VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
MATEMATIKOS METODIKOS KATEDRA

Eglė Rėčkutė

MATEMATIKA MUZIKOJE

Magistro baigiamasis darbas

Vadovė
prof. dr. Valentina Dagienė

VILNIUS 2006

Turinys

Įvadas

Matematika ir muzika, atrodo visiškai skirtingi ir tarpusavyje nesusiję dalykai. Matematika dažnai siejama su šaltumo, neįdomumo, atmetimo jausmais, atsiradusiais besimokant mokykloje. Tuo tarpu muzika tartum priešingybė. Turbūt nėra tokio žmogaus, kuris nemėgtų muzikos, nebūtų paspaudęs pianino klavišo ar dainavęs dainos.

Iš tikrųjų muzika ir matematika tarpusavyje yra labiau susiję nei įprasta manyti. Senovės Graikijoje muzika buvo laikoma griežta matematine disciplina. Pitagoriečių mokymo planas „Quadrivium“ arba kitaip keturlypis kelias apėmė keturias sritis: aritmetiką, muziką, geometriją bei astronomiją.

Matematika			
Aritmetika	Muzika	Geometrija	Astronomija

Muzikos disciplina tada nesirūpino kūrybiniais kūrinių atlikimo bruožais, tai buvo garso ir harmonijos mokslas, išreiškiamas skaičių sąryšiais.

Kalbant apie matematikos ir muzikos ryšį, pasak Alison Motluk, yra pastebėta, kad vaikai, besimokantys muzikos dažnai yra gabesni sprendžiant įvairius galvosūkius, žaidžiant šachmatais, dėliojant dėliones bei darant matematines išvadas. Su tuo glaudžiai susijęs taip vadinamas „Mocarto efektas“, manoma, kad V. A. Mocarto muzikos klausymas pagerina žmonių matematinius bei erdvės suvokimo gebėjimus.

Mano darbo tikslas buvo remiantis įvairiais šaltiniais panagrinėti matematinius aspektus atsirandančius muzikoje. Kadangi ši tema pakankamai plati, aš apsiribojau nagrinėti tam tikras temas, paliečiant svarbiausius dalykus. Kitas mano darbo tikslas buvo susipažinti su keliomis muzikinėmis programomis bei pabandyti užrašyti klasikinio kūrinio interpretaciją pasirinktoje programoje. Tam tikslui pasirinkau „MadTracker“ programą bei Liudviko van Bethoveno kūrinį fortepijonui „Švilpikas“.

1. Garso bangos

1.1. Garsas

Muzikos perdavimo priemonė yra garsas. Tikras muzikos suvokimas reikalauja bent jau elementaraus garso prigimties supratimo.

Garsas yra oro virpesių pasekmė. Orą sudaro gausybė glaudžių molekulių, atsitrenkiančių viena į kitą, to rezultatas yra oro slėgis. Objektui virpant dėl oro slėgio atsiranda bangos. Šios bangos yra suvokiamos kaip garsas. Garsas sklinda oru apie 340m/s, priklausomai nuo oro temperatūros. Garso bangos yra išilginės bei turi kelis požymius pagal kuriuos mes suvokiame garsus. Visų pirma, tai amplitudė, išreiškianti virpesių dydį ir suprantama kaip garsumas. Tipiško kasdieninio garso amplitudė yra itin maža. Kitas požymis yra tono aukštis, priklausantis nuo virpesių dažnio, trečias požymis – tembras, kuris priklauso nuo garso akustinio spektro sudėties. Ketvirtas požymis yra trukmė.

Fizikinis garso požymis	***Suvokiamas garso požymis***
Amplitudė	Garsumas
Dažnis	Tono aukštis
Spektras	Tembras
Trukmė	Ilgis

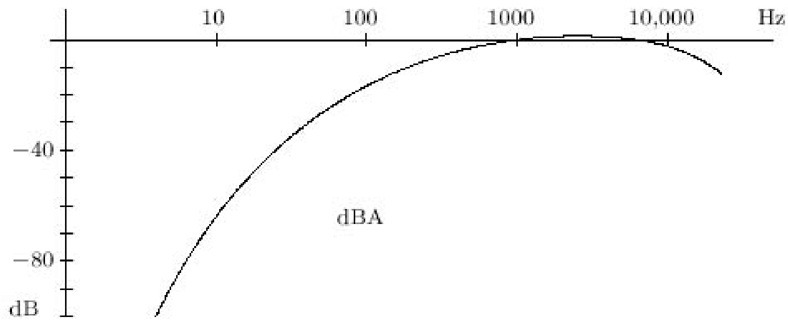
Alfredas Majeris atrado, kad žemesnio tono intensyvus garsas, neleidžia mums suvokti aukštesnio garso, tuo tarpu intensyvus aukšto tono garsas nemaišo suvokti silpną žemo tono garsą.

Dažniai muzikoje žymimi Hercais (Hz), kartais dar ciklais per sekundę. Žmogaus ausiai girdimas diapazonas yra nuo 20 Hz iki 20000 Hz, tuo tarpu pavyzdžiui triušio – nuo 300 Hz iki 45000 Hz, delfino – nuo 1000 Hz iki 130000 Hz. Žmogui žemesnio dažnio garsai yra daugiau jaučiami nei girdimi.

Garso intensyvumas matuojamas decibelais (dB), 0 decibelų išreiškia 10^{-12} W/m^2 jėgos intensyvumą, tai yra galima sakyti silpniausias garsas, kurį žmogus dar gali girdėti, skausmo slenkstis yra 10 W/m^2. Pridedant 10 decibelų, jėgos intensyvumas padidėja dešimteriopai. Padauginant jėgą iš daugiklio *b*, prie esamo signalo lygio pridedama $10\,lg(b)$ decibelų. Praktiškai yra vartojama logaritminė intensyvumų skalė, *n* decibelų reiškia $10^{(n/10)-12}$ W/m^2. Decibelai taipogi nusakomi kaip santykinis matas. Jėgos intensyvumo santykis 10:1 nusako 10 decibelų padidėjimą. Pavyzdžiui jėgos intensyvumo koeficientas 2:1 reiškia 3 dB skirtumą, nes $lg\,2$ yra apytiksliai lygu 0,3.

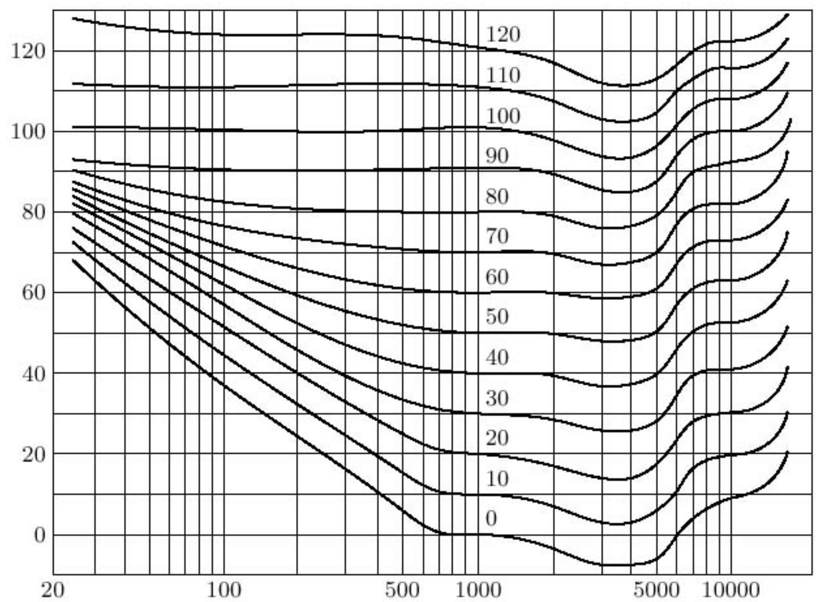
Jeigu yra kartu girdimi 2 skirtingi 70 dB garso šaltiniai, rezultato garsas padidėtų apytiksliai 3 decibelais, todėl, kad jėga yra padvigubinama, ir decibelų skaičius padidėja $10\,lg\,2$ vienetais.

Kartais naudojamas matavimo vienetas dB SPL, bei svorių kreivės. Yra trys standartinės kreivės vadinamos A, B, C. Įprasta naudoti kreivę A, kurios viršūnė apytiksliai yra ties 2000 Hz ir kreivė stipriai mažėja į kitą pusę. Kreivės B ir C yra plokštesnės ir mažėja tik ekstremumuose. Matas naudojantis kreivę A, vadinamas dBA arba dBA SPL.



Girdos slenkstis yra silpniausias garso lygis, kurį mes girdime. Jo vertė kinta priklausomai nuo dažnių spektro dalies. Mūsų ausys jautriausios šiek tiek aukštesniam nei 2000 Hz dažniui, tuo tarpu girdos slenkstis yra truputį aukščiau nei 0 dB. Prie 100 Hz slenkstis yra apie 50 dB, o 10000 Hz – apie 30 dB. Šnabždesio vidurkis yra 15-20 dB, pokalbis dažniausiai vyksta 60-70 dB lygyje, o skausmo slenkstis yra apie 130 dB.

Garsumo vienetas yra fonas. Klausytojas prisitaiko prie signalo lygio tol kol jis yra vienodo intensyvumo kaip ir standartinis 1000 Hz signalas. Kai dažnis yra lygus 1 kHz, garso lygio ir garsumo skalės sutampa.



Šio grafo kreivės yra vadinamos Flečerio-Munsono kreivėmis arba izofonomis. Horizontalioji ašis nusako dažnį, matuojamą ciklais per sekundę, o vertikalioji intensyvumo lygį decibelais.

Skleidžiamo garso jėgos kiekis vatais yra labai mažas. Klarnetas daugiausiai skleidžia 12 garso vatų, trombonas gali skleisti nuo 6 iki 7 garso vatų. Kalbančio žmogaus balsas yra apie 0,00002 vatai, dainininkas bosas gali daugiausiai pasiekti apie 1/13 vato.

1.2. Harmoninis svyravimas

Dalelė *m* turi jėgą *F* pusiausvyros padėtyje, $y=0$, jėgos vertė yra proporcinga atstumui y nuo pusiausvyros padėties,

$$F=-ky$$

čia, *k* – tamprumo koeficientas. Pagal Niutono dėsnius žinome, kad

$$F=ma\,,$$

kur $a=\frac{d^2y}{dt^2}$ yra dalelės pagreitis laiku *t*. Iš šių dviejų lygybių gaunama kita diferencialinė lygtis, būtent

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{ky}{m}=0\,.$$

Šios diferencialinės lygtie sprendiniai yra funkcijos

$$y=A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)+B\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right).$$

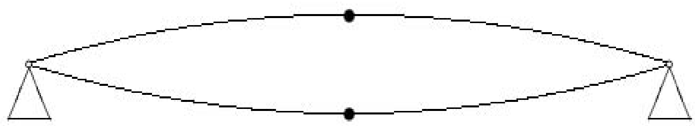
Tokia diferencialinė lygtis yra harmoninių bangų analizės pagrindas.

1.3. Virpančios stygos

Sakykime turime virpančią stygą, įtvirtintą abiejuose galuose. Iš pradžių laikykime, kad styga turi sunkų rutuliuką prikabintą viduryje jos. Rutuliukas yra pusiausvyros padėtyje, jo masė *m* yra daug kartų didesnė nei stygos masė. Kai styga įtempiama, jėga *F* yra proporcinga atstumui *y* nuo pusiausvyros padėties.

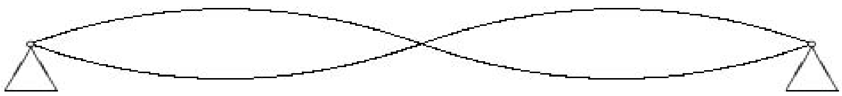
$$F=-ky$$

Taigi, turime diferencialinę lygtį $\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{ky}{m}=0$, kurios sprendiniai yra funkcijos $y=A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)+B\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$, kur A ir B konstantos apibrėžtos pradine rutuliuko pozicija ir greičiu.



