VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
TIKIMYBIŲ TEORIJOS IR SKAIČIŲ TEORIJOS KATEDRA

Aušra Mikalajūnaitė

DIRICHLĖ *L* FUNKCIJŲ JUNGTINIS UNIVERSALUMAS

Magistro baigiamasis darbas

Leidžiu ginti ....
Darbo vadovas **prof. habil. dr. Antanas Laurinčikas**

Vilnius 2012

Turinys

1. Įvadas

Pirminių skaičių aritmetinėse progresijose pasiskirstymo tyrimui prancūzų matematikas L. Dirichlė (Dirichlet) apibrėžė dabar taip vadinamas Dirichlė L funkcijas. Į jų apibrėžimą įeina Dirichlė charakteriai, kurių apibrėžimas yra pakankamai sudėtingas [12]. Tačiau yra žinoma, kad kiekviena aritmetinė funkcija $\chi(m)$, kuri yra visiškai multiplikatyvi ($\chi(mn) = \chi(m)\chi(n)$ su visais $m, n \in \mathbb{N}$), yra periodinė su periodu $q, q \in \mathbb{N}$ ($\chi(m+q) = \chi(m)$ su visais $m \in \mathbb{N}$), $\chi(m) = 0$, jei $(m, q) > 1$ ((m, q) yra skaičių m ir q didžiausias bendrasis daliklis) ir $\chi(m) \neq 0$, jei $(m, q) = 1$, sutampa su vienu iš Dirichlė charakterių moduliu q.

Tegul $s = \sigma + it$ yra kompleksinis kintamasis, o $\chi(m)$ yra Dirichlė charakteris moduliu q. Tuomet Dirichlė L funkcija $L(s, \chi)$ pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra apibrėžiama eilute

$$L(s, \chi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(m)}{m^s}.$$

Dirichlė charakteris moduliu q, $\chi_0(m)$ yra vadinamas pagrindiniu, jeigu $\chi_0(m) = 1$ su visais $(m, q) = 1$. Funkcija $L(s, \chi_0)$ tik paprastu daugikliu skiriasi nuo Rymano dzeta funkcijos $\zeta(s)$, kuri pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra apibrėžiama eilute

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s} .$$

Kadangi yra teisinga lygybė

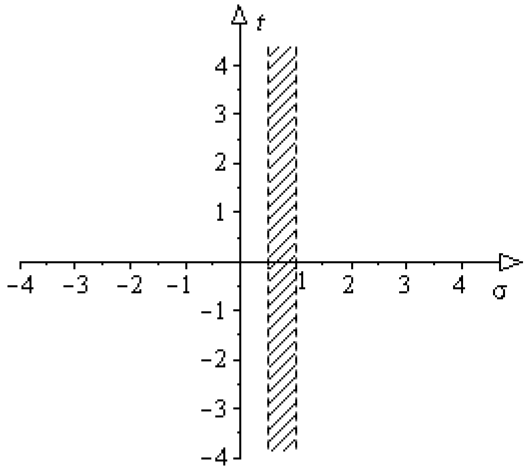
$$L(s, \chi_0) = \zeta(s) \prod_{p|q} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right),$$

o funkcija $\zeta(s)$ turi vienintelį paprastąjį polių taške $s = 1$ su reziduumu 1, tai funkcija $L(s, \chi_0)$ yra analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą, išskyrus tašką $s = 1$, kuris yra jos paprastasis polius, ir

$$\operatorname*{Res}_{s=1} L(s, \chi_0) = \prod_{p|q} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Jeigu $\chi \neq \chi_0$, tai funkcija $L(s, \chi)$ yra analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą, kitaip tariant, ji yra sveikoji funkcija.

1975 metais rusų matematikas S.M. Voroninas (Voronin) atrado labai įdomią Dirichlė L funkcijų savybę. Jis įrodė [15], kad visos Dirichlė L funkcijos yra universalios ta prasme, kad jų postūmiai $L(s + i\tau, \chi)$, $\tau \in \mathbb{R}$, norimu tikslumu tolygiai juostos $D = \left\{s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1\right\}$ (pavaizduotos 1 brėžinyje) skrituliuose aproksimuoja kiekvieną analizinę funkciją.



1 brėžinys: Juosta $D = \left\{s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1\right\}$.

Tikslus Voronino teoremos formulavimas yra toks.

1.1 teorema. *Tarkime, kad* $0 < \theta < \frac{1}{4}$, *o funkcija* $f(s)$ *yra tolydi ir nevirsta nuliu skritulyje* $|s| \leq \theta$ *ir yra analizinė to skritulio viduje. Tuomet, kiekvieną* $\varepsilon > 0$ *atitinka toks skaičius* $\tau = \tau(\varepsilon) \in \mathbb{R}$, *su kuriuo yra teisinga nelygybė*

$$\max_{|s| \leq \theta} \left| L\left(s + \frac{3}{4} + i\tau, \chi\right) - f(s) \right| < \varepsilon.$$

Iš tikrųjų minėtame straipsnyje [15] Voroninas įrodė analogišką teoremą tik Rymano dzeta funkcijai ir pridėjo pastabą, kad tokia teorema yra teisinga ir visoms Dirichlė L funkcijoms. Nesunku buvo patikrinti, kad taip ir yra.

Tais pačiais 1975 metais Voroninas gavo dar įdomesnį rezultatą. Nagrinėdamas Dirichlė L funkcijų funkcinį nepriklausomumą, jis pastebėjo, kad šios funkcijos turi jungtinę universalumo savybę, tai yra analizinių funkcijų rinkinys tuo pačiu metu gali būti aproksimuojamas Dirichlė L funkcijų postūmių rinkiniu. Griežtai matematiškai jungtinė universalumo teorema yra formuluojama taip [14].

1.2 teorema. *Tarkime, kad* $0 < \theta < \frac{1}{4}$, $\chi_1, \ldots, \chi_r$ *yra poromis neekvivalentūs Dirichlė charakteriai, o funkcijos* $f_1(s), \ldots, f_r(s)$ *yra tolydžios ir nevirsta nuliu skritulyje* $|s| \leq \theta$, *ir yra analizinės to skritulio viduje. Tuomet kiekvieną* $\varepsilon > 0$ *atitinka toks skaičius* $\tau = \tau(\varepsilon) \in \mathbb{R}$, *kad su visais* $j = 1, \ldots, r$ *yra teisinga nelygybė*

$$\max_{|s| \leq \theta} \left| L\left(s + \frac{3}{4} + i\tau, \chi_j\right) - f_j(s) \right| < \varepsilon.$$

Paaiškinsime ekvivalenčių charakterių sąvoką. Tarkime, kad $\chi(m)$ yra bet kuris charakteris moduliu q. Tuomet $\chi(m)$ turi periodą q. Tačiau gali būti, kad reikšmėms m, $(m, q) = 1$, funkcija $\chi(m)$ turi periodą mažesnį už q. Tuomet sakoma, kad charakteris $\chi(m)$ yra neprimityvus. Priešingu atveju charakteris $\chi(m)$ vadinamas primityviu. Yra žinoma [12], kad kiekvieną neprimityvų charakterį $\chi(m)$ moduliu q atitinka toks modulio q daliklis $q_1 \neq q$, 1 ir primityvus charakteris $\chi_1(m)$ moduliu q_1, kad

$$\chi_1(m) = \begin{cases} \chi(m), & \text{jeigu } (m, q_1) = 1, \\ 0, & \text{jeigu } (m, q_1) > 1. \end{cases}$$

Šiuo atveju sakoma, kad primityvus charakteris $\chi_1(m)$ indukuoja charakterį $\chi(m)$. Du charakteriai $\chi_1(m)$ ir $\chi_2(m)$ yra vadinami ekvivalenčiais, jeigu juos indukuoja tas pats primityvus charakteris. Priešingu atveju charakteriai $\chi_1(m)$ ir $\chi_2(m)$ yra vadinami neekvivalenčiais.

1.2 teorema turi bendresnę formuluotę duotą, pavyzdžiui, [13] monografijoje.

1.3 teorema. *Tarkime, kad* $\chi_1, \dots, \chi_r$ *yra poromis neekvivalentūs Dirichlė charakteriai. Su visais* $1 \leq j \leq r$ *, tegul* $K_j \subset D$ *yra kompaktinis poaibis, turintis jungųjį papildinį, o funkcija* $f_j(s)$ *yra tolydi, nevirsta nuliu aibėje* K_j *ir yra analizinė aibės* K_j *viduje. Tuomet su kiekvienu* $\varepsilon > 0$ *yra teisinga nelygybė*

$$\liminf_{T \to \infty} \frac{1}{T} \operatorname{meas} \left\{ \tau \in [0, T] : \sup_{1 \leq j \leq r} \sup_{s \in K_j} \left| L(s + i\tau, \chi_j) - f_j(s) \right| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Čia $\operatorname{meas}\{A\}$ yra mačios aibės $A \subset \mathbb{R}$ Lebego matas.

1.3 teoremos tvirtinimas yra bendresnis už 1.2 teoremos tvirtinimą dviem aspektais. Pirma, 1.3 teoremoje skrituliai yra pakeisti bet kurioms kompaktiškomis aibėmis. Antra, 1.3 teoremos nelygybė reiškia, kad Dirichlė L funkcijų postūmių, aproksimuojančių duotą analizinių funkcijų rinkinį, aibė yra gana turtinga, ji turi teigiamą apatinį tankį.

Deja, 1.3 teoremos įrodymas nėra niekur duotas, todėl magistro darbo tikslas yra pateikti pilną 1.3 teoremos įrodymą.

2. Ribinė teorema

Yra žinomas universalumo teoremų įrodymo tikimybinis kelias. Jis yra paremtas ribine teorema apie silpnąjį tikimybinių matų konvergavimą analizinių funkcijų erdvėje.

