VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ IR SKAIČIAVIMO MATEMATIKOS KATEDRA

Jurij Novickij

. . . .
(parašas)

HIPERBOLINĖS LYGTIES SU NELOKALIOSIOMIS KRAŠTINĖMIS SĄLYGOMIS SKIRTUMINIO SPRENDINIO STABILUMAS

Magistro baigiamasis darbas

Vadovas
prof. habil. dr. F. Ivanauskas

. . . .
(parašas)

Vilnius
2012

Padėka

Dėkoju moksliniam vadovui prof. habil. dr. Feliksui Ivanauskui už vertingas mokslines konsultacijas, už dėmesingą vadovavimą bakalauro bei magistro studijų metu. Dėkoju už atsakingai parinktą mokslinių darbų tematiką ir už suteiktą galimybę susipažinti su įdomiais žmonėmis.

Nuoširdžiai dėkoju prof. habil. dr. Mifodijui Sapagovui už vertingas mokslines konsultacijas studijuojant magistrantūroje, bei rengiant magistro baigiamąjį darbą, už idėjas, panaudotas šiame darbe, už patarimus ir pasiūlymus, skirtą laiką ir energiją. Dėkoju už įdomius susitikimus, kurie suteikė optimizmo tęsti studijas.

Santrauka

Darbo tikslas — ištirti baigtinių skirtumų metodo antrosios eilės hiperbolinio tipo diferencialinei lygčiai su nelokaliosiomis integralinėmis kraštinėmis sąlygomis stabilumą. Siekiant numatyto tikslo buvo sprendžiami šie uždaviniai:

- išnagrinėtas antrosios eilės hiperbolinės lygties trisluoksnės skirtuminės schemos suvedimas į dvisluoksnę skirtuminę schemą;
- išanalizuotas skirtuminio operatoriaus perėjimo matricos spektras;
- gauta pakankamoji skirtuminės schemos stabilumo sąlyga, nusakoma nelokaliųjų sąlygų parametrais: $\gamma_1 + \gamma_2 \leq 2$;
- atlikti skaitiniai eksperimentai, patvirtinantys teorines išvadas.

Nurodyta stabilumo sąlyga yra esminė, sprendžiant hiperbolinio tipo uždavinius su pakankamai didelėmis T reikšmėmis. Skirtuminio operatoriaus perėjimo matricos spektro tyrimo metodika gali būti pritaikyta plačios klasės diferencialinių lygčių su nelokaliosiomis sąlygomis stabilumui tirti.

Raktiniai žodžiai: Hiperbolinė lygtis · Baigtinių skirtumų metodas · Nelokaliosios kraštinės sąlygos · Integralinės sąlygos · Stabilumas · Spektras

Summary

On the stability of an explicit difference scheme for hyperbolic equation with integral conditions.

The aim of the work is stability analysis of solution of finite difference method for hyperbolic equations. Trying to achieve formulated aim these tasks were solved:

- a method of transformation of three-layered finite difference scheme into two-layered one was investigated;
- a spectrum of transition matrix subject to the properties of second order differential operator Λ was studied;
- stability conditions of hyperbolic type equations with nonlocal conditions subject to boundary parameters were obtained;
- numerical experiments, confirming theoretical derivations were made.

Derived results could be used to solve one-dimensional tasks with hyperbolic equations in different sciences, to analyse spectrum structure of mathematical models and construct new numerical methods for solving hyperbolic PDEs.

Keywords: Hyperbolic equation · Finite difference scheme · Nonlocal conditions · Integral conditions · Stability · Spectrum

Turinys

Įvadas

Problemos aktualumas

Diferencialinių lygčių teorija yra viena plačiausiai kituose moksluose taikomų matematikos mokslo sričių. Per keletą paskutinių dešimtmečių išaugo poreikis nagrinėti procesus, kurie aprašomi diferencialinėmis lygtimis su pakankamai sudėtingomis neklasikinėmis papildomomis sąlygomis. Diferencialinių lygčių skaitinė analizė reikalinga fizikos, chemijos, biotechnologijos ir kituose moksluose. Vis dažniau atsiranda uždavinių su įvairiomis nelokaliosiomis sąlygomis. Nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis vadiname tokias sąlygas, į kurias įeina nežinomos funkcijos ir (arba) jos išvestinės reikšmės ne mažiau kaip dviejuose skirtinguose taškuose srities viduje arba ant krašto. Integralinės nelokaliosios kraštinės sąlygos atsiranda dalelių difuzijos [3], šilumos laidumo [1,5], hidrodinamikos ir kituose uždaviniuose.