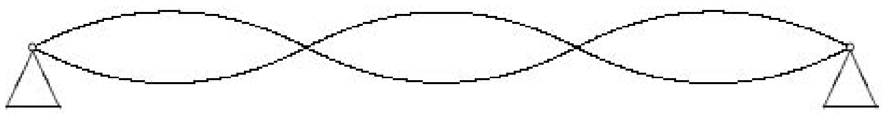
Stygos vidurio taškas gali likti pusiausvyros padėtyje kol abi stygos pusės virpa priešingomis fazėmis. Gitaroje tai gali būti pasiekta palietus stygos vidurio tašką jos tempimo metu ir tučtuojau atleidžiant. Garsas bus oktava aukštesnis nei natūralus stygos tono aukštis arba lygus padvigubintam dažniui. Šitokio būdo harmonijos naudojimas yra įprasta priemonė tarp gitaristų. Jei kiekviena pusė virpa kaip sinuso banga, tai kito taško svyravimas aprašomas funkcija:

$$y = A\cos(2\sqrt{\frac{k}{m}}t) + B\sin(2\sqrt{\frac{k}{m}}t).$$



Jeigu taškas, esantis padėtyje 1/3 stygos ilgio, yra paliestas tempiant stygą, rezultato garsas bus oktava bei tobula kvinta aukštesnis nei natūralus stygos tono aukštis arba lygus trigubam dažniui. Taipogi, jeigu 3 stygos dalys virpa kaip sinuso bangos, kur vidurinė stygos dalis yra priešingos fazės nei kitos dvi, tada nestacionaraus taško svyravimas aprašomas funkcija:

$$y = A\cos(3\sqrt{\frac{k}{m}}t) + B\sin(3\sqrt{\frac{k}{m}}t).$$



Bendru atveju styga virpės kaip amplitudžių aibė. Pavyzdžiui, styga suduota plaktuko, kaip tai vyksta pianine, turės kitokią amplitudžių aibę nei tempiama styga. Bendra taško ant stygos svyravimo lygtis bus

$$y = \sum_{1}^{\infty} A_n\cos(n\sqrt{\frac{k}{m}}t) + B_n\sin(n\sqrt{\frac{k}{m}}t).$$

1.4. Dažnio spektras

Matematikoje kampai matuojami laipsniais arba radianais, ciklas yra 2π. Sinuso banga, su dažniu ν (hercais), viršūnės amplitude c ir faze ϕ yra formos

$$c\sin(2\pi\nu t + \phi).$$

Dydis $\omega = 2\pi\nu$ yra vadinamas kampiniu greičiu. Kampas ϕ nusako kur sinusas kerta laiko ašį.

Modernaus koncerto standartinis tono aukštis yra natoje A, virš vidurinės C, 440 herce.

440 Hz

Tai reikštų bangą formos $c\sin(880\pi t+\phi)$. Ją galima perrašyti naudojantis standartinėmis sinuso ir kosinuso sumavimo formulėmis:

$$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B;$$

$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B.$$

Taigi turime:

$$c\sin(\omega t+\phi)=a\cos\omega t+b\sin\omega t,$$

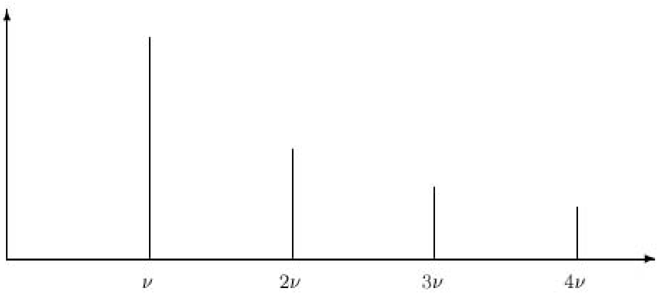
kur $a=c\sin\phi$, $b=c\cos\phi$.

Taipogi duotiems a ir b, c ir ϕ gali būti išreikšti

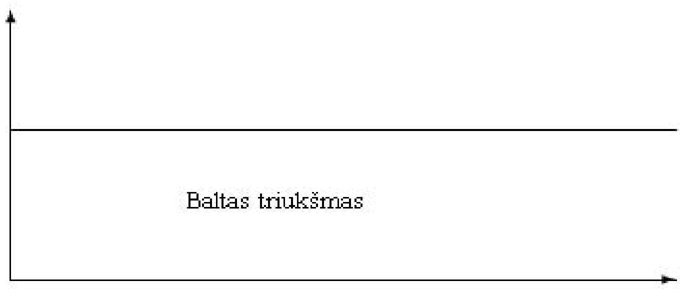
$$c=\sqrt{a^2+b^2}\ ,\ \tan\phi=\frac{a}{b}.$$

Dažnio spektro koncepcija turi svarbią reikšmę natų suvokimui. Garso spektras yra grafas nurodantis daug skirtingų garso dažnių amplitudžių. Virpančios stygos su fundamentaliu dažniu

$\nu=\frac{\sqrt{\frac{k}{m}}}{2\pi}$ grafas atrodytų taip,



čia horizontalioji ašis yra dažnio ašis, o vertikalioji nusako amplitudę. Šis grafas iliustruoja garsą su diskrečiu dažnių spektru, tai yra komponentais, kurie yra fundamentalaus dažnio kartotiniai, amplitudė mažėja esant didesniems dažniams. Kai kurie garsai, tokie kaip „baltas triukšmas“ turi ištisinį dažnių spektrą.



1.5. Trigonometrinės tapatybės ir dūžiai

Kai dvi artimos natos grojamos kartu mes kartais girdime dūžius, jie yra pagrindinis metodas, kuriuo derinamos pianino stygos. Yra svarbu suprasti šių dūžių kilmę, tam padės trigonometrinės tapatybės.

$$\sin(A+B)=\sin A\cdot\cos B+\cos A\cdot\sin B \quad (1)$$

$$\cos(A+B)=\cos A\cdot\cos B-\sin A\cdot\sin B \quad (2).$$

Kadangi $\sin(-B)=-\sin B$, o $\cos(-B)=\cos(B)$, pakeičiant B į $-B$ lygtyse (1), (2) gauname:

$$\sin(A-B)=\sin A\cdot\cos B-\cos A\cdot\sin B \quad (3)$$

$$\cos(A-B)=\cos A\cdot\cos B+\sin A\cdot\sin B \quad (4).$$

Sudedant lygtis (1) ir (3) gauname:

$$\sin(A+B)+\sin(A-B)=2\cdot\sin A\cdot\cos B \quad (5),$$

perrašom $\sin A\cdot\cos B=\frac{1}{2}(\sin(A+B)+\sin(A-B))$ (6).

Panašiai sudedant ir atimant lygtis (2) ir (4) gauname:

$$\cos(A+B)+\cos(A-B)=2\cos A\cdot\cos B \quad (7);$$

$$\cos(A-B)-\cos(A+B)=2\sin A\cdot\sin B \quad (8),$$

arba

$$\cos A\cdot\cos B=\frac{1}{2}(\cos(A+B)+\cos(A-B)) \quad (9);$$

$$\sin A\cdot\sin B=\frac{1}{2}(\cos(A-B)-\cos(A+B)) \quad (10).$$

Tai leidžia bet kokią sinuso ir kosinuso sandaugą užrašyti kaip sinusų ir kosinusų sumą arba skirtumą. Svarbus bus atvirkščias procesas, todėl pažymime $u=A+B$ ir $v=A-B$. Sprendžiant A ir B atžvilgiu, gaunama $A=\frac{1}{2}(u+v)$, o $B=\frac{1}{2}(u-v)$. Naudojant šiuos pažymėjimus lygtims (5), (7) ir (8) gaunamos sekančios tapatybės:

$$\sin u+\sin v=2\sin\frac{1}{2}(u+v)\cdot\cos\frac{1}{2}(u-v) \quad (11);$$

$$\cos u+\cos v=2\cos\frac{1}{2}(u+v)\cdot\cos\frac{1}{2}(u-v) \quad (12);$$

$$\cos u-\cos v=2\sin\frac{1}{2}(u+v)\cdot\sin\frac{1}{2}(u-v) \quad (13).$$

Dabar galima bet kokią sinusų ar kosinusų sumą bei skirtumą parašyti kaip sinusų ir kosinusų sandaugą.

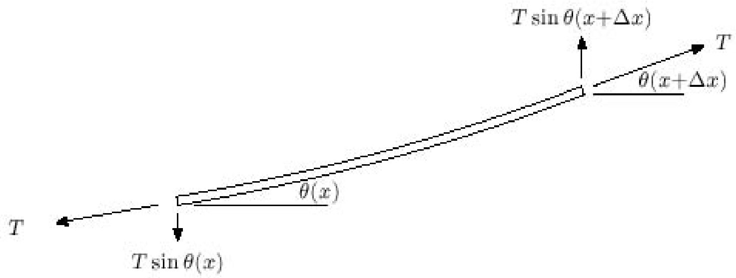
Sakykime pianino derintojas derina vieną iš trijų stygų, atitinkančių natą A virš vidurinės C, kurios dažnis turi būti 440 Hz. Kita styga vis dar rezonuoja ties 436 Hz, o trečiosios svyravimų amplitudė yra slopinama, taigi ji netrukdo antros stygos derinimui, nepaisant amplitudės fazės, dvi stygos kartus skambės kaip:

$$\sin(880\pi t)+\sin(872\pi t),$$

naudojant lygtį (11), šią sumą galima perrašyti $2\sin(876\pi t)\cos(4\pi t)$. Tai reiškia, kad mes gauname sudėtinį efektą, kai sinuso banga yra 438 Hz, t. y. dviejų stygų vidurkio dažnis. Amplitudė moduliuoja lėta kosinuso banga 2 Hz dažniu, arba kitaip ji lygi pusei dviejų stygų dažnių skirtumo. Ši moduliacija yra tai, kas suvokiama kaip dūžiai. Moduliuoto kosinuso bangos amplitudė turi dvi viršūnes cikle, todėl dūžių per sekundę skaičius yra 4, t. y. lygus dviejų stygų dažnių skirtumui. Pianino derintojas derina antrą stygą priklausomai nuo pirmosios visų pirma pašalindamas dūžius, būtent reguliuodamas stygą taip, kol dūžiai sulėtinami iki sustojimo.

1.6. Bangos lygtis styginiams instrumentams

Sakykime yra virpanti styga, įtvirtinta abiejuose galuose. Poslinkis *y* yra laiko *t* bei pozicijos *x*, išilgai stygos, funkcija. Virpančią stygą aprašo vienos dimensijos diferencialinė lygtis. Poslinkis, išilgai stygos, bet kuriuo laiko momentu yra mažas. Nagrinėsime skersines bangas arba kitaip judesį, statmeną stygai.



T žymi stygos įtempimą niutonais ($kg\cdot\frac{m}{s^2}$), o ρ – tankį ($\frac{kg}{m}$). Išilgai stygos, pozicijoje x kampas $\theta(x)$ tenkina $\theta(x)=\frac{\partial y}{\partial x}$. Segmente nuo x iki $x+\Delta x$, jėgos vertikalus komponentas kairiame stygos gale bus $-T\sin\theta(x)$, o dešiniame bus $T\sin\theta(x+\Delta x)$. Tariant, kad $\theta(x)$ yra mažas, $\sin\theta(x)$ ir $\tan\theta(x)$ yra apytikriai lygūs, tai skirtumas tarp vertikalių jėgos komponenčių abiejuose galuose apytiksliai lygus

$$T\tan\theta(x+\Delta x)-T\tan\theta(x)=T\left(\frac{\partial y(x+\Delta x)}{\partial x}-\frac{\partial y(x)}{\partial x}\right)=T\,\Delta x\cdot\frac{\frac{\partial y(x+\Delta x)}{\partial x}-\frac{\partial y(x)}{\partial x}}{\Delta x}\approx$$
$$\approx T\,\Delta x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Segmento masė apytiksliai bus lygi $\rho\Delta x$. Pagal Niutono dėsnį $F=m\cdot a$, kai pagreitis

$a = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, gauname

$$T \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \approx (\rho \Delta x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$

Suprastinus Δx abiejose pusėse

$$T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \approx p \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Tol kol $\theta(x)$ nėra didelis, stygos judesio lygtis apibrėžiama bangos lygtimi

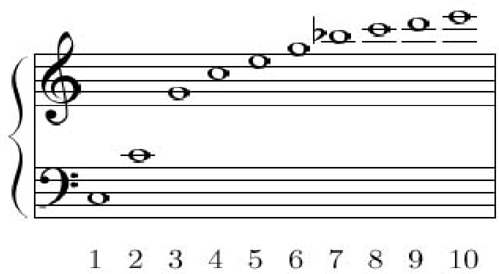
$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

kur $c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$.