Priminsime kai kurias toliau reikalingas sąvokas ir apibrėžimus. Tegul X yra metrinė erdvė su Borelio σ algebra (kūnu) $\mathcal{B}(X)$. $\mathcal{B}(X)$ yra minimali σ algebra, kuriai priklauso erdvės X atvirųjų aibių sistema. Pora $(X, \mathcal{B}(X))$ yra vadinama mačia erdve. Tikimybiniu matu erdvėje $(X, \mathcal{B}(X))$ yra vadinama aibės funkcija P, apibrėžta aibių sistemoje $\mathcal{B}(X)$ ir tenkinanti reikalavimus:

1^0. $P(A) \geq 0$ su visomis $A \in \mathcal{B}(X)$;

2^0. $P(X) = 1$;

3^0. Jei aibės $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{B}(X)$ ir kas dvi neturi bendrų elementų ($A_k \cap A_l = \emptyset$, kai $k \neq l$), tai tuomet

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)\,.$$

Tegul P_n, $n \in \mathbb{N}$, ir P yra tikimybiniai matai erdvėje $\big(X, \mathcal{B}(X)\big)$. Sakome, kad P_n, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja į matą P, jei su kiekviena realia aprėžta tolydžia funkcija f erdvėje X yra teisinga lygybė

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f \; dP_n = \int_X f \; dP.$$

Mūsų atveju X bus analizinių funkcijų erdvė. Primename, kad $D = \left\{s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1\right\}$. Tegul $H(D)$ yra analizinių juostoje D funkcijų erdvė su tolygaus konvergavimo juostos D kompaktinėse aibėse topologija. Šioje topologijoje seka $\{g_n\} \subset H(D)$ konverguoja, kai $n \to \infty$, į funkciją $g \in H(D)$, jei su kiekviena kompaktine aibe $K \subset D$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{s\in K} |g_n(s) - g(s)| = 0.$$

Erdvėje $H(D)$ galima apibrėžti metriką, kuri indukuoja tolygaus konvergavimo kompaktinėse aibėse topologiją. Yra žinoma [8], kad egzistuoja tokia juostos D kompaktinių aibių seka $\{K_l\}$, kad

$$D = \bigcup_{l=1}^{\infty} K_l\,,$$

$K_l \subset K_{l+1}$ su visais $l \in \mathbb{N}$ ir, jei K yra kompaktinė juostos D aibė, tai ji priklauso kuriai nors iš aibių K_l. Apibrėžiame

$$d(g_1, g_2) = \sum_{l=1}^{\infty} 2^{-l} \frac{\sup_{s\in K_l} |g_1(s) - g_2(s)|}{1 + \sup_{s\in K_l} |g_1(s) - g_2(s)|}\,, \quad g_1, g_2 \in H(D).$$

Tuomet d yra minėtoji metrika, indukuojanti erdvės $H(D)$ tolygaus konvergavimo kompaktinėse aibėse topologiją.

Tegul

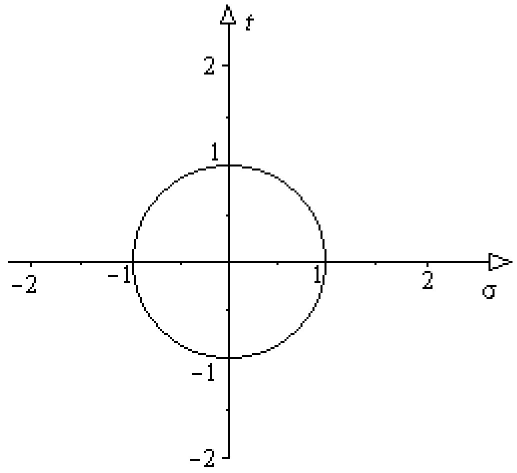
$$H^r(D) = \underbrace{H(D) \times \ldots \times H(D)}_{r}\,.$$

Šiame skyrelyje įrodysime ribinę teoremą apie

$$P_T(A) = \frac{1}{T}\,\mathrm{meas}\left\{\tau \in [0,T] : \big(L(s+i\tau,\chi_1), \ldots, L(s+i\tau,\chi_r)\big) \in A\right\}, \quad A \in \mathcal{B}\big(H^r(D)\big)\,,$$

silpnąjį konvergavimą, kai $T \to \infty$. Teoremos formulavimui yra reikalingi kai kurie apibrėžimai.

Tegul $\gamma = \{s \in \mathbb{C} : |s| = 1\}$ (pavaizduota 2 brėžinyje) yra vienetinis apskritimas kompleksinėje plokštumoje.



2 brėžinys: Apskritimas $\gamma = \{s \in \mathbb{C} : |s| = 1\}$.

Apibrėžiame Dekarto sandaugą

$$\Omega = \prod_p \gamma_p ,$$

kurioje $\gamma_p = \gamma$ su visais pirminiais skaičiais p. Aibę Ω, kuri yra vadinama toru, sudaro visos funkcijos, atvaizduojančios pirminių skaičių aibę vienetiniame apskritime. Aibėje Ω galima apibrėžti pataškinės daugybos operaciją, kurios atžvilgiu Ω yra Abelio grupė. Be to, aibėje Ω galime apibrėžti sandaugos topologiją [11]. Taigi gauname topologinę Abelio grupę Ω. Kadangi apskritimai γ_p yra kompaktinės aibės, tai pagal Tichonovo teoremą [11] turime, kad toras Ω yra kompaktinė topologinė Abelio grupė. Yra žinoma [8], kad kompaktinėse grupėse galima apibrėžti tikimybinį Haro (Haar) matą m_H. Šis matas turi svarbią invariantiškumo savybę postūmių taškais ω iš Ω atžvilgiu. Tai reiškia, kad su kiekviena aibe $A \in \mathcal{B}(\Omega)$ ir su bet kuriuo $\omega \in \Omega$ yra teisingos lygybės $m_H(A) = m_H(\omega A) = m_H(A\omega)$. Pavyzdžiui, Haro matas ant apskritimo γ sutampa su Lebego matu, kuris nepriklauso nuo to, kurioje apskritimo vietoje yra imama aibė (atskiru atveju, jei aibė lankas, tai Lebego matas būtų to lanko ilgis).

Taigi, turime tikimybinę erdvę $(\Omega,\ \mathcal{B}(\Omega),\ m_H)$. Tegul $\omega(p)$ yra elemento $\omega \in \Omega$ projekcija į apskritimą γ_p (yra elemento ω p-oji koordinatė). Tikimybinėje erdvėje $(\Omega,\ \mathcal{B}(\Omega),\ m_H)$ apibrėžiame $H^r(D)$ reikšmį atsitiktinį elementą $\underline{L}\left(s,\ \omega, \underline{\chi}\right)$, $\underline{\chi} = (\chi_1, \dots, \chi_r)$, formule

$$\underline{L}\left(s, \omega, \underline{\chi}\right) = \left(L(s, \omega, \chi_1), \dots, L(s, \omega, \chi_r)\right),$$

kurioje

$$L(s, \omega, \chi_j) = \prod_p \left(1 - \frac{\omega(p)\chi_j(p)}{p^s}\right)^{-1},$$

$j = 1, \dots, r$. Kitais žodžiais tariant, $\underline{L}\left(s, \omega, \underline{\chi}\right)$ yra $\left(\mathcal{B}(\Omega), \mathcal{B}\left(H^r(D)\right)\right)$ mati funkcija, tai yra, su visomis aibėmis $A \in \mathcal{B}(H^r(D))$

$$\left\{\omega \in \Omega: \underline{L}\left(s, \omega, \underline{\chi}\right) \in A\right\} \in \mathcal{B}(\Omega).$$

Tegul $P_{\underline{L}}$ yra atsitiktinio elemento $\underline{L}\left(s, \omega, \underline{\chi}\right)$ pasiskirstymas, tai yra, su kiekviena aibe $A \in \mathcal{B}\left(H^r(D)\right)$

$$P_{\underline{L}}(A) = \left\{m_H\left\{\omega \in \Omega: \underline{L}\left(s, \omega, \underline{\chi}\right) \in A\right\}, A \in \mathcal{B}(H^r(D))\right\}.$$

Pagrindinis šio skyrelio rezultatas yra tokia ribinė teorema.

2.1 teorema. *P_T, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į $P_{\underline{L}}$.*

Šios teoremos įrodymą suskaidysime į keletą lemų. Pirmiausia suformuluosime tvirtinimą apie matų silpnąjį konvergavimą erdvėje $\left(\Omega,\ \mathcal{B}(\Omega)\right)$. Tegul $\mathcal{P}$ yra visų pirminių skaičių aibė. Apibrėžiame

$$Q_T(A) = \frac{1}{T} \operatorname{meas}\left\{\tau \in [0, T]: \left(p^{-i\tau}: p \in \mathcal{P}\right) \in A\right\}, \quad A \in \mathcal{B}(\Omega).$$

2.2 lema. *Q_T, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į Haro matą m_H.*

Lema yra gerai žinoma, jos įrodymą galima rasti [8] darbe.

Dabar suformuluosime ir įrodysime ribinę teoremą erdvėje $H^r(D)$ funkcijų, apibrėžtų absoliučiai konverguojančiomis eilutėmis, rinkiniui. Tegul $\sigma_1 > \frac{1}{2}$ yra fiksuotas skaičius ir su visais $m, n \in \mathbb{N}$

$$v_n(m) = \exp\left\{-\left(\frac{m}{n}\right)^{\sigma_1}\right\}.$$

Apibrėžiame

$$L_n\left(s,\ \chi_j\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi_j(m) v_n(m)}{m^s}, \qquad j = 1, \dots, r. \tag{2.1}$$

Pratęsiame funkcijas $\omega(p)$ į visą aibę $\mathbb{N}$ formule

$$\omega(m) = \prod_{\substack{p^\alpha | m \\ p^{\alpha+1} \nmid m}} \omega^\alpha(p).$$

Apibrėžiame

$$L_n\left(s, \omega,\ \chi_j\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi_j(m) v_n(m) \omega(m)}{m^s}, \qquad j = 1, \dots, r. \tag{2.2}$$

Tuomet yra žinoma [8], kad eilutės, apibrėžiančios funkcijas $L_n\left(s,\ \chi_j\right)$ ir $L_n\left(s, \omega,\ \chi_j\right)$, $j = 1, \dots, r$, konverguoja absoliučiai pusplokštumėje $\sigma > \frac{1}{2}$.

