}, $i \neq j$; $i, j = 1,2,3$.

Priimami sprendimai stebėjimą priskirti $\eta = i, i = 1, 2, 3, \tilde{0}$, klasei, kai:

$$\begin{aligned} &\eta = 1, \text{kai } \omega_1(\boldsymbol{x}) > c_{12}\omega_2(\boldsymbol{x}) + c_{13}\omega_3(\boldsymbol{x}), \\ &\eta = 2, \text{kai } \omega_2(\boldsymbol{x}) > c_{21}\omega_1(\boldsymbol{x}) + c_{23}\omega_3(\boldsymbol{x}), \\ &\eta = 3, \text{kai } \omega_3(\boldsymbol{x}) > c_{31}\omega_1(\boldsymbol{x}) + c_{32}\omega_3(\boldsymbol{x}). \\ &\eta = \tilde{0}, \text{kitais atvejais.} \end{aligned}$$

Klasifikavimo tikslumo $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \alpha_{i3}$, $i = 1, 2, 3, \tilde{0}$, tikimybes vertiname pagal šį algoritmą:

1. Pagal duotus apribojimus Monte - Karlo metodu ieškome c_{12}, c_{13}, c_{21}, c_{23}, c_{31}, c_{32} konstantų. Modeliuojame a. v. $(\mathbf{X}|\xi = i) \sim N_2(\boldsymbol{\mu}_i, \Sigma_i)$, $i = 1, 2, 3$. Apsibrėžiame konstantų ieškojimo ribas.
2. Tikriname, ar stebėjimas priklauso vienai iš šių sričių ir atitinkamai jai priskiriame:

$\Omega_1 = \{\boldsymbol{x}: \omega_1(\boldsymbol{x}) > c_{12}\omega_2(\boldsymbol{x}) + c_{13}\omega_3(\boldsymbol{x})\} \rightarrow$
$\alpha_{11} = \mathbf{P}\{\mathrm{X} \in \Omega_1|\xi = 1\}, \alpha_{12} = \mathbf{P}\{\mathrm{X} \in \Omega_1|\xi = 2\}, \alpha_{13} = \mathbf{P}\{\mathrm{X} \in \Omega_1|\xi = 3\}.$

$\Omega_2 = \{\boldsymbol{x}: \omega_2(\boldsymbol{x}) > c_{21}\omega_1(\boldsymbol{x}) + c_{23}\omega_3(\boldsymbol{x})\} \rightarrow$
$\alpha_{21} = \mathbf{P}\{\mathrm{X} \in \Omega_2|\xi = 1\}, \alpha_{22} = \mathbf{P}\{\mathrm{X} \in \Omega_2|\xi = 2\}, \alpha_{23} = \mathbf{P}\{\mathrm{X} \in \Omega_2|\xi = 3\}.$

$\Omega_3 = \{\boldsymbol{x}: \omega_3(\boldsymbol{x}) > c_{31}\omega_1(\boldsymbol{x}) + c_{32}\omega_2(\boldsymbol{x})\} \rightarrow$
$\alpha_{31} = \mathbf{P}\{\mathrm{X} \in \Omega_3|\xi = 1\}, \alpha_{32} = \mathbf{P}\{\mathrm{X} \in \Omega_3|\xi = 2\}, \alpha_{33} = \mathbf{P}\{\mathrm{X} \in \Omega_3|\xi = 3\}.$

$\Omega_{\tilde{0}} = \{\boldsymbol{x}: \omega_1(\boldsymbol{x}) < c_{12}\omega_2(\boldsymbol{x}) + c_{13}\omega_3(\boldsymbol{x}),\ \omega_2(\boldsymbol{x}) < c_{21}\omega_1(\boldsymbol{x}) + c_{23}\omega_3(\boldsymbol{x}),\ \omega_3(\boldsymbol{x}) <$
$c_{31}\omega_1(\boldsymbol{x}) + + c_{32}\omega_2(\boldsymbol{x})\ \} \rightarrow$
$\alpha_{\tilde{0}1} = \mathbf{P}\{\mathrm{X} \in \Omega_{\tilde{0}}|\xi = 1\},\ \alpha_{\tilde{0}2} = \mathbf{P}\{\mathrm{X} \in \Omega_{\tilde{0}}|\xi = 2\},\ \alpha_{\tilde{0}3} = \mathbf{P}\{\mathrm{X} \in \Omega_{\tilde{0}}|\xi = 3\}.$