Hiperbolinės lygtys su nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis nėra plačiai tiriamos. Ashyralyev ir Aggez savo straipsnyje [2] nagrinėja daugiamatės hiperbolinės lygties su viena integraline sąlyga

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} - \sum_{r=1}^{m} (a_r(x) u_{x_r})_{x_r} = f(t,x), \quad x = (x_1, \ldots, x_m) \in \Omega, \quad 0 < t < 1,$$

$$u(0,x) = \int_0^1 \alpha(\rho) u(\rho, x)\, d\rho + \phi(x), \quad u_t(0,x) = \psi(x), \quad x \in \overline{\Omega},$$

$$u(t,x) = 0, \quad 0 < t < 1, \quad x \in S$$

stabilumą. Stabilumo sąlygos yra gautos L_2 normoje.

Pulkina straipsniuose [9–13] nagrinėja uždavinių sprendinių egzistavimą ir vienatį. Ramezani, Dehghan ir Razzaghi darbe [14] nagrinėja hiperbolinės lygties

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = F(x,t), \qquad 0 < x < 1, \quad 0 < t \le T,$$

su pradinėmis sąlygomis

$$u(x,0) = r(x), \quad u_t(x,0) = s(x), \qquad 0 \le x \le 1,$$

Dirichlet kraštine sąlyga

$$u(0,t) = p(t)$$

ir nelokaliąja integraline kraštine sąlyga

$$\int_0^1 u(x,t)\, dx = q(t), \quad 0 < t \le T,$$

sprendimą. Autoriai pateikė naują metodą, kuris apjungia spektrinį ir baigtinių skirtumų metodus, tokio tipo uždaviniams spręsti.

Tyrimų objektas

Magistro baigiamojo darbo tyrimų objektas — antros eilės hyperbolinio tipo diferencialinė lygtis su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis, nurodytos lygties aproksimacija trisluoksne skirtumine schema, stabilumo analizė remiantis perėjimo matricos spektro tyrimu.

Darbo tikslas ir uždaviniai

Pagrindinis darbo tikslas yra ištirti stygos svyravimų lygtį su dviem nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis srityje $[0, 1] \times [0, T]$, išnagrinėti skirtuminio operatoriaus perėjimo matricos spektrą ir parodyti, kad skirtuminės schemos stabilumo sąlygos priklauso ne tik nuo pasirinkto diferencialinio operatoriaus aproksimavimo būdo, bet ir nuo parametrų arba funkcijų, įeinančių į nelokaliąją kraštinę sąlygą.

Pirmame skyriuje, remiantis [16], yra formuluojamas uždavinys, atliekama skaitinė uždavinio diskretizacija, įvedami matricų ir vektorių normų apibrežimai, pateikiamas skirtuminės schemos stabilumo apibrėžimas, formuluojamos pagalbinės lemos ir pagrindinė teorema.

Antrąjį skyrių sudaro atlikti skaitiniai eksperimentai, kurie patvirtina teorines išvadas. Yra formuluojamas modelinis uždavinys, grafiškai pateikiami gauti rezultatai, formuluojamos išvados.

Darbe taikomi skaitinės analizės ir tiesinės algebros metodai. Skaitiniai eksperimentai atlikti JAVA programavimo kalba.

Darbo rezultatų praktinė reikšmė

Darbe gauta skirtuminės schemos hiperbolinio tipo lygčiai su dviem nelokaliomis kraštinėmis sąlygomis pakankamoji stabilumo sąlyga, kuri priklauso nuo kraštinių sąlygų parametrų. Nurodyta sąlyga yra esminė sprendžiant hiperbolinio tipo uždavinius, kai T reikšmės yra didelės. Perėjimo matricos spektro tyrimo metodika gali būti pritaikyta plačios klasės diferencialinių lygčių su nelokaliosiomis sąlygomis skirtuminių schemų stabilumui tirti.

