VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ IR SKAIČIAVIMO MATEMATIKOS KATEDRA

Jelena Lukina

APIE VIENĄ RŪŠIŲ SĄVEIKOS MODELĮ

Magistro baigiamasis darbas

Darbo vadovas
prof. dr. V. Skakauskas

. . . .
(parašas)

Vilnius
2012

Turinys

Įvadas

Darbe yra nagrinėjamas lizdinis parazitizmas, t.y. parazitizmo forma paplitusi tarp kai kurių paukščių, kai kiaušiniai dedami į svetimus lizdus. Šių lizdų šeimininkai paprastai peri kiaušinius ir rūpinasi jaunikliais (žr. [5]). Daugelį panašių reiškinių galima aprašyti matematiniais modeliais. Gurtin ir MacCamy darbe [2] pasiūlė modelį, aprašantį populiacijos dinamiką atsižvelgiant į individų amžių. Busenberg ir Iannelli nagrinėjo tokio tipo separabiliuosius modelius (žr. [1]).

Gegučių ir paukščių-šeimininkų sąveikos modelis priimant dėmesin paukščių amžių, diskrečią vaikų aibę bei jų globą yra pasiūlytas [4] darbe. Šiame darbe taip pat nagrinėjame gegučių (parazitų) ir šeimininkų rūšių dinaminį deterministinį modelį, tačiau rūšių sąveikos funkcija yra bendresnio tipo. Taip pat atsižvelgiame į diskrečią jauniklių aibę bei jų globą. Visi individai turi priešreprodukcinį (dar negali turėti jauniklių), reprodukcinį (gali susilaukti palikuonių) ir poreprodukcinį amžiaus intervalus. Priešreprodukcinis intervalas skirstomas į du periodus: kai jaunikliais dar rūpinasi motina, ir kai jaunikliai (paaugliai) jau gali būti neprižiūrimi, tačiau dar negali daugintis. Laikoma, kad motinai žuvus jaunikliai irgi žūva. Reprodukcinio amžiaus individai yra skirstomi į dvi grupes: vaisingus suaugusius, kurie neturi atžalų, ir tuos, kurie globoja jauniklius. Paprastumo dėlei mes nagrinėjame bendrą globos periodą, susidedantį iš perėjimo ir maitinimo, be to, vienodą gegučių ir šeimininkų reprodukcinį periodą. Taip pat tariame, kad parazitai padeda kiaušinius į šeimininkų lizdą prieš jauniklio išsiperėjimą.

Modelis yra sudarytas iš integro-dalinių diferencialinių lygčių atsižvelgiant į integralinio tipo sąlygas. Šių lygčių skaičius priklauso nuo biologiškai įmanomo maksimalaus šeimininko kiaušinių lizde skaičiaus. Pagrindinis darbo tikslas yra ištirti separabiliuosius sprendinius bei įrodyti egzistavimo teoremą.

1. Žymėjimai

$(0, T)$ ir (T_1, T_3) yra atitinkamai jauniklių globos ir reprodukcinio amžiaus intervalai (čia $T < T_1 < T_3,\ T < T_3 - T_1$).

$u(t, \tau_1)$ — τ_1 amžiaus šeimininkų tankis laiko momentu t (paauglių tankis, kai $\tau_1 \in (T, T_1)$, reprodukcinio amžiaus, kai $\tau_1 \in (T_1, T_3)$ ir poreprodukcinio amžiaus, kai $\tau_1 > T_3$),

$\nu(t, \tau_1)$ — τ_1 amžiaus šeimininkų natūralaus žuvimo greitis momentu t,

$u_k(t, \tau_1, \tau_2)$ — τ_1 amžiaus šeimininkų, globojančių τ_2 amžiaus k jauniklių, tankis laiko momentu t,

$\nu_k(t, \tau_1, \tau_2)$ — τ_1 amžiaus šeimininkų, globojančių τ_2 amžiaus k jauniklių, natūralaus žuvimo momentu t greitis,

$\nu_{ks}(t, \tau_1, \tau_2)$ — τ_2 amžiaus $k - s$ jauniklių natūralaus žuvimo greitis momentu t, kurių motina vaikų žūties metu buvo τ_1 amžiaus,

$\alpha_k(t, \tau_1) u(t, \tau_1)\, d\tau_1\, dt,\ \alpha_k(t, \tau_1) < 1$ — vidurkis skaičiaus šeimininkų momentu t, kurie padeda k kiaušinių į lizdą laiko intervale $[t, t + dt]$,

$u_c(t, \tau_1, \tau_2)$ — τ_1 amžiaus šeimininkų, globojančių τ_2 amžiaus gegutės jauniklį, tankis laiko momentu t,

$\nu_c(t, \tau_1, \tau_2)$ — τ_1 amžiaus šeimininkų, globojančių τ_2 amžiaus gegutės jauniklį, natūralaus žuvimo greitis momentu t,

$\nu_{c0}(t, \tau_1, \tau_2)$ — amžiaus τ_2 gegutės jauniklių natūralaus žuvimo greitis momentu t, kuriuos globoja τ_1 amžiaus šeimininkai,

$\alpha_{ck}(t, \tau_1) \alpha_k(t, \tau_1) u(t, \tau_1)\, d\tau_1\, dt,\ \alpha_{ck}(t, \tau_1) < 1$ — vidutinis lizdų skaičius, suformuotas iš vienos gegutės ir k šeimininkų kiaušinių, kuriuos laiko intervale $[t, t + dt]$ padeda šeimininkai, kurių amžius priklauso intervalui $[\tau_1, \tau_1 + d\tau_1]$,

$f(t, \tau_c)$ — τ_c amžiaus gegučių, kurios yra jaunikliai ($\tau_c \in (T, T_1)$), reprodukcinio amžiaus ($\tau_c \in (T_1, T_3)$) ir poreprodukcinio amžiaus ($\tau_c > T_3$), tankis momentu t,

$\nu_f(t, \tau_c)$ — τ_c amžiaus gegučių natūralaus žuvimo greitis momentu t,

$u_0(\tau_1)$, $u_{k0}(\tau_1, \tau_2)$, $u_{c0}(\tau_1, \tau_2)$, $f_0(\tau_c)$ — pradiniai amžiaus pasiskirstymai,