Tegul $\widehat{\omega}$ yra fiksuotas toro Ω elementas. Erdvėje $\left(H^r(D), \mathcal{B}\left(H^r(D)\right)\right)$ apibrėžiame

$$P_{T,n}(A) = \frac{1}{T} \operatorname{meas}\left\{\tau \in [0, T]: \left(L_n(s + i\tau, \chi_1), \dots, L_n(s + i\tau, \chi_r)\right) \in A\right\}$$

ir

$$\widehat{P}_{T,n}(A) = \frac{1}{T}\,\mathrm{meas}\left\{\tau \in [0,T]: \left(L_n(s+i\tau,\widehat{\omega},\chi_1),\dots,L_n(s+i\tau,\widehat{\omega},\chi_r)\right) \in A\right\}.$$

2.3 lema. *$P_{T,n}$ ir $\widehat{P}_{T,n}$, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į tą patį tikimybinį matą P_n erdvėje $\left(H^r(D),\mathcal{B}(H^r(D))\right)$.*

Įrodymas. Apibrėžiame funkciją $h_n\colon \Omega \to H^r(D)$ formule

$$h_n(\omega) = \left(L_n(s,\omega,\chi_1),\dots,L_n(s,\omega,\chi_r)\right).$$

Kadangi eilutės (2.1) ir (2.2) konverguoja absoliučiai pusplokštumėje $\sigma > \frac{1}{2}$, tai funkcija h_n yra tolydi. Pasinaudosime žinoma tikimybinių matų silpnojo konvergavimo savybe. Tegul X_1 ir X_2 yra dvi erdvės (metrinės arba topologinės), o funkcija $h\colon X_1 \to X_2$ yra $\left(\mathcal{B}(X_1),\mathcal{B}(X_2)\right)$ mati, tai yra $h^{-1}A \in \mathcal{B}(X_1)$ su visomis aibėmis $A \in \mathcal{B}(X_2)$. Tuomet kiekvienas tikimybinis matas P erdvėje $\left(X_1,\mathcal{B}(X_1)\right)$ apibrėžia vienintelį tikimybinį matą Ph^{-1} erdvėje $\left(X_2,\mathcal{B}(X_2)\right)$ formule

$$Ph^{-1}(A) = P(h^{-1}A), \quad A \in \mathcal{B}(X_2).$$

Gerai žinoma, kad jeigu funkcija h yra tolydi, tai ji yra ir $\left(\mathcal{B}(X_1),\mathcal{B}(X_2)\right)$ mati. Be to, yra teisingas toks tvirtinimas apie silpnąjį matų konvergavimą.

Tarkime, kad P_n, kai $n \in \mathbb{N}$, ir P yra tikimybiniai matai erdvėje $\left(X_1,\mathcal{B}(X_1)\right)$, $h\colon X_1 \to X_2$ yra tolydi funkcija ir P_n, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja į matą P. Tuomet ir $P_n h^{-1}$, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja į matą Ph^{-1}.

Visus tuos tvirtinimus galima rasti [2] monografijoje.

Iš funkcijos h_n apibrėžimo matome, kad

$$P_{T,n}(A) = Q_T h_n^{-1}(A) = Q_T(h_n^{-1}A), \qquad A \in \mathcal{B}\left(H^r(D)\right).$$

Todėl iš čia, funkcijos h_n tolydumo, tik ką suformuluoto tvirtinimo ir 2.2 lemos gauname, kad matas $P_{T,n}$, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja į matą $P_n = m_H h_n^{-1}$.

Įrodysime, kad matas $\widehat{P}_{T,n}$ taip pat silpnai konverguoja į matą P_n, kai $T \to \infty$. Apibrėžiame funkciją $\widehat{h}_n\colon \Omega \to H^r(D)$ formule

$$\widehat{h}_n(\omega) = \left(L_n(s,\omega\widehat{\omega},\chi_1),\dots,L_n(s,\omega\widehat{\omega},\chi_r)\right).$$

Tuomet, pakartoję ankstesnius samprotavimus, panašiu būdu gausime, kad matas $\widehat{P}_{T,n}$, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į matą $\widehat{P}_n = m_H \widehat{h}_n^{-1}$. Lieka įrodyti, kad $\widehat{P}_n = P_n$. Imame funkciją $h\colon \Omega \to \Omega$, apibrėžtą formule

$$h(\omega) = \omega\widehat{\omega}, \qquad \omega \in \Omega.$$

Tuomet turime, kad $\widehat{h}_n(\omega) = h_n\left(h(\omega)\right)$. Todėl belieka pasinaudoti Haro mato m_H invariantiškumu. Gauname, kad

$$m_H \widehat{h}_n^{-1} = m_H (h_n h)^{-1} = (m_H h^{-1}) h_n^{-1} = m_H h_n^{-1},$$

nes $m_H h^{-1} = m_H$ dėl mato m_H invariantiškumo. Taigi iš čia turime, kad $\hat{P}_n = P_n$. Lema įrodyta.

2.1 teoremos įrodymui reikia pereiti nuo funkcijų $L_n(s, \chi_j)$ prie funkcijų $L(s, \chi_j)$. Šiam tikslui yra reikalinga funkcijų $L(s, \chi_j)$ vidurkinė aproksimacija funkcijomis $L_n(s, \chi_j)$. Pastarajai aproksimacijai yra reikalinga metrika erdvėje $H^r(D)$.

Tegul $\underline{g}_1 = (g_{11}, \dots, g_{1r}) \in H^r(D)$ ir $\underline{g}_2 = (g_{21}, \dots, g_{2r}) \in H^r(D)$. Tuomet metriką $\underline{d}\left(\underline{g}_1, \underline{g}_2\right)$ erdvėje $H^r(D)$ apibrėžiame taip :

$$\underline{d}\left(\underline{g}_1, \underline{g}_2\right) = \max_{1 \le j \le r} d(g_{1j}, g_{2j}).$$

Tegul, trumpumo dėlei,

$$\underline{L}_n\left(s, \underline{\chi}\right) = (L_n(s, \chi_1), \dots, L_n(s, \chi_r)),$$

$$\underline{L}_n\left(s, \omega, \underline{\chi}\right) = (L_n(s, \omega, \chi_1), \dots, L_n(s, \omega, \chi_r))$$

ir

$$\underline{L}\left(s, \underline{\chi}\right) = (L(s, \chi_1), \dots, L(s, \chi_r)).$$

2.4 lema. *Yra teisinga lygybė*

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \underline{d}\left(\underline{L}\left(s + i\tau, \underline{\chi}\right), \underline{L}_n\left(s + i\tau, \underline{\chi}\right)\right) d\tau = 0.$$

Įrodymas. Tegul K yra bet kuris kompaktinis juostos D poaibis. Tuomet pasinaudoję [9] straipsnio 2 lema su $a_m = \chi_j(m)$ gauname, kad

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sup_{s\in K} \left|L(s + i\tau, \chi_j) - L_n(s + i\tau, \chi_j)\right| d\tau = 0, \quad j = 1, \dots, r.$$

Iš čia ir metrikų $d(g_1, g_2)$, $g_1, g_2 \in H(D)$ bei $\underline{d}\left(\underline{g}_1, \underline{g}_2\right)$, $\underline{g}_1, \underline{g}_2 \in H^r(D)$ apibrėžimų gauname lemos tvirtinimą.

2.5 lema. *Yra teisinga lygybė*

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \underline{d}\left(\underline{L}\left(s + i\tau, \omega, \underline{\chi}\right), \underline{L}_n\left(s + i\tau, \omega, \underline{\chi}\right)\right) d\tau = 0.$$

Įrodymas. Tegul, kaip ir 2.4 lemos įrodyme, K yra bet kuri juostos D kompaktinė aibė. Tuomet iš [9] straipsnio 3 lemos su $a_m = \chi_j(m)$ išplaukia, kad

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sup_{s\in K} \left|L(s + i\tau, \omega, \chi_j) - L_n(s + i\tau, \omega, \chi_j)\right| d\tau = 0, \quad j = 1, \dots, r.$$

Iš čia ir metrikų $d(g_1, g_2)$, $g_1, g_2 \in H(D)$ bei $\underline{d}\left(\underline{g}_1, \underline{g}_2\right)$, $\underline{g}_1, \underline{g}_2 \in H^r(D)$ apibrėžimų gauname lemos tvirtinimą.

Apibrėžiame dar vieną tikimybinį matą

$$\hat{P}_T(A) = \frac{1}{T} \operatorname{meas} \left\{\tau \in [0,T]: \underline{L}\left(s + i\tau, \omega, \underline{\chi}\right) \in A\right\}, \quad A \in \mathcal{B}\left(H^r(D)\right).$$

2.6 lema. *Erdvėje* $\left(H^r(D), \mathcal{B}\left(H^r(D)\right)\right)$ *egzistuoja toks tikimybinis matas* P, *į kurį, kai* $T \to \infty$, *silpnai konverguoja abu matai* P_T *ir* $\hat{P}_T$.

2.6 lemos įrodymui yra reikalingos kai kurios tikimybių teorijos sąvokos ir teoremos.

Tegul (X, ϱ) yra separabili metrinė erdvė, o $\eta_n, \xi_{1n}, \xi_{2n}$ yra X reikšmiai atsitiktiniai elementai, apibrėžti tikimybinėje erdvėje $\left(\widetilde{\Omega}, \mathcal{A}, \mu\right)$. Sakome, kad η_n, kai $n \to \infty$, konverguoja į ξ pagal pasiskirstymą, jeigu elemento ξ_n pasiskirstymas, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja į atsitiktinio elemento ξ pasiskirstymą. Šį faktą žymime $\xrightarrow{\mathcal{D}}$.

Primename, kad X reikšmis atsitiktinis elementas ξ erdvėje $\left(\widetilde{\Omega}, \mathcal{A}, \mu\right)$ yra $(\mathcal{B}(X), \mathcal{A})$ mati funkcija, tai yra, su kiekviena aibe $A \in \mathcal{B}(X)$

$$\left\{\widetilde{\omega} \in \widetilde{\Omega}: \xi(\widetilde{\omega}) \in A\right\} \in \mathcal{A}.$$

Atsitiktinio elemento ξ pasiskirstymu yra vadinamas tikimybinis matas P, apibrėžtas formule

$$P(A) = \left\{\mu\left(\widetilde{\omega} \in \widetilde{\Omega}: \xi(\widetilde{\omega}) \in A\right), \quad A \in \mathcal{B}(X)\right\}.$$

Dabar formuluojame mums reikalingą lemą.

