VILNIAUS UNIVERSITETAS

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

MATEMATINĖS STATISTIKOS KATEDRA

Aušra Skorniakova (parašas)

VIENOS MARKOVO GRANDINĖS STACIONARAUS SKIRSTINIO UODEGOS VERTINIMAS

Magistro baigiamasis darbas

Vilnius, 2012

Darbo vadovas:

Prof. dr. Vytautas Kazakevičius (parašas)

Recenzentas:

Doc. dr. Rimantas Eidukevičius (parašas)

Registracijos Nr.: ....

Darbo gynimo data: ....

Turinys

Įvadas

Tarkime, turime Markovo grandinę, apibrėžiamą lygtimis

$$X_n = F(X_{n-1}, \varepsilon_n), \ n \geqslant 1; \tag{0.1}$$

čia X_0 — žinomas atsitiktinis dydis, o (ε_n) — nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių seka, nepriklausanti nuo X_0. Tarkime taip pat, kad egzistuoja stacionarus skirstinys, t.y. toks atsitiktinis dydis X, kad

$$X \stackrel{d}{=} F(X, \varepsilon),$$

ir mus domina tikimybės $\mathrm{P}\{X > x\}$ asimptotika, kai $x \to \infty$.

Vytautas Kazakevičius ir Viktor Skorniakov savo darbe [1] nagrinėjo funkcijas, turinčias savybę

$$F(x, \varepsilon) \sim \ q(\varepsilon)x, \ \text{kai } x \to \infty,$$

ir rado sąlygas, kada

$$\mathrm{P}\{X > x\} \sim \frac{c}{x^\alpha}, \ \text{kai } x \to \infty;$$

čia $\alpha > 0$ — pastovus skaičius, vadinamas uodegos indeksu. Pagrindinės iš tų sąlygų yra tokios:

$$\mathrm{E}\, q^\alpha(\varepsilon) = 1 \quad \text{ir} \quad \mathrm{E}\, q^\alpha(\varepsilon) |\ln q(\varepsilon)| < \infty. \tag{0.2}$$

Funkcija $\alpha \mapsto \mathrm{E}\, q^\alpha(\varepsilon)$ tolydi visur, kur ji baigtinė, todėl jei $\mathrm{E}\, q^\beta(\varepsilon) > 1$ su tam tikru β, atsiras α, su kuriuo (0.2) sąlygos bus patenkintos. Tačiau gali atsitikti taip, kad

$$\mathrm{E}\, q^\alpha(\varepsilon) < 1 \quad \text{ir} \quad \mathrm{E}\, q^\beta(\varepsilon) = \infty \text{ su visais } \beta > \alpha.$$

Mano darbo tikslas — išsiaiškinti, kokia bus $\mathrm{P}\{X > x\}$ asimptotika šiuo atveju.

1 Pagrindinis rezultatas

Aš nagrinėju atskirą (0.1) modelio atvejį, atitinkantį funkciją $F(x, \varepsilon) = 1 + \varepsilon x$:

$$X_n = 1 + \varepsilon_n X_{n-1}, \ n \geqslant 1; \tag{1.1}$$

čia $X_0 = x$, (ε_n) — nepriklausomų teigiamo atsitiktinio dydžio ε kopijų seka, $q(\varepsilon) = \varepsilon$.

Iteruodami (1.1) lygybes, gauname

$$\begin{gathered} X_1 = 1 + \varepsilon_1 x, \\ X_2 = 1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_1 x, \\ X_3 = 1 + \varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_2 + \varepsilon_3\varepsilon_2\varepsilon_1 x, \\ \vdots \\ X_n = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_n\varepsilon_{n-1}\cdots\varepsilon_{n-i+1} + \varepsilon_n\cdots\varepsilon_1 x. \end{gathered}$$

Pažymėkime

$$\xi_n = 1 + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_i; \tag{1.2}$$

$$\xi = 1 + \sum_{i\geqslant 1} \varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_i. \tag{1.3}$$

Atsitiktinis dydis X_n pasiskirstęs taip pat kaip $\xi_{n-1} + \varepsilon_1\cdots\varepsilon_n x$. Aišku, kad $\xi_n \uparrow \xi$. Pagal Košy kriterijų, (1.3) eilutė beveik tikrai konverguoja, jei

$$\lim_{n\to\infty} (\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n)^{\frac{1}{n}} < 1,$$

t. y., jei

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln(\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln\varepsilon_i < 0.$$