$[u|_{\tau_1 = \tau}]$ — funkcijos u šuolis taške $\tau_1 = \tau$,

$\alpha = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k < 1$,

$\gamma_1(\tau_1) = \max(0, \tau_1 - T_3)$, $\gamma_2(\tau_1) = \min(\tau_1 - T_1, T)$,

$\tilde{\nu}_k = \nu_k + \sum\limits_{s=0}^{k-1} \nu_{ks}$,

$T_2 = T_1 + T$ — individų, baigusių pirmos kartos jauniklių globą, minimalus amžius,

$T_4 = T_3 + T$ — individų, baigusių paskutinės kartos jauniklių globą, maksimalus amžius,

$\sigma_1 = (T_1, T_3)$, $\sigma_2 = (T_1, T_4)$, $\sigma_3 = (T_2, T_4)$,

$\sigma_1^* = (T, \infty) \setminus \sigma_1$, $\sigma_2^* = (T, \infty) \setminus \sigma_2$, $\sigma_3^* = (T, \infty) \setminus \sigma_3$,

$Q = \{(\tau_1, \tau_2) : \tau_1 \in (T_1 + \tau_1, T_3 + \tau_2), \tau_2 \in (0, T)\}$.

Taigi, yra tariama, kad T, T_1, T_3 yra duotos teigiamos konstantos.

2. Uždavinys

2.1. Uždavinio formulavimas

Suformuluosime paukščių-šeimininkų ir gegučių populiacijų sąveikos deterministinį modelį, atsižvelgiant į prielaidą, kad kiaušinių lizde skaičius yra baigtinis. Kai jaunikliai sulaukia amžiaus $\tau_1 = T$, jie tampa paaugliais, o būdami amžiaus $\tau_1 = T_1$ visi paaugliai tampa suaugusiais. Tariame, kad n yra maksimalus biologiškai įmanomas šeiminiko kiaušinių lizde skaičius. Pagal balanso dėsnį yra išvedamas toks modelis:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial \tau_1} + \nu u = -\begin{cases} 0, & \text{kai } \tau_1 \in \sigma_1^*, \\ \alpha u, & \text{kai } \tau_1 \in \sigma_1, \end{cases} \\
\qquad + \begin{cases} 0, & \text{kai } \tau_1 \in \sigma_2^*, \\ \displaystyle\int\limits_{\gamma_1(\tau_1)}^{\gamma_2(\tau_1)} \left(\sum_{k=1}^{n} \nu_{k0} u_k + \nu_{c0} u_c \right) d\tau_2, & \text{kai } \tau_1 \in \sigma_2, \end{cases} \\
\qquad + \begin{cases} 0, & \text{kai } \tau_1 \in \sigma_3^*, \\ \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k + u_c \right) |_{\tau_2 = T}, & \text{kai } \tau_1 \in \sigma_3, \end{cases} \\
u|_{\tau_1 = T} = \displaystyle\int\limits_{\sigma_3} \sum_{k=1}^{n} k u_k|_{\tau_2 = T} \, d\tau_1, \\
u_0\left(T\right) = \displaystyle\int\limits_{\sigma_3} \sum_{k=1}^{n} k u_{k0}|_{\tau_2 = T} \, d\tau_1, \\
u|_{t=0} = u_0, \\
[u|_{\tau_1 = \tau}] = 0, \quad \text{kai } \tau = T_1, T_2, T_3, T_4,
\end{cases}
\tag{1}
$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u_k}{\partial t} + \dfrac{\partial u_k}{\partial \tau_1} + \dfrac{\partial u_k}{\partial \tau_2} + \left(\nu_k + \displaystyle\sum_{s=0}^{k-1} \nu_{ks} \right) u_k \\
\quad = \begin{cases} 0, & \text{kai } k = n, \\ \displaystyle\sum_{s=k+1}^{n} \nu_{sk} u_s, & \text{kai } 1 \le k \le n-1, \quad (\tau_1, \tau_2) \in Q, t > 0, \end{cases} \\
u_k|_{\tau_2 = 0} = \alpha_k u \left(1 - \alpha_{ck}\right), \\
u_k|_{t=0} = u_{k0}, \\
u_{k0}(\tau_1, 0) = \alpha_k(0, \tau_1) u_0(\tau_1) \left(1 - \alpha_{ck}(0, \tau_1)\right),
\end{cases}
\tag{2}
$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_c}{\partial t} + \dfrac{\partial u_c}{\partial \tau_1} + \dfrac{\partial u_c}{\partial \tau_2} + (\nu_c + \nu_{c0})\, u_c = 0, \quad (\tau_1, \tau_2) \in Q, t > 0, \\ u_c|_{\tau_2=0} = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_{ck}\alpha_k u, \\ u_c|_{t=0} = u_{c0}, \\ u_{c0}(\tau_1, 0) = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_{ck}(0,\tau_1)\alpha_k(0,\tau_1)u_0(\tau_1), \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} + \dfrac{\partial f}{\partial \tau_c} = -\nu_f f, \quad \tau_c > T, t > 0, \\ f|_{\tau_c = T} = \int\limits_{\sigma_3} u_c|_{\tau_2 = T}\, d\tau_1, \\ f|_{t=0} = f_0. \end{cases} \tag{4}$$

Lygties (1) narys $\alpha u, \tau_1 \in \sigma_1$, apibūdina tuos individus, kurie susilaukia jauniklių, narys $\int_{\gamma_1(\tau_1)}^{\gamma_2(\tau_1)} \left(\sum_{k=1}^{n} \nu_{k0}u_k + \nu_{c0}u_c\right) d\tau_2, \tau_1 \in \sigma_2$, žymi individus (šeimininkus), kurių visi jaunikliai žūva, ir $\left(\sum_{k=1}^{n} u_k + u_c\right)|_{\tau_2=T}, \tau_1 \in \sigma_3$, yra dalis individų, kurie baigia jauniklių globą. Sąlyga $[u|_{\tau_1=\tau}] = 0$, kai $\tau = T_1, T_2, T_3, T_4$ reiškia, kad u yra tolydi trūkio taškuose.