2. Konsonansas ir disonansas

2.1. Harmonija

Nata styginio ar pučiamojo instrumento skamba tam tikru aukščiu, sakykime dažniu ν, iš tikrųjų su šiuo dažniu garsas yra periodinis. Garsas gali būti suskaidytas sveikais dažnio ν kartotiniais. Garso komponentas su dažniu ν yra vadinamas fundamentaliu. Komponentas su dažniu $m\nu$ vadinamas *m*-tuoju harmoniniu priegarsiu (harmonika) arba *(m-1)*-uoju obertonu. Sakykime, jei $m=3$, tai mes gauname 3 harmoninį priegarsį arba 2 obertoną.



Ši diagrama nusako eilę harmoninių priegarsių, kurių pagrindas yra C, žemiau vidurinės C. Septintasis harmoninis priegarsis yra šiek tiek platesnis nei B♭ virš smuiko rakto. Modernioje lygiai temperuojamoje gamoje trečias ir penktas harmoniniai priegarsiai šiek tiek skiriasi nuo natų G ir E.

Kalbant kitame kontekste, *m*-toji garso dalis yra *m*-toji dažnio komponentė, skaičiuojama nuo apačios. Pavyzdžiui klarnetas, kuriame yra tik nelyginiai harmoniniai priegarsiai, pirmoji dalis yra pagrindinė dalis arba pirmas harmoninis priegarsis, o sekanti dalis yra trečias harmoninis priegarsis.

2.2. Paprasti sveikų skaičių santykiai

Dvi natos besiskiriančios oktava skamba darniai (konsonansu), tuo tarpu dvi natos besiskiriančios šiek tiek daugiau ar mažiau nei oktava skamba nedarniai (disonansu). Oktavos intervalas atitinka dažnio padvigubinimą, pavyzdžiui, nata A virš vidurinės C atitinka 440 Hz dažnį, todėl nata A žemiau vidurinės C atitinka 220 Hz dažnį.

Jei mes grosime šias natas su standartiniais styginiais ar pučiamaisiais instrumentais, kiekviena nata turės ne tik duoto dažnio komponentę, bet taip pat ir dalis atitinkančias to dažnio kartotinius. Taigi šioms dviems natoms, bus tokios dalys:

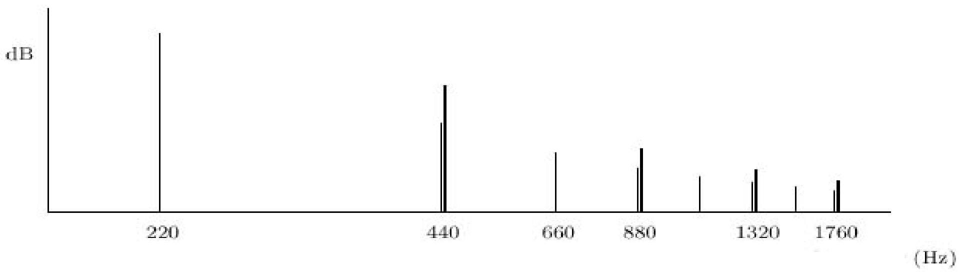
440 Hz, 880 Hz, 1320 Hz, 1760 Hz,....

220 Hz, 440 Hz, 660 Hz, 880 Hz, 1100 Hz, 1320 Hz,...

Kitu atveju, jei grotume dvi natas, kurių dažniai yra 445 Hz ir 220 Hz, jų dalys atrodytų taip:

445 Hz, 890 Hz, 1335 Hz, 1780 Hz, ...

220 Hz, 440 Hz, 660 Hz, 880 Hz, 1100 Hz, 1320 Hz,...



Komponenčių 440 Hz ir 445 Hz, 880 Hz ir 890 Hz ir taip toliau buvimas sukelia šiurkštumo pojūtį, kuris klausos interpretuojamas kaip disonansas.

Dėl nepaprasto oktavos intervalo konsonanso, jų dalių sutapimo, žmogus supranta oktava besiskiriančias natas kaip tą pačią natą, tiesiog viena yra aukštesnė. Tai panaudojama įvairiuose muzikos žanruose, pavyzdžiui kai choras dainuoja unisonu, tai reikškia, kad moterys ir vyrai dainuoja atskiras oktavas. Natų atskyrimas oktavomis dažnai vadinamas oktavų ekvivalentumu.

Muzikinis intervalas tobula kvinta nusakomas dažnio santykiu 3:2. Jei grojamos dvi natos, kurių dažnio santykis 3:2, tai trys dalys žemesnės natos sutaps su antra dalimi aukštesnės natos bei natos turės bendras aukštesnes dalis. Tuo tarpu, jei santykis yra truputį kitoks nei 3:2, tai atsiras nedarna tarp trečios dalies žemesnės natos bei antros dalies aukštesnės natos, taigi jos disonuos.

Tokiu būdu parinkti intervalai su mažais sveikų skaičių dažnio santykiais yra labiau darnūs nei kiti intervalai. Pitagoras 6 amžiuje prieš mūsų erą atrado, kad dvi vienodo įtempimo stygos grojamos vienu metu skamba maloniai, jei jų stygų ilgiai išreiškiami dviejų mažų sveikų skaičių santykiu. Tai buvo vienas iš pirmųjų sveikųjų skaičių aritmetikos dėsnių panaudojimo pavyzdžių, visa tai vėliau išplėtota pasekėjų – Pitagoriečių.

2.3. Konsonanso ir disonanso samprata istorijos bėgyje

Muzikos istorijoje konsonanso ir disonanso terminai turėjo gausybę reikšmių. Nuo Senovės Graikijos laikų iki maždaug devinto mūsų eros šimtmečio nebuvo modernaus dviejų, skirtingų aukščių, kartu grojamų garsų harmonijos supratimo. Terminai buvo naudojami tik ryšiams tarp natų tono aukščių melodiniame kontekste nusakyti, daugiausia dėmesio skiriama gamoms.

Ankstyvojoje polifonijoje, tarp 900 ir 1300 mūsų eros metų, terminai nusakė dviejų kartu grojamų natų garso kokybę. Šiame periode tik 6 intervalai buvo laikomi konsonuojančiais: oktava (2:1), kvinta (3:2), kvarta (4:3), oktava plius kvinta (3:1), oktava plius kvarta (8:3) bei dviguba oktava (4:1). Tercijos ir sekstos buvo laikomos disonuojančiomis, galbūt dėl to, kad dominuojanti to meto gama buvo Pitagoriečių, kur tercijos bei sekstos yra šiek tiek šaižesnės nei vėlesnėse gamose.

Periode nuo 1300 iki 1700 metų, tos pačios natos buvo laikomas galinčios skambėti konsonansu viename melodiniame kontekste bei disonansu kitame kontekste. Konsonanso aibė jau apėmė tercijas ir sekstas.

18 a. J. Rameau savo raštuose pristato „fundamentalios esmės“ koncepciją, priklausomai nuo kurios pavienė nata gali būti darni arba ne.

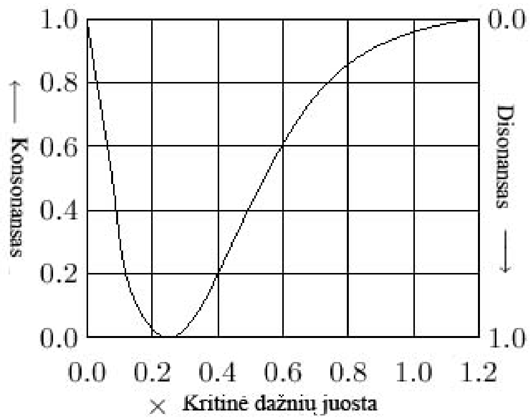
19 a. H. Helmholtsas grįžta prie dviejų kartu grojamų tonų skleidžiamo garso kokybės, bet paaiškinimus jau pateikia dūžių terminais.

Ryšys tarp tono aukščio ir dažnio atrastas kažkur 16-17 šimtmetyje Galilėjo Galilėjaus bei nepriklausomai M. Merseno darbuose. Galilėjo Galilėjaus konsonanso paaiškinimas buvo toks: jei dvi natos yra išreikštos paprastu sveikų skaičių santykiu, tada atsiranda reguliarumas arba periodiškumas visoje bangos formoje, todėl žmogaus ausies būgnelis nėra „laikomas kankynėje“.

17 a. atrasta, kad pučiamojo ar styginio instrumento nata, be pagrindinio dažnio turi dalis, išreikštas jo kartotiniais.

G. A. Sorge (1703 – 1778) buvo pirmasis manęs, kad disonansas atsiranda dėl artimų dažnio dalių. Taip buvo traktuojama iki 19 amžiaus, vėliau H. Helmholtsas siekė paaiškinti konsonansą ir disonansą moksliniu pagrindu. H. Helmholtsas grindė savo paaiškinimus žmogaus klausos spektru. Jis teigė, kad dėl mažesnių skirtumų tarp dažnio dalių, gali būti girdimi dūžiai, tuo tarpu didesniems dažnių skirtumams garsas tampa čaižus. Disonuojančio garso dažnių dalių skirtumas turi būti 30-40 Hz, nepriklausomai nuo pavienių dažnių. Didėjant dažnių skirtumui čaižumas išnyksta ir vėl prasideda konsonansas. Tuo metu jis padarė išvadą, kad oktavos intervalas yra darnus, kadangi aukštesnės natos dažnio dalys yra tarp žemesnės natos dalių, todėl čaižumo nėra.

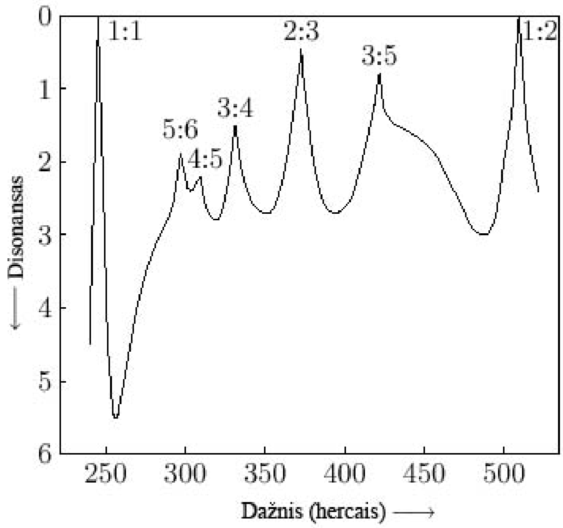
R. Plompas ir W. J. M. Leveltas buvo pirmieji, kuriems rūpėjo ištirti konsonansą ir disonansą eksperimentiniu būdu. Jų eksperimento rezultatas parodė, kad subjektyvioje skalėje, konsonansas kyla nuo 0 (disonansas) iki 1 (konsonansas).



Grafe nurodyti dažnių santykiai, *x* ašyje nurodyti kritinės dažnių juostos santykiai. Tai reiškia, kad esama dažnių skalė hercais horizontalioje ašyje kinta priklausomai nuo natos tono aukščio, tačiau grafo forma lieka pastovi. Skalės daugiklis R. Plompo ir W. J. M. Levelto nurodytas kaip proporcingas kritinės dažnių juostos pločiui.