Pagal didžiųjų skaičių dėsnį,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln\varepsilon_i = \mathrm{E}\ln\varepsilon.$$

Taigi (1.3) eilutė beveik tikrai konverguoja, jei $\mathrm{E}\ln\varepsilon < 0$. Tada jos bendrasis narys artėja į 0 ir todėl $X_n \xrightarrow{d} \xi$, kai $n \to \infty$. Todėl stacionarus sprendinys egzistuoja, kai $\mathrm{E}\ln\varepsilon < 0$, o jo skirstinys sutampa su ξ dydžio skirstiniu.

Kadangi $\xi > 1$, stacionarus skirstinys sukoncentruotas $(1; \infty)$ intervale. Užrašykime tikimybę $\mathrm{P}\{\xi > x\}$ su $x \geqslant 1$ eilute:

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}\{\xi > x\} \\ &= \mathrm{P}\{1 + \varepsilon_1 > x\} \\ &\quad + \mathrm{P}\{1 + \varepsilon_1 \leqslant x < 1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2\} \\ &\quad + \mathrm{P}\{1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2 \leqslant x < 1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\} + \cdots \\ &= \mathrm{P}\{\xi_1 > x\} + \mathrm{P}\{\xi_1 \leqslant x < \xi_2\} + \mathrm{P}\{\xi_2 \leqslant x < \xi_3\} + \cdots. \end{aligned}$$

Pažymėkime

$$\psi_0(x) = \mathrm{P}\{\xi_1 > x\} \quad \text{ir} \quad \psi_n(x) = \mathrm{P}\{\xi_n \leqslant x < \xi_{n+1}\}, \ n \geqslant 1.$$

Tada

$$\mathrm{P}\{\xi > x\} = \sum_{n\geqslant 0} \psi_n(x).$$

Pastebėkime, kad su $n \geqslant 2$

$$\xi_n = 1 + \varepsilon_1 \tilde{\xi}_{n-1};$$

čia $\tilde{\xi}_{n-1}$ pasiskirstęs taip pat kaip ξ_{n-1} ir nepriklauso nuo ε_1. Tada

$$\begin{aligned}\psi_1(x) &= \mathrm{P}\{\xi_1 \leqslant x < \xi_2\} = \mathrm{P}\{1+\varepsilon_1 \leqslant x < 1 + \varepsilon_1\tilde{\xi}_1\} \\ &= \mathrm{E}\,\mathbf{1}_{\{\varepsilon_1 \leqslant x-1\}}\mathbf{1}_{\{\tilde{\xi}_1 > (x-1)/\varepsilon_1\}} = \mathrm{E}\,\mathbf{1}_{\{\varepsilon\leqslant x-1\}}\psi_0\big((x-1)/\varepsilon\big)\end{aligned}$$

ir su $n \geqslant 2$

$$\begin{aligned}\psi_n(x) &= \mathrm{P}\{\xi_n \leqslant x < \xi_{n+1}\} = \mathrm{P}\{1+\varepsilon_1\tilde{\xi}_{n-1} \leqslant x < 1 + \varepsilon_1\tilde{\xi}_n\} \\ &= \mathrm{E}\,\mathbf{1}_{\{\varepsilon_1 \leqslant x-1\}}\mathbf{1}_{\{\tilde{\xi}_{n-1} \leqslant (x-1)/\varepsilon_1 < \tilde{\xi}_n\}} = \mathrm{E}\,\mathbf{1}_{\{\varepsilon\leqslant x-1\}}\psi_{n-1}\big((x-1)/\varepsilon\big).\end{aligned}$$

Savo bakalauro baigiamajame darbe [2] nagrinėjau atsitiktinį dydį ε, turintį tankį

$$p(x) = \frac{c}{(x+a)^2\ln^2(x+a)}, \ \text{kai } x > 0;$$

čia c yra tankį normuojanti konstanta, o $a > 1$ — toks skaičius, kad tankis tenkintų sąlygą $\mathrm{E}\,\varepsilon < 1$. Buvo įrodyta, kad su visais $n \geqslant 0$

$$\psi_n(x) \sim \frac{c(n+1)(\mathrm{E}\,\varepsilon)^n}{x\ln^2 x}, \ \text{kai } x \to \infty.$$

Taigi buvo galima spręsti, jog

$$\mathrm{P}\{\xi > x\} \sim \frac{c}{x\ln^2 x}\sum_{n\geqslant 0}(n+1)(\mathrm{E}\,\varepsilon)^n, \ \text{kai } x \to \infty.$$

Magistro baigiamajame darbe įrodysiu, kad ši hipotezė tikrai teisinga ir netgi bendresniu atveju. Pagrindinis rezultatas yra tokia teorema.