2.7 lema. *Tarkime, kad su kiekvienu* $k \in \mathbb{N}$ *yra teisingas sąryšis*

$$\xi_{kn} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} \xi_k$$

ir

$$\xi_k \xrightarrow[k\to\infty]{\mathcal{D}} \xi.$$

Be to, tegul su kiekvienu $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{T\to\infty} \sup \mu(\varrho(\xi_{kn}, \eta_n) \geq \varepsilon) = 0.$$

Tuomet

$$\eta_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} \xi.$$

Lemos įrodymas yra duotas [2] monografijoje, 4.2 teorema.

Dabar apibrėšime tikimybinio mato šeimos suspaustumo ir reliatyvaus kompaktiškumo sąvokas. Tarkime $\{P\}$ yra kuri nors tikimybinių matų šeima erdvėje $\left(X, \mathcal{B}(X)\right)$. Sakome, kad ši šeima yra suspausta, jei kiekvieną $\varepsilon > 0$ atitinka tokia kompaktiška aibė $K = K(\varepsilon) \subset X$, kad su visais matais $P \in \{P\}$ galioja nelygybė

$$P(K) > 1 - \varepsilon.$$

Šeima $\{P\}$ yra reliatyviai kompaktiška, jeigu iš kiekvienos jos sekos galima išskirti silpnai konverguojantį posekį į kurį nors matą erdvėje $\left(X, \mathcal{B}(X)\right)$. Prochorovo teorema tvirtina [2], kad kiekviena suspausta matų šeima yra ir reliatyviai kompaktiška.

2.6 lemos įrodymas. Tarkime, kad θ yra atsitiktinis dydis, apibrėžtas kurioje nors tikimybinėje erdvėje $(\Omega_0, \mathcal{B}(\Omega_0), \mu)$ ir tolygiai pasiskirstęs vienetiniame intervale $[0,1]$. Tai reiškia, kad atsitiktinio dydžio θ pasiskirstymo funkcija $F(x)$ turi pavidalą

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kai } x \leq 0, \\ x, & \text{kai } 0 < x \leq 1, \\ 1, & \text{kai } x > 1. \end{cases}$$

Šioje tikimybinėje erdvėje apibrėžiame $H^r(D)$ reikšmį atsitiktinį elementą

$$\underline{L}_{T,n} = \underline{L}_{T,n}(s) = \big(L_{T,n,1}(s), \dots, L_{T,n,r}(s)\big) = \big(L_n(s + iT\theta, \chi_1), \dots, L_n(s + iT\theta, \chi_r)\big).$$

Tuomet iš 2.3 lemos turime, kad

$$\underline{L}_{T,n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} \underline{L}_n, \tag{2.3}$$

čia

$$\underline{L}_n = \underline{L}_n(s) = \big(L_{n,1}(s), \dots, L_{n,r}(s)\big) = \big(L_{n,1}(s, \chi_1), \dots, L_{n,r}(s, \chi_r)\big)$$

yra $H^r(D)$ reikšmis atsitiktinis elementas, kurio pasiskirstymas yra 2.3 lemos ribinis matas P_n.

Matėme, kad Dirichlė eilutės, apibrėžiančios funkcijas $L_n(s, \chi_j)$ konverguoja absoliučiai pusplokštumėje $\sigma > \frac{1}{2}$, $j = 1, \dots, r$. Yra žinoma, kad tokių funkcijų modulio kvadrato vidurkis yra lygus eilutei, sudarytai iš pradinės eilutės narių modulio kvadrato [5]. Taigi turime, kad

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left|L_n(s + it, \chi_j)\right|^2 dt = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|\chi_j(m)|^2 v_n^2(m)}{m^{2\sigma}} \leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2\sigma}} < \infty, \qquad j = 1, \dots, r. \tag{2.4}$$

Imame bet kurią kompaktinę aibę K_l iš sekos, kuri yra naudojama metrikai d erdvėje $H(D)$ apibrėžti. Tuomet, pasinaudoję integraline Koši teorema bei Koši nelygybe, iš (2.3) randame, jog egzistuoja tokie skaičiai σ_{jl}, su kuriais

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sup_{s\in K_l} \left|L_n(s + i\tau, \chi_j)\right| d\tau \leq$$

$$\leq c_{jl} \limsup_{T\to\infty} \left(\frac{1}{2T} \int_0^{2T} \left|L_n(\sigma_{jl} + it, \chi_j)\right|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq c_{jl} R_{jl} < \infty, \tag{2.5}$$

čia

$$R_{jl} = \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2\sigma_{jl}}} \right)^{\frac{1}{2}},$$

o c_{jl} yra teigiamos konstantos, $j = 1, \dots, r$.

Dabar imame bet kokį teigiamą skaičių ε ir pažymime

$$M_{jl} = c_{jl} R_{jl} 2^{l+r} \varepsilon^{-1}, \qquad j = 1, \dots, r, \;\; l \in \mathbb{N}.$$

Tuomet iš (2.5) nelygybių išplaukia, kad

$$\limsup_{T\to\infty} \mu \left(\sup_{s\in K_l} \left| L_{T,n,j}(s) \right| > M_{jl} \; bent\; su\; vienu\; j = 1, \dots, r \right) =$$

$$= \limsup_{T\to\infty} \mu \left(\bigcup_{j=1}^{r} \left(\sup_{s\in K_l} \left| L_{T,n,j}(s) \right| \right) \geq M_{jl} \right) \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{r} \limsup_{T\to\infty} \mu \left(\sup_{s\in K_l} \left| L_{T,n,j}(s) \right| \geq M_{jl} \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{l} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \text{ meas } \left\{ \tau \in [0,T] : \sup_{s\in K_l} \left| L_n(s + i\tau, \chi_j) \right| > M_{jl} \right\} \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{l} \frac{1}{M_{jl}} \sup_{n\in\mathbb{N}} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sup_{s\in K_l} \left| L_n(s + i\tau, \chi_j) \right| d\tau \leq \sum_{j=1}^{l} \frac{c_{jl} R_{jl}}{M_{jl}} =$$

$$= \sum_{j=1}^{r} \frac{\varepsilon}{2^{l+r}} = \frac{\varepsilon r}{2^{l+r}} < \frac{\varepsilon}{2^l}.$$

Iš čia, (2.3) ir mato tolydumo gauname, kad

$$\mu \left(\sup_{s\in K_l} \left| L_{\ n,j}(s) \right| > M_{jl} \; bent\; su\; vienu\; j = 1, \dots, r \right) \leq \frac{\varepsilon}{2^l}. \tag{2.6}$$

Dabar apibrėžiame aibę

$$H_\varepsilon^r = \left\{ (g_1, \dots, g_r) \in H^r(D) : \sup_{s\in K_l} \left| g_j(s) \right| \leq M_{jl}\,, \quad j = 1, \dots, r, \;\; l \in \mathbb{N} \right\}.$$

Matome, kad ši aibė yra tolygiai aprėžta, todėl pagal kompaktiškumo kriterijų [8], ji yra kompaktinė erdvės $H^r(D)$ aibė. Be to, iš (2.6) randame, kad su visais $n \in \mathbb{N}$,

$$\mu\left(\underline{L}_n \in H_\varepsilon^r \right) \geq 1 - \varepsilon \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2^l} = 1 - \varepsilon \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \varepsilon.$$

Kadangi $\underline{L}_n$ turi pasiskirstymą P_n, tai iš čia gauname, kad su visais $n \in \mathbb{N}$ yra teisinga nelygybė

$$P_n(H_\varepsilon^r) > 1 - \varepsilon.$$

Pastaroji nelygybė rodo, kad tikimybinių matų šeima $\{P_n : n \in \mathbb{N}\}$ yra suspausta. Todėl pagal Prochorovo teoremą ji yra reliatyviai kompaktinė. Taigi galime rasti tokį posekį $\{P_{n_k}\} \subset \{P_n\}$, kad P_{n_k}, kai $k \to \infty$, silpnai konverguoja į kurį nors matą erdvėje $\left(H^r(D), \mathcal{B}\left(H^r(D)\right)\right)$. Šį tvirtinimą galime perrašyti konvergavimo pagal pasiskirstymą terminais, tai yra,

$$\underline{L}_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{\mathcal{D}} P. \tag{2.7}$$

Toje pačioje tikimybinėje erdvėje $(\Omega_0, \mathcal{B}(\Omega_0), \mu)$ apibrėžiame dar vieną atsitiktinį elementą

$$\underline{L}_T = \underline{L}_T(s) = \left(L_{T,1}(s), \dots, L_{T,r}(s)\right) = \left(L(s + iT\theta, \chi_1), \dots, L(s + iT\theta, \chi_r)\right).$$

Tuomet iš metrikos $\underline{d}$ apibrėžimo, 2.4 lemos ir Čebyševo tipo nelygybės gauname, kad su kiekvienu $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \mu\left(\underline{d}\left(\underline{L}_T(s), \underline{L}_{T,n}(s)\right) \geq \varepsilon\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \operatorname{meas}\left\{\tau \in [0,T] : \underline{d}\left(\underline{L}\left(s + i\tau, \underline{\chi}\right), \underline{L}_n\left(s + i\tau, \underline{\chi}\right)\right) \geq \varepsilon\right\} \leq$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{\varepsilon T} \int_0^T \underline{d}\left(\underline{L}\left(s + i\tau, \underline{\chi}\right), \underline{L}_n\left(s + i\tau, \underline{\chi}\right)\right) d\tau = 0.$$

Pastaroji lygybė kartu su (2.3) ir (2.7) sąryšiais rodo, jog yra išpildytos 2.7 lemos sąlygos. Pritaikę minėtą lemą gauname, kad

$$\underline{L}_T \xrightarrow[T\to\infty]{\mathcal{D}} P. \tag{2.8}$$

Taigi, gavome, kad matas P_T , kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į matą P, nes (2.8) sąryšis yra ekvivalentus mato P_T silpnajam konvergavimui. Be to, (2.8) parodo, kad matas P nepriklauso nuo posekio P_{n_k} parinkimo. Kadangi, kaip matėme, matų šeima $\{P_n\}$ yra reliatyviai kompaktiška, tai iš čia išplaukia, kad kiekvienas posekis P_{n_k} silpnai konverguoja į matą P. Taigi, turime, kad yra teisingas sąryšis

$$\underline{L}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} P. \tag{2.9}$$

Lieka įrodyti, kad matas $\hat{P}_T$ taip pat silpnai konverguoja į matą P. Apibrėžiame atsitiktinius elementus

$$\hat{\underline{L}}_{T,n} = \hat{\underline{L}}_{T,n}(s) = \left(\hat{L}_{T,n,1}(s), \dots, \hat{L}_{T,n,r}(s)\right) = \left(L_n(s + iT\theta, \omega, \chi_1), \dots, L_n(s + iT\theta, \omega, \chi_r)\right)$$

ir

$$\hat{\underline{L}}_T = \hat{\underline{L}}_T(s) = \left(\hat{L}_{T,1}(s), \dots, \hat{L}_{T,r}(s)\right) = \left(L(s + iT\theta, \omega, \chi_1), \dots, L(s + iT\theta, \omega, \chi_r)\right).$$

Tuomet panašiai kaip ir mato P_T atveju, pritaikę 2.3 lemą, o vietoje 2.4 lemos pasinaudoję 2.5 lema, ir atsižvelgę į (2.9) sąryšį randame, kad matas $\hat{P}_T$ taip pat silpnai konverguoja į matą P. Ši pastaba baigia 2.3 lemos įodymą.