3. Kartojame algoritmą l = 100 000 kartų, apskaičiuojame $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \alpha_{i3}, i = 1, 2, 3$, įverčius:

$$\begin{aligned} &\alpha_{11} = \mathrm{sk11}/l, \text{ kur sk11 yra skaičius, kiek kartų stebėjimai pateko į } \Omega_1 \text{ sritį,} \\ &\alpha_{21} = \mathrm{sk21}/l, \text{ kur sk21 yra skaičius, kiek kartų stebėjimai pateko į } \Omega_2 \text{ sritį,} \\ &\alpha_{31} = \mathrm{sk31}/l, \text{ kur sk31 yra skaičius, kiek kartų stebėjimai pateko į } \Omega_3 \text{ sritį,} \\ &\alpha_{12} = \mathrm{sk12}/l, \text{ kur sk12 yra skaičius, kiek kartų stebėjimai pateko į } \Omega_1 \text{ sritį,} \\ &\alpha_{22} = \mathrm{sk22}/l, \text{ kur sk22 yra skaičius, kiek kartų stebėjimai pateko į } \Omega_2 \text{ sritį,} \\ &\alpha_{32} = \mathrm{sk32}/l, \text{ kur sk32 yra skaičius, kiek kartų stebėjimai pateko į } \Omega_3 \text{ sritį,} \\ &\alpha_{13} = \mathrm{sk13}/l, \text{ kur sk13 yra skaičius, kiek kartų stebėjimai pateko į } \Omega_1 \text{ sritį,} \\ &\alpha_{23} = \mathrm{sk23}/l, \text{ kur sk23 yra skaičius, kiek kartų stebėjimai pateko į } \Omega_2 \text{ sritį,} \\ &\alpha_{33} = \mathrm{sk33}/l, \text{ kur sk33 yra skaičius, kiek kartų stebėjimai pateko į } \Omega_3 \text{ sritį,} \end{aligned} \tag{6.5.1}$$

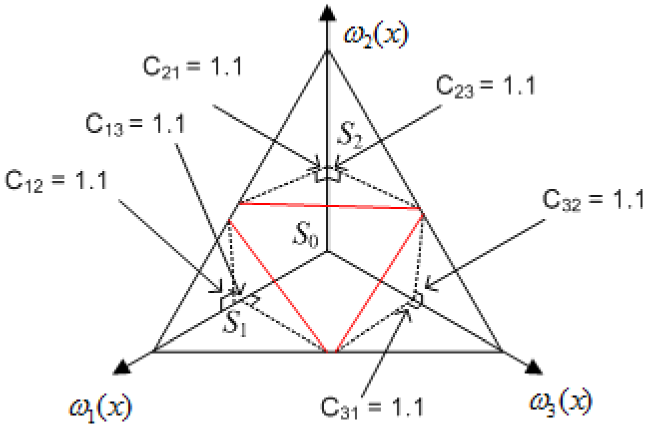
4. Kartojame 3 žingsnį, kol pereiname visas konstantų ribas. Tada išrenkame konstantas, pagal kurias klaidingų klasifikavimų tikimybės yra arčiausiai apribojimų.

5. Pakartojame 3 žingsnį su apskaičiuotomis konstantomis, randame $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \alpha_{i3}, i = 1, 2, 3,$ įverčius pagal (6.5.1) ir apskaičiuojame $\alpha_{\tilde{0}i}$, $i = 1, 2, 3$, klasifikavimo tikslumo tikimybes:

$$\alpha_{\tilde{0}1} = 1 - \alpha_{11} - \alpha_{21} - \alpha_{31},$$
$$\alpha_{\tilde{0}2} = 1 - \alpha_{12} - \alpha_{22} - \alpha_{32},$$
$$\alpha_{\tilde{0}3} = 1 - \alpha_{13} - \alpha_{23} - \alpha_{33}.$$

6.5.1 lentelė. Klasifikavimo tikslumo tikimybės 1 etapas 1 žingsnis

ξ \ η	1	2	3	$\tilde{0}$	Σ
1	0,9895	0,0052	0,00006	0,0053	1
2	0,0117	0,7259	0,2031	0,05932	1
3	0,0056	0,2999	0,637	0,05752	1