1.1 teorema. *Tegu teigiamas atsitiktinis dydis ε turi tokį tankį p Lebego mato atžvilgiu, kad*

$$p(x) \sim \frac{c}{x^{\alpha+1}\ln^2 x}, \ \textit{kai } x \to \infty, \quad \mathrm{E}\,\varepsilon^\alpha < 1 \tag{1.4}$$

ir $p(x)$ aprėžtas su x iš bet kokio intervalo $[x_1; x_2] \subset (0;\infty)$.

Jei (ε_n) — nepriklausomų ε kopijų seka ir ξ apibrėžtas (1.3) *lygybe, tai*

$$\mathrm{P}\{\xi > x\} \sim \frac{c}{(1-\mathrm{E}\,\varepsilon)^2 x^\alpha \ln^2 x}, \ \textit{kai } x \to \infty.$$

1 pastaba. Iš (1.4) išplaukia, kad $\mathrm{E}\,\varepsilon^\beta = \infty$ su visais $\beta > \alpha$.
Įrodymas. Randame tokį x_0 ir tokią konstantą $\tilde{c}$, kad su visais $x \geqslant x_0$

$$x^{(\beta-\alpha)/2} \geqslant \ln^2 x \quad \text{ir} \quad x^{\alpha+1} \ln^2 x p(x) \geqslant \tilde{c}.$$

Tada

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\,\varepsilon^\beta = \int_0^\infty x^\beta p(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_{x_0}^\infty x^\beta p(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_{x_0}^\infty \frac{\tilde{c}x^\beta}{x^{\alpha+1}\ln^2 x}\mathrm{d}x \\
= \tilde{c}\int_{x_0}^\infty \frac{x^{\beta-\alpha-1}}{\ln^2 x}\mathrm{d}x = \tilde{c}\int_{x_0}^\infty \frac{x^{(\beta-\alpha)/2}}{\ln^2 x}\, x^{(\beta-\alpha)/2-1}\mathrm{d}x \\
\geqslant \tilde{c}\int_{x_0}^\infty x^{(\beta-\alpha)/2-1}\mathrm{d}x = \left.\frac{2\tilde{c}x^{(\beta-\alpha)/2}}{\beta-\alpha}\right|_{x_0}^\infty = \infty.
\end{aligned}$$

□

2 pastaba. Iš (1.4) taip pat išplaukia, kad $\mathrm{E}\ln\varepsilon < 0$ ir, reiškia, $\xi < \infty$ beveik tikrai.
Įrodymas. Iš Jenseno nelygybės ir nelygybės $\mathrm{E}\,\varepsilon^\alpha < 1$ gauname

$$\alpha\,\mathrm{E}\ln\varepsilon = \mathrm{E}\ln\varepsilon^\alpha \leqslant \ln\mathrm{E}\,\varepsilon^\alpha < 0.$$

□

3 pastaba. Paprastumo dėlei tarsime, kad $\alpha = 1$; imant bet kokį kitą $\alpha > 0$ teoremos įrodymas būtų analogiškas. Taigi toliau laikysime, kad ε turi tankį p, tenkinantį sąlygas

$$p(x) \sim \frac{c}{x^2\ln^2 x}, \text{ kai } x \to \infty, \quad \mathrm{E}\,\varepsilon < 1 \tag{1.5}$$

ir $p(x)$ aprėžtas su x iš bet kokio intervalo $[x_1; x_2] \subset (0; \infty)$.