2.4. Sudėtiniai tonai

R. Plompas ir W. J. M. Leveltas taipogi tyrinėjo tonus su labiau komplikuota harmonine sudėtimi. Jie padarė prielaidą, kad visas disonansas yra suma gretimų poros dalių sukeltų disonansų. Jie naudoju paprastus skaičiavimus, kuriuose nata turi fundamentalaus dažnio ir jo kartotinių dalis iki šeštos harmonikos.



Smailiausios viršūnės yra pagrinde (primoje) 1:1, oktavoje 1:2 ir tobuloje kvintoje 2:3, mažesnės viršūnės yra su santykiais 5:6 (tiksli minorinė tercija), 4:5 (tiksli mažorinė tercija), 3:4 (tobula kvarta) ir 3:5 (tiksli mažorinė seksta). Jei būtų naudojamos aukštesnės harmonikos, grafas turėtų daugiau viršūnių.

Tam kad nubrėžti labiau sistematišką kreivę, galima naudoti disonanso funkciją $f(x)=4\cdot|x|e^{1-4|x|}$, kuri maksimalią reikšmę įgyja, kai $x=\frac{1}{4}$, $f(x)=1$.

2.5. Tonų deriniai

Kai garsiai grojamos dvi natos su skirtingais dažniais f_1 ir f_2, yra girdima dar viena nata priklausomai nuo dažnių skirtumo f_1-f_2. Tai buvo atrasta vokiečių vargonininkų G. A. Sorge (1744) ir J. Rameau (1753). H. Helmholtsas 1856 metais atrado, kad yra kita nata, priklausanti nuo dažnių sumos f_1+f_2, tačiau šią natą yra sunkiau suvokti. Šie skirtumai ir sumos yra vadinami tonų deriniais, o atitinkamos natos Tartini tonais.

H. Helmholtsas visa tai grindė prielaidomis, kad dvi natos grojamos pakankamai garsiai, bei egzistuoja kvadratinis netiesiškumas. Suma dviejų sinusoidžių priverčia skirtingų dažnių narius virpėti ne tik dėl esamų dviejų dažnių bet ir jų kvadrato, sumos ir skirtumo komponenčių. Taip yra todėl, kad

$$(\sin mt+\sin nt)^2=\sin^2 m\cdot t+2\sin mt\cdot\sin nt+\sin^2 n\cdot t=$$
$$\frac{1}{2}(1-\cos 2mt)+\frac{1}{2}(\cos(m-n)t-\cos(m+n)t)+\frac{1}{2}(1-\cos 2nt).$$

Tonų suma ir skirtumas atitinka narius $\cos(m+n)t$, $\cos(m-n)t$. Klausos sistema šiuos tonus gali suvokti kaip obertonus, kvadratinis netiesiškumas sukelia virpančios sistemos asimetriją, tuo tarpu kubiniai netiesiškumai tokios savybės neturi, tai reikštų, kad tonų deriniai, atitinkantys $2f_1$-f_2 ir $2f_2$-f_1, bus labiau pastebimi nei dažnių suma ar skirtumas. Kubiniai nariai gali būti girdimi net esant žemam garso lygiui, tuo tarpu norint suvokti sumos ir skirtumo tonus būtinas itin aukštas garso lygis.

3. Gamos ir temperacijos

3.1. Pitagoriečių gama

Pitagoras atrado, kad tobulos kvintos intervalas, atitinkantis dažnio santykį 3:2, yra ypatingai darnus. Iš to jis padarė išvadą, kad tinkama gama gali būti sukonstruota naudojant santykius 2:1 ir 3:2. Graikų muzikinės gamos, sudarytos Pitagoro mokyklos, yra sukonstruotos naudojant šiuos intervalus, nepaisant to, kad ir kiti mažų sveikų skaičių santykiai turėjo reikšmę klasikinėse graikų gamose. Jei imsime santykį 3:2 dukart, gausime intervalą su santykiu 9:4, kas yra šiek tiek daugiau nei oktava. Subendravardiklinti oktavos atžvilgiu reikštų šį santykį padalinti perpus (atimti oktavą), gautume 9:8, vėl naudojant šį santykį gausime 27:16 ir t. t.

Pitagoriečių gama sudaroma naudojant kvintų seką:

fa – do – sol – re – la – mi – si.

Pitagoriečių mažorinė gama

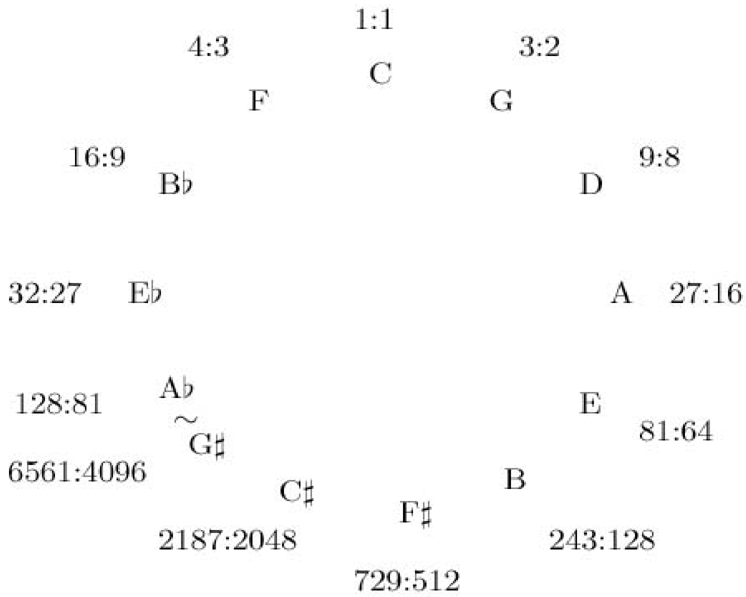
nata	***do***	***re***	***mi***	***fa***	***sol***	***la***	***si***	***do***
santykis	1:1	9:8	81:64	4:3	3:2	27:16	243:128	2:1

Šioje sistemoje tarp dviejų viena po kitos einančių natų yra du intervalai: mažorinis tonas 9:8 bei minorinis pustonis 256:128 (2^8:3^5). Tokioje gamoje pustonis nėra visiškai lygus pusei tono, du minoriniai pustoniai išreiškiami santykiu 2^{16} :3^{10}, o ne 9:8. Pitagoriečiai pastebėjo, kad šie santykiai buvo beveik lygūs $\frac{2^{16}}{3^{10}}\approx 1{,}1099$, $\frac{9}{8}=1{,}125$. Jie rėmėsi faktu, kad $2^{19}\approx 3^{12}$ $(524288\approx 531441)$, tokiu būdu pakylant į viršų 12 kvintų ir grįžtant atgal 7 oktavomis atsirandama beveik ten pat, kur ir pradėta. Kadangi tai nėra visai tas pats, kaip išvada šio skaičiavimo buvo Pitagorietiškos komos atsiradimas, ją būtent ir atitinka dažnio santykis $\frac{3^{12}}{2^{19}}=1{,}013643265...$

Pitagoriečių muzikiniai intervalai buvo skaičiuojami remiantis atimties pasikartojimu, kas vėliau tapo Euklido algoritmo, ieškojimui didžiausio bendro dviejų skaičių daliklio, pagrindu. Oktava 2:1 minus 3:2 tobula kvinta yra 4:3 tobula kvarta. Tobula kvinta minus tobula kvarta yra 9:8, Pitagoriečių pilnas tonas. Tobula kvarta minus 2 pilni tonai yra 256:243 Pitagoriečių minorinis pustonis, kuris vėliau pavadintas diezu. Tonas minus diezas 2187:2048 yra Pitagoriečių mažorinis pustonis. Mažorinis pustonis minus diezas yra 531441:524288, tai yra Pitagorietiškoji koma.

3.2. Kvintų ciklas

Pitagoriečių garsų derinimo sistema gali būti išplėsta iki 12 tonų gamos, derinant tobulas kvintas ir oktavas, su dažniais 3:2 ir 2:1.



Tokiame cikle Pitagoriečių koma yra skirtumas tarp natų A♭ ir G♯ arba skirtumas tarp bet kurių kitų enharmoninių natų poros:

$$\frac{6561/4096}{128/81}=\frac{3^{12}}{2^{19}}=\frac{531441}{524288}.$$

Šiuo metu naudojamoje lygioje temperacijoje, mes laikome natas A♭ ir G♯ ta pačia nata. Kitos natos taip pat turi keletą vardų, pavyzdžiui, E ir F♭ arba E♭♭, D ir C♯♯. Visais atvejais natos laikomos enharmoninėmis, o Pitagoriečių sistemoje jos skirtųsi viena Pitagorietiškąja koma.

3.3. Muzikiniai matavimo vienetai: centas ir savartas

Muzikinių intervalų sudėtis atitinka dažnių santykių sandaugą, jei oktavos intervalas nusakomas santykiu 2:1, tai dviejų oktavų intervalas bus 4:1, trijų – 8:1 ir t. t. Skirtumas tarp dviejų natų intervalų dažnių santykių didėja logaritminiu būdu, kadangi logaritmas sandaugą paverčia sumomis.

Logaritminiu pagrindu yra sudarytas matavimo vienetas centas. Ši sistema buvo sukurta Aleksandro Eliso (~1875 metais), daugiausiai naudojama modernioje literatūroje. Oktavą sudaro 1200 centai. Lygiai temperuojamoje gamoje, pilnas tonas sudaro 200 centų, kiekvienas pustonis 100 centų.

Paverčiant dažnio santykį $r:1$ į centus, jo vertė taptų

$$1200\log_2(r)=1200\frac{\ln r}{\ln 2}.$$

Konvertavimui n centų intervalo į dažnio santykį formulė yra tokia:

$$2^{\frac{n}{1200}}:1.$$

Pilnas tonas Pitagoriečių intonacijoje yra išreiškiamas santykiu 9:8, centais tai būtų

$$1200\log_2\left(\frac{9}{8}\right)=1200\frac{\ln\left(\frac{9}{8}\right)}{\ln 2}\approx 203{,}910.$$

Centai muzikoje dažniausiai naudojami matuoti ypatingai mažus intervalus arba palyginti du skirtingų intonacijų intervalus. Vieno cento skirtumas žmogaus ausiai negirdimas, manoma, kad skirtumo pajutimo barjeras yra 6 centai.

Prancūzijoje yra labiau paplitęs kitas matavimo vienetas savartas, pavadintas prancūzų fiziko Felix Savart (1791-1841) vardu. Šioje sistemoje santykiui 10:1 priskiriama 1000 savartų vertė. Oktavą 2:1 atitiktų $1000\lg 2\approx 301{,}03$ savartai.

Vienas savartas atitinka dažnių santykį $10^{\frac{1}{1000}}:1$ ir yra lygus

$$\frac{1200}{1000\cdot\lg 2}=\frac{6}{5\cdot\lg 2}\approx 3{,}986 \text{ centams.}$$

3.4. Tikslioji intonacija

Tikslioji intonacija nusako bet kokią derinimo sistemą, kuri naudoja mažus sveikų skaičių santykius, ji yra klasikinės muzikos teorijos pagrindas. Jos pagrindu išsivystė lygioji temperacija, dominuojanti Vakarų Europos derinimo sistema.

Turime oktavą 2:1 ir tobulą kvintą 3:2 (arba 6:4). Oktava minus tobula kvinta yra 4:3 – tobula kvarta. Penktą harmoniką nuleidus dviem oktavomis mes gautume 5:4, kas yra tiksli mažorinė tercija. Ši tercija daugiau konsonuojanti negu Pitagoriečių, kadangi dažnių santykis yra išreikštas mažesniais sveikais skaičiais. Tiksli mažorinė triada nusakoma santykiais 4:5:6 (do-mi-sol), šį akordą sudaro mažorinė tercija ir tobula kvarta.