Lygybės (2) kairėje pusėje esantis narys $\sum_{s=0}^{k-1} \nu_{ks}u_k$ aprašo tą τ_1 amžiaus individų dalį laiko momentu t, kurie globoja k jauniklių ir kurių bent vienas jauniklis miršta. Dešinės pusės narys $\sum_{s=k+1}^{n} \nu_{sk}u_s$ apibūdina τ_1 amžiaus individus, laiko momentu t, kurie rūpinasi daugiau nei k, $1 \le k \le n-1$, τ_2 amžiaus jauniklių, kurių skaičius po kitų jauniklių mirties yra k.

Duotos funkcijos ν, ν_k, ν_{ks}, ν_c, ν_{c0}, ν_f, α_k, α_{ck}, u_0, u_{k0}, u_{c0}, f_0 bei nežinomos funkcijos u, u_k, u_c, f turi būti teigiamos, nes kitu atveju jos neturi biologinės prasmės. Teigiamos konstantos T, T_1, T_3 yra duotos. Prielaida $T < T_1$ yra natūrali.

Sąveikos funkcijos α_{ck} išraiška yra:

$$\alpha_{ck}(t,\tau_1) = \frac{\int\limits_{T_1}^{T_3} \beta_k(t,\tau_1,\tau_c) f(t,\tau_c)\, d\tau_c}{\int\limits_{T_1}^{T_3} f(t,\tau_c)\, d\tau_c + \int\limits_{T_1}^{T_3} \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k(t,\tau_1) u(t,\tau_1)\, d\tau_1}, \quad 0 < \beta_k < 1. \tag{5}$$

Šeimininkų ir gegučių jauniklių tankius aprašome taip:

$$u(t,\tau_2) = \int\limits_{T_1+\tau_2}^{T_3+\tau_2} \sum_{k=1}^{n} k u_k(t,\tau_1,\tau_2)\, d\tau_1,$$

$$f(t,\tau_2) = \int\limits_{T_1+\tau_2}^{T_3+\tau_2} u_c(t,\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1,$$

čia $\tau_2 \in (0,T)$.

Pastaba. Darbe [4] buvo nagrinėtas modelis (1)–(4) su taip apibrėžta sąveikos funkcija:

$$\alpha_{ck}(t,\tau_1) = \frac{\int\limits_{T_1}^{T_3} \beta_k(t,\tau_1,\tau_c) f(t,\tau_c)\,d\tau_c}{\int\limits_{T_1}^{T_3} f(t,\tau_c)\,d\tau_c}, \quad 0 < \beta_k < 1.$$

2.2. Separabilieji sprendiniai

Šiame skyriuje nagrinėjame (1)–(4) uždavinio separabiliuosius sprendinius. Apsiribojame atveju, kai esminės normos $\nu, \nu_k, \nu_{ks}, \nu_c, \nu_{c0}, \nu_f, \alpha_k, \alpha_{ck}, \beta_k$ nepriklauso nuo laiko t ir yra teigiamos funkcijos. Be to, laikysime, kad ν ir ν_f yra tolydžios funkcijos, o $\nu_c, \nu_{c0}, \nu_k, \nu_{ks}, \alpha_k, \alpha_{ck}, \beta_k$ priklauso klasei C^1 savo apibrėžimo srityse.

Tarkime, kad $\rho^\lambda(t,\tau) = e^{\lambda(t-\tau+T)}$, $\tau = \tau_1, \tau_c$, o $U > 0$ yra laisvai pasirenkama konstanta. Tada sprendinių ieškosime tokiu pavidalu:

$$\begin{cases} u = U v^\lambda(\tau_1)\rho^\lambda(t,\tau_1), \quad v(T) = 1, \\ u_k = U v^\lambda(\tau_1-\tau_2) v_k^\lambda(\tau_1,\tau_2)\rho^\lambda(t,\tau_1), \\ u_c = U v^\lambda(\tau_1-\tau_2) v_c^\lambda(\tau_1,\tau_2)\rho^\lambda(t,\tau_1), \\ f = U w^\lambda(\tau_c)\rho^\lambda(t,\tau_c), \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} u_0 = U v^\lambda(\tau_1)\rho^\lambda(0,\tau_1), \\ u_{k0} = U v^\lambda(\tau_1-\tau_2) v_k^\lambda(\tau_1,\tau_2)\rho^\lambda(0,\tau_1), \\ u_{c0} = U v^\lambda(\tau_1-\tau_2) v_c^\lambda(\tau_1,\tau_2)\rho^\lambda(0,\tau_1), \\ f_0 = U w^\lambda(\tau_c)\rho^\lambda(0,\tau_c). \end{cases}$$

Konstanta λ ir teigiamos funkcijos $v^\lambda, v_k^\lambda, v_c^\lambda, w^\lambda$ yra ieškomos.

Įsistatę (6) išraiškas į (1)–(4) uždavinį gauname uždavinį funkcijoms v^λ, v_k^λ, v_c^λ, w^λ apskaičiuoti:

$$
\begin{cases}
(v^\lambda)' + \nu v^\lambda = - \begin{cases} 0, & \text{kai } \tau_1 \in \sigma_1^*, \\ \alpha v^\lambda, & \text{kai } \tau_1 \in \sigma_1, \end{cases} \\
\qquad + \begin{cases} 0, & \text{kai } \tau_1 \in \sigma_2^*, \\ \displaystyle\int\limits_{\gamma_1(\tau_1)}^{\gamma_2(\tau_1)} \left(\sum_{k=1}^n \nu_{k0} v_k^\lambda + \nu_{c0} v_c^\lambda \right) v^\lambda(\tau_1 - \tau_2)\, d\tau_2, & \text{kai } \tau_1 \in \sigma_2, \end{cases} \\
\qquad + \begin{cases} 0, & \text{kai } \tau_1 \in \sigma_3^*, \\ \displaystyle\left(\sum_{k=1}^n v_k^\lambda(\tau_1, T) + v_c^\lambda(\tau_1, T) \right) v^\lambda(\tau_1 - T), & \text{kai } \tau_1 \in \sigma_3, \end{cases} \\
v^\lambda(T) = 1, \\
\left[v^\lambda|_{\tau_1 = \tau} \right] = 0, \quad \text{kai } \tau = T_1, T_2, T_3, T_4,
\end{cases}
\tag{7}
$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial v_k^\lambda}{\partial \tau_1} + \dfrac{\partial v_k^\lambda}{\partial \tau_2} + \tilde{\nu} v_k^\lambda = \begin{cases} 0, & \text{kai } k = n, \\ \displaystyle\sum_{s=k+1}^n \nu_{sk} v_s^\lambda, & \text{kai } 1 \le k \le n-1, \quad (\tau_1, \tau_2) \in Q, \end{cases} \\
v_k^\lambda(\tau_1, 0) = \alpha_k(\tau_1) \left(1 - q_k^\lambda(\tau_1) \right),
\end{cases}
\tag{8}
$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial v_c^\lambda}{\partial \tau_1} + \dfrac{\partial v_c^\lambda}{\partial \tau_2} + (\nu_c + \nu_{c0})\, v_c^\lambda = 0, \quad (\tau_1, \tau_2) \in Q, \\
v_c^\lambda(\tau_1, 0) = \displaystyle\sum_{k=1}^n \alpha_k(\tau_1) q_k^\lambda(\tau_1),
\end{cases}
\tag{9}
$$

$$
\begin{cases}
(w^\lambda)' = -\nu_f w^\lambda, \quad \tau_c > T, \\
w^\lambda(T) = \displaystyle\int\limits_{\sigma_1} v^\lambda(x) v_c^\lambda(x + T, T) e^{-\lambda x}\, dx.
\end{cases}
\tag{10}
$$

Čia funkcija q_k^λ yra gauta iš (5) lygybės naudojant (6) išraiškas:

$$
q_k^\lambda(\tau_1) = \frac{\displaystyle\int\limits_{T_1}^{T_3} \beta_k(\tau_1, x) w^\lambda(x) e^{-\lambda x}\, dx}{\displaystyle\int\limits_{T_1}^{T_3} w^\lambda(x) e^{-\lambda x}\, dx + \int\limits_{T_1}^{T_3} \alpha(x) v^\lambda(x) e^{-\lambda x}\, dx}.
$$

Iš (1) lygties sąlygos $u|_{\tau_1 = T} = \int_{\sigma_3} \sum_{k=1}^n k u_k|_{\tau_2 = T}\, d\tau_1$, panaudoję lygybę $v(T) = 1$, gauname charakteristinę lygtį nežinomai λ reikšmei rasti:

$$\int\limits_{\sigma_3} \sum_{k=1}^{n} k v_k^{\lambda}(\tau_1, T) v^{\lambda}(\tau_1 - T) e^{-\lambda(\tau_1 - T)}\, d\tau_1 = 1.$$

Toliau nagrinėsime tokį atvejį, kai normos $\nu_k(\tau_2)$, $\nu_{ks}(\tau_2)$, $\nu_c(\tau_2)$, $\nu_{c0}(\tau_2)$ yra funkcijos, priklausančios tik nuo jauniklių amžiaus τ_2, $\beta_k(\tau_c)$ yra funkcija, priklausanti nuo parametro τ_c. Be to, laikysime, kad $\alpha_k = const, k = \overline{1,n}$. Tuomet $q_k^{\lambda} = const$, t.y.

$$q_k^{\lambda} = \frac{\int\limits_{T_1}^{T_3} \beta_k(x) w^{\lambda}(x) e^{-\lambda x}\, dx}{\int\limits_{T_1}^{T_3} w^{\lambda}(x) e^{-\lambda x}\, dx + \alpha \int\limits_{T_1}^{T_3} v^{\lambda}(x) e^{-\lambda x}\, dx}. \tag{11}$$

Remiantis šiomis prielaidomis iš (8) ir (9) sistemų matome, kad ir funkcijos v_k^{λ}, v_c^{λ} priklausys tik nuo jauniklių amžiaus τ_2. Tada uždavinį (7)–(10) galime supaprastinti:

$$\begin{cases} (v^{\lambda})' + \nu v^{\lambda} = -\begin{cases} 0, & \text{kai } \tau_1 \in \sigma_1^*, \\ \alpha v^{\lambda}, & \text{kai } \tau_1 \in \sigma_1, \end{cases} \\ \qquad + \begin{cases} 0, & \text{kai } \tau_1 \in \sigma_2^*, \\ \int\limits_{\gamma_1(\tau_1)}^{\gamma_2(\tau_1)} \left(\sum_{k=1}^{n} \nu_{k0} v_k^{\lambda} + \nu_{c0} v_c^{\lambda} \right) v^{\lambda}(\tau_1 - \tau_2)\, d\tau_2, & \text{kai } \tau_1 \in \sigma_2, \end{cases} \\ \qquad + \begin{cases} 0, & \text{kai } \tau_1 \in \sigma_3^*, \\ \left(\sum_{k=1}^{n} v_k^{\lambda}(T) + v_c^{\lambda}(T) \right) v^{\lambda}(\tau_1 - T), & \text{kai } \tau_1 \in \sigma_3, \end{cases} \\ v^{\lambda}(T) = 1, \\ \left[v^{\lambda}|_{\tau_1 = \tau} \right] = 0, \quad \text{kai } \tau = T_1, T_2, T_3, T_4, \end{cases} \tag{12}$$

$$\begin{cases} (v_k^{\lambda})' + \tilde{\nu}_k v_k^{\lambda} = \begin{cases} 0, & \text{kai } k = n, \\ \sum\limits_{s=k+1}^{n} \nu_{sk} v_s^{\lambda}, & \text{kai } 1 \le k \le n-1, \end{cases} \\ v_k^{\lambda}(0) = \alpha_k \left(1 - q_k^{\lambda}\right), \end{cases} \tag{13}$$

$$
\begin{cases}
(v_c^\lambda)' + (\nu_c + \nu_{c0})\, v_c^\lambda = 0, \\
v_c^\lambda(0) = \alpha \sum\limits_{k=1}^{n} q_k^\lambda,
\end{cases}
\tag{14}
$$

$$
\begin{cases}
(w^\lambda)' = -\nu_f w^\lambda, \quad \tau_c > T, \\
w^\lambda(T) = \int\limits_{\sigma_1} v^\lambda(x) v_c^\lambda(T) e^{-\lambda x}\, dx.
\end{cases}
\tag{15}
$$