2 Teoremos įrodymas

Primename, kad

$$\psi_0(x) = \mathrm{P}\{\varepsilon > x-1\} = \int_{x-1}^\infty p(z)\mathrm{d}z, \text{ kai } x \geqslant 1.$$

2.1 lema. *Jei ε tankis tenkina* (1.5) *sąlygas, tai*

$$\psi_0(x) \sim \frac{c}{x\ln^2 x}, \text{ kai } x \to \infty. \tag{2.1}$$

Įrodymas. Fiksuojame $\delta > 0$ ir randame tokį x_0, kad su visais $x \geqslant x_0$

$$x^2\ln^2 x p(x) \in (c-\delta; c+\delta).$$

Tada su visais $x \geqslant x_0 + 1$

$$x \ln^2 x \psi_0(x) = x \ln^2 x \int_{x-1}^{\infty} p(z) \mathrm{d}z = x \ln^2 x \int_{x-1}^{\infty} \frac{z^2 \ln^2 z p(z)}{z^2 \ln^2 z} \mathrm{d}z$$
$$\leqslant (c+\delta) x \ln^2 x \int_{x-1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}z}{z^2 \ln^2 z}.$$

Pagal Liopitalio taisyklę,

$$\lim_{x\to\infty} x \ln^2 x \int_{x-1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}z}{z^2 \ln^2 z} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\int_{x-1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}z}{z^2 \ln^2 z}\right)'}{\left(\frac{1}{x \ln^2 x}\right)'}.$$

Kadangi

$$\left(\int_{x-1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}z}{z^2 \ln^2 z}\right)' = -\frac{1}{(x-1)^2 \ln^2(x-1)},$$
$$\left(\frac{1}{x \ln^2 x}\right)' = -\frac{1}{x^2 \ln^2 x} - \frac{2}{x^2 \ln^3 x} = -\frac{1}{x^2 \ln^2 x}\left(1 + \frac{2}{\ln x}\right),$$

tai

$$\lim_{x\to\infty} x \ln^2 x \int_{x-1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}z}{z^2 \ln^2 z} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 \ln^2 x}{(x-1)^2 \ln^2(x-1)\left(1 + \frac{2}{\ln x}\right)} = 1.$$

Taigi

$$\varlimsup_{x\to\infty} x \ln^2 x \psi_0(x) \leqslant (c+\delta).$$

Analogiškai

$$\varliminf_{x\to\infty} x \ln^2 x \psi_0(x) \geqslant (c-\delta).$$

Kadangi δ parinkome laisvai, perėję prie ribos, kai $\delta \to 0$, gauname

$$\lim_{x\to\infty} x \ln^2 x \psi_0(x) = c.$$

□

Dabar rasime funkcijos $\psi_n(x) = \mathrm{P}\{\xi_n \leqslant x < \xi_{n+1}\}$ asimptotiką, kai $x \to \infty$.

2.2 lema. *Su visais $n \geqslant 1$ teisinga lygybė*

$$\int_0^1 \frac{1}{u^2} \psi_{n-1}(1/u)\, \mathrm{d}u = (\mathrm{E}\,\varepsilon)^n. \tag{2.2}$$

Įrodymas. Atliekame kintamojo keitimą $u = 1/v$:

$$\int_0^1 \frac{1}{u^2} \psi_{n-1}(1/u)\, \mathrm{d}u = \int_1^{\infty} \psi_{n-1}(v) \mathrm{d}v$$

Kai $n = 1$, turime

$$\int_1^{\infty} \psi_0(v) \mathrm{d}v = \int_1^{\infty} \mathrm{d}v \int_{v-1}^{\infty} p(y) \mathrm{d}y = \int_0^{\infty} p(y) \mathrm{d}y \int_1^{y+1} \mathrm{d}v = \int_0^{\infty} y p(y) \mathrm{d}y = \mathrm{E}\,\varepsilon.$$

Tarkime, $n \geqslant 2$ ir (2.2) lygybė teisinga su $n-1$ vietoje n. Tada

$$\int_1^\infty \psi_{n-1}(v)\mathrm{d}v = \int_1^\infty \mathrm{d}v \int_0^{v-1} p(t)\psi_{n-2}\big((v-1)/t\big)\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^\infty p(t)\mathrm{d}t \int_{t+1}^\infty \psi_{n-2}\big((v-1)/t\big)\mathrm{d}v.$$

Vidiniame integrale atlikę kintamojo keitimą $v = tz+1$ ir pasinaudoję indukcine prielaida gauname, kad dvilypis integralas lygus

$$\int_0^\infty p(t)\mathrm{d}t \int_1^\infty \psi_{n-2}(z)t\mathrm{d}z = \int_0^\infty tp(t)\mathrm{d}t \int_1^\infty \psi_{n-2}(z)\mathrm{d}z$$
$$= \mathrm{E}\,\varepsilon \int_1^\infty \psi_{n-2}(z)\mathrm{d}z = (\mathrm{E}\,\varepsilon)^n.$$