Tokiu būdu iki 2.1 teoremos pilno įrodymo trūksta parodyti, kad ribinis matas 2.3 lemoje sutampa su matu $P_{\underline{L}}$. Šiam tikslui panaudosime ergodinės teorijos elementus. Tegul

$$a_\tau = \left\{p^{-i\tau} : p \text{ yra pirminis}\right\}, \tau \in \mathbb{R}.$$

Apibrėžiame toro Ω transformacijų šeimą $\{F_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}$ formule

$$F_\tau(\omega) = a_\tau \omega, \qquad \omega \in \Omega.$$

Tuomet turime, kad kiekviena iš šių transformacijų yra mati ir išlaiko matą, nes Haro matas m_H yra invariantiškas postūmių taškais iš Ω atžvilgiu. Primename, kai kurias ergodinės teorijos sąvokas. Aibė $A \in \mathcal{B}(\Omega)$ yra vadinama invariantine aibe transformacijų grupės $\{F_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}$ atžvilgiu, jei su kiekvienu $\tau \in \mathbb{R}$ aibės A ir $A_\tau = F_\tau(A)$ skiriasi viena nuo kitos daugiausia aibe, kurios matas m_H yra lygus 0. Yra žinoma, kad visos invariantinės aibės sudaro Borelio σ algebrą, kuri yra σ algebros $\mathcal{B}(\Omega)$ poalgebris. Grupė $\{F_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}$ yra vadinama ergodine, jeigu jos invariantinių aibių σ algebra yra sudaryta tik iš aibių, turinčių matą m_H lygų 0 arba 1. Yra įrodyta [8], kad iš tikrųjų grupė $\{F_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}$ yra ergodinė.

Mums dar bus reikalinga ergodinio proceso sąvoka. Jeigu turime atsitiktinį procesą ξ_τ, tai analogiškai grupės $\{F_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}$ atveju yra apibrėžiamos to proceso invariantinės aibės ir jų σ algebra. Stacionarus procesas yra vadinamas ergodiniu, jeigu jo invariantinių aibių σ algebros sudaro aibės, kurių matas yra 0 arba 1. Ergodiniams procesams galioja Birkhofo-Chinčino ergodinė teorema, kurią mes formuluojame tokios lemos pavidalu.

2.8 lema. *Tarkime, kad atsitiktinis procesas $\xi(t, \hat{\omega})$ ergodinis, $\mathbb{E}|\xi(t, \hat{\omega})| < \infty$ yra tikimybinėje erdvėje $(\hat{\Omega}, A, \mathbb{P})$, ($\mathbb{E}$ yra vidurkio simbolis), ir proceso trajektorijos yra integruojamos beveik tikrai Rymano prasme kiekviename baigtiniame intervale. Tuomet beveik visur $\hat{\omega}$ mato $\mathbb{P}$ atžvilgiu yra teisinga lygybė*

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \xi(t, \hat{\omega}) dt = \mathbb{E}\xi(0, \hat{\omega}).$$

Lemos įrodymą galima rasti [3] monografijoje.

2.1 teoremos įrodymas. Tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$ apibrėžiame atsitiktinį dydį θ formule

$$\theta(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{kai } \underline{L}\left(s, \omega, \underline{\chi}\right) \in A, \\ 0, & \text{kai } \underline{L}\left(s, \omega, \underline{\chi}\right) \notin A\,. \end{cases}$$

Čia A yra fiksuota ribinio mato P 2.6 lemoje tolydumo aibė. Tai reiškia, kad $P(\partial A) = 0$, čia ∂A yra aibės A kraštas. Yra žinomas, toks silpnojo tikimybinių matų konvergavimo ekvivalentas [2] tolydumo aibių terminais: tegul P ir P_n, $n \in \mathbb{N}$, yra tikimybiniai matai erdvėje $(X, \mathcal{B}(X))$. Tuomet P_n, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja į P tada ir tik tada, kai su kiekvieno mato P tolydumo aibe A yra teisinga lygybė

$$\lim_{n \to \infty} P_n(A) = P(A).$$

Iš šio silpnojo tikimybinių matų ekvivalento, 2.6 lemos ir mato $\hat{P}_T$ apibrėžimo turime, kad

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \operatorname{meas} \left\{\tau \in [0, T] : \underline{L}\left(s + i\tau, \omega, \underline{\chi}\right) \in A\right\} = P(A) \tag{2.10}$$

su kiekviena mato P tolydumo aibe A. Iš atsitiktinio dydžio θ apibrėžimo randame, kad

$$\mathbb{E}(\theta) = \int_{\Omega} \theta dm_H = m_H\left\{\omega \in \Omega : \underline{L}\left(s, \omega, \underline{\chi}\right) \in A\right\}, \tag{2.11}$$

tai yra, atsitiktinio elemento pasiskirstymas $P_{\underline{L}}$. Iš grupės $\{F_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}$ ergodiškumo išplaukia atsitiktinio proceso $\theta(F_\tau)$ ergodiškumas. Todėl pritaikę 2.8 lemą gauname, kad su beveik visais $\omega \in \Omega$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \theta\big(F_\tau(\omega)\big)\, d\tau = \mathbb{E}(\theta). \tag{2.12}$$

Pastebime, kad iš θ ir F_τ apibrėžimų išplaukia lygybė

$$\frac{1}{T}\int_0^T \theta\big(F_\tau(\omega)\big)\, d\tau = \frac{1}{T}\text{meas}\left\{\tau \in [0,T] : \underline{L}\left(s + i\tau, \omega, \underline{\chi}\right) \in A\right\}.$$

Iš čia, (2.11) ir (2.12) lygybių randame, kad su beveik visais $\omega \in \Omega$ yra teisinga lygybė

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\text{meas}\left\{\tau \in [0,T] : \underline{L}\left(s + i\tau, \omega, \underline{\chi}\right) \in A\right\} = P_{\underline{L}}(A).$$

Palyginę pastarąją lygybę su (2.10) lygybe gauname, kad

$$P(A) = P_{\underline{L}}(A).$$

Kadangi A buvo bet kuri fiksuota mato P tolydumo aibė, tai lygybė $P(A) = P_{\underline{L}}(A)$ yra teisinga su visomis mato P tolydumo aibėmis A. Yra žinoma [2], kad mato tolydumo aibės sudaro tą matą apibrėžiančią klasę. Tai reiškia, kad jei matas sutampa su kitu matu visose savo tolydumo aibėse, tai tie matai yra identiški.

Iš šių pastabų išplaukia, kad $P(A) = P_{\underline{L}}(A)$ su bet kuria aibe $A \in \mathcal{B}\big(H^r(D)\big)$. Teorema įrodyta.

3. Mato $P_{\underline{L}}$ atrama

Dirichlė L funkcijų jungtinės universalumo teoremos įrodymui yra naudojama 2.1 teorema, tačiau papildomai reikia žinoti ribinio mato $P_{\underline{L}}$ atramos išraišką.

Priminsime mato atramos apibrėžimą. Erdvė $H^r(D)$ yra separabili, todėl mato $P_{\underline{L}}$ atrama yra tokia minimali uždara aibė $S_{P_{\underline{L}}} \subset H^r(D)$, kad $P_{\underline{L}}\left(S_{P_{\underline{L}}}\right) = 1$. Aibė $S_{P_{\underline{L}}}$ yra sudaryta iš tokių elementų $\underline{g} \in H^r(D)$, kurių kiekvienai atvirai aplinkai G yra teisinga nelygybė

$$P_{\underline{L}}(G) > 0.$$

Atsitiktinio elemento X atrama yra laikoma to elemento pasiskirstymo atrama. Ją žymėsime S_X.

Tegul

$$S = \{g \in H(D) :\ g(s) \neq 0 \ \text{ arba } \ g(s) \equiv 0\}.$$

Šio skyrelio pagrindinis rezultatas yra tokia teorema.

3.1 teorema. *Tarkime, kad* $\chi_1, \dots, \chi_r$ *yra poromis neekvivalentūs Dirichlė charakteriai. Tuomet mato* $P_{\underline{L}}$ *atrama yra aibė*

$$S^r = \underbrace{S \times \dots \times S}_{r}.$$

3.1 teoremos įrodymui yra reikalinga visa eilė tvirtinimų, kuriuos mes formuluosime atskirų lemų pavidalu.

3.2 lema. *Tegul* $\{\underline{X}_m : m \in \mathbb{N}\}$ *yra tokia nepriklausomų* $H^r(D)$ *reikšmių atsitiktinių elementų seka, kad eilutė*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \underline{X}_m$$

konverguoja beveik tikrai. Tuomet tos eilutės sumos atrama yra lygi aibės visų tokių elementų $\underline{g} \in H^r(D)$*, kurie gali būti užrašyti konverguojančios eilutės suma*

$$\underline{g} = \sum_{m=1}^{\infty} \underline{g}_m, \qquad \underline{g}_m \in S_{\underline{X}_m},$$

uždariniui.