Tikslioji intonacija siaurąja prasme paprastai nusako gamas, kuriose kiekviena mažorinė triada laipsnio I, IV ir V (arba tiksliau C-E-G, F-A-C, G-B-D) nusakoma santykiu 4:5:6. Dažnių santykiai mažorinei gamai būtų tokie:

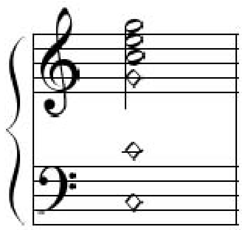
nata	***do***	***re***	***mi***	***fa***	***sol***	***la***	***si***	***do***
santykis	1:1	9:8	5:4	4:3	3:2	5:3	15:8	2:1

Tiksli mažorinė seksta yra intervalas (do-la), išreiškiamas santykiu 5:3, papildomi intervalai (mi-do) 8:5 ir (la-do) 6:5 yra atitinkamai vadinami tiksliomis minorine seksta ir minorine tercija.

Yra daug skirtingų tikslios intonacijos gamų, įvairiai būdais pildančių likusias natas dvylikos tonų gamoje.

Mažoras ir minoras

Mažorinė triada nusakoma santykiu 4:5:6 tiksliojoje intonacijoje.

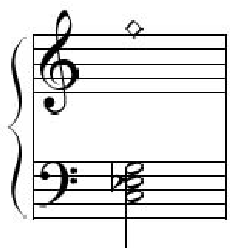


4:5:6

Minorinė triada sudaryta apkeičiant dviejų intervalų santykių tvarką, gautume akordą C-E♭-G, kur C-E♭ nusakomas santykiu 5:6, o E♭-G santykiu 4:5. Nors ir sunku suvokti, bet tai iš tikrųjų yra bendro pagrindo harmonikos. Visos trys natos turi bendrą harmoniką, būtent

$$6\times C=5\times E\flat=4\times G.$$

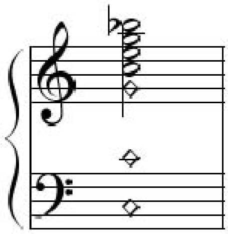
Jeigu yra grojama minorinė triada, įdėmiai įsiklausius galima būtų išgirsti bendrą harmoniką, kuri yra nata G pakilus dvejomis oktavomis į viršų. Dėl tam tikrų psichoakustinių priežasčių gali atrodyti, kad ši nata yra tik viena oktava aukščiau. Manoma, kad dėl aukštos bendros harmonikos šis akordas asocijuojamas su liūdesiu.



Kitaip sakant, minorinė triada yra mažorinės triados modifikacija, šiek tiek pažeminant vidurinę natą, tuo pačiu pakeičiant nuotaiką. Muzikos teorija yra pilna modifikuotų akordų, tai paprastai reiškia, kad viena iš natų akorde yra pustoniu pažeminta arba paaukštinta.

3.5. Dominant septakordas

Jeigu eisime toliau prie septintos harmonikos, mes gausime akordą su santykiais 4:5:6:7. Toks yra pavyzdžiui akordas C-E-G-B♭, kur B♭ išreiškiamas santykiu 7:4.



4:5:6:7

Labai glaudžiai su šiuo akordu yra susiję̨s akordas vadinamas dominat septakordu, kuriame B♭ yra Pitagoriečių minorinė septima 16:9 vietoj 7:4. Pradedant nuo G (3:2 virš C), gausime akordą G-B-D-F, F bus 4:3 virš C.

Šių laikų terminais kalbant dominat septakordas sudaromas nuo V gamos laipsnio, jį sudaro V-VI-II-IV gamos laipsniai, arba kitaip trys intervalai, atitinkamai didžioji tercija bei dvi mažosios tercijos.

3.6. Komos ir šizmos

Pitagoriečių koma, kaip jau buvo minėta, apibrėžiama, kaip skirtumas tarp dvylikos tobulų kvintų ir septynių oktavų, tiksliau dažnio santykis 531441:524288 arba ~23,46 centų skirtumas. Jei naudojame žodį koma be jokios klasifikacijos, paprastai turime omenyje sintoninę komą, kurios dažnių santykis yra 81:80, arba kitaip 21,506 cento skirtumas.

Sintoninės komos reikšmė yra labai artima Pitagoriečių komai, o jų skirtumas vadinamas šizma. Ji išreiškiama santykiu

$$\frac{531441/524288}{81/80}=\frac{32805}{32768}$$

arba 1,953 centų skirtumu.

Diašizma vadinama komos ir šizmos skirtumas, kuris lygus 2048:2025. Ją galime traktuoti kaip skirtumą susidariusį einant tris oktavas į viršų, o po to žemyn keturiomis tobulomis kvartomis bei dvejomis tiksliomis mažorinėmis tercijomis.

Didysis diezas yra oktava minus trys tikslios mažorinės tercijos, arba kitaip trys sintoninės komos minus Pitagoriečių koma. Jis nusakoma santykiu 128:125 arba 41,059 cento skirtumu.

3.7. Eintzo ženklų sistema

Karlas A. Eintzas sugalvojo žymėjimo sistemą, kuri patogi žymėti gamas, grindžiamas oktavos intervalu. Jo metodas buvo naudoti Pitagoriečių natų apibrėžimus bei viršuje įvesti indeksą, reiškiantį kiek komų yra pritaikyta atitinkamai natai. Kiekviena koma padaugina dažnį iš daugiklio 81/80.

Pavyzdžiui, Pitagoriečių E, žymima E^0 yra 81:64 nuo C, tuo tarpu E^{-1} yra pažeminta daugikliu 81/80 bei lygi santykiui 80:64 arba 5:4.

Tokiu būdu apibrėžta tikslios intonacijos gama atrodytų taip:

$$C^0 - D^0 - E^{-1} - F^0 - G^0 - A^{-1} - B^{-1} - C^{\,0}.$$

Dažnai, norint apibrėžti tiksliąsias gamas naudojamos grafinės priemonės. Viena iš tokių priemonių yra surikiuoti natas trikampio būdu, taip, kad judant į dešinę nata padidinama tobula kvinta 3:2, judant apačion ir šiek tiek į kairę nata padidinama tiksliąja mažorine tercija 5:4 bei judant apačion ir šiek tiek į dešinę nata padidinama tikslia minorine tercija 6:5. Tiksliojі mažorinė triada 4:5:6 atrodo taip:

$$\begin{array}{ccc} & E^{-1} & \\ C^0 & & G^0. \end{array}$$

Tiksliojі minorinė triada turėtų atvirkščius intervalus:

$$\begin{array}{ccc} C^0 & & G^0 \\ & E\flat^{+1}. & \end{array}$$

Tiksliojі mažorinė gama užrašoma taip:

$$\begin{array}{ccccccc} & A^{-1} & & E^{-1} & & B^{-1} & \\ F^0 & & C^0 & & G^0 & & D^0. \end{array}$$

Tokia išdėstymo tvarka pristatyta H. Riemano, nors apibrėžti raktinius santykius tarp natų Vokietijos muzikos teorijoje pradėta jau nuo 18 šimtmečio.

3.8. Vidutinio tono gama

Bendriausia vidutinio tono gama, kartais vadinama klasikine vidutinio tono arba ketvirčio komos gama yra tokia gama, kurioje mažorinės tercijos išreikštos santykiu 5:4, o visos kitos natos interpoliuojamos lygiai kaip tik įmanoma. C-D-E išreiškiami santykiais $1:\sqrt{5}/2:5/4$, taipogi kaip ir F-G-A bei G-A-B, tokiu būdu lieka du pustoniai ir jie laikomi lygiais. Penki santykio $\sqrt{5}/2:1$ tonai bei du pustoniai sudaro oktavą 2:1, pustonio dažnio santykis yra

$$\sqrt{2/(\sqrt{5}/2)^5}:1=8:5^{\frac{5}{4}}.$$

nata	*do*	*re*	*mi*	*fa*	*sol*	*la*	*si*	*do*
santykis	1:1	$\sqrt{5}:2$	5:4	$2:5^{\frac{1}{4}}$	$5^{\frac{1}{4}}:1$	$5^{\frac{3}{4}}:2$	$5^{\frac{5}{4}}:4$	2:1

Kvintos šioje gamoje jau nėra tobulos.

Kitas būdas apibūdinti klasikinę vidutinio tono gamą yra temperavimas kiekvienos kvintos, darant ja siauresne koma, pakelta laipsniu $\frac{1}{4}$, tokiu būdu einant gaunama tikra mažorinės tercijos vertė. Pradedant nuo C, G yra mažesnė koma, pakelta laipsniu $\frac{1}{4}$, lyginant su Pitagorietiškąja verte, A yra mažesnė koma, pakelta laipsniu $\frac{3}{4}$, tada E skiriasi tiksliai viena koma nuo Pitagorietiškosios jos vertės, taip gaunama tiksli mažorinės tercijos vertė, jeigu tęstume toliau, B yra siauresnė koma, pakelta laipsniu $\frac{5}{4}$, atitinkamai F būtų aukštesnė koma, pakelta laipsniu $\frac{1}{4}$. K. A. Eintzo žymėjimu, klasikinė vidutinio tono užrašoma

$$C^0 - D^{-\frac{1}{2}} - E^{-1} - F^{+\frac{1}{4}} - G^{-\frac{1}{4}} - A^{-\frac{3}{4}} - B^{-\frac{5}{4}} - C^0.$$

3.9. Lygiosios temperacijos

Dvylikos tonų lygiai temperuojamoje gamoje visi dvylika pustonių turi lygius santykius. Kadangi oktava nusakoma santykiu 2:1, visi pustoniai išreiškiami santykiu $2^{\frac{1}{12}}:1$, o tonai - santykiu $2^{\frac{1}{6}}:1$.

nata	*do*	*re*	*mi*	*fa*	*sol*	*la*	*si*	*do*
santykis	1:1	$2^{\frac{1}{6}}:1$	$2^{\frac{1}{3}}:1$	$2^{\frac{5}{12}}:1$	$2^{\frac{7}{12}}:1$	$2^{\frac{3}{4}}:1$	$2^{\frac{11}{12}}:1$	2:1

Lygiai temperuotos tercijos yra šiek tiek aukštesnės nei tobulosios tercijos, kaip pasekmė to, tikslioji ir vidutinio tono gamos turi ramesnes temperacijas.

Daugiklis $(\frac{81}{80})^{\frac{12}{11}} \approx 1{,}013644082$, arba 23,4614068 centai yra itin gera Pitagoriečių komos aproksimacija :

$$\frac{531441}{524288} \approx 1{,}013643265, \quad \text{arba 23,4600104 centai.}$$

Iš to seka, kad lygiai temperuojama gama yra beveik tiksliai lygi $\frac{1}{11}$ laipsnio komos vidutinio tono gamai, kur skirtumas tarp $A\flat^{-4/11}$ ir $G\sharp^{-8/11}$ yra 0,0013964 centai. Tokios pastabos buvo padarytos J. P. Kirnbergo. Jo derinimo būdas buvo toks: išgauti lygiai temperuojamų kvartų intervalą, derinant tris tobulas kvintas ir vieną mažorinę tercija į viršų, tada leidžiantis į apačią keturiomis tobulomis kvartomis, tai atitiktų prilyginimui lygiai temperuotos F su $E\sharp^{-1}$. Toks metodas nebuvo labai patogus, nes tam, kad išgauti lygiai temperuotą intervalą, pašalinti dūžius, reikia derinti aštuonis intervalus. Toks metodas vėliau nepriklausomai buvo atrastas ir J. Farėjaus.

Aleksandras Elis nusako paprastesnę taisyklę lygiąjai temperacijai, tai yra derinti natas oktavoje virš vidurinės C, derinant kvintomis į viršų, bei kvartomis žemyn. Padaryti kvintas tobulomis, o tada siaurinti jas vienu dūžiu per sekundę, kvartas taipogi daryti tobulomis, o po to platinti trim dūžiais kas dvi sekundes. Suderinus, eliminavus dūžius visos oktavos, analogiškai derinamos ir likusios oktavos.