Pastebėsime, kad supaprastėja ir charakteristinė lygtis nežinomai λ reikšmei rasti:

$$
\sum_{k=1}^{n} k v_k^\lambda(T) \int\limits_{\sigma_1} v^\lambda(x) e^{-\lambda x}\, dx = 1. \tag{16}
$$

Teorema. *Tarkime* $\nu, \nu_k, \nu_{ks}, \nu_c, \nu_{c0}, \nu_f$ *yra teigiamos funkcijos,* $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k < 1$, $0 < \alpha_k$, $0 < \beta_k < 1$. *Be to,* $\nu, \nu_f \in C^0[T, \infty)$. *Jeigu* $\beta_k \in C^0[T_1, T_3]$ *ir* $\nu_k, \nu_{ks}, \nu_c, \nu_{c0} \in C^0[0, T]$, *tuomet uždavinys* (1)–(4) *turi bent vieną vienparametrę teigiamų separabiliųjų sprendinių šeimą tipo* (6)*.*

Įrodymas. Integruodami (15) ir (14) lygtis, gauname:

$$
w^\lambda(\tau_c) = w^\lambda(T) e^{-\int\limits_{T}^{\tau_c} \nu_f(\xi)\, d\xi},
$$

$$
v_c^\lambda(\tau_2) = \alpha \sum_{k=1}^{n} q_k^\lambda e^{-\int\limits_{0}^{\tau_2} (\nu_c(\xi) + \nu_{c0}(\xi))\, d\xi}. \tag{17}
$$

Integruodami (13) lygtį pradedame nuo $k = n$:

$$
v_n^\lambda(\tau_2) = \alpha_n (1 - q_n^\lambda) e^{-\int\limits_{0}^{\tau_2} \tilde{\nu}_n(\xi)\, d\xi}. \tag{18}
$$

Kai $k = \overline{1, n-1}$, integruodami nehomogenines lygtis, gauname

$$
v_k^\lambda(\tau_2) = \alpha_k (1 - q_k^\lambda) e^{-\int\limits_{0}^{\tau_2} \tilde{\nu}_k(\xi)\, d\xi} + \int\limits_{0}^{\tau_2} \sum_{s=k+1}^{n} \nu_{sk}(y) v_s^\lambda(y) e^{-\int\limits_{y}^{\tau_2} \tilde{\nu}_k(\xi)\, d\xi}\, dy. \tag{19}
$$

Šios lygtys yra išsprendžiamos rekurentiniu būdu, pradedant nuo $k = n-1$ ir naudojant (18) išraišką.

Dabar sprendžiame (12) lygtis. Pirma, intervale $\tau_1 \in (T, T_1]$ nagrinėjame lygtį

$$
(v^\lambda)' + \nu v^\lambda = 0,
$$

kuri yra išsprendžiama tiksliai:

$$v^\lambda(\tau_1) = v^\lambda(T)e^{-\int\limits_T^{\tau_1} \nu(\xi)\,d\xi} = e^{-\int\limits_T^{\tau_1} \nu(\xi)\,d\xi}.$$

Intervale $\tau_1 \in (T_1, T_2]$ turime lygtį

$$(v^\lambda)' + (\nu+\alpha)v^\lambda = \int\limits_0^{\tau_1 - T_1} \left(\sum_{k=1}^n \nu_{k0} v_k^\lambda + \nu_{c0} v_c^\lambda \right) v^\lambda(\tau_1 - \tau_2)\,d\tau_2.$$

Patogumo dėlei pažymėkime $K^\lambda(\tau_2) = \sum_{k=1}^n \nu_{k0}(\tau_2) v_k^\lambda(\tau_2) + \nu_{c0}(\tau_2) v_c^\lambda(\tau_2)$. Tada pakeitę $x = \tau_1 - \tau_2$, lygtį perrašome taip:

$$(v^\lambda)' + (\nu+\alpha)v^\lambda = \int\limits_{T_1}^{\tau_1} K^\lambda(\tau_1 - x) v^\lambda(x)\,dx.$$

Padauginę iš $e^{\int_{T_1}^{\tau_1}(\alpha(\xi)+\nu(\xi))\,d\xi}$ ir suintegravę pagal τ_1 intervale $(T_1, \tau_1]$, gauname

$$v^\lambda(\tau_1) = v^\lambda(T_1)e^{-\int\limits_{T_1}^{\tau_1}(\alpha(\xi)+\nu(\xi))\,d\xi} + \int\limits_{T_1}^{\tau_1} e^{-\int\limits_z^{\tau_1}(\alpha(\xi)+\nu(\xi))\,d\xi} \int\limits_{T_1}^{z} K^\lambda(z-x)v^\lambda(x)\,dx\,dz.$$

Pastarojoje lygtyje sukeiskime integravimo tvarką ir pažymėkime

$$R^\lambda(\tau_1, x) = \int\limits_x^{\tau_1} e^{-\int\limits_z^{\tau_1}(\alpha(\xi)+\nu(\xi))\,d\xi} K^\lambda(z-x)\,dx.$$

Tada gauname Voltero[1] tipo lygtį

$$v^\lambda(\tau_1) = v^\lambda(T_1)e^{-\int\limits_{T_1}^{\tau_1}(\alpha(\xi)+\nu(\xi))\,d\xi} + \int\limits_{T_1}^{\tau_1} v^\lambda(x) R^\lambda(\tau_1, x)\,dx, \tag{20}$$

čia $v^\lambda(T_1) = e^{-\int_T^{T_1} \nu(\xi)\,d\xi}$.

Lygtis (20) turi vienintelį teigiamą C^1 klasės sprendinį [3].

Intervale $\tau_1 \in (T_2, T_3]$ turime lygtį

$$(v^\lambda)' + (\nu+\alpha)v^\lambda = \int\limits_0^T K^\lambda(\tau_2) v^\lambda(\tau_1 - \tau_2)\,d\tau_2 + \left(\sum_{k=1}^n v_k^\lambda(T) + v_c^\lambda(T) \right) v^\lambda(\tau_1 - T).$$

[1] Vito Volterra (1860–1940) — Italų matematikas ir fizikas.