6.5.1 pav. Sprendimų priėmimo sritys 1 etapas 1 žingsnis

1 etapas <u>2 žingsnis.</u> Detalizuojame atsisakymo priežastis. Sprendžiame sąlyginio ekstremumo radimo uždavinį (4.35) maksimizuojant klasifikavimo tikimybes priskirti objektus vienai iš klasių: $\bar{1}, \bar{2}$ arba $\bar{3}$, ir apribojant klaidingų sprendimų tikimybes $\alpha_{\bar{i}i}$, $i = 1, 2, 3$:

Priimami sprendimai stebėjimą priskirti $\eta = i$, $i = \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, 0$, klasei, kai:

$$\eta = \bar{1}, \text{kai } \omega_1(\boldsymbol{x}) < \frac{1}{1+d_1},$$
$$\eta = \bar{2}, \text{kai kai } \omega_2(\boldsymbol{x}) < \frac{1}{1+d_2},$$
$$\eta = \bar{3}, \text{kai } \omega_3(\boldsymbol{x}) < \frac{1}{1+d_3},$$
$$\eta = 0, \text{kai } \omega_1(\boldsymbol{x}) > \frac{1}{1+d_1},\ \omega_2(\boldsymbol{x}) > \frac{1}{1+d_2},\ \omega_3(\boldsymbol{x}) > \frac{1}{1+d_3}.$$

Klasifikavimo tikslumo $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \alpha_{i3}, i = \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, 0$, tikimybes vertiname pagal šį algoritmą:

1. Pagal duotus apribojimus Monte - Karlo metodu ieškome d_1, d_2, d_3 konstantų. Modeliuojame a. v. $(\mathbf{X}|\xi = i) \sim N_2(\boldsymbol{\mu}_i, \Sigma_i)$, $i = 1, 2, 3$. Apsibrėžiame konstantų ieškojimo ribas.
2. Tikriname, ar stebėjimas priklauso vienai iš šių sričių ir atitinkamai jai priskiriame:

$\Omega_{\bar{1}} = \{\boldsymbol{x}\colon\ \omega_1(\boldsymbol{x}) < c_{12}\omega_2(\boldsymbol{x}) + c_{13}\omega_3(\boldsymbol{x}),\ \omega_2(\boldsymbol{x}) < c_{21}\omega_1(\boldsymbol{x}) + c_{23}\omega_3(\boldsymbol{x}),\ \omega_3(\boldsymbol{x}) <$
$c_{31}\omega_1(\boldsymbol{x}) + + c_{32}\omega_2(\boldsymbol{x}),\ \omega_1(\boldsymbol{x}) < 1/(1 + d_1)\} \rightarrow$
$\alpha_{\bar{1}1} = \mathbf{P}\{\mathrm{X} \in \Omega_{\bar{1}} | \xi = 1\}, \alpha_{\bar{1}2} = \mathbf{P}\{\mathrm{X} \in \Omega_{\bar{1}} | \xi = 2\}, \alpha_{\bar{1}3} = \mathbf{P}\{\mathrm{X} \in \Omega_{\bar{1}} | \xi = 3\}$**.**

$\Omega_{\bar{2}} = \{\boldsymbol{x}\colon\ \omega_1(\boldsymbol{x}) < c_{12}\omega_2(\boldsymbol{x}) + c_{13}\omega_3(\boldsymbol{x}),\ \omega_2(\boldsymbol{x}) < c_{21}\omega_1(\boldsymbol{x}) + c_{23}\omega_3(\boldsymbol{x}),\ \omega_3(\boldsymbol{x}) < c_{31}\omega_1(\boldsymbol{x}) + + c_{32}\omega_2(\boldsymbol{x}),\ \omega_2(\boldsymbol{x}) < 1/(1+d_2)\} \rightarrow$
$\alpha_{\bar{2}1} = \mathbf{P}\{\mathrm{X} \in \Omega_{\bar{2}} | \xi = 1\}, \alpha_{\bar{2}2} = \mathbf{P}\{\mathrm{X} \in \Omega_{\bar{2}} | \xi = 2\}, \alpha_{\bar{2}3} = \mathbf{P}\{\mathrm{X} \in \Omega_{\bar{2}} | \xi = 3\}.$