1. Uždavinys su integraline sąlyga

1.1. Uždavinio formulavimas

Nagrinėjama antrosios eilės hiperbolinio tipo lygtis

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = f(x,t), \qquad x \in (0,1), \quad t \in (0,T] \tag{1}$$

su pradinėmis sąlygomis

$$u(x,0) = \phi(x), \quad x \in [0,1], \tag{2a}$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x), \quad x \in [0,1] \tag{2b}$$

ir nelokaliosiomis integralinėmis kraštinėmis sąlygomis

$$u(0,t) = \gamma_1 \int_0^1 u(\xi,t)\,d\xi + \mu_1(t), \quad t \in (0,T], \tag{3}$$

$$u(1,t) = \gamma_2 \int_0^1 u(\xi,t)\,d\xi + \mu_2(t), \quad t \in (0,T]. \tag{4}$$

Šiame uždavinyje $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ yra žinomi parametrai; $f(x,t)$, $\phi(x)$, $\psi(x)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ — žinomos funkcijos; $u(x,t)$ — ieškoma funkcija.

1.2. Uždavinio diskretizacija

Suformuluotą (1)–(4) uždavinį spręskime baigtinių skirtumų metodu [15] srityje $[0,1] \times [0,T]$ su pasirinktu $T > 0$. Apibrėžkime tolygius tinklus ω_h ir Ω_τ:

$$\omega_h = \{x_i : x_i = i \cdot h, i = \overline{0,N}, h = 1/N\},$$

$$\Omega_\tau = \{t_j : t_j = j \cdot \tau, j = \overline{0,M}, \tau = T/M\},$$

čia M ir N yra tinklų dimensijos.

Tarkime, kad $U(x_i,t_j)$ yra funkcija, apibrėžta tinklo taškuose $(x_i,t_j) \in \omega_h \times \Omega_\tau$. Pažymėkime

$$U_i^j = U(x_i,t_j), \qquad i = \overline{0,N}, \quad j = \overline{0,M}.$$

Lygtį (1) aproksimuokime trisluoksne išreikštine baigtinių skirtumų schema

$$\frac{U_i^{j-1} - 2U_i^j + U_i^{j+1}}{\tau^2} - \frac{U_{i-1}^j - 2U_i^j + U_{i+1}^j}{h^2} = f_i^j, \tag{5}$$

pradinę sąlygą (2a) aproksimuokime tiksliai, o (2b) sąlygą — dešiniąja baigtinių skirtumų schema

$$U_i^0 = \phi_i, \qquad \frac{U_i^1 - U_i^0}{\tau} = \psi_i, \tag{6}$$

integralines kraštines sąlygas (3) ir (4) aproksimuokime trapecijų formule

$$U_0^j = \gamma_1 h \left(\frac{U_0^j + U_N^j}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} U_i^j \right) + {\mu_1}^j, \tag{7}$$

$$U_N^j = \gamma_2 h \left(\frac{U_0^j + U_N^j}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} U_i^j \right) + {\mu_2}^j. \tag{8}$$

Šiose formulėse pažymėjome $f_i^j = f(x_i, t_j)$, $\phi_i = \phi(x_i)$, $\psi_i = \psi(x_i)$, ${\mu_1}^j = \mu_1(t_j)$ ir ${\mu_2}^j = \mu_2(t_j)$.

1.3. Trisluoksnės schemos suvedimas į dvisluoksnę schemą

Pertvarkykime (5) ir perrašykime (5)–(8) schemą kanoniniu pavidalu (žr. [15])

$$U_i^{j+1} - \left(2U_i^j + \tau^2 \frac{U_{i-1}^j - 2U_i^j + U_{i+1}^j}{h^2} \right) + U_i^{j-1} = \tau^2 f_i^j,$$

$$\mathbf{A}U^{j+1} + \mathbf{B}U^j + \mathbf{C}U^{j-1} = \tau^2 f^j, \tag{9}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = -\left(2\mathbf{E} - \tau^2 \mathbf{\Lambda}\right), \quad \mathbf{C} = \mathbf{E},$$

čia pažymėjome: $\mathbf{E}$ — vienetinė matrica, $\mathbf{\Lambda}$ — kvadratinė $(N-1)$-eilės matrica pavidalo

$$\mathbf{\Lambda} = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2-a & -1-a & -a & -a & \dots & -a & -a & -a & -a \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -b & -b & -b & -b & \dots & -b & -b & -1-b & 2-b \end{pmatrix}, \tag{10}$$

čia $a = \dfrac{h\gamma_1}{1 - \frac{h}{2}(\gamma_1 + \gamma_2)}$, $b = \dfrac{h\gamma_2}{1 - \frac{h}{2}(\gamma_1 + \gamma_2)}$.