Pažymėję $A^\lambda = \sum_{k=1}^n v_k^\lambda(T) + v_c^\lambda(T)$ ir pakeitę $x = \tau_1 - \tau_2$, turime

$$(v^\lambda)' + (\nu + \alpha)v^\lambda = \int\limits_{\tau_1 - T}^{\tau_1} K^\lambda(\tau_1 - x)v^\lambda(x)dx + A^\lambda v^\lambda(\tau_1 - T). \tag{21}$$

Šios lygties struktūra yra su vėlavimu T. Todėl nagrinėjame (21) lygtį, judėdami žingsniu T. Kai $\tau_1 \in [T_2 + sT, T_2 + (s+1)T), s = 0, 1, \dots,$ galime ją perrašyti taip:

$$\begin{aligned} v^\lambda(\tau_1) &= v^\lambda(T_2 + sT) e^{-\int\limits_{T_2+sT}^{\tau_1} (\alpha(\xi)+\nu(\xi))\, d\xi} \\ &+ \int\limits_{T_2+sT}^{\tau_1} e^{-\int\limits_{z}^{\tau_1} (\alpha(\xi)+\nu(\xi))\, d\xi} \int\limits_{z-T}^{z} K^\lambda(z-x)v^\lambda(x)\, dx\, dz \\ &+ A^\lambda \int\limits_{T_2+(s-1)T}^{\tau_1 - T} e^{-\int\limits_{x+T}^{\tau_1} (\alpha(\xi)+\nu(\xi))\, d\xi} v^\lambda(x)\, dx. \end{aligned} \tag{22}$$

Kadangi $\{(x,z) : x \in [z-T, z], z \in [T_2 + sT, \tau_1]\} = S_1 + S_2 + S_3$, kur

$$\begin{aligned} S_1 &= \{(x,z) : x \in [z-T, \tau_1 - T], z \in [T_2 + sT, \tau_1]\} \\ &= \{(x,z) : x \in [T_2 + (s-1)T, \tau_1 - T], z \in [T_2 + sT, x + T]\}, \\ S_2 &= \{(x,z) : x \in [\tau_1 - T, T_2 + sT], z \in [T_2 + sT, \tau_1]\}, \\ S_3 &= \{(x,z) : x \in [T_2 + sT, z], z \in [T_2 + sT, \tau_1]\} \\ &= \{(x,z) : x \in [T_2 + sT, \tau_1], z \in [x, \tau_1]\}, \end{aligned}$$

tai (22) lygties antrąjį narį galime perrašyti taip

$$\begin{aligned} &\int\limits_{T_2+sT}^{\tau_1} e^{-\int\limits_{z}^{\tau_1} (\alpha(\xi)+\nu(\xi))\, d\xi} \int\limits_{z-T}^{z} K^\lambda(z-x)v^\lambda(x)\, dx\, dz \\ &= \int\limits_{T_2+(s-1)T}^{\tau_1 - T} v^\lambda(x) \int\limits_{T_2+sT}^{x+T} K^\lambda(z-x) e^{-\int\limits_{z}^{\tau_1} (\alpha(\xi)+\nu(\xi))\, d\xi} dz\, dx \\ &+ \int\limits_{\tau_1 - T}^{T_2+sT} v^\lambda(x) \int\limits_{T_2+sT}^{\tau_1} K^\lambda(z-x) e^{-\int\limits_{z}^{\tau_1} (\alpha(\xi)+\nu(\xi))\, d\xi} dz\, dx \\ &+ \int\limits_{T_2+sT}^{\tau_1} v^\lambda(x) \int\limits_{x}^{\tau_1} K^\lambda(z-x) e^{-\int\limits_{z}^{\tau_1} (\alpha(\xi)+\nu(\xi))\, d\xi} dz\, dx. \end{aligned}$$

Pažymėkime

$$
\begin{aligned}
g_s^\lambda(\tau_1) &= v^\lambda(T_2+sT)e^{-\int\limits_{T_2+sT}^{\tau_1}(\alpha(\xi)+\nu(\xi))\,d\xi} \\
&+A^\lambda \int\limits_{T_2+(s-1)T}^{\tau_1-T} v^\lambda(x)e^{-\int\limits_{x+T}^{\tau_1}(\alpha(\xi)+\nu(\xi))\,d\xi}\,dx \\
&+\int\limits_{\tau_1-T}^{T_2+sT} v^\lambda(x)\int\limits_{T_2+sT}^{\tau_1} K^\lambda(z-x)e^{-\int\limits_{z}^{\tau_1}(\alpha(\xi)+\nu(\xi))\,d\xi}\,dz\,dx \\
&+\int\limits_{T_2+(s-1)T}^{\tau_1-T} v^\lambda(x)\int\limits_{T_2+sT}^{x+T} K^\lambda(z-x)e^{-\int\limits_{z}^{\tau_1}(\alpha(\xi)+\nu(\xi))\,d\xi}\,dz\,dx.
\end{aligned}
$$

Tada (22) lygtį galime perrašyti Voltero forma

$$
v^\lambda(\tau_1)=g_s^\lambda(\tau_1)+\int\limits_{T_2+sT}^{\tau_1} v^\lambda(x)\int\limits_{x}^{\tau_1} K^\lambda(z-x)e^{-\int\limits_{z}^{\tau_1}(\alpha(\xi)+\nu(\xi))d\xi}dzdx, \tag{23}
$$

kai $\tau_1 \in [T_2+sT, T_2+(s+1)T), s=0,1,\ldots$. Pradėdami nuo $s=0$ rekurentiniu būdu randame g_s^λ ir gauname Voltero lygties sprendinį.