$\Omega_{\bar{3}} = \{\boldsymbol{x}\colon\ \omega_1(\boldsymbol{x}) < c_{12}\omega_2(\boldsymbol{x}) + c_{13}\omega_3(\boldsymbol{x}),\ \omega_2(\boldsymbol{x}) < c_{21}\omega_1(\boldsymbol{x}) + c_{23}\omega_3(\boldsymbol{x}),\ \omega_3(\boldsymbol{x}) < c_{31}\omega_1(\boldsymbol{x}) + + c_{32}\omega_2(\boldsymbol{x}),\ \omega_3(\boldsymbol{x}) < 1/(1+d_3)\} \rightarrow$
$\alpha_{\bar{3}1} = \mathbf{P}\{\mathrm{X} \in \Omega_{\bar{3}} | \xi = 1\}, \alpha_{\bar{3}2} = \mathbf{P}\{\mathrm{X} \in \Omega_{\bar{3}} | \xi = 2\}, \alpha_{\bar{3}3} = \mathbf{P}\{\mathrm{X} \in \Omega_{\bar{3}} | \xi = 3\}.$

$\Omega_0 = \{\boldsymbol{x}\colon\ \omega_1(\boldsymbol{x}) < c_{12}\omega_2(\boldsymbol{x}) + c_{13}\omega_3(\boldsymbol{x}),\ \omega_2(\boldsymbol{x}) < c_{21}\omega_1(\boldsymbol{x}) + c_{23}\omega_3(\boldsymbol{x}),\ \omega_3(\boldsymbol{x}) < c_{31}\omega_1(\boldsymbol{x}) + + c_{32}\omega_2(\boldsymbol{x}),\ \omega_1(\boldsymbol{x}) > 1/(1+d_1),\ \omega_2(\boldsymbol{x}) > 1/(1+d_2),\ \omega_3(\boldsymbol{x}) > 1/(1+d_3)\ \} \rightarrow$
$\alpha_{01} = \mathbf{P}\{\mathrm{X} \in \Omega_0 | \xi = 1\},\ \alpha_{02} = \mathbf{P}\{\mathrm{X} \in \Omega_0 | \xi = 2\},\ \alpha_{03} = \mathbf{P}\{\mathrm{X} \in \Omega_0 | \xi = 3\}.$

3. Kartojame algoritmą l = 100 000 kartų, apskaičiuojame $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \alpha_{i3}, i = \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}$, įverčius:

$$\begin{aligned}
&\alpha_{\bar{1}1} = \text{sk_ne11}/l, \text{ kur sk_ne11 yra skaičius, kiek kartų stebėjimai pateko į } \Omega_{\bar{1}} \text{ sritį},\\
&\alpha_{\bar{2}1} = \text{sk_ne21}/l, \text{ kur sk_ne21 yra skaičius, kiek kartų stebėjimai pateko į } \Omega_{\bar{2}} \text{ sritį},\\
&\alpha_{\bar{3}1} = \text{sk_ne31}/l, \text{ kur sk_ne31 yra skaičius, kiek kartų stebėjimai pateko į } \Omega_{\bar{3}} \text{ sritį},\\
&\alpha_{\bar{1}2} = \text{sk_ne12}/l, \text{ kur sk_ne12 yra skaičius, kiek kartų stebėjimai pateko į } \Omega_{\bar{1}} \text{ sritį},\\
&\alpha_{\bar{2}2} = \text{sk_ne22}/l, \text{ kur sk_ne22 yra skaičius, kiek kartų stebėjimai pateko į } \Omega_{\bar{2}} \text{ sritį}, \quad (6.5.2)\\
&\alpha_{\bar{3}2} = \text{sk_ne32}/l, \text{ kur sk_ne32 yra skaičius, kiek kartų stebėjimai pateko į } \Omega_{\bar{3}} \text{ sritį},\\
&\alpha_{\bar{1}3} = \text{sk_ne13}/l, \text{ kur sk_ne13 yra skaičius, kiek kartų stebėjimai pateko į } \Omega_{\bar{1}} \text{ sritį},\\
&\alpha_{\bar{2}3} = \text{sk_ne23}/l, \text{ kur sk_ne23 yra skaičius, kiek kartų stebėjimai pateko į } \Omega_{\bar{2}} \text{ sritį},\\
&\alpha_{\bar{3}3} = \text{sk_ne33}/l, \text{ kur sk_ne33 yra skaičius, kiek kartų stebėjimai pateko į } \Omega_{\bar{3}} \text{ sritį},
\end{aligned}$$