3.10. Kitos tiksliosios gamos

Kalbant apie tiksliąją intonaciją, kad gautume dvylikos tonų gamą naudojome tik tris pirminius skaičius 2, 3 ir 5. Tikslioji intonacija taipogi gali būti išplėsta.

Haris Parčeris išplėtojo tiksliąją 43 tonų gamą, kurią naudojo gausybėje savo kompozicijų. Šios gamos tonika yra G^0, gama yra simetrine ta prasme, kad intervalas į viršų nuo G^0 yra taipogi intervalas į apačią nuo G^0.

Haris Parčeris savo gamoje naudojo penkis pirminius skaičius, būtent 2,3,5,7 ir 11. Gamos autoriaus terminologija kalbant, ši gama grindžiama 11-riba, tuo tarpu Pitagoriečių gama sudaryta 3-riba, o dvylikos tonų tikslios intonacijos gama – 5-riba. Bendriau, jei p yra pirminis skaičius, tai p-ribos gama yra sudaryta naudojant tik racionalius skaičius, kurių skaitikliai ir vardikliai yra išreikškiami ne didesnių nei p pirminių skaičių sandauga. Pasikartojimai sandaugoje yra leidžiami. Hario Parčerio gama išreiškiama tokiais santykiais:

1:1, 81:80, 33:32, 21:20, 16:15, 12:11, 11:10, 10:9, 9:8, 8:7, 7:6, 32:27, 6:5, 11:9, 5:4, 14:11, 9:7, 21:16, 4:3, 27:20, 11:8, 7:5 / 10:7, 16:11, 40:27, 3:2, 32:21, 14:9, 11:7, 8:5, 18:11, 5:3, 27:16, 12:7, 7:4, 16:9, 9:5, 20:11, 11:6, 15:8, 40:21, 64:33, 160:81, (2:1).

Štai dar keletas tiksliųjų gamų. Kinų „Liu“ gama, sudaryta Huai-nan-dsi iš Hano dinastijos, yra 12 tonų, 43-ribos gama

1:1, 18:17, 9:8, 6:5, 54:43, 4:3, 27:19, 3:2, 27:17, 27:16, 9:5, 36:19, (2:1).

Wilfrido Pereto 19 tonų, 7-ribos gama

1:1, 21:20, 35:32, 9:8, 7:6, 6:5, 5:4, 21:16, 4:3, 7:5,

35:24, 3:2, 63:40, 8:5, 5:3, 7:4, 9:5, 15:8, 63:32, (2:1).

M. Harisono 24 tonų, 7-ribos gama

1:1, 28:27, 135:128, 16:15, 243:224, 9:8, 8:7, 7:6, 32:27, 6:5, 135:112, 5:4,

81:64, 9:7, 21:16, 4:3, 112:81, 45:32, 64:45, 81:56, 3:2, 32:21, 14:9, 128:81,

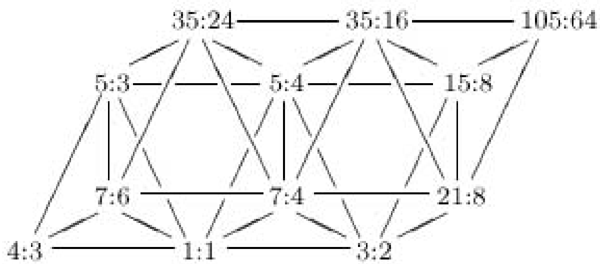
8:5, 224:135, 5:3, 27:16, 12:7, 7:4, 16:9, 15:8, 243:128, 27:14, (2:1).

Indų „Sruti“ gama, dažniausiai naudojama groti ragomis, yra 22 tonų 5-ribos tiksli gama, tačiau santykių vardikliai yra pakankamai dideli

1:1, 256:243, 16:15, 10:9, 9:8, 32:27, 6:5, 5:4, 81:64, 4:3, 27:20, 45:32,

729:512, 3:2, 128:81, 8:5, 5:3, 27:16, 16:9, 9:5, 15:8, 243:128, (2:1).

Buvo sukurtą daugybė vaizdavimo būdų tiksliosioms gamoms. Pavyzdžiui 7-ribos gamoms gali būti nubrėžtos tetraedro arba oktaedro grotelės. Dvylikos tonų 7-ribos tiksliojі gama gali būti pavaizduota tokiu būdu:

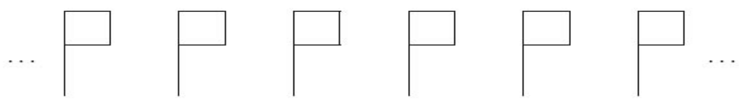


linijos nurodo mažorines ir minorines tercijas, tobulas kvintas, ir tris skirtingus septimų konsonansus 7:4, 7:5 ir 7:6.

4. Simetrija muzikoje

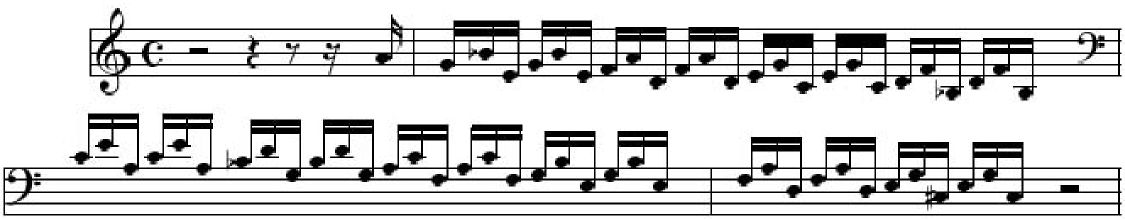
4.1. Simetrijos

Muzikoje galima rasti daugybę simetrijos pavyzdžių. Matematikoje simetriją aprašo grupės. Transliacinė simetrija atrodo taip



Grupių teoretinėje kalboje simetrijos formuoja begalines ciklines grupes. Muzikoje tai būtų interpretuojama, kaip kartojimas ritmo, melodijos arba kažkokio šablono. Kaip pavyzdys galėtų būti L. van Bethoveno „Mėnesienos Sonatos“ dešinės rankos partijos pradžia.

Žinoma muzikos kūriniai yra baigtinio ilgio, todėl negali būti tikros transliacinės simetrijos. Muzikoje labiau paplitusi apytikslė, o ne tobula simetrija. Muzikinės sekvencijos sąvoka yra geras to pavyzdys. Sekvencija nusako šabloną, kuris kartojamas kūrinio eigoje su pakitimais, intervalai dažniausiai ne tokie patys, bet modifikuoti, kad išlaikytų harmoniją. Štai čia turime sekvenciją iš J. S. Bacho „Tokatos ir Fugos D“ vargonams



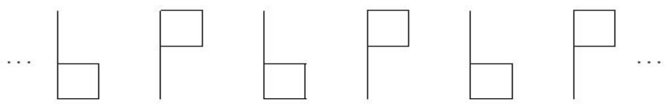
Nors ir balsovada juda apačion tolygiai, dauguma intervalų kinta, kad būtų išlaikyta harmoninė struktūra.

Atspindžio simetrija muzikoje atrodo kaip figūros ar frazės inversija.

Čia mes turime atspindžio simetriją, kurios horizontalioji ašis yra nata B♭. Apatinė linija gaunama apvertus viršutinę.

Yra labai paplitęs horizontalusis atspindys, derinimas kartu su laiko kitimu. Pavyzdžiui kaip F. Šopeno valso kairės rankos pradžios fragmente,

kiekviename takte kairės rankos viršutinės dalies forma yra atvirkščia sekančio takto formai. Grupių teorijoje tai yra kitas begalinės ciklinės grupės pavyzdys.



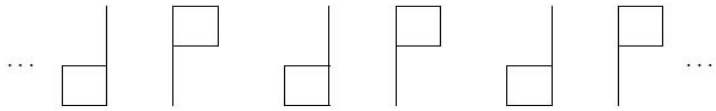
Simetrija muzikoje svarbi tuo, kad šablonų reguliarumas sudaro tikimybę, kas bus po to. Aišku svarbu taipogi karts nuo karto užkirsti kelią šiai tikimybei, taip bus išvengta monotoniškumo. Gera muzika turi tikslią pusiausvyrą tarp numatymo ir netikėtumo.

Buvusiame pavyzdyje parodytas veidrodinis atspindys horizontalios ašies atžvilgiu, taipogi yra galima laikina atspindžio simetrija vertikalios ašies atžvilgiu. Tokio tipo simetrija galėtų būti bekylanti, o po to besileidžianti gama, kaip ir šiame paprastame balso pratime.

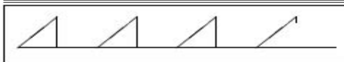
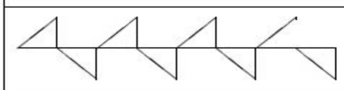
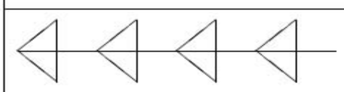
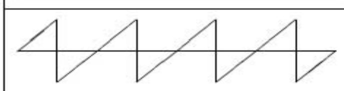
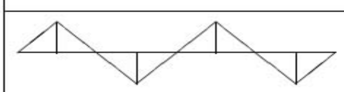
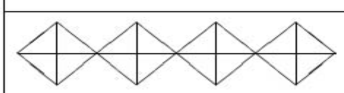
Dar vienas pavyzdys, apimantis tokio tipo simetriją, galėtų būti atgaleigis kanonas arba dar kitaip vadinamas vėžio kanonu. Šio tipo kanonas turi laikinąją atspindžio simetriją, jo melodija grojama pirmyn ir atgal tuo pačiu metu, tai reikštų, kad vienas balsas pradeda pradžioje pirmų taktų bei tęsia iki galo, tuo tarpu kitas balsas pradeda nuo galo paskutiniame takte ir eina atgal iki pradžios.

Sukimosi simetrija taipogi randama muzikoje, sekančių keturių natų fragmentas turi tobulą sukimosi simetriją, kurios centras yra po antros natos aukštyje D♯.

M. Ravelio *Rhapsodie Espagnole* šis keturių natų fragmentas kartojamas daugybę kartų. Tai reiškia, kad yra transliacija bei sukimasis, kaip ir sekančioje diagramoje. Grupių teorijoje tokios simetrijos formuoja begalinę diedro grupę.



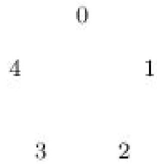
Horizontaliai kartojami fragmentai kartais vadinamas frizo šablonais, jie klasifikuojami į septynis tipus. Numeravimo schema yra tarptautinė ir dažniausiai naudojama matematikų bei kristalografų. F. Šopeno valso kairės rankos fragmentas priklauso frizo tipui *p1a1*, tuo tarpu M. Ravelio keturių natų fragmentas priklauso tipui *p112*.

pavyzdys	vardas	abstrakti grupė
	p111	$\mathbb{Z}$
	p1a1	$\mathbb{Z}$
	p1m1	$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2$
	pm11	D_∞
	p112	D_∞
	pma2	D_∞
	pmm2	$D_\infty \times \mathbb{Z}/2$

4.2. Nzakaros arfa

Nzakaros ir Zandos žmonės Centrinėje Afrikos Respublikoje, Kongas bei Sudanas turi gilias muzikos tradicijas. Muzika apima poetinį dainavimą akompanuojamą 5 stygų arfos. Grojantysis arfa atlieka pastovų, pasikartojantį poros natų šabloną.

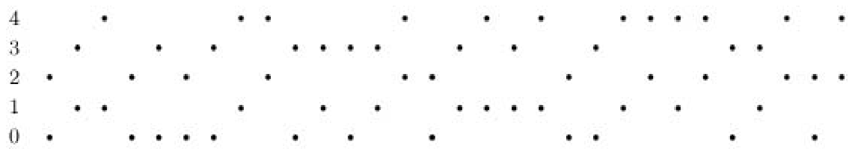
Penkios arfos natos yra suderintos natoms, kurios gali būti iššifruotos kaip C, D, E, G, B♭. Šios 5 stygos laikomos turinčios ciklą tvarka tokia, kad žemiausia styga yra gretima aukščiausiai stygai.