□

2.3 lema. *Su bet kokiu $n \geqslant 0$ teisingas toks sąryšis:*

$$\psi_n(x) \sim \frac{c(n+1)(\mathrm{E}\,\varepsilon)^n}{x\ln^2 x}, \quad \textit{kai } x \to \infty. \tag{2.3}$$

Įrodymas. Naudosimės matematinės indukcijos metodu. Kai $n=0$, teiginys išplaukia iš (2.1) lemos. Tarkime, $n \geqslant 1$ ir (2.3) sąryšis teisingas su $n-1$ vietoje n. Turėjome

$$\psi_n(x) = \mathrm{E}\,\mathbf{1}_{\{\varepsilon \leqslant x-1\}}\psi_{n-1}\big((x-1)/\varepsilon\big)$$
$$= \int_0^{x-1} p(z)\psi_{n-1}\big((x-1)/z\big)\mathrm{d}z = I_1(x) + I_2(x);$$

čia

$$I_1(x) = \int_0^{\sqrt{x-1}} p(z)\psi_{n-1}\big((x-1)/z\big)\mathrm{d}z,$$
$$I_2(x) = \int_{\sqrt{x-1}}^{x-1} p(z)\psi_{n-1}\big((x-1)/z\big)\mathrm{d}z.$$

Iš pradžių rasime $I_1(x)$ asimptotiką, kai $x \to \infty$. Jei $x > 3$, su bet kokiu $z \in (0;\infty)$

$$x\ln^2 x\mathbf{1}_{(0;\sqrt{x-1})}(z)p(z)\psi_{n-1}\big((x-1)/z\big)$$
$$= x\ln^2 x\mathbf{1}_{(0;\sqrt{x-1})}(z)p(z)\frac{\psi_{n-1}\big((x-1)/z\big)}{\frac{x-1}{z}\ln^2\left(\frac{x-1}{z}\right)}\ \frac{x-1}{z}\ \ln^2\big((x-1)/z\big)$$
$$\leqslant \mathbf{1}_{(0;\sqrt{x-1})}(z)p(z)\frac{x\ln^2 x}{\frac{x-1}{z}\ln^2\left(\frac{x-1}{z}\right)}c_1$$
$$\leqslant 4zp(z)\frac{x\ln^2 x}{(x-1)\ln^2(x-1)}c_1$$
$$\leqslant c_2 zp(z);$$

čia

$$c_1 = \sup_{t>\sqrt{2}} t \ln^2 t \psi_{n-1}(t); \quad c_2 = 4c_1 \sup_{x>3} \frac{x \ln^2 x}{(x-1)\ln^2(x-1)}.$$

Mažoruojanti funkcija integruojama intervale $(0;\infty)$ ir iš indukcinės prielaidos

$$x \ln^2 x \mathbf{1}_{(0;\sqrt{x-1})}(z) p(z) \psi_{n-1}\big((x-1)/z\big) \xrightarrow[x\to\infty]{} p(z) z c n (\mathrm{E}\,\varepsilon)^{n-1}.$$

Todėl iš Lebego teoremos apie aprėžtą konvergavimą

$$x \ln^2 x I_1(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} cn(\mathrm{E}\,\varepsilon)^{n-1} \int_0^\infty z p(z) \mathrm{d}z = cn(\mathrm{E}\,\varepsilon)^n. \tag{2.4}$$

Dabar rasime $I_2(x)$ asimptotiką, kai $x \to \infty$. Atliekame kintamojo keitimą $z = u(x-1)$:

$$\begin{aligned} I_2(x) &= \int_0^\infty \mathbf{1}_{(\sqrt{x-1};x-1)}(z) p(z) \psi_{n-1}\big((x-1)/z\big) \mathrm{d}z \\ &= \int_0^\infty \mathbf{1}_{(\frac{1}{\sqrt{x-1}};1)}(u) p\big(u(x-1)\big) \psi_{n-1}(1/u)(x-1)\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