4. Kartojame 3 žingsnį, kol pereiname visas konstantų ribas. Tada išrenkame konstantas, pagal kurias klaidingų klasifikavimų tikimybės yra arčiausiai apribojimų.
5. Pakartojame 3 žingsnį su apskaičiuotomis konstantomis, randame $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \alpha_{i3}, i = \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}$, įverčius pagal (6.5.2) ir apskaičiuojame $\alpha_{0i},\ \ i = 1, 2, 3$, klasifikavimo tikslumo tikimybes:

$$\begin{aligned}
\alpha_{01} &= \alpha_{\tilde{0}1} - \alpha_{11} - \alpha_{21} - \alpha_{31},\\
\alpha_{02} &= \alpha_{\tilde{0}2} - \alpha_{12} - \alpha_{22} - \alpha_{32},\\
\alpha_{03} &= \alpha_{\tilde{0}3} - \alpha_{13} - \alpha_{23} - \alpha_{33}.
\end{aligned}$$

6.5.2 lentelė. Klasifikavimo tikslumo tikimybės 1 etapas 2 žingsnis

ξ \ η	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	0	Σ
1	0,9895	0,0052	0,00006	0,0004	0,00004	0,0031	0,0017	1
2	0,0117	0,7259	0,2031	0,0537	0,00003	0,0033	0,0023	1
3	0,0056	0,2999	0,637	0,0548	0,00003	0,0012	0,0015	1

2 etapas. Norint objektus, kuriems buvo detalizuota atsisakymo priežastis arba atsisakyta priimti sprendimą 1 etape 2 žingsnyje, atitinkamai suklasifikuoti į vieną iš trijų klasių (1, 2 arba 3) reikalinga papildoma informacija apie kiekvieną iš šių objektų. Tokiu atveju, greta a. v. **X** galima surinkti papildomą informaciją a. v. **Y**, kuris yra informatyvesnes negu vektorius **X**. Prie turimos pradinės informacijos prijungsime papildomą informaciją: vainiklapio ilgį ir plotį, ir suklasifikuosime likusius stebėjimus į tris klases be atsisakymo priimti sprendimą. Spręsime (4.60), (4.65), (4.70) ir (4.75) uždavinius. Maksimizuosime teisingų sprendimų tikimybių $\alpha_{11}^{\bar{l}}$, $\alpha_{22}^{\bar{l}}$ ir $\alpha_{33}^{\bar{l}}$ $i = 1, 2, 3$, sumas.

Klasifikavimo tikslumo α_{i1}^{1}, α_{i2}^{1}, α_{i3}^{1}, $i = 1, 2, 3$, tikimybes vertiname pagal šį algoritmą:

1. Modeliuojame a. v. $(\mathbf{X}|\xi = i) \sim N_4(\boldsymbol{\mu}_i, \Sigma_i), i = 1, 2, 3$.
2. Tikriname, ar stebėjimas priklauso vienai iš šių sričių ir atitinkamai jai priskiriame:

$$\Omega_1 = \Big\{\boldsymbol{x}: \omega_1(\boldsymbol{x}) < c_{12}\omega_2(\boldsymbol{x}) + c_{13}\omega_3(\boldsymbol{x}),\ \omega_1(\boldsymbol{x}) < c_{12}\omega_2(\boldsymbol{x}) + c_{13}\omega_3(\boldsymbol{x}),\ \omega_3(\boldsymbol{x}) < c_{31}\omega_1(\boldsymbol{x}) + c_{32}\omega_2(\boldsymbol{x}),\ \omega_1(\boldsymbol{x}) < \frac{1}{1+d_1},\ \omega_1^{\bar{1}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) > \omega_2^{\bar{1}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\ \omega_1^{\bar{1}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) > \omega_3^{\bar{1}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\Big\} \to$$
$$\alpha_{11}^{\bar{1}} = \mathbf{P}\{\mathrm{X} \in \Omega_1|\xi = 1\},$$
$$\Omega_2 = \Big\{\boldsymbol{x}: \omega_1(\boldsymbol{x}) < c_{12}\omega_2(\boldsymbol{x}) + c_{13}\omega_3(\boldsymbol{x}),\ \omega_1(\boldsymbol{x}) < c_{12}\omega_2(\boldsymbol{x}) + c_{13}\omega_3(\boldsymbol{x}),\ \omega_3(\boldsymbol{x}) < c_{31}\omega_1(\boldsymbol{x}) + + c_{32}\omega_2(\boldsymbol{x}),\ \omega_2(\boldsymbol{x}) < \frac{1}{1+d_2},\ \omega_2^{\bar{1}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) > \omega_1^{\bar{1}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\ \omega_2^{\bar{1}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) > \omega_3^{\bar{1}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\Big\} \to$$
$$\alpha_{21}^{\bar{1}} = \mathbf{P}\{\mathrm{X} \in \Omega_2|\xi = 1\},$$
$$\Omega_3 = \Big\{\boldsymbol{x}: \omega_1(\boldsymbol{x}) < c_{12}\omega_2(\boldsymbol{x}) + c_{13}\omega_3(\boldsymbol{x}),\ \omega_1(\boldsymbol{x}) < c_{12}\omega_2(\boldsymbol{x}) + c_{13}\omega_3(\boldsymbol{x}),\ \omega_3(\boldsymbol{x}) < c_{31}\omega_1(\boldsymbol{x}) + + c_{32}\omega_2(\boldsymbol{x}),\ \omega_3(\boldsymbol{x}) < \frac{1}{1+d_3}, \omega_3^{\bar{1}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) > \omega_1^{\bar{1}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\ \omega_3^{\bar{1}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) > \omega_2^{\bar{1}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\Big\} \to$$
$$\alpha_{31}^{\bar{1}} = \mathbf{P}\{\mathrm{X} \in \Omega_3|\xi = 1\}.$$

3. Kartojame algoritmą l = 100 000 kartų, apskaičiuojame α_{i1}^{1}, α_{i2}^{1}, α_{i3}^{1}, $i = 1, 2, 3$, įverčius.

Analogiškai atliekami skaičiavimai likusioms klasifikavimo tikslumo α_{i1}^{2}, α_{i2}^{2}, α_{i3}^{2}, $i = 1, 2, 3$, α_{i1}^{3}, α_{i2}^{3}, α_{i3}^{3}, $i = 1, 2, 3$, ir α_{i1}^{0}, α_{i2}^{0}, α_{i3}^{0}, $i = 1, 2, 3$, tikimybėms.

6.5.3 lentelė. Klasifikavimo tikslumo tikimybės 2 etapas

ξ \ η	1	2	3	Σ
1	0,99476	0,00518	0,00006	1
2	0,01169	0,78358	0,20473	1
3	0,00556	0,30178	0,69266	1

Ekonomiškumas. Iliustruokime hierarchinio klasifikavimo uždavinio ekonomiškumą. Tarkime, kad taurėlapio ilgio ir pločio informaciją surinkti kainuoja 0,50 Lt (vienai gėlei), o surinkti vainiklapio ilgio ir pločio informaciją – 2 Lt, tarkime, tai yra sunkiau išmatuojami parametrai. Tokiu atveju galime palyginti spręstų uždavinių ekonomiškumą. Tiksliausias klasifikavimas buvo sprendžiant uždavinį be atsisakymo, tačiau turint pilną informaciją, kuri kainuoja brangiausiai (0,50+2=2,50 Lt), taip pat, galbūt ne visiems stebėjimams ši informacija reikalinga. Taigi, jeigu turime neribotą biudžetą ir neribotą klasifikavimo atlikimo laiką, tada galime rinkti tiksliausią klasifikavimo būdą, t.y. iš karto rinkti pilną informaciją ir klasifikuoti visus stebėjimus be atsisakymo priimti sprendimą. Tačiau norint sutaupyti laiko ir kaštų ir tuo pačiu metu turėti tikslesnius rezultatus, galime rinktis hierarchinį klasifikavimą. Kaip matome 6.5.4 lentelėje tyrimo sąnaudos hierarchinio klasifikavimo uždavinio skiriasi 183 Lt, tačiau nuostoliai beveik lygūs su klasifikavimo uždaviniu, turint tik pradinę informaciją.