Kai $\tau_1 \in (T_3, T_4]$, turime lygtį

$$
(v^\lambda)'+\nu v^\lambda=\int\limits_{\tau_1-T_3}^{T} K^\lambda(\tau_2)v^\lambda(\tau_1-\tau_2)\,d\tau_2+A^\lambda v^\lambda(\tau_1-T).
$$

Įvedę keitinį $x=\tau_1-\tau_2$, perrašome lygtį taip:

$$
(v^\lambda)'+\nu v^\lambda=\int\limits_{\tau_1-T}^{\tau_3} K^\lambda(\tau_1-x)v^\lambda(x)\,dx+A^\lambda v^\lambda(\tau_1-T).
$$

Ją padauginę iš $e^{\int_{T_3}^{\tau_1}\nu(\xi)\,d\xi}$ ir suintegravę pagal τ_1 intervale $(T_3,\tau_1]$, gauname

$$
\begin{aligned}
v^\lambda(\tau_1) &= v^\lambda(T_3)e^{-\int\limits_{T_3}^{\tau_1}\nu(\xi)\,d\xi}+\int\limits_{T_3}^{\tau_1} e^{-\int\limits_{z}^{\tau_1}\nu(\xi)\,d\xi}\int\limits_{z-T}^{T_3} K^\lambda(z-x)v^\lambda(x)\,dx\,dz \\
&+A^\lambda\int\limits_{T_3-T}^{\tau_1-T} v^\lambda(x)e^{-\int\limits_{x+T}^{\tau_1}\nu(\xi)\,d\xi}\,dx,
\end{aligned}
$$

čia dešinė pusė yra žinoma funkcija.

Paskutiniame intervale $\tau_1 \in (T_4, \infty)$ turime

$$(v^\lambda)' + \nu v^\lambda = 0.$$

Tuomet

$$v^\lambda(\tau_1) = v^\lambda(T_4) e^{-\int\limits_{T_4}^{\tau_1} \nu(\xi)\, d\xi},$$

čia $v^\lambda(T_4)$ reikšmė yra žinoma.

Panaudoję apskaičiuotas reikšmes (11) lygtyje, turime

$$q_k^\lambda = \frac{v_c^\lambda(T) \int\limits_{T_1}^{T_3} v^\lambda(x) e^{-\lambda x}\, dx \int\limits_{T_1}^{T_3} \beta_k(x) e^{-\int\limits_T^x \nu_f(\xi)\, d\xi - \lambda x}\, dx}{v_c^\lambda(T) \int\limits_{T_1}^{T_3} v^\lambda(x) e^{-\lambda x}\, dx \int\limits_{T_1}^{T_3} e^{-\int\limits_T^x \nu_f(\xi)\, d\xi - \lambda x}\, dx + \alpha \int\limits_{T_1}^{T_3} v^\lambda(x) e^{-\lambda x}\, dx}.$$

Pažymėkime

$$p_k^\lambda = \int\limits_{T_1}^{T_3} \beta_k(x) e^{-\int\limits_T^x \nu_f(\xi)\, d\xi - \lambda x}\, dx, \quad \gamma^\lambda = \int\limits_{T_1}^{T_3} e^{-\int\limits_T^x \nu_f(\xi)\, d\xi - \lambda x}\, dx.$$

Suprastinę q_k^λ išraišką, turime

$$q_k^\lambda = \frac{v_c^\lambda(T) p_k^\lambda}{v_c^\lambda(T)\gamma^\lambda + \alpha}. \tag{24}$$

Šią reikšmę įstatę į (17) lygties taške T dešinę pusę, gauname

$$v_c^\lambda(T) = \alpha \sum_{k=1}^n \frac{v_c^\lambda(T) p_k^\lambda}{v_c^\lambda(T)\gamma^\lambda + \alpha} e^{-\int\limits_0^T (\nu_c(\xi) + \nu_{c0}(\xi))\, d\xi}.$$

Suprastinę iš $v_c^\lambda(T)$ ir išsprendę, turime

$$v_c^\lambda(T) = \frac{\alpha}{\gamma^\lambda} \left(e^{-\int\limits_0^T (\nu_c(\xi) + \nu_{c0}(\xi))\, d\xi} \sum_{k=1}^n p_k^\lambda - 1 \right) > 0.$$

Įstatę šią išraišką į (24) lygybę, gauname

$$q_k^\lambda = \frac{\left(e^{-\int\limits_0^T (\nu_c(\xi) + \nu_{c0}(\xi))\, d\xi} \sum\limits_{k=1}^n p_k^\lambda - 1 \right) p_k^\lambda}{\gamma^\lambda e^{-\int\limits_0^T (\nu_c(\xi) + \nu_{c0}(\xi))\, d\xi} \sum\limits_{k=1}^n p_k^\lambda} > 0.$$

Liko parodyti, kad (16) charakteristinė lygtis turi bent vieną sprendinį. Remiantis (11) ir (5) išraiškomis, $0 < q_k^\lambda < \max_{\tau_c} \beta_k =: \beta_k^{\max} < 1$. Charakteristinę lygtį perrašome tokiu pavidalu

$$z^\lambda := \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} k v_k^\lambda(T)} = \int\limits_{T_1}^{T_3} v^\lambda(x) e^{-\lambda x}\, dx. \tag{25}$$

Pažymėkime $v_k^{\max}(\tau_2) = v_k^\lambda(\tau_2)|_{q_k^\lambda = 0}$, $k = \overline{1,n}$. Tuomet iš (18) ir (19) lygybių, turime

$$\begin{aligned}
v_n^{\max}(\tau_2) &:= \alpha_n e^{-\int\limits_0^{\tau_2} \tilde{\nu}_n(\xi)\, d\xi}, \\
v_k^{\max}(\tau_2) &:= \alpha_k e^{-\int\limits_0^{\tau_2} \tilde{\nu}_k(\xi)\, d\xi} + \int\limits_0^{\tau_2} \sum_{s=k+1}^{n} \nu_{sk} v_s^{\max} e^{-\int\limits_y^{\tau_2} \tilde{\nu}_k(\xi)\, d\xi} dy, \quad k = \overline{1, n-1}.
\end{aligned}$$

Analogiškai galime apibrėžti $v_k^{\min}(\tau_2) = v_k^\lambda(\tau_2)|_{q_k^\lambda = \beta_k^{\max}}$ ir $v_c^{\max}(\tau_2) = v_c^\lambda(\tau_2)|_{q_k^\lambda = 1}$ iš (17) lygties. Tuomet $z^{\min} < z^\lambda < z^{\max}$, $\forall \lambda \in (-\infty, \infty)$. Čia

$$z^{\min} := \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} k v_k^{\max}(T)}, \quad z^{\max} := \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} k v_k^{\min}(T)}, \quad k = \overline{1,n}.$$