Stygos tempiamos poromis, dvi poros stygos niekada nėra gretimos cikle. Taigi yra tik 5 galimos poros. Poros stygos turi vienintelį bendrą kaimyną, naudojant šį kaimyną galima pažymėti porą.

Žymė	***Stygos***
0	1 4
1	0 2
2	1 3
3	2 4
4	0 3

Kartojimas arfos šablonų yra padalinamas į kategorijas, kurių pavadinimai *ngbákiá*, *limanza* ir *gitangi*. Limanzos linija yra pateikiama kaip kartojimas porų sekvencijos.



Perrašant ankstesniais žymėjimais, gaunama seka

120141403424231202014030342231З.

Iš pirmo žvilgsnio sunku išvysti kokį nors šabloną, tačiau galima padalinti šią seką į šešias grupes taip:

12 014140 342423 120201 403034 2313.

Kadangi šablonas turi kartotis, pradinė pora gali būti laikoma esanti paskutinės grupės iš keturių narių gale, taip sudaroma grupė iš šešių narių:

014140 342423 120201 403034 231312.

Dabar galima pamatyti, kad kiekviena grupė, sudaryta iš šešių narių, turi formą gautą iš prieš tai esančios grupės, penkių stygų cikle, paslenkant dvi vietas žemyn. Šitokia forma yra tartum susukta transliacinė simetrija. Tai taipogi yra sukamoji simetrija. Mes galime pakeisti laiką priešinga kryptimi:

213132 430304 102021 324243 041410.

Tada galima apversti penkių stygų ciklinę tvarką, pakeičiant stygą x styga $2-x(mod5)$. Gauname seką:

014140 342423 120201 403034 231312,

kuri yra tokia pati kaip ir buvusi seka.

4.3. Varpų skambinimo kitimas

Simetrinė grupė yra svarbi skambinimo kitimo arba varpinės mokslo samprotavimams. Varpų menas prasidėjo Anglijos bažnyčiose dešimtame šimtmetyje ir tęsiasi iki šių dienų. Gausybė bažnyčios bokšte svyruojančių varpų yra valdomi traukiant virves. Paprastai bokšte yra nuo 6 iki 12 varpų. Problema yra ta, kad varpai yra sunkūs, taigi varpų gaudesių laiko paskirstymą nėra lengva pakeisti. Sakykime aštuoni varpai grojami seka $1,2,3,4,5,6,7,8$. Sekančiame apėjime galima pakeisti laiko paskirstymą gretimų sekoje varpų, gaunant $1,3,2,4,5,7,6,8$, bet mes negalėsime pakeisti laiko paskirstymo varpų sekoje daugiau negu per vieną poziciją. Taigi bendros taisyklės yra tokios: kompozicijos kitimas sudarytas iš eilių sekos. Kiekviena eilė yra varpų aibės tvarka, o varpo pozicija eilėje gali skirtis viena, lyginant su praeita eile, pozicija. Taipogi yra nustatyta, kad eilė nėra kartojama kompozicijoje, išskyrus tai, kad paskutinė eilė sutampa su pirmąja. Pavyzdžiui *Plain Bob* keturi varpai grojami taip:

1	2	3	4
2	1	4	3
2	4	1	3
4	2	3	1
4	3	2	1
3	4	1	2
3	1	4	2
1	3	2	4
1	3	4	2
3	1	2	4
3	2	1	4
2	3	4	1
2	4	3	1
4	2	1	3
4	1	2	3
1	4	3	2
1	4	2	3
4	1	3	2
4	3	1	2
3	4	2	1
3	2	4	1
2	3	1	4
2	1	3	4
1	2	4	3
1	2	3	4

Šita eilių seka yra nusakoma simetrine grupe S_4. Kiekviena eilė yra tik vieną kart sąraše, išskyrus pirmąją pasikartojančią gale. Iš viso eilių yra $4!=24$. Einant nuo vienos eilutės prie kitos sudaromos perstatos. Nagrinėjamame *Plain Bob* pavyzdyje, keliuose pirmuose žingsniuose iš eilės taikomos perstatos $(1{,}2)(3{,}4)\text{ir}(1)(2{,}3)(4)$. Pasiekiama eilė 1324, toks pat metodas nuveda atgal į pradžią, kad to išvengti vietoj perstatos $(1)(2{,}3)(4)$ naudojama kita, būtent $(1)(2)(3{,}4)$ ir tęsiama taip kaip ligi šiol. Laiko linijoje 1432 vėl susiduriama su problema, grąžinančia į ankstesnę eilę, taikomas ankstesnis metodas. Kai praeinamos visos S_4 perstatos, grįžtama prie pradžios.

4.4. Laikrodžio aritmetika ir oktavos ekvivalentumas

Laikrodžio aritmetika yra tada, kai skaičiuojama iki dvylikos, o po to vėl startuojama nuo vieneto. Taigi pridėti $6+8$ laikrodžio aritmetikoje reikštų skaičiuoti šešis vienetus nuo 8 gaunant $9{,}10{,}11{,}12{,}1{,}2$, taigi šioje sistemoje mes turime $6+8=2$. Dažnai yra vertingiau rašyti 0 vietoj 12. Sudėties lentelė laikrodžio aritmetikoje atrodytų taip:

+	***0***	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***	***9***	***10***	***11***
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2
4	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3
5	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4
6	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5
7	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6
8	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7
9	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8
10	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
11	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Akcentuojant, kad sudėtis atlikta laikrodžio aritmetikoje, kitaip negu paprastoje aritmetikoje rašomas simbolis „≡“, tokiu atveju $6+8\equiv 2(mod\,12)$. Bendruoju atveju $a\equiv b(mod\,n)$, kur $a-b$ yra *n* kartotinis. Grupių terminais kalbant, aibė $\{0{,}1{,}2{,}3{,}4{,}5{,}6{,}7{,}8{,}9{,}10{,}11\}$ sudaro grupę, naudojama operacija yra sudėtis. Laikrodžio aritmetika yra abelio grupė. Grupės vienetas arba kitaip neutralus elementas yra 0, atvirkštinis *i* elementas yra *-i* arba *12-i*, priklausomai nuo to, kuris yra intervale nuo 0 iki 11. Ši grupė žymima $\mathbb{Z}/12$. Grupės $\mathbb{Z}\,\text{ir}\,\mathbb{Z}/12$ yra homomorfinės.

Muzikoje, skaičiai 0-11 reprezentuotų muzikinius intervalus kaip pustonių kartotinius dvylikos tonų lygiai temperuojamoje oktavoje. Taigi pavyzdžiui 1 nusako perstatą, paaukštinančią natą pustoniu.

$$\begin{pmatrix} C & C\sharp & D & E\flat & E & F & F\sharp & G & G\sharp & A & B\flat & B \\ C\sharp & D & E\flat & E & F & F\sharp & G & G\sharp & A & B\flat & B & C \end{pmatrix}$$

Laikrodžio aritmetika tampa oktavos ekvivalentu muzikinėje gamoje. Kiekvienas $\mathbb{Z}/12$ elementas nusakomas skirtinga perstata dvylikoje aukščio klasių, skaičius i nusako natos paaukštinimą i pustoniais. Pavyzdžiui, skaičius 7 nusako perstatą, kuri paukština kiekvieną natą kvinta. Sudėtis interpretuojama kaip intervalų sudėtis. Norint, kad viskas būtų aišku, dar reikia pasirinkti startinę poziciją oktavoje. Sakykime C nusakomas kaip 0, analogiškai gauname:

C	***C♯***	***D***	***E♭***	***E***	***F***	***F♯***	***G***	***G♯***	***A***	***B♭***	***B***
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Remiantis šia analogija, kiekvienas $\mathbb{Z}/12$ elementas nusakomas dvylikos natų oktavos perstata. Žinoma, jei mus pavyzdžiui domina 31 tono lygiai temperuojama gama, mes naudosime grupę $\mathbb{Z}/31$.

5. Aukso pjūvis muzikinėse kompozicijose

Auksinis santykis dar kitaip auksinė proporcija, auksinis skaičius, dieviškoji proporcija yra iracionalus skaičius apytiksliai lygus 1,618033989.

Du dydžiai laikomi esantys auksiniame santykyje, jei visumos (dviejų dalių sumos) santykis su didesniąja dalimi yra toks pat kaip didesniosios dalies su mažesniąja, tai yra

$$\frac{a+b}{a}=\frac{a}{b},$$

kur a yra didesnioji dalis, o b mažesnioji.

Panašiai, dvi dalys yra auksiniame santykyje, jei didžiausios ir mažesnės dalies santykis lygus santykiui mažesnės dalies bei šių dalių skirtumui, tai yra

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{a-b}.$$

Padalinant dešiniąją pusę iš b, gauname

$$\frac{a}{b}=\frac{1}{\frac{a}{b}-1},$$

$\frac{a}{b}$ pakeičiant į ϕ, gauname $\phi = \frac{1}{\phi - 1}$. Iš to seka

$$\phi^2 - \phi = 1 \text{ arba } \phi^2 - \phi - 1 = 0.$$

Šios kvadratinės lygties sprendiniai yra $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Kadangi skaičius ϕ turi būti teigimas, mes turime

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618033989.$$

Aukso pjūvis buvo studijuojamas senovėje matematikų pirmiausiai dėl jo dažno pasirodymo penkiakampiuose ir penkiakampėse žvaigždėse. Taipogi buvo spėliojama ar egiptiečiai naudojo aukso pjūvį piramidėse, bet nėra jokio įrodymo, kad jie žinojo ar naudojo šį auksinį santykį.

Šio skaičiaus atradimas priskiriamas Senovės Graikijai. Auksinis pjūvis nusakomas graikų abėcėlės raide ϕ. Skaičius ϕ pasižymi įdomiomis savybėmis, pavyzdžiui:

$$\phi^2 = \phi + 1,$$
$$\frac{1}{\phi} = \phi - 1.$$

Yra dar kitas skaičius, glaudžiai susijęs su ϕ, jis vadinamas atvirkštiniu ϕ, būtent $\frac{1}{\phi}$, bei žymimas mažąja raide φ :

$$\varphi = \frac{1}{\phi} = \phi - 1 = 0{,}618033989.$$

Aukso santykis dažnai naudojamas muzikinėse kompozicijose. Kulminacija dainose, kaip priešingybė viduriui ar pabaigai, dažnai pasiekiama maždaug ties ϕ tašku, tai yra $61{,}8\%$ dainos. Jei sakykim daina turi 32 taktus, kulminacija būtų dvidešimtame takte. W. A. Mocarto kūrinių analizė taip pat rodo, kad daugelis jų dalinasi auksiniu santykiu. Matematikas J. F. Putzas nagrinėjo W. A. Mocarto kūrinius, daugiausiai sonatas, nes jos kaip įprasta buvo dalinamos į dvi dalis: (1) ekspoziciją ir (2) plėtojimą bei glaustą pasikartojimą. Pasak jo, pirma W. A. Mocarto Sonatos Nr. 1 C mažore dalis yra sudaryta iš 100 taktų, kuri kaip įprasta yra padalinta į dvi dalis, 38 pirmoje ir 62 antroje. Šis santykis 38:62 ($\approx 0{,}613$) yra kaip galima artimas skaičiui 0,618 kompozicijoje, turinčioje 100 taktų. Sekanti sonatos dalis irgi dalinasi auksiniu santykiu. Daugelis W. A. Mocarto sonatų pianinui naudoja aukso pjūvį, bet keletas taipogi ir nukrypsta nuo šio santykio. J. F. Putzas iš tikrųjų negalėjo pasakyti, ar W. A. Mocartas naudojo tokį kompozicijos dalinimą sąmoningu, nors neabejojama, kad atsitiktinumo irgi būta.