Prijunkime prie (9) trivialią sąlygą $U^j = U^j$

$$\begin{cases} \mathbf{E}U^{j+1} &= (2\mathbf{E} + \tau^2 \mathbf{\Lambda})\, U^j - \mathbf{E}U^{j-1} + \tau^2 f^j \\ U^j &= U^j \end{cases}$$

ir suveskime trisluoksnę skirtuminę schemą į dvisluoksnę

$$\begin{pmatrix} U^{j+1} \\ U^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2\mathbf{E} - \tau^2\mathbf{\Lambda}) & -\mathbf{E} \\ \mathbf{E} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^j \\ U^{j-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau^2 f^j \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pažymėję

$$V^{j+1} = \begin{pmatrix} U^{j+1} \\ U^j \end{pmatrix}, \quad V^j = \begin{pmatrix} U^j \\ U^{j-1} \end{pmatrix}, \quad F^j = \begin{pmatrix} \tau^2 f^j \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} (2\mathbf{E} - \tau^2\mathbf{\Lambda}) & -\mathbf{E} \\ \mathbf{E} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{B} & -\mathbf{C} \\ \mathbf{A} & 0 \end{pmatrix},$$

panašiai kaip [8], gauname dvisluoksnę skirtuminę schemą

$$V^{j+1} = \mathbf{S}V^j + F^j, \tag{11}$$

čia $\mathbf{S}$ — skirtuminio operatoriaus perėjimo matrica.

1.4. Skirtuminės schemos stabilumo uždavinys

1.4.1. Normos apibrežimas

Yra teisingos teoremos (žr. [4]):

1 Teorema. *Tegul* $\mathbf{H}$ *— neišsigimusioji matrica* $(\det \mathbf{H} \neq 0)$ *ir* $\|x\|$ *— bet kuri vektoriaus norma, tada*

$$\|x\|_* = \|\mathbf{H}^{-1}x\|$$

irgi yra vektoriaus x *norma.*

2 Teorema. *Tegul* $\mathbf{H}$ *— neišsigimusioji matrica ir* $\|\mathbf{A}\|$ *— bet kuri matricos norma, tada*

$$\|\mathbf{A}\|_* = \|\mathbf{H}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{H}\|$$

irgi yra matricos $\mathbf{A}$ *norma.*

Teoremų įrodymus gauname patikrinę matricos ir vektoriaus normų apibrežimų savybes.

3 Teorema. *Pereinant nuo vektoriaus normos* $\|x\|$ *prie transformuotosios normos* $\|x\|_*$ *ir nuo matricos normos* $\|\mathbf{A}\|$ *prie transformuotosios normos* $\|\mathbf{A}\|_*$ *su ta pačia neišsigimusia matrica* $\mathbf{H}$*, normų suderinamumo savybė išlieka teisinga.*

Įrodymą gauname pasinaudoję normos apibrėžimu ir nelygybe

$$\|\mathbf{A}x\|_* = \|\mathbf{H}^{-1}\mathbf{A}x\| = \|\mathbf{H}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{H}\mathbf{H}^{-1}x\| \leq \|\mathbf{H}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{H}\| \cdot \|\mathbf{H}^{-1}x\| = \|\mathbf{A}\|_* \cdot \|x\|_*.$$

Apibrėžkime bet kurios matricos $\mathbf{A}$ normą

$$\|\mathbf{A}\|_* = \|\mathbf{H}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{H}\|_2, \tag{12}$$

čia

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\max_{1\leq i\leq N-1} \lambda_i(\mathbf{A}^*\mathbf{A})},$$

yra klasikinė matricos norma ($\mathbf{A}^*$ — transponuota matrica), $\mathbf{H}$ — neišsigimusioji matrica.

Vektoriaus normą, suderintą su (12) matricos norma apibrėžkime lygybe

$$\|x\|_* = \left\|\mathbf{H}^{-1}x\right\|_2 = \sqrt{h\sum_{i=1}^{N-1} \tilde{x}_i^2}, \tag{13}$$

čia $\tilde{x}_i$ — vektoriaus $\mathbf{H}^{-1}x$ koordinatės.