Lema yra 5 lemos iš [7] atskiras atvejis.

3.3 lema. *Tarkime, kad* $\{\underline{g}_m : m \in \mathbb{N}\} = \{g_{1m}, \dots, g_{nm} : m \in \mathbb{N}\} \in H^r(D)$ *yra seka, tenkinanti tokias sąlygas:*

1^0. Tarkime, kad $\mu_1, \dots, \mu_r$ *yra tokie kompleksines reikšmes įgyjantys matai erdvėje* $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ *su kompaktinėmis atramomis juostoje D, kad*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^{r} \int_{\mathbb{C}} g_{jm}(s)\, d\mu_j(s) \right| < \infty.$$

Tuomet

$$\int_{\mathbb{C}} s^l \, d\mu_j(s) = 0$$

su visais $j = 1, \dots, r$ *ir* $l \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$*;*

2^0. Su visomis kompleksinėmis aibėmis $K \subset D$ *eilutė*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{r} \sup_{s \in K} |g_{jm}(s)|^2$$

konverguoja;

3^0. Eilutė

$$\sum_{m=1}^{\infty} \underline{g}_m$$

konverguoja erdvėje $H^r(D)$.

Tuomet aibė visų konverguojančių eilučių

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m \, \underline{g}_m$$

su $|a_m| = 1, m \in \mathbb{N}$, *yra visur tiršta aibėje* $H^r(D)$.

Lema yra 6 lemos iš [7] atskiras atvejis.

Kompleksines reikšmes įgyjančiu matu μ erdvėje $\big(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C})\big)$ laikome bet kurią baigtinę visiškai adityvią aibės funkciją.

3.4 lema. *Tarkime, kad* μ *yra kompleksines reikšmes įgyjantis matas erdvėje* $\big(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C})\big)$ *su kompaktine atrama pusplokštumėje* $\{s \in \mathbb{C} : \sigma > \sigma_0\}$, *ir*

$$g(s) = \int\limits_{\mathbb{C}} \mathrm{e}^{sz} \, d\mu(z).$$

Jei $g(s) \not\equiv 0$, *tai tuomet*

$$\limsup_{x \to \infty} \frac{\log|g(x)|}{x} > \sigma_0.$$

Lema yra įrodyta [8] monografijoje, 6.4.10 lema.

Primename , kad analizinė kampinėje srityje $|\arg s| \leq \theta_0$, $0 < \theta_0 \leq \pi$, funkcija $g(s)$ yra vadinama eksponentinio tipo funkcija, jeigu tolygiai θ atžvilgiu $|\theta| \leq \theta_0$

$$\limsup_{r \to \infty} \frac{\log\left(g\left(r\mathrm{e}^{i\theta}\right)\right)}{r} < \infty.$$

3.5 lema. *Tarkime, kad* $g(s)$ *yra eksponentinio tipo funkcija ir*

$$\limsup_{x \to \infty} \frac{\log|g(x)|}{x} > -1.$$

Tuomet su visais $l, k \in \mathbb{N}$, $(l, k) = 1$

$$\sum_{p \equiv l (\mathrm{mod}\ k)} |g(\log p)| = +\infty.$$

Lema yra įrodyta [6] straipsnyje, 4.1 lema.

Mums dar bus reikalinga Hurvico (Hurwitz) teorema. Ją formuluojame atskiros lemos pavidalu.

3.6 lema (Hurvico teorema). *Tarkime, kad* $\{g_n(s) : n \in \mathbb{N}\}$ *analizinių funkcijų srityje* G, *apribotoje paprastu uždaru kontūru, seka, ir tolygiai srityje* G

$$\lim_{n \to \infty} g_n(s) = g(s) \not\equiv 0.$$

Tuomet vidinis srities G taškas s_0 yra funkcijos $g(s)$ nulis tada ir tik tada, kai egzistuoja tokia seka $\{s_n\} \subset G$, kad $s_n \to s_0$, kai $n \to \infty$, ir $g_n(s_0) = 0$ su visais $n > n_0 = n_0(s_0)$.

Lemos įrodymą galima rasti [17] monografijoje.

Labai svarbi yra sekanti lema apie homomorfizmų tiesinį nepriklausomumą.

3.7 lema. *Tarkime $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ yra skirtingi grupės $\mathcal{G}$ homomorfizmai į kompleksinių nelygių nuliui skaičių multiplikatyviąją grupę. Tuomet $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ yra tiesiškai nepriklausomi virš kompleksinių skaičių kūno $\mathbb{C}$.*

Lema yra įrodyta [4] monografijoje.

Dabar esame pasiruošę įrodyti 3.1 teoremą.

3.1 teoremos įrodymas. Pažymime,

$$g_{jp}(s, \omega) = -\frac{\chi_j(p)\, \omega(p)}{p^s}, \quad \mathrm{j} = 1, \dots, r.$$

Tuomet atsitiktinį elementą $\underline{L}\left(s, \omega, \underline{\chi}\right)$ galime užrašyti pavidalu

$$\underline{L}\left(s, \omega, \underline{\chi}\right) = \left(\prod_p \left(1 + g_{1p}(s, \omega)\right)^{-1}, \dots, \prod_p \left(1 + g_{rp}(s, \omega)\right)^{-1}\right). \tag{3.1}$$

Srityje $|z| < 1$ apibrėžiame

$$\log(1 + z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots .$$

Tuomet turime, kad funkcijos $\log\left(1 + g_{jp}(s, \omega)\right)$, $\mathrm{j} = 1, \dots, r$, yra korektiškai apibrėžtos srityje D, ir mes galime nagrinėti atsitiktinio elemento

$$\left(-\sum_p \log\left(1 + g_{1p}(s, \omega)\right), \dots, -\sum_p \log\left(1 + g_{rp}(s, \omega)\right)\right) \tag{3.2}$$

atramą.

Įrodinėjant, kad sandaugos

$$\prod_p \left(1 + g_{jp}(s, \omega)\right)^{-1}, \quad \mathrm{j} = 1, \dots, r,$$

yra $H(D)$ reikšmiai atsitiktiniai elementai, yra įrodoma, kad tos sandaugos beveik visiems $\omega \in \Omega$ konverguoja tolygiai kompaktinėse juostos D aibėse. Todėl pažymėję

$$\underline{g_p}(s, \omega) = \left(g_{1p}(s, \omega), \dots, g_{rp}(s, \omega)\right),$$

turime, kad egzistuoja tokia seka $\underline{b} = \{b_p : |b_p| = 1\}$, su kuria eilutė

$$\sum_p \underline{g}(s, \underline{b}) \tag{3.3}$$

konverguoja erdvėje $H^r(D)$. Be to, kadangi juostoje D

$$g_{jp}(s,\omega) = O\left(\frac{1}{p^{\sigma}}\right), \qquad \sigma > \frac{1}{2},$$

tai su bet kuria kompaktine aibe $K \subset D$

$$\sum_{p} \sum_{j=1}^{r} \sup_{s \in K} \left| g_{jp}(s, b_p) \right|^2 < \infty.$$

Tai, kartu su eilutės (3.3) konvergavimu, rodo, jog seka $\left\{ \underline{g}_p(s, \underline{b}) \right\}$ tenkina 3.3 lemos 2^0 ir 3^0 sąlygas. Todėl lieka patikrinti tos lemos 1^0 sąlygą.

Tegul p_0 yra fiksuotas teigiamas skaičius. Tarkime, kad $\mu_1, \ldots, \mu_r$ yra tokie kompleksines reikšmes įgyjantys matai erdvėje $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ su kompaktinėmis atramomis juostoje D, kad

$$\sum_{p > p_0} \left| \sum_{j=1}^{r} \int_{\mathbb{C}} g_{jp}(s, b_p)\, d\mu_j(s) \right| < \infty. \tag{3.4}$$

Tegul d yra charakterių $\chi_1, \ldots, \chi_r$ modulių sandauga. Tuomet d bus kiekvieno iš tų charakterių periodas, nes yra periodų kartotinis. Todėl pasinaudoję funkcijų $g_{jp}(s, b_p)$ apibrėžimu, (3.4) sąlygą galime perrašyti pavidalu

$$\sum_{\substack{p > p_0 \\ p \equiv l (\mathrm{mod}\ d)}} \left| \sum_{j=1}^{r} \chi_j(l) \int_{\mathbb{C}} \frac{1}{p^s}\, d\mu_j(s) \right| < \infty \tag{3.5}$$

su $l = 1, \ldots, d$ ir $(l, d) = 1$. Borelio aibėms $A \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$ apibrėžiame

$$\nu_l(A) = \sum_{j=1}^{r} \chi_j(l)\, \mu_j(A), \qquad l = 1, \ldots, d, \quad (l, d) = 1.$$

Tuomet gauname, kad ν_l vėl yra kompleksines reikšmes įgyjantys matai erdvėje $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ su kompaktinėmis atramomis juostoje D. Pažymėję

$$\varrho_l(z) = \int_{\mathbb{C}} \mathrm{e}^{-sz}\, d\nu_l(s), \quad l = 1, \ldots, d, \quad (l, d) = 1,$$

(3.5) sąlygą galime perrašyti pavidalu

$$\sum_{\substack{p > p_0 \\ p \equiv l (\mathrm{mod}\ d)}} |\varrho_l(\log p)| < \infty, \quad l = 1, \ldots, d, \quad (l, d) = 1. \tag{3.6}$$

Iš funkcijų ϱ_l apibrėžimo matome, kad jos yra eksponentinio tipo, todėl remdamiesi 3.4 lema turime, kad arba $\varrho_l(z) \equiv 0$, arba

$$\limsup_{x \to \infty} \frac{\log|\varrho_l(x)|}{x} > -1, \qquad l = 1, \ldots, d, \quad (l, d) = 1.$$