Jei $x > 3$, su bet kokiu $u \in (0;1)$

$$\begin{aligned} & x \ln^2 x \mathbf{1}_{(\frac{1}{\sqrt{x-1}};1)}(u) p\big(u(x-1)\big)(x-1)\psi_{n-1}(1/u) \\ &= x \ln^2 x \mathbf{1}_{(\frac{1}{\sqrt{x-1}};1)}(u) \frac{(x-1)p\big(u(x-1)\big)}{u^2(x-1)^2 \ln^2\big(u(x-1)\big)} u^2 (x-1)^2 \ln^2\big(u(x-1)\big) \psi_{n-1}(1/u) \\ &\leqslant x \ln^2 x \mathbf{1}_{(\frac{1}{\sqrt{x-1}};1)}(u) \frac{c_3}{u^2(x-1)\ln^2\big(u(x-1)\big)} \psi_{n-1}(1/u) \\ &\leqslant \frac{4c_3}{u^2} \frac{x \ln^2 x}{(x-1)\ln^2(x-1)} \psi_{n-1}(1/u) \\ &\leqslant \frac{c_4}{u^2} \psi_{n-1}(1/u); \end{aligned}$$

čia

$$c_3 = \sup_{t>\sqrt{2}} t^2 \ln^2 t p(t); \quad c_4 = 4c_3 \sup_{x>3} \frac{x \ln^2 x}{(x-1)\ln^2(x-1)}.$$

Iš (2.2) lemos išplaukia, kad mažoruojanti funkcija integruojama intervale (0;1). Kadangi

$$x \ln^2 x \mathbf{1}_{(\frac{1}{\sqrt{x-1}};1)}(u) p\big(u(x-1)\big)(x-1)\psi_{n-1}(1/u) \xrightarrow[x\to\infty]{} \mathbf{1}_{(0;1)}(u) \frac{c}{u^2} \psi_{n-1}(1/u),$$

iš Lebego teoremos apie aprėžtą konvergavimą ir (2.2) lemos išplaukia

$$\begin{aligned} x \ln^2 x I_2(x) &\xrightarrow[x\to\infty]{} \int_0^\infty \mathbf{1}_{(0;1)}(u) \frac{c}{u^2} \psi_{n-1}(1/u)\, \mathrm{d}u \\ &= \int_0^1 \frac{c}{u^2} \psi_{n-1}(1/u)\, \mathrm{d}u = c(\mathrm{E}\,\varepsilon)^n. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Iš (2.4) ir (2.5) gauname

$$\psi_n(x) = I_1(x) + I_2(x) \sim \frac{c(n+1)(\mathrm{E}\,\varepsilon)^n}{x \ln^2 x}, \text{ kai } x \to \infty.$$

□

Paimame tokį q, kad

$$\mathrm{E}\,\varepsilon < q < 1, \tag{2.6}$$

po to — tokį $\theta > 1$, kad

$$\theta\,\mathrm{E}\,\varepsilon < q, \tag{2.7}$$

po to — tokį $\delta \in (0;1)$, kad

$$\frac{\theta\,\mathrm{E}\,\varepsilon}{(1-\delta)^2} < q. \tag{2.8}$$

Randame tokį $x_0 > 1$, kad su visais $x \geqslant x_0$

$$\frac{x \ln^2 x}{(x-1)\ln^2(x-1)} \leqslant \theta. \tag{2.9}$$

Pažymime

$$x_1 = x_0^{1/(1-\delta)} + 1, \tag{2.10}$$

$$c_1 = \sup_{x \geqslant x_0} x \ln^2 x \psi_0(x), \tag{2.11}$$

$$c_2 = \sup_{x \geqslant x_0^{\delta/(1-\delta)}} x^2 \ln^2 x p(x), \tag{2.12}$$

$$c_3 = \sup_{(x_0-1)/x_0 \leqslant x \leqslant x_1 - 1} p(x), \tag{2.13}$$

$$c_4 = x_1(x_1-1)\ln^2 x_1, \tag{2.14}$$

$$\tilde{c} = \max\left(c_1, \frac{c_2}{\delta^2}, c_3 c_4\right). \tag{2.15}$$

2.4 lema. *Su visais $n \geqslant 0$ ir visais $x \geqslant x_0$*

$$\psi_n(x) \leqslant \frac{\tilde{c}(n+1)q^n}{x \ln^2 x}. \tag{2.16}$$

Įrodymas. Kai $n = 0$, teiginys teisingas, nes $\tilde{c} \geqslant c_1$. Tarkime, $n \geqslant 1$ ir (2.16) nelygybė teisinga su $n-1$ vietoje n. Fiksuojame $x \geqslant x_0$.