Dabar pabandykime panagrinėti L. van Bethoveno kūrinį „Švilpikas“, kurį taipogi pristatau kitame skyrelyje. Visas kūrinys susideda iš 20 taktų. Dauginant taktų skaičių iš 0,618 mes gauname apytiksliai 12,36. Pažvelgus į kūrinį, galima pastebėti, kad nuo dvylikto takto prasideda melodijos variacija, kurioje dešinėje rankoje atsiranda dar vienas balsas. Jeigu tuos dvylika taktų skaičiuotume nuo kūrinio pabaigos, tai dvyliktame takte prasideda tema, apimanti keturis taktus, bei vėliau seka dvi jos variacijos.

6. L. van Bethoveno „Švilpiko" interpretacija MadTracker programoje

Šiais laikais muziką galima kurti kompiuterio pagalba. Sukurta gausybė programinės įrangos. Muzikos programinė įranga pagal sudėtingumą klasifikuojama:

- Nesudėtingą: taip paprastai yra nemokamos programos, konverteriai, kurie pasižymi mažomis veiksmų galimybėmis;
- Vidutinio sudėtingumo: komercinės programos, audio redaktoriai, pasižymintys plačiomis galimybėmis bei patogia vartotojo sąsaja;
- Sudėtinga: mokslinė-komercinė programinė įranga, tokia kaip CSound, Reaktor. CSound – tai muzikos programavimo kalba, sukurta prieš kelias dešimtis metų, apimanti programinės garso sintezės, garso projektavimo, signalų apdorojimo ir programavimo sritis. CSound kalba yra vartojama akademinėje srityje.

Muzikinę programinę įrangą taipogi galėtume suklasifikuoti pagal atsiradimą:

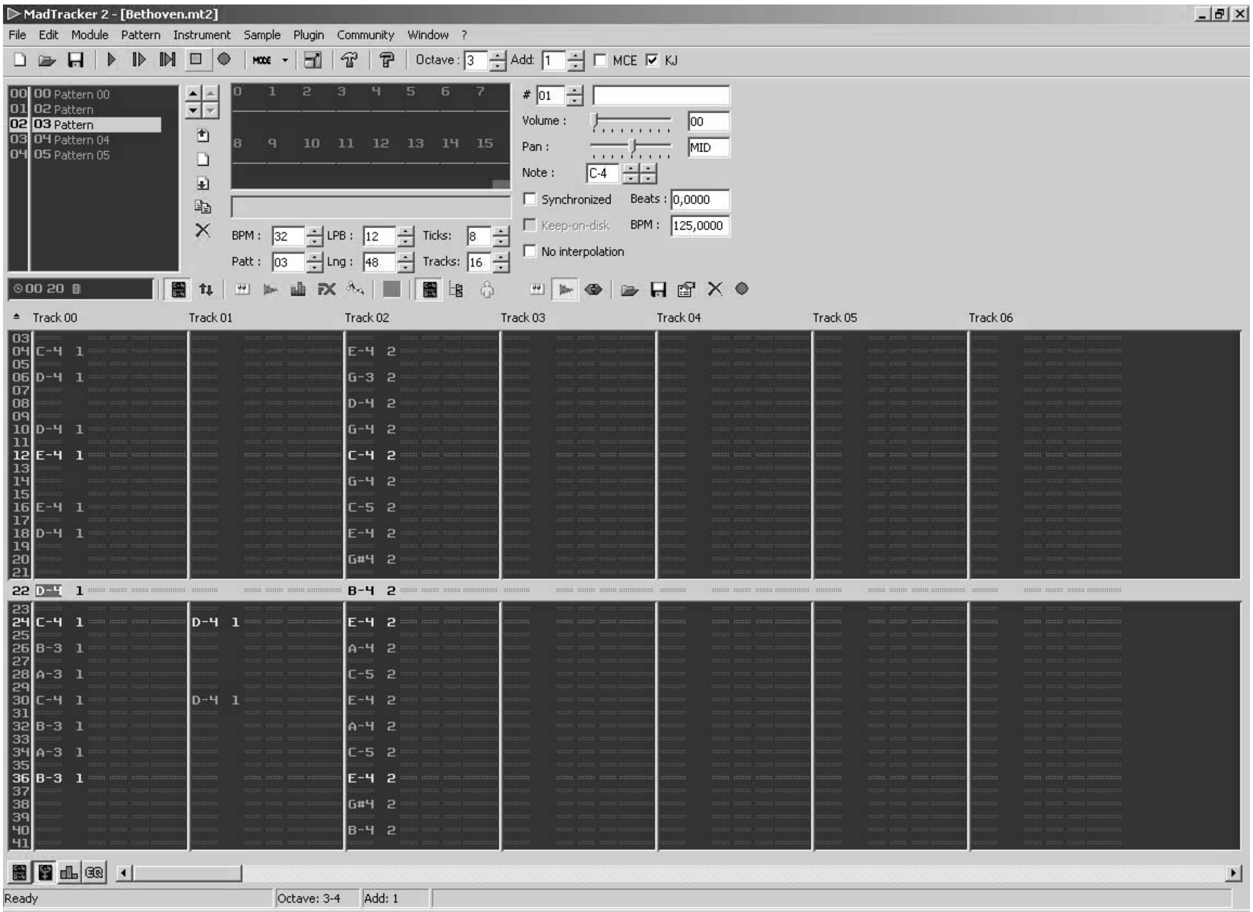
- music1, 2 ir t. t.;
- CSound;
- Trekerių era;
- Komercinės programos.

Savoka trekeris yra bendras terminas apibūdinantis muzikinių sekvensorių programinę įrangą, leidžiančią vartotojui pažingsniui laiko linijoje išdėstyti garso pavyzdžius keliuose takeliuose. Sąsaja su vartotoju yra skaitinė, natos įvedamos klaviatūra, efektai nusakomi šešioliktainiu skaičiumi. Pilnas kūrinys susideda iš kelių nedidelių tarpusavyje susijusių šablonų. Sukurta nemažai trekerių: Impulse Tracker, Fast Tracker, Skale Tracker, Scream Tracker, Renoise ir kitų. Visi jie pasižymi panašiu veikimo principu, išmokus dirbti vienu, galima lengvai išmokti dirbti ir kitu.

Savo L. van Bethoveno „Švilpiko" interpretacijai pasirinkau MadTracker programą. Ši trekerių tipo programa atsirado 1998 metais. Ji yra išplėtota 64 garso takelių valdymui, pilnai automatizuota, grįsta garso pavyzdžiais, taip vadinamais „semplais", taipogi galinti naudoti VST, ASIO ir ReWire efektus. Programos autorius yra Yannick Delwiche.

L. van Bethoveno kūrinys „Švilpikas" (žiūrėti prieduose) fortepijonui susideda iš 20 taktų bei prieštakčio. Metras yra $\frac{6}{8}$ (šešios aštuntinės), kadangi kūrinyje yra taipogi šešioliktinių natų, tai metrą $\frac{6}{8}$ galima parašyti kaip $\frac{12}{16}$. Pirmoje kūrinio eilutėje yra 4 taktai ir prieštaktis, kitose keturiose eilutėse yra po keturis taktus. Eilutes MadTracker programoje atitinka penki šablonai 00, 01, 02, 03, 04. Pirmojo šablono ilgis yra 60, tai yra po 12 natų penkiuose taktuose, visų kitų eilučių ilgis yra 48 šešioliktinės natos eilutėje.

Naudojau pianino garso pavyzdį (semplą) Piano_c3.wav, atitinkamai aukštindama bei žemindama oktavas. Garso takelyje Track00 surašiau dešinės rankos natas, Track02 – kairės rankos natas, o Track01 – antro balso, atsirandančio ketvirtoje eilutėje, dešinėje rankoje bei papuošimų natos.



Paveikslėlyje yra matoma trečiosios kūrinio eilutės dalis. Šešioliktinė nata turi vieną laiko trukmės vienetą, aštuntinė - du vienetus, ketvirtinė - keturis, ketvirtinė su tašku – šešis, nes $1,5 \times 4 = 6$, o taškas pailgina natą puse jos natūralios trukmės.

„Švilpiko“ interpretaciją pateikiu prieduose.

Žinoma kūrinys neskamba taip gražiai kaip grojant tikru pianinu, galbūt taip yra ir dėl ribotų šios programos galimybių, programa daugiausiai skirta elektroninės muzikos kūrimui. Vis dėlto aš manau, kad ir kokia puiki būtų programa, kad ir kaip tiksliai ja užrašomas kūrinys priartėtų prie tikrojo skambesio, tikrojo pianino ji nepakeis.

Išvados

Savo darbe aš išnagrinėjau matematinius aspektus esančius muzikoje, paliesdama tokias temas kaip garso bangos, konsonansas bei disonansas, gamos ir temperacijos, simetrija muzikoje, aukso pjūvis muzikinėse kompozicijose. Žinoma kiekviena čia paliesta tema gali būti išplėtota, tačiau aš stengiausi nusakyti svarbiausius faktus.

Rašant darbą nagrinėjau įvairią literatūrą bei susipažinau su keliomis muzikos kūrimo bei apdorojimo programomis, to pasekoje užrašiau klasikinio kūrinio interpretaciją viena iš šių programų.

Matematika ir muzika, kad ir kaip sietųsi tarpusavyje yra skirtingos sritys ir būtų klaidinga muzikoje viską grįsti matematiniais samprotavimas, tačiau šio ryšio visgi negalime nepaisyti. Būtų įdomu, jei mokinant matematikos, būtų aiškinamas ir jos pritaikymas bei naudingumas muzikoje, tokiu būdu sudominant mokinius pačia matematika.

Summary

Eglė Rėčkutė

Mathematics in music

It may look odd that mathematics and music, which seem to be completely different areas, are closely related to each other. Mathematical aspects can be found in music and vice versa, mathematics contains many examples of creative work, however, the latter is not the object of interest in this theses.

In ancient Greece music was considered strictly as a mathematical subject. Pythagoreans' teaching plan “quadrivium” involved four subjects: arithmetics, music, geometry and astronomy. It is also noticed that children who study music have better skills in solving puzzles, drawing mathematical conclusions. This is also closely related to so called „Mozart effect“: it is believed that listening to W. A. Mozart improves one's mathematical skills.

In this theses mathematical aspects obtained in music are analyzed with reference to various sources. Theses includes such topics as sound waves, dissonance and consonance, scales and temperaments, symmetry in music, golden mean in musical compositions. Last chapter provides an interpretation of “Ground-hog” by L. van Beethoven with MadTracker software.

The thesis could be useful in studying mathematics and applying it in music. Such application might as well increase interest in mathematics itself.

Literatūra

1. F. Wan. Mathematical Models and Their Analysis, New York: Harder & Row Publishers, 1989, 191-210.
2. D. Russin. Mathematics and Music, http://www.math.niu.edu/~rusin/uses-math/music/index.html
3. D. Benson. Music: a Mathematical offering, 2005, http://www.maths.abdn.ac.uk/~bensondj/html/maths-music.html
4. H. Mazzola. Towards Big Science: Geomteric Logic of Music and its Technology, 1995, http://www.ifi.unizh.ch/mml/musicmedia/publications.php4
5. R. W. Hall, K. Jocić. Mathematics of Musical Instruments, http://www.sju.edu/%7Erhall/newton/index.html
6. W. R. Colliss. Did Mozart Use The Golden Section, http://www.science-frontiers.com/sf107/sf107p14.htm
7. S. C. Rasmussen. The Quadrivium, http://members.aol.com/oldenwilde/members/diu/quadriv.html
8. S. Tipei, Golden Ratio, http://web.hep.uiuc.edu/home/karliner/golden.html
9. G. Alison. The Mozart effect, http://www.newscientist.com/channel/being-human/mg18625011.900.html
10. D. Huron. Music Cognition Handbook: A Dictionary of Concepts, http://csml.som.ohio-state.edu/Resources/Handbook/index.html
11. Wikipedia, the free encyclopedia, http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
12. GoldenNumber.net, http://goldennumber.net/

Priedai

Сурок

Л. БЕТХОВЕН (Германия)
(1770 - 1827)