6.5.4 lentelė. Klasifikavimo uždavinių tipų ekonomiškumas

	Hierarchinis klasifikavimas	Klasifikavimas be atsisakymo X	Klasifikavimas be atsisakymo X Y
Viso:	1.683	1.500	6.000
Nuostoliai:	270	293	99

Hierarchiniu klasifikavimu teisingų sprendimų klasifikavimo tikimybes α_{22} ir α_{33} pagerinome
2 %, o klaidingų sprendimų tikimybes α_{23} ir α_{32} sumažinome 3 % procentais, lyginant su klasifikavimu be atsisakymo turint tik pradinę informaciją.

6.5.5 lentelė. Klasifikavimo tikslumo tikimybių palyginimas: hierarchinis klasifikavimas, klasifikavimas be atsisakymo turint pradinę informaciją, klasifikavimas be atsisakymo turint pilną informaciją

ξ \ η	1	2	3	Σ
1	0,99-0,99-1	0,01-0,01-0	0- 0-0	1
2	0,01-0,01-0	0,78-0,76-0,98	0,20-0,23-0,02	1
3	0,01-0,01-0	0,30-0,33-0,03	0,69-0,67-0,97	1

IŠVADOS

Darbe buvo sprendžiami hierarchiniai 2 etapų klasifikavimo teoriniai uždaviniai dviejų ir trijų klasių atvejais apribojant klaidingų sprendimų klasifikavimo tikimybes $\alpha_{ij},\ i,j = 1,2,..,m$, arba apribojant aposteriorines klasifikavimo tikimybes $\beta_{ji},\ i,j = 1,2,..,m.$ Detaliai išnagrinėti 1 etapo klasifikavimo uždavinių sprendimai, papildyta hierarchinio klasifikavimo uždavinio teorija 2 etapo klasifikavimo procedūra. 2 etape sprendžiami 4 klasifikavimo uždaviniai, kurie objektus priskirtus $\bar{1}, \bar{2},\ \bar{3}$ arba 0 klasei suklasifikuoja į 1, 2 ir 3 klases be atsisakymo priimti sprendimą, taip pat užsimenama apie 3 etapo klasifikavimo galimybę.

Teorinės dalies analizuoti klasifikavimo uždaviniai, iliustruoti klasikiniais testiniais Fišerio irisų duomenimis, parodė, kad hierarchinio klasifikavimo uždavinys gali būti ekonomiškesnė alternatyva, nei klasifikavimo uždaviniai be atsisakymo priimti sprendimą. Taip pat, pavyzdyje klasifikavimo tikslumo tikimybių rezultatai buvo 2 – 3 % tikslesni negu klasifikavimo uždavinio be atsisakymo priimti sprendimą pirminių duomenų atveju.

SAS programine įranga IML procedūra sukurti algoritmai, klasifikavimo taisyklių konstantoms rasti bei įvertinti klasifikavimo tikslumo tikimybes, gali būti naudojami tęstiniams šios srities moksliniams darbams. Taip pat, teorinė dalis bei programa gali būti panaudota studentams kaip papildomas mokymosi šaltinis.

SUMMARY

The Hierarchical Two Stage Classification

In this work there was analysed theory of hierarchical two stage classification procedures of two and three class limiting wrong classification probabilities α_{ij}, $i, j = 1, 2, .., m$, or the posterior classification probabilities β_{ji}, $i, j = 1, 2, .., m$.

The first stage of hierarchical classification various problems related with decision making areas was detailed examined and solved. In addition the second stage of hierarchical classification had been added and analysed, too.

Theoretical analysis of the classification, which had been illustrated according to Fisher's Iris Plants Database (Fisher, 1936), was demonstrated that the hierarchical two stage classification procedure may be more economical option than the classification tasks without the rejection option. Also, the results of hierarchical two stage classification procedure were classified with 2 – 3 % higher accuracy than the shared data classification tasks without the rejection option.

Accomplished theoretical analysis may be useful not only to students as an additional resource for learning, but also it could be continued scientific research for various real data using SAS software IML procedure algorithm, which had been created to find the constants of classification rules and evaluate classification rules accuracies of the classification probabilities.

PRIEDAI

Darbo paskutiniame lape pridėtame kompaktiniame diske įrašyti SAS programų kodai, kurių pagalba buvo sprendžiami 6.1 – 6.5 skyriuose aprašyti uždaviniai. Taip pat pridėtas irisų duomenų failas xls, Skaičiavimai.xlsx failas, kuriame buvo sisteminami gauti rezultatai formatu bei Office Visio Drawing programos šablonai, kurie buvo sukurti braižyti sprendimų priėmimo sričių grafikams.