Jei $x \geqslant x_1$, skaidome

$$\psi_n(x) = \int_0^{x-1} p(z)\psi_{n-1}\big((x-1)/z\big)\mathrm{d}z = I_1(x) + I_2(x)$$

su

$$I_1(x) = \int_0^{(x-1)^\delta} p(z)\psi_{n-1}\big((x-1)/z\big)\mathrm{d}z,$$

$$I_2(x) = \int_{(x-1)^\delta}^{x-1} p(z)\psi_{n-1}\big((x-1)/z\big)\mathrm{d}z.$$

Šiuo atveju $x-1 \geqslant x_1 - 1 = x_0^{1/(1-\delta)}$; todėl iš $z < (x-1)^\delta$ išplaukia

$$\frac{x-1}{z} > (x-1)^{1-\delta} \geqslant x_0$$

ir iš indukcinės prielaidos

$$\begin{aligned}
x\ln^2 x I_1(x) &\leqslant \int_0^{(x-1)^\delta} x\ln^2 x p(z) \frac{\tilde{c}nq^{n-1}}{\frac{x-1}{z}\ln^2\left(\frac{x-1}{z}\right)}\mathrm{d}z \\
&\leqslant \tilde{c}nq^{n-1}\int_0^\infty zp(z)\frac{x\ln^2 x}{(x-1)\ln^2(x-1)^{1-\delta}}\mathrm{d}z \\
&= \frac{\tilde{c}nq^{n-1}}{(1-\delta)^2}\frac{x\ln^2 x}{(x-1)\ln^2(x-1)}\int_0^\infty zp(z)\mathrm{d}z \\
&\leqslant \tilde{c}nq^{n-1}\frac{\theta\,\mathrm{E}\,\varepsilon}{(1-\delta)^2} \\
&\leqslant \tilde{c}nq^n.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Priešpaskutinė nelygybė išplaukia iš (2.9), o paskutinė — iš (2.8). Be to, iš (2.12) turime, kad

$$x\ln^2 x I_2(x) \leqslant \int_{(x-1)^\delta}^{x-1} x\ln^2 x \frac{c_2}{z^2\ln^2 z}\psi_{n-1}\big((x-1)/z\big)\mathrm{d}z. \tag{2.18}$$

Atliekame kintamojo keitimą $z = u(x-1)$:

$$\begin{aligned}
x\ln^2 x I_2(x) &\leqslant \int_{(x-1)^{\delta-1}}^1 \frac{c_2 x\ln^2 x}{u^2(x-1)^2\ln^2\big(u(x-1)\big)}\psi_{n-1}(1/u)(x-1)\mathrm{d}u \\
&\leqslant \int_0^1 \frac{c_2 x\ln^2 x}{u^2(x-1)\ln^2(x-1)^\delta}\psi_{n-1}(1/u)\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{c_2}{\delta^2}\frac{x\ln^2 x}{(x-1)\ln^2(x-1)}\int_0^1 \frac{1}{u^2}\psi_{n-1}(1/u)\,\mathrm{d}u \\
&\leqslant \tilde{c}\theta(\mathrm{E}\,\varepsilon)^n \\
&\leqslant \tilde{c}q^n.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Priešpaskutinė nelygybė išplaukia iš (2.15) ir (2.9) bei (2.2) lemos, o paskutinė — iš (2.7). Taigi iš (2.17) ir (2.19) gauname, kad atveju $x \geqslant x_1$ (2.16) nelygybė teisinga.

Tegu dabar $x_0 \leqslant x < x_1$. Šiuo atveju skaidome taip:

$$\psi_n(x) = I_1(x) + I_2(x)$$

su

$$\begin{aligned}
I_1(x) &= \int_0^{(x-1)/x_0} p(z)\psi_{n-1}\big((x-1)/z\big)\mathrm{d}z, \\
I_2(x) &= \int_{(x-1)/x_0}^{x-1} p(z)\psi_{n-1}\big((x-1)/z\big)\mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