Remiantis [6, 17] šaltiniais, dvisluoksnės schemos (11) stabilumo sąlygas galima tirti analizuojant matricos $\mathbf{S}$ spektrą. Pastebėkime, kad matrica $\mathbf{S}$, kaip ir $\mathbf{\Lambda}$, yra nesimetrinė. Dvisluoksnės skirtuminės schemos (11) pakankamoji stabilumo sąlyga yra

$$\|\mathbf{S}\| \leq 1. \tag{14}$$

Perėjimo matrica $\mathbf{S}$ turi $2(N-1)$ tiesiškai nepriklausomų tikrinių vektorių. Pažymėkime juos $v_1, v_2, \ldots, v_{2(N-1)}$ ir sudarykime iš jų matricą $\mathbf{H}$, kurios stulpeliai yra vektoriai v_i

$$\mathbf{H} = \left(v_1, \ldots, v_{2(N-1)}\right).$$

Matrica $\mathbf{H}$ yra neišsigimusioji.

Pritaikykime (12) normą matricai $\mathbf{S}$

$$\|\mathbf{S}\|_* = \left\|\mathbf{H}^{-1}\mathbf{S}\mathbf{H}\right\|_2 = \|\mathbf{J}\|_2 = \max_{1\leq i\leq 2(N-1)} |\mu_i(\mathbf{S})| = \rho(\mathbf{S}), \tag{15}$$

čia $\mathbf{J} = \operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_{2(N-1)})$, $\rho(\mathbf{S})$ — matricos $\mathbf{S}$ spektrinis spindulys (μ_i, $i = 1, \ldots, 2(N-1)$ yra matricos $\mathbf{S}$ tikrinės reikšmės). Vektoriaus norma, suderinta su matricine norma $\|\cdot\|_2$, apibrėžiama (13) lygybe, kurioje $i = 1, \ldots, 2(N-1)$.

1.4.2. Perėjimo matricos spektro tyrimas

Pastebėkime, kad trisluoksnės schemos (9) matricos $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ ir $\mathbf{C}$ turi tuos pačius tikrinius vektorius. Atsižvelgiant į matricos $\mathbf{B}$ pavidalą, galima suformuluoti lemą:

1 Lema. *Matricų* $\mathbf{A}$*,* $\mathbf{B}$ *ir* $\mathbf{C}$ *tikrinių vektorių sistema sutampa su matricos* $\mathbf{\Lambda}$ *tikrinių vektorių sistema.*

Apibrėžkime λ ir μ kaip, atitinkamai, matricų $\mathbf{\Lambda}$ ir $\mathbf{S}$ tikrines reikšmes, t.y.

$$\det(\mathbf{\Lambda} - \lambda \mathbf{E}) = 0, \tag{16a}$$

$$\det(\mathbf{S} - \mu \mathbf{E}) = 0. \tag{16b}$$

Iš (16b) lygties ir matricos $\mathbf{S}$ struktūros gauname

$$\det \begin{pmatrix} (2\mathbf{E} - \tau^2 \mathbf{\Lambda}) - \mu \mathbf{E} & -\mathbf{E} \\ \mathbf{E} & -\mu \mathbf{E} \end{pmatrix} = 0$$

arba

$$\det(\mu^2 \mathbf{E} - (2\mathbf{E} - \tau^2 \mathbf{\Lambda})\mu \mathbf{E} + \mathbf{E}) = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\det(\mathbf{A}\mu^2 + \mathbf{B}\mu + \mathbf{C}) = 0. \tag{17}$$

Lygtis (17) yra apibendrinto netiesinio tikrinių reikšmių uždavinio

$$\mu^2 \mathbf{A} y + \mu \mathbf{B} y + \mathbf{C} y = 0 \tag{18}$$

charakteristinė lygtis. Ji yra gerai ištirta, kai $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ ir $\mathbf{C}$ yra simetrinės matricos (žr. [7]). Taigi gautą rezultatą galime suformuluoti tokiu būdu

2 Lema. *Matricos* $\mathbf{S}$ *tikrinės reikšmės sutampa su apibendrinto netiesinio tikrinių reikšmių uždavinio charakteristinės lygties* (17) *sprendiniais.*

Reikia pabrėžti, kad (17) netiesinis tikrinių reikšmių uždavinys turi $2(N-1)$ tikrinių reikšmių, čia $(N-1)$ — matricų $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ ir $\mathbf{C}$ eilė.

Raskime sąryšį tarp matricos $\mathbf{S}$ tikrinių reikšmių μ ir matricos $\mathbf{\Lambda}$ tikrinių reikšmių λ. Tam pateikime rezultatą, įrodytą [16] knygoje (Daugiau informacijos apie matricos $\mathbf{\Lambda}$ spektro tyrimus prie įvairių kraštinių sąlygų galima rasti [18, 19]).