Čia mes pasinaudojome tuo, kad 3.4 lemoje funkcijos $g(s)$ apibrėžime nėra rodiklyje minuso ženklo, o funkcijos $\varrho_l(z)$ rodiklyje yra minuso ženklas. Jeigu pastaroji lygybė yra teisinga su kuriuo nors $l = 1, \dots, d, (l, d) = 1$, tai iš 3.5 lemos tuomet išplaukia, kad šiam l

$$\sum_{\substack{p>p_0 \\ p\equiv l (\mathrm{mod}\, d)}} |\varrho_l(\log p)| = \infty,$$

kas prieštarauja (3.6) tvirtinimui. Taigi, turi būti $\varrho_l(z) \equiv 0$ su visais $l = 1, \dots, d, (l, d) = 1$, ir pasinaudoję $\varrho_l(z)$ ir ν_l apibrėžimais, turime lygčių sistemą

$$\sum_{j=1}^{r} \chi_j(l) \int_{\mathbb{C}} \mathrm{e}^{-sz}\, d\mu_j(s) \equiv 0\,, \qquad l = 1, \dots, d, \quad (l, d) = 1. \tag{3.7}$$

Dabar pasinaudosime prielaida, kad charakteriai $\chi_1, \dots, \chi_r$ yra poromis neekvivalentūs. Kadangi Dirichlė charakteris χ yra tolydus homomorfizmas $\chi: \widehat{\mathbb{N}} \to \gamma$ ($\widehat{\mathbb{N}}$ yra sveiki teigiami skaičiai, tarpusavyje pirminiai su charakterio moduliu), tai galime taikyti 3.7 lemą, iš kurios ir dar (3.7) gauname lygybę

$$\int_{\mathbb{C}} \mathrm{e}^{-sz}\, d\mu_j(s) \equiv 0\,, \qquad j = 1, \dots, r.$$

Šią lygybę diferencijuojame m kartų pagal z ir įstatome $z = 0$. Tai duoda lygybę

$$\int_{\mathbb{C}} s^m\, d\mu_j(s) = 0, \quad m \in \mathbb{N}_0 \text{ ir } j = 1, \dots, r.$$

Tai reiškia, kad seka $\left\{\underline{g}_p(s, \underline{b}): p > p_0\right\}$ tenkina 3.3 lemos 1^0 sąlygą. Taigi, remdamiesi 3.3 lema, gauname, kad visų konverguojančių eilučių

$$\sum_{p>p_0} \hat{a}(p)\, \underline{g}_p(s, \underline{b}) \tag{3.8}$$

su $|\hat{a}(p)| = 1$ aibė yra visur tiršta erdvėje $H^r(D)$.

Imame bet kokį erdvės $H^r(D)$ elementą $\underline{x}_0(s) = \left(x_{10}(s), \dots, x_{r0}(s)\right)$, bet kokį $\varepsilon > 0$ ir bet kokią kompaktinę aibę $K \subset D$. Tuomet egzistuoja toks p_0, kad

$$\max_{1\le j\le r} \sup_{s\in K} \left(\sum_{p>p_0} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\left|g_{jp}(s, \underline{a})\right|^k}{k} \right) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.9}$$

su $\underline{a} = \{a(p): |a(p)| = 1\}$. Iš (3.8) eilučių aibės tirštumo išplaukia, kad egzistuoja tokia seka $\underline{\hat{a}} = \{\hat{a}(p): |\hat{a}(p)| = 1\}$, kad

$$\max_{1\le j\le r} \sup_{s\in K} \left| x_{j_0}(s) - \sum_{p>p_0} \log\left(1 + g_{jp}(s, 1)\right) - \sum_{p>p_0} \hat{a}(p)\, g_{jp}(s, b_p) \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.10}$$

Tegul

$$a(p) = \begin{cases} \hat{a}(p) b_p, & \text{jei } p > p_0\,, \\ 1, & \text{jei } p \le p_0\,, \end{cases} \qquad \text{ir} \quad \underline{a} = \{a(p)\}.$$

Tuomet iš (3.9) ir (3.10) randame, kad

$$\max_{1\le j\le r}\sup_{s\in K}\left|x_{j_0}(s)-\sum_p \log\Big(1+g_{jp}(\,s,\underline{a})\Big)\right|\le$$

$$\le \max_{1\le j\le r}\sup_{s\in K}\left|x_{j_0}(s)-\sum_{p>p_0}\log\Big(1+g_{jp}(\,s,1)\Big)-\sum_{p>p_0}\hat{a}(p)\,g_{jp}(\,s,b_p)\right|+$$

$$+\max_{1\le j\le r}\sup_{s\in K}\left|\sum_{p>p_0}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{g_{jp}^{k}(s,\underline{a})}{k}+\sum_{p>p_0}\frac{\hat{a}(p)\,\chi_j(p)\,b_p}{p^s}-\sum_{p>p_0}\frac{\chi_j(p)\,a(p)}{p^s}\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Tai reiškia, kad aibė visų konverguojančių eilučių

$$-\sum_p\Big(\log\Big(1+g_{1p}(\,s,\underline{a})\Big),\dots,\log\Big(1+g_{rp}(\,s,\underline{a})\Big)\Big) \tag{3.11}$$

su $|a(p)|=1$ yra visur tiršta erdvėje $H^r(D)$.

Kadangi Haro matas m_H yra Haro matų ant apskritimų γ_p sandauga, tai iš toro Ω apibrėžimo turime, kad $\{\omega(p)\}$ yra nepriklausomų kompleksines reikšmes įgyjančių atsitiktinių dydžių, apibrėžtų tikimybinėje erdvėje $(\Omega,\mathcal{B}(\Omega),\,m_H)$, seka. Todėl

$$\Big\{\log\Big(1+g_{1p}(\,s,\omega)\Big),\dots,\log\Big(1+g_{rp}(\,s,\omega)\Big)\Big\}$$

yra nepriklausomų $H^r(D)$ reikšmių atsitiktinių elementų, apibrėžtų tikimybinėje erdvėje $(\Omega,\mathcal{B}(\Omega),\,m_H)$, seka. Kadangi kiekvieno atsitiktinio dydžio $\omega(p)$ atrama yra vienetinis apskritimas, tai aibė

$$\Big\{(g_1,\dots,g_r)\in H^r(D)\colon g_j(\,s)=\log\Big(1+g_{jp}(\,s,\underline{a})\Big),\ j=1,\dots,r\Big\}$$

su $\underline{a}=\{a(p)\colon |a(p)|=1\}$ yra $H^r(D)$ reikšmio atsitiktinio elemento atrama. Todėl pagal 3.2 lemą, (3.2) atsitiktinio elemento atrama yra (3.11) konverguojančių eilučių aibės uždarinys. Kadangi ši aibė yra visur tiršta erdvėje $H^r(D)$, tai (3.2) atsitiktinio elemento atrama sutampa su visa erdve $H^r(D)$.

Tegul funkcija $u\colon H^r(D)\to H^r(D)$ yra duota formule

$$u(g_1,\dots,g_r)=(\mathrm{e}^{g_1},\dots,\mathrm{e}^{g_r}),\qquad (g_1,\dots,g_r)\in H^r(D).$$

Tuomet u yra tolydžioji funkcija erdvės $H^r(D)$ elementui

$$\left(-\sum_p\log\Big(1+g_{1p}(\,s,\omega)\Big),\dots,-\sum_p\log\Big(1+g_{rp}(\,s,\omega)\Big)\right)$$

priskirianti tos erdvės elementą

$$\left(\prod_p\Big(1+g_{1p}(\,s,\omega)\Big)^{-1},\dots,\prod_p\Big(1+g_{rp}(\,s,\omega)\Big)^{-1}\right), \tag{3.12}$$

ir erdvę $H^r(D)$ atvaizduojanti į aibę $(S\setminus\{0\})^r$. Iš čia, kadangi (3.2) atsitiktinio elemento atrama yra visa erdvė $H^r(D)$, išplaukia, kad aibė $(S\setminus\{0\})^r$ priklauso (3.12) atsitiktinio elemento atramai. Tačiau (3.12) atsitiktinio elemento atrama yra uždara aibė. Todėl aibės $(S\setminus\{0\})^r$ uždarinys $\overline{(S\setminus\{0\})^r}$ taip pat priklauso (3.12) atsitiktinio elemento atramai. Kadangi pagal 3.6 lemą

$$\overline{(S\setminus\{0\})^r} = S^r,$$

tai aibė S^r priklauso (3.12) atsitiktinio elemento atramai.

Su kiekvienu $j = 1, \dots, r$ sandaugos

$$\prod_p \left(1 + g_{jp}(s, \omega)\right)^{-1}$$

visi daugikliai yra nelygūs nuliui. Be to, ši sandauga beveik visiems $\omega \in \Omega$ Haro mato m_H atžvilgiu konverguoja tolygiai juostos D kompaktinėse aibėse [1]. Todėl vėl iš 3.6 lemos turime, kad aibei S^r priklauso (3.12) atsitiktinio elemento atrama. Iš čia ir aukščiau įrodyto priešingo sąryšio gauname, kad (3.12) atsitiktinio elemento atrama yra aibė S^r. Teorema įrodyta.

4. Jungtinio universalumo teorema

Jungtinės universalumo teoremos Dirichlė L funkcijoms įrodymas remiasi jungtine ribine teorema (2.1 teorema), 3.1 teorema apie ribinio mato 2.1 teoremoje atramą, bei Mergeliano (Mergelyan) teorema apie analizinių funkcijų aproksimavimą polinomais, kurią formuluojame atskira lema.

4.1 lema. *Tegul $K \subset \mathbb{C}$ yra kompaktinė aibė, turinti jungųjį papildinį, o funkcija $g(s)$ yra tolydi aibėje K ir analizinė aibės K viduje. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$, egzistuoja toks polinomas $p(s)$, kad*

$$\sup_{s \in K} |g(s) - p(s)| < \varepsilon.$$

Lema buvo įrodyta [10] straipsnyje, jos įrodymą galima rasti ir [16] monografijoje.

Mums dar bus reikalingas silpnojo tikimybinių matų konvergavimo analogas atvirųjų aibių terminais.

4.2 lema. *Tarkime, kad P_n, $n \in \mathbb{N}$, ir P yra tikimybiniai matai erdvėje $\left(X, \mathcal{B}(X)\right)$. Tuomet P_n, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja į matą P tada ir tik tada, kai su kiekviena atvira aibe $G \subset X$ yra teisinga lygybė*

$$\liminf_{n \to \infty} P_n(G) \geq P(G).$$

Lema yra dalis 2.1 teoremos, įrodytos [2] monografijoje.