Jei $z < (x-1)/x_0$, tai $(x-1)/z > x_0$ ir

$$\begin{aligned}
x\ln^2 x I_1(x) &\leqslant \int_0^{(x-1)/x_0} x\ln^2 x p(z) \frac{\tilde{c}nq^{n-1}}{\frac{x-1}{z}\ln^2\left(\frac{x-1}{z}\right)}\mathrm{d}z \\
&\leqslant \tilde{c}nq^{n-1}\frac{x\ln^2 x}{(x-1)\ln^2 x_0}\int_0^\infty zp(z)\mathrm{d}z \\
&= \tilde{c}nq^{n-1}\frac{x\ln^2 x}{(x-1)\ln^2(x-1)}\,\frac{\ln^2(x-1)}{\ln^2 x_0}\,\mathrm{E}\,\varepsilon \\
&\leqslant \tilde{c}nq^{n-1}\frac{\ln^2 x_0^{1/(1-\delta)}}{\ln^2 x_0}\theta\,\mathrm{E}\,\varepsilon \\
&= \tilde{c}nq^{n-1}\frac{\theta\,\mathrm{E}\,\varepsilon}{(1-\delta)^2} \\
&\leqslant \tilde{c}nq^n.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Be to,

$$\begin{aligned}
x\ln^2 x I_2(x) &\leqslant c_3 x\ln^2 x\int_{(x-1)/x_0}^{x-1}\psi_{n-1}\big((x-1)/z\big)\mathrm{d}z \\
&= c_3 x(x-1)\ln^2 x\int_{1/x_0}^{1}\psi_{n-1}\big(1/u\big)\mathrm{d}u \\
&\leqslant c_3c_4\int_0^1\psi_{n-1}\big(1/u\big)\mathrm{d}u \\
&\leqslant c_3c_4\int_0^1\frac{1}{u^2}\psi_{n-1}\big(1/u\big)\mathrm{d}u \\
&= c_3c_4(\mathrm{E}\,\varepsilon)^n \\
&\leqslant \tilde{c}q^n.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Pirma nelygybė išplaukia iš (2.13), antra — iš (2.14), o paskutinė — iš (2.15) ir (2.6). Taigi iš (2.20) ir (2.21) gauname, kad lemos teiginys teisingas. □

Kadangi $q < 1$, tai

$$\sum_{n\geqslant 0}(n+1)q^n = \sum_{n\geqslant 0}\big(q^{n+1}\big)' = \left(\sum_{n\geqslant 1}q^n\right)' = \left(\frac{q}{1-q}\right)' = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

Taigi (c_n) seka, kur $c_n = \tilde{c}(n+1)q^n$, yra sumuojama ir iš Lebego teoremos apie aprėžtą konvergavimą

$$\lim_{x\to\infty} x\ln^2 x\sum_{n\geqslant 0}\psi_n(x) = \sum_{n\geqslant 0}\lim_{x\to\infty} x\ln^2 x\psi_n(x) = c\sum_{n\geqslant 0}(n+1)(\mathrm{E}\,\varepsilon)^n.$$

Kadangi $\mathrm{E}\,\varepsilon < 1$, tai

$$\sum_{n\geqslant 0}(n+1)(\mathrm{E}\,\varepsilon)^n = \frac{1}{(1-\mathrm{E}\,\varepsilon)^2}$$

ir

$$\mathrm{P}\{\xi > x\} \sim \frac{c}{(1-\mathrm{E}\,\varepsilon)^2 x\ln^2 x}, \quad \text{kai} \quad x\to\infty.$$

Santrauka

Šiame darbe nagrinėta tam tikra asimptotiškai homogeninė Markovo grandinė ir rasta jos stacionaraus skirstinio uodegos asimptotika. Nagrinėta grandinė negali būti ištirta šiuo metu žinomais metodais, todėl darbas turi praktinę reikšmę. Spręstas uždavinys aktualus sunkių uodegų analizėje.

Summary

In this work we have investigated some asymptotically homogeneous Markov chain and found asymptotics of the stationary distribution tail. To our best knowledge, considered chain cannot be investigated by means of existing methods, hence obtained results have practical value. Solved problem is relevant in heavy tail analysis.

Literatūra

[1] V. Kazakevičius and V. Skorniakov. Tail index of asymptotically homogeneous Markov chains. *Lithuanian Mathematical Journal*, 2010.

[2] A. Beržvinskaitė. Vienos Markovo grandinės stacionaraus skirstinio uodegos vertinimas. Bakalauro baigiamasis darbas. Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas, 2010.