3 Lema. *Jeigu* $h < 2/(\gamma_1 + \gamma_2)$*, tai* $\forall \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ *visos matricos* $\mathbf{\Lambda}$ *tikrinės reikšmės* λ *yra realios, skirtingos ir*

1. *kai* $\gamma_1 + \gamma_2 < 2$*, tai visos tikrinės reikšmės yra teigiamos;*
2. *kai* $\gamma_1 + \gamma_2 = 2$*, tai* $\lambda = 0$ *yra tikrinė reikšmė, o likusios* $N-2$ *tikrinės reikšmės yra teigiamos;*
3. *kai* $\gamma_1 + \gamma_2 > 2$*, tai viena tikrinė reikšmė yra neigiama, o visos likusios — teigiamos.*

Visais trim atvejais teigiamos tikrinės reikšmės λ_k randamos iš lygybės

$$\lambda_k = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\alpha_k h}{2},$$

čia α_k yra lygties

$$\tan \frac{\alpha_k}{2} = \frac{2}{h(\gamma_1 + \gamma_2)} \tan \frac{\alpha_k h}{2}$$

sprendiniai.

Visos tikrinės reikšmės yra skirtingos. Todėl, remiantis 3 lema , matrica $\mathbf{\Lambda}$ turi $N-1$ tiesiškai nepriklausomų tikrinių vektorių $y_1, y_2, \dots, y_{N-1}$.

Įrašę bet kokį tikrinį vektorių y_k, ($k = \overline{1, N-1}$) į lygtį (18) ir panaudoję 1 lemą, gauname

$$\mu^2 \mathbf{A} y_k + \mu \mathbf{B} y_k + \mathbf{C} y_k = \left(\mu^2 \lambda_k^2(\mathbf{A}) + \mu \lambda_k(\mathbf{B}) + \lambda_k(\mathbf{C})\right) y_k = 0.$$

Iš čia seka

$$\mu^2 \lambda_k^2(\mathbf{A}) + \mu \lambda_k(\mathbf{B}) + \lambda_k(\mathbf{C}) = 0, \qquad k = \overline{1, N-1}. \tag{19}$$

Remiantis tikrinių reikšmių uždaviniu (19) galima suformuluoti lemą:

4 Lema. *Kiekvieną trisluoksnės schemos* (5)–(8) *matricos $\mathbf{\Lambda}$ tikrinę reikšmę λ_k ($k = \overline{1, N-1}$), atitinka dvi matricos $\mathbf{S}$ tikrinės reikšmės μ_k^1, μ_k^2*

$$\mu_k^{1,2} = \left(1 - \frac{\tau^2 \lambda_k}{2}\right) \pm \sqrt{\left(1 - \frac{\tau^2 \lambda_k}{2}\right)^2 - 1}. \tag{20}$$

Įrodymas. Iš (9) išraiškų gauname

$$\lambda_k(\mathbf{A}) = 1, \quad \lambda_k(\mathbf{B}) = -(2 - \tau^2 \lambda_k), \quad \lambda_k(\mathbf{C}) = 1.$$

Įrašę $\lambda_k(\mathbf{A})$, $\lambda_k(\mathbf{B})$ ir $\lambda_k(\mathbf{C})$ išraiškas į (19) formulę ir išsprendę kvadratinę lygtį, nesunkiai gauname (20) išraiškas.

5 Lema. *Tegul λ_k, y_k yra atitinkamai matricos $\mathbf{\Lambda}$ tikrinė reikšmė ir tikrinis vektorius, o μ_k^1, μ_k^2 ir v_k^1, v_k^2 — matricos $\mathbf{S}$ tikrinės reikšmės ir tikriniai vektoriai, kurie atitinka λ_k ir y_k, tokie, kad $\mu_k^1 \neq \mu_k^2$ ir μ_k^1, $\mu_k^2 \neq 0$. Tada*

$$v_k^{1,2} = \begin{pmatrix} y_k \\ \\ \dfrac{1}{\mu_k^{1,2}} y_k \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Įrodymas. Lemos įrodymui nagrinėkime sandaugą $\mathbf{S}v_k^i$. Įrašę į ją matricos $\mathbf{S}$ išraišką, bei pasinaudoję formulėmis (18), (21) ir