Formuluojame pagrindinį magistro darbo rezultatą – jungtinę universalumo teoremą Dirichlė L funkcijoms.

4.3 teorema. *Tarkime, kad* $\chi_1, \dots, \chi_r$ *yra poromis neekvivalentūs Dirichlė charakteriai. Su visais* $1 \le j \le r$ *, tegul* $K_j \subset D$ *yra kompaktinis poaibis, turintis jungųjį papildinį, o funkcija* $f_j(s)$ *yra tolydi, nevirsta nuliu aibėje* K_j *ir yra analizinė aibės* K_j *viduje. Tuomet su kiekvienu* $\varepsilon > 0$ *yra teisinga nelygybė*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \operatorname{meas} \left\{ \tau \in [0,T] : \sup_{1\le j\le r} \sup_{s\in K_j} \left| L(s+i\tau,\chi_j) - f_j(s) \right| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Įrodymas. Iš 4.1 lemos gauname, kad egzistuoja tokie polinomai $p_1(s), \dots, p_r(s)$, kad

$$\sup_{1\le j\le r} \sup_{s\in K_j} \left| f_j(s) - p_j(s) \right| < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{4.1}$$

Jei ε pakankamai mažas, tai $p_j(s)$ nevirsta nuliu aibėje K_j, nes $f_j(s)$ neturi nulių aibėje K_j, $j = 1, \dots, r$. Todėl galime aibėje K_j apibrėžti tolydžią funkcijos $\log\, p_j(s)$ šaką, kuri bus analizinė aibės K_j viduje, $j = 1, \dots, r$. Dar kartą pritaikę 4.1 lemą turime, jog egzistuoja tokie polinomai $q_1(s), \dots, q_r(s)$, kad

$$\sup_{1\le j\le r} \sup_{s\in K_j} \left| p_j(s) - \mathrm{e}^{q_j(s)} \right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Iš čia ir (4.1) gauname, kad

$$\begin{aligned} \sup_{1\le j\le r} \sup_{s\in K_j} \left| f_j(s) - \mathrm{e}^{q_j(s)} \right| &\le \sup_{1\le j\le r} \sup_{s\in K_j} \left| f_j(s) - p_j(s) \right| + \\ &+ \sup_{1\le j\le r} \sup_{s\in K_j} \left| p_j(s) - \mathrm{e}^{q_j(s)} \right| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Apibrėžiame aibę

$$G = \left\{ (g_1, \dots, g_r) \in H^r(D) : \sup_{1\le j\le r} \sup_{s\in K_j} \left| g_j(s) - \mathrm{e}^{q_j(s)} \right| < \frac{\varepsilon}{2} \right\}.$$

Tuomet aibė G atvira. Kadangi $\left(\mathrm{e}^{q_1(s)}, \dots, \mathrm{e}^{q_r(s)}\right)$ pagal 3.1 teoremą yra ribinio mato $P_{\underline{L}}$ 2.1 ribinėje teoremoje atramos elementas, tai aibė G yra to elemento atviroji aplinka. Todėl iš mato atramos savybių turime, kad

$$P_{\underline{L}}(G) > 0. \tag{4.3}$$

2.1 teorema ir 4.2 lema leidžia tvirtinti, kad

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \operatorname{meas} \left\{ \tau \in [0,T] : \underline{L}\left(s+i\tau,\underline{\chi}\right) \in G \right\} \ge P_{\underline{L}}(G).$$

Iš čia, (4.3) ir aibės G apibrėžimo randame, kad

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \operatorname{meas} \left\{ \tau \in [0,T] : \sup_{1\le j\le r} \sup_{s\in K_j} \left| L(s+i\tau,\chi_j) - \mathrm{e}^{q_j(s)} \right| < \frac{\varepsilon}{2} \right\} > 0. \tag{4.4}$$

Jei $\tau \in \mathbb{R}$ tenkina nelygybę

$$\sup_{1\le j\le r} \sup_{s\in K_j} \left| L(s+i\tau,\chi_j) - \mathrm{e}^{q_j(s)} \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

tai iš (4.2) gauname, kad tas pats τ tenkina ir nelygybę

$$\sup_{1\leq j\leq r}\sup_{s\in K_j}\left|L\left(s+i\tau,\chi_j\right)-f_j(s)\right|\leq\sup_{1\leq j\leq r}\sup_{s\in K_j}\left|L\left(s+i\tau,\chi_j\right)-\mathrm{e}^{q_j(s)}\right|+$$
$$+\sup_{1\leq j\leq r}\sup_{s\in K_j}\left|f_j(s)-\mathrm{e}^{q_j(s)}\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Tai reiškia, kad

$$\left\{\tau\in[0,T]:\sup_{1\leq j\leq r}\sup_{s\in K_j}\left|L\left(s+i\tau,\chi_j\right)-f_j(s)\right|<\varepsilon\right\}\subset$$
$$\subset\left\{\tau\in[0,T]:\sup_{1\leq j\leq r}\sup_{s\in K_j}\left|L\left(s+i\tau,\chi_j\right)-\mathrm{e}^{q_j(s)}\right|<\frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

Iš čia ir (4.4) nelygybės gauname, kad

$$\liminf_{T\to\infty}\frac{1}{T}\operatorname{meas}\left\{\tau\in[0,T]:\sup_{1\leq j\leq r}\sup_{s\in K_j}\left|L\left(s+i\tau,\chi_j\right)-f_j(s)\right|<\varepsilon\right\}>0.$$

Teorema įrodyta.

The joint universality of Dirichlet L-functions

Aušra Mikalajūnaitė

Summary

Let χ denote a Dirichlet character modulo q, and $s = \sigma + it$ be complex variable. A Dirichlet L-function $L(s,\chi)$ is defined, for $\sigma > 1$, by the series

$$L(s,\chi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(m)}{m^s},$$

and by analytic continuation elsewhere. If χ is a non-principal character, then $L(s,\chi)$ is an entire function. If $\chi = \chi_0$ is the principal character, then $L(s,\chi)$ has a simple pole at the point $s = 1$ with residue

$$\prod_{p|q} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right).$$

In 1975, S. M. Voronin obtained the universality of Dirichlet L-function $L(s,\chi)$. Moreover, he proved the joint universality for arbitrary collection of Dirichlet L-function: suppose that $0 < \theta < \frac{1}{4}$, $\chi_1, \dots, \chi_r$ are pairwise non-equivalent characters, and $f_1(s), \dots, f_r(s)$ are continuous non-vanishing functions on the disc $|s| \leq \theta$ which are analytic in the interior of that disc. Then, for every $\varepsilon > 0$, there exists a real number $\tau = \tau(\varepsilon)$ such that, for all $j = 1, \dots, r$, the inequality

$$\max_{|s|\leq\theta} \left| L\left(s + \frac{3}{4} + i\tau, \chi_j\right) - f_j(s) \right| < \varepsilon$$

holds.

The Voronin theorem stated above has a more general statement. Denote by $\operatorname{meas}\{A\}$ the Lebegue measure of a measurable set $A \subset \mathbb{R}$. Let $D = \left\{s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1\right\}$.

Theorem. *Suppose that $\chi_1, \dots, \chi_r$ are pairwise non-equivalent Dirichlet characters. For all $j = 1, \dots, r$, let $K_j \subset D$ be a compact subset with connected complement, and $f_j(s)$ be a continuous non-vanishing functions on K_j which is analytic in the interior of K_j. Then, for every $\varepsilon > 0$,*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \operatorname{meas} \left\{ \tau \in [0,T] : \sup_{1\leq j\leq r} \sup_{s\in K_j} \left| L(s + i\tau, \chi_j) - f_j(s) \right| < \varepsilon \right\} > 0.$$

The letter theorem was known and used by the mathematical community, however, its proof wasn't given in literature. In my work, I present the proof of that theorem by using probabilistic limit theorems on the week convergence of probability measures in the space of analytic functions.

Literatūra

[1] B. Bagchi, The statistical behaviour and universality properties of the Riemann zeta-function and other allied Dirichlet series, PhD. Thesis, Calcutta, Indian Statistical Institute, 1981.

[2] P. Billingsley, Convergence of Probability Measures, Wiley, New York, 1968.

[3] H. Cramér, M. Leadbetter, Stationary and Related Stochastic Processes, Wiley, New York, 1967.

[4] S. Lang, Algebra, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1965.

[5] A. Laurinčikas, R. Macaitienė, Įvadas į Dirichlė eilučių teoriją, Šiaulių universiteto leidykla, Šiauliai, 2008.

[6] A. Laurinčikas, K. Matsumoto, The joint universality and the functional independence for Lerch zeta-functions, *Nagoya Math. J.*, **157**, p. 211–227, 2000.

[7] A. Laurinčikas, K. Matsumoto, The joint universality of zeta-function attached to certain cusp forms, *Fiz. matem. fak. moksl. sem. darbai,* **5**, p. 58–75, Šiaulių universitetas, 2002.

[8] A. Laurinčikas, Limit Theorems for the Riemann Zeta-Function, Kluwer, Dordrecht, 1996.

[9] A. Laurinčikas, D. Šiaučiūnas, Remarks on the universality of the periodic zeta-function, Mat. Zametki, 80(4), (2006), 561–568.

[10] S.N. Mergelyan, Uniform approximation to functions of a complex variable, Uspekhi Mat. Nauk (N.S.), **7**, No. 2, (1952), 31–122, (rusų kalba).

[11] V. Paulauskas, A. Račkauskas, Funkcinė analizė. I knyga. Erdvės, UAB "Vaistų žinios", Vilnius, 2007.

[12] К. Прахар, Распределение простых чисел, пер. с англ., Mockba, 1967.

[13] J. Steuding, Value-Distribution of *L*-Functions, Lecture Notes in Math. 1877, Springer, Berlin, 2007.

[14] S.M. Voronin, On the functional independence of Dirichlet *L*-functions, Acta Arith. **27**(1975), 493–503 (rusų kalba).

[15] S.M. Voronin, Theorem on the "universality" of the Riemann Zeta-Function, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. matem. **39** (1975), 475-486 (rusų kalba).

[16] J. L. Walsh, Interpolation and Approximation by Rational Functions in the Complex Domain, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, vol. 20, 1960.

[17] C. E. Titchmarch, The Theory of Functions, Oxford University Press, Oxford, 1939.