Nagrinėkime dešiniąją (25) lygybės pusę. Akivaizdu, kad $K^\lambda(\tau_2)$ ir A^λ tenkina nelygybes:

$$\begin{aligned}
K^{\min}(\tau_2) &:= \sum_{k=1}^{n} \nu_{k0}(\tau_2) v_k^{\min}(\tau_2) < K^\lambda(\tau_2) < \sum_{k=1}^{n} \nu_{k0}(\tau_2) v_k^{\max}(\tau_2) \\
&\quad + \nu_{c0}(\tau_2) v_c^{\max}(\tau_2) =: K^{\max}(\tau_2), \\
A^{\min} &:= \sum_{k=1}^{n} v_k^{\min}(T) < A^\lambda < \sum_{k=1}^{n} v_k^{\max}(T) + v_c^{\max}(T) =: A^{\max}.
\end{aligned}$$

Taip pat tarkime, kad $v^{\min}$, $v^{\max}$ yra (20), (23) lygčių dešiniosios pusės, kur reikšmės $K^\lambda(\tau_2), A^\lambda$ yra atitinkamai pakeistos išraiškomis $K^{\min}(\tau_2), A^{\min}$ ir $K^{\max}(\tau_2), A^{\max}$. Tuomet $v^{\min} < v^\lambda < v^{\max}$. Iš čia gauname

$$P^{\max}(\lambda) := \int\limits_{T_1}^{T_3} v^{\min}(x) e^{-\lambda x}\, dx < \int\limits_{T_1}^{T_3} v^\lambda(x) e^{-\lambda x}\, dx < \int\limits_{T_1}^{T_3} v^{\max}(x) e^{-\lambda x}\, dx =: P^{\min}(\lambda).$$

Funkcijos $P^{\max}(\lambda)$, $P^{\min}(\lambda)$ ir $\int_{T_1}^{T_3} v^\lambda(x) e^{-\lambda x}\, dx$ yra tolydžios, $\forall \lambda \in (-\infty, \infty)$. Be to, jos artėja į begalybę, kai $\lambda \to -\infty$, ir artėja į 0, kai $\lambda \to \infty$. Funkcija $z^\lambda \in (z^{\min}, z^{\max})$, $\forall \lambda \in (-\infty, \infty)$ ir yra tolydi. Todėl kreivės z^λ ir $\int_{T_1}^{T_3} v^\lambda(x) e^{-\lambda x}\, dx$ kertasi bent viename taške. Taigi lygtis (16) turi bent vieną realią šaknį λ.

Teoremos įrodymas baigtas.

Pastebėsime, kad remiantis šia teorema, $\tau_2 < T$ amžiaus gegučių ir šeimininkų-paukščių jauniklių tankius galime apibrėžti formulėmis:

$$\begin{aligned} u(t,\tau_2) &= \int\limits_{T_1+\tau_2}^{T_3+\tau_2} \sum_{k=1}^{n} k u_k(t,\tau_1,\tau_2)\, d\tau_1 = U \sum_{k=1}^{n} k v_k^{\lambda}(\tau_2) \int\limits_{\sigma_1} v^{\lambda}(x) e^{\lambda(t-x+T-\tau_2)}\, dx, \\ f(t,\tau_2) &= \int\limits_{T_1+\tau_2}^{T_3+\tau_2} u_c(t,\tau_1,\tau_2)\, d\tau_1 = U v_c^{\lambda}(\tau_2) \int\limits_{\sigma_1} v^{\lambda}(x) e^{\lambda(t-x+T-\tau_2)}\, dx. \end{aligned}$$

3. Išvados

1. Yra nagrinėjami (1)–(4) modelio separabilieji sprendiniai (6) tipo, kai mirtingumo funkcijos priklauso nuo jauniklių amžiaus τ_2.

2. Šios prielaidos leidžia įrodyti, kad uždavinys turi bent vieną sprendinių klasę.

3. Bendruoju atveju sprendinių egzistavimas liko neįrodytas.

Santrauka

Darbe nagrinėjamas gegučių ir šeimininkų sąveikos deterministinis modelis, priimant dėmesin paukščių amžių, ir atsižvelgiant į diskrečią jauniklių aibę bei jų globą. Visi individai yra skirstomi į tris grupes: priešreprodukcinio (dar negali turėti jauniklių), reprodukcinio (gali susilaukti palikuonių) ir poreprodukcinio amžiaus. Modelis yra sudarytas iš integro-dalinių diferencialinių lygčių, atsižvelgiant į integralinio tipo sąlygas. Šių lygčių skaičius priklauso nuo maksimalaus biologiškai įmanomo šeimininko kiaušinių lizde skaičiaus. Yra tiriami separabilieji uždavinio sprendiniai bei įrodoma egzistavimo teorema.

Summary

On Two Species Interaction Model

A Common Cuckoo and a host species dynamics deterministic model taking into account a discrete set of offsprings and their care, is considered. Individuals have three age intervals: pre-reproductive, reproductive (when they can produce offsprings) and post-reproductive. The model is described by integro-partial differential equations subject to conditions of integral type, where the number of equations depends on a maximal biologically possible number of eggs produced by the host birds. Separable solutions of this model are studied and the existence theorem is proved.

Jelena Lukina

Literatūros sąrašas

[1] S. Busenberg and M. Iannelli. *Separable models in age-dependent population dynamics.* Springer-Verlag, 1985.

[2] M. E. Gurtin and R. C. MacCamy. *Population dynamics with age dependence.* Nonlinear analysis and mechanics: Heriot-Watt symposium, Volume 3. Boston: Pitman, 1979.

[3] R. Kress. *Linear Integral Equations, Second Edition.* Springer-Verlag, New York, 1999.

[4] V. Skakauskas. A brood parasites dynamics model. In press, 2011.

[5] Wikipedia. http://lt.wikipedia.org/wiki/Lizdinis_parazitizmas.