$$\begin{aligned} \mu_k^{1,2}\mathbf{B}y_k + \mathbf{C}y_k &= -\left(\mu_k^{1,2}\right)^2\mathbf{A}y_k, \\ -\mathbf{B}y_k - \frac{1}{\mu_k^{1,2}}\mathbf{C}y_k &= \mu_k^{1,2}\mathbf{A}y_k, \end{aligned}$$

gauname

$$\begin{pmatrix} -\mathbf{B} & -\mathbf{C} \\ \mathbf{A} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_k \\ \frac{1}{\mu_k^{1,2}}y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{B}y_k - \frac{1}{\mu_k^{1,2}}\mathbf{C}y_k \\ \mathbf{A}y_k \end{pmatrix} = \mu_k^{1,2} \begin{pmatrix} y_k \\ \frac{1}{\mu_k^{1,2}}y_k \end{pmatrix}. \tag{22}$$

(22) lygybė apibrežia tikrinių reikšmių uždavinį $\mathbf{S}v_k^i = \mu_k^{1,2}v_k^i$. Nelygybė $\mu_k^1 \neq \mu_k^2$ užtikrina tikrinių vektorių v_k^1, v_k^2 tiesinį nepriklausomumą.

4 Teorema. *Lygybė $\rho(\mathbf{S}) = 1$ schemai (5)–(8) yra teisinga su bet kokiu $h > 0$ tada ir tik tada, kai visos matricos $\mathbf{\Lambda}$ tikrinės reikšmės λ_k yra neneigiamos.*

Įrodymas. Pasinaudoję (20) išraiška, įvertinkime $|\mu_k^i|$ ($k = \overline{1, N-1}$, $i = 1, 2$), priklausomai nuo λ_k reikšmės. Tarkime $\tau < h$. Tada remiantis 3 lema

$$\lambda_k \geq 0 \Longleftrightarrow \gamma_1 + \gamma_2 \leq 2$$

ir

$$\lambda_k = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\alpha_k h}{2} \leq \frac{4}{h^2}.$$

Išskirkime atskirus atvejus:

1. $\lambda_k > 0$, $\mu_k^i \in \mathbb{R}$. Atvejis yra negalimas, nes

$$\left|1 - \frac{\tau^2\lambda_k}{2}\right| > 1 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{\tau^2\lambda_k}{2} < 0, \\ \frac{\tau^2\lambda_k}{2} > 2 \end{array}\right. , \text{ tačiau}$$

$$\left[\begin{array}{ll} \frac{\tau^2\lambda_k}{2} \not< 0, & \text{nes } \tau > 0, \lambda_k > 0, \\ \frac{\tau^2\lambda_k}{2} \not> 2, & \text{nes } \frac{\tau^2\lambda_k}{2} \leq \frac{2\tau^2}{h^2} < 2. \end{array}\right.$$

2. $\lambda_k > 0$, $\mu_k^i \in \mathbb{C}$. Atvejis yra galimas, kai

$$\left|1 - \frac{\tau^2\lambda_k}{2}\right| < 1 \Longleftrightarrow 0 < \frac{\tau^2\lambda_k}{2} < 2.$$

   Tada

$$\mu_k^i = \left(1 - \frac{\tau^2\lambda_k}{2}\right) \pm i\sqrt{1 - \left(1 - \frac{\tau^2\lambda_k}{2}\right)^2},$$

$$\left|\mu_k^i\right| = \left(1 - \frac{\tau^2\lambda_k}{2}\right)^2 + 1 - \left(1 - \frac{\tau^2\lambda_k}{2}\right)^2 = 1.$$

3. $\lambda_k < 0$. Šiuo atveju bent viena iš tikrinių reikšmių netenkina stabilumo sąlygos, nes

$$\left|\mu_k^i\right| = \left|\left(1 + \frac{\tau^2|\lambda_k|}{2}\right) \pm \sqrt{\left(1 + \frac{\tau^2|\lambda_k|}{2}\right)^2 - 1}\right| > 1.$$

4. $\lambda_k = 0$. Tada

$$\left|\mu_k^i\right| = 1$$

Iš 2 ir 4 punkto seka teoremos įrodymas.

1 Išvada. Jei $\tau < h$, tai trisluoksnės skirtuminės schemos (5)–(8) pakankamoji stabilumo sąlyga yra $\gamma_1 + \gamma_2 \leq 2$.