Aplanke „**SAS kodai**“:

- *6.1_6.4.sas* kodu sprendžiami 6.1 – 6.4 skyriuose aprašyti uždaviniai;
- *konstantu_radimas_3kl_1etap_1z.sas* kodu ieškomos 1 etapo 1 žingsnio klasifikavimo taisyklių konstantos;
- *const_3kl_1etap_1z.sas* kodu radus 1 etapo 1 žingsnio konstantas, jas apsirašome kaip makrokintamuosius ir randame klasifikavimo tikslumo tikimybes;
- *konstantu_radimas_3kl_1etap_2z.sas* kodu ieškomos 1 etapo 2 žingsnio klasifikavimo taisyklių konstantos;
- *const_3kl_1etap_2z.sas* kodu radus 1 etapo 2 žingsnio konstantas, jas apsirašome kaip makrokintamuosius ir randame klasifikavimo tikslumo tikimybes;
- *3kl_2etapas.sas* kodu sprendžiamas antro etapo klasifikavimo uždavinys. Visų keturių uždavinių gautus rezultatus 2 etape reikia sudėti prie pagrindinės klasifikavimo taisyklių lentelės, tai padaryta Skaičiavimai.xlsx faile 2 etapas lape.
- *grafikas_iris_species.sas* kodu nubraižomas grafikas pavaizduotas 6.4.2 pav.

Aplanke „**Office Visio grafikų failai**“ patalpinti Office Visio Drawing programos šablonai.

LITERATŪRA IR ŠALTINIAI

1. Blaise Hanczar, Edward R. Dougherty, *Classification with reject option in gene expression data*, http://bioinformatics.oxfordjournals.org/content/24/17/1889.short, 2008.
2. C. Chow, *An optimum character recognition system using decision functions*, IRE Transactions on Electronic Computers, vol. 6, no. 4, http://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?tp=&arnumber=5222035, 1957, p. 247-254.
3. Hoel Le Capitaine and Carl Fr´elicot, *An optimum class-rejective decision rule and its evaluation*, http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/56/59/43/PDF/icpr2010_rejective.pdf.
4. Hoel LeCapitaine, CarlFre´ licot, *A family of measures for best top-n class-selective decision rules*, http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0031320311001890.
5. http://en.wikipedia.org/wiki/Iris_flower_data_set
6. J. Kruopis, A. Vaišvila, R. Kalnius, *Mechatronikos gaminių kokybė. Atrankinė kontrolė,* Vilnius: Vilniaus universiteto leidykla, 2005, p. 438-465.
7. J. Kruopis, V. Bagdonavičius, *Daugiamatė statistika*, rankraštis.
8. J. Kubilius, *Tikimybių teorija ir matematinė statistika*, Antrasis leidimas, Vilnius: Vilniaus universiteto leidykla, 1996, p. 299-304.
9. Jamis J. Perrett, *A SAS/IML Companion for Linear Models*, Springer Science+Business Media, LLC 2010.
10. R. A Fisher, *Annals of Human Genetics*, http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1111/j.1469-1809.1936.tb02137.x/abstract.
11. R. Levulienė, *Statistikos taikymai naudojant SAS,* Vilnius: Vilniaus universiteto leidykla, 2009, p. 62-65, p. 192-197, p. 342-350.
12. R. Sousa, B. Mora, Jaime S. Cardoso, *An Ordinal Data Method for the Classification with Reject Option*, http://ieeexplore.ieee.org/xpls/abs_all.jsp?arnumber=5381319&tag=1.
13. Ravindra Khattree Dayanand N. Naik, *Applied Multivariate Statistics with SAS® Software, Second Edition,* SAS Institute and Wiley, 2003, 1-60.
14. SAS Online Help, http://support.sas.com/documentation/onlinedoc.
15. Thomas C.W. Landgrebe *, Robert P.W. Duin, *Approximating the multiclassROC by pairwiseanalysis*, http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S016786550700150X.
16. Thomas C.W. Landgrebe, David M.J. Tax, Pavel Paclı´k, Robert P.W. Duin, *The interaction between classification and reject performance for distance-based reject-option classifiers*, http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167865505003089.