2. Skaitinis eksperimentas

Modelinį uždavinį parenkame taip, kad (1)–(4) uždavinys turėtų analitinį sprendinį $u(x,t) = x^3 + t^3$. Tada turime tokį stygos svyravimų modelį

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 6t - 6x, \qquad x \in (0,1), \quad t \in (0,T], \tag{23}$$

$$u(x,0) = x^3, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0, \tag{24}$$

$$u(0,t) = \gamma_1 \int_0^1 u(x,t)\,dx + t^3 - \gamma_1 \left(\frac{1}{4} + t^3\right), \tag{25}$$

$$u(1,t) = \gamma_2 \int_0^1 u(x,t)\,dx + 1 + t^3 - \gamma_2 \left(\frac{1}{4} + t^3\right). \tag{26}$$

Pritaikykime (5)–(8) skirtuminę schemą ir apskaičiuokime sprendinio reikšmes laiko sluoksnyje $t = T$ (žr. priedą Nr. 1.). Maksimalią absoliutinę santykinę paklaidą randame pagal formulę

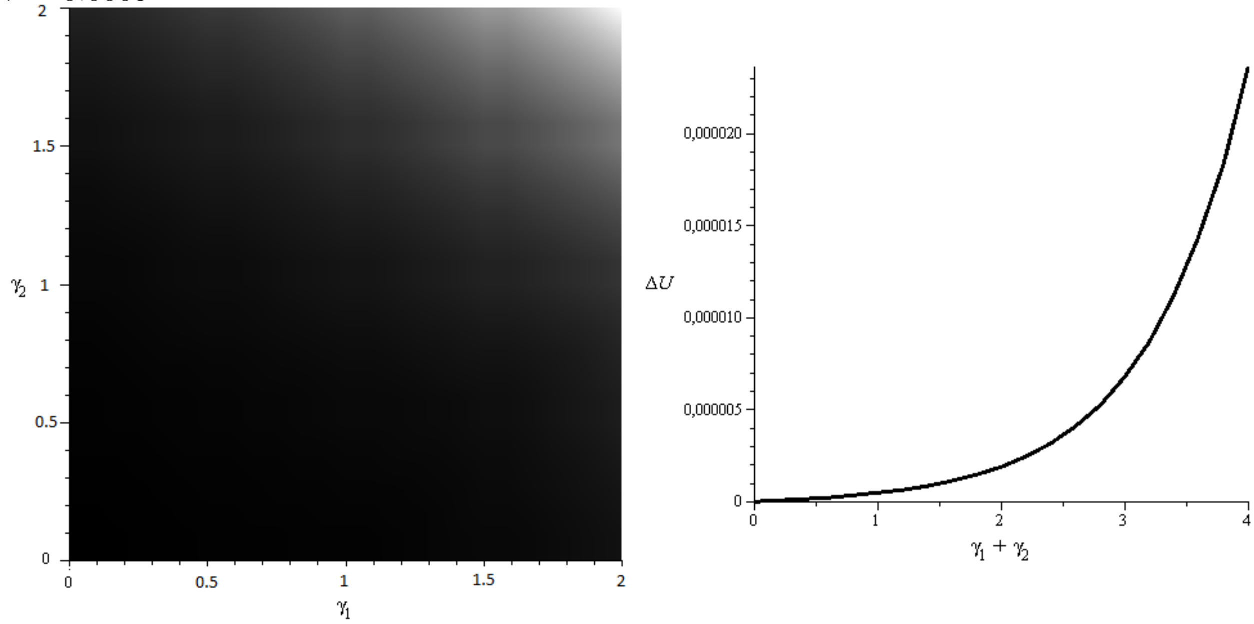
$$\Delta U = \max_{0<i<N} \left| \frac{u(x_i, t_M) - U^*(x_i, t_M)}{u(x_i, t_M)} \right|,$$

čia U^* yra skirtuminio uždavinio (23)–(26) sprendinys.

Esant mažoms T reikšmėms ($T < 5$) iš 1 pav. matome, kad skirtuminė schema yra stabili (tamsesnė sritis), kai $\gamma_1 + \gamma_2 \leq 2$, tačiau nestabilumo sritis (šviesesnė sritis) prasideda ne iš karto, kai sąlyga $\gamma_1 + \gamma_2 > 2$ yra teisinga, o šiek tiek vėliau. Iš čia galima padaryti išvadą, kad nedidelėms T reikšmėms, skirtuminė schema gali likti stabili, kai $\gamma_1 + \gamma_2 > 2$, tačiau, kai $\gamma_1 + \gamma_2 \leq 2$ skirtuminė schema yra būtinai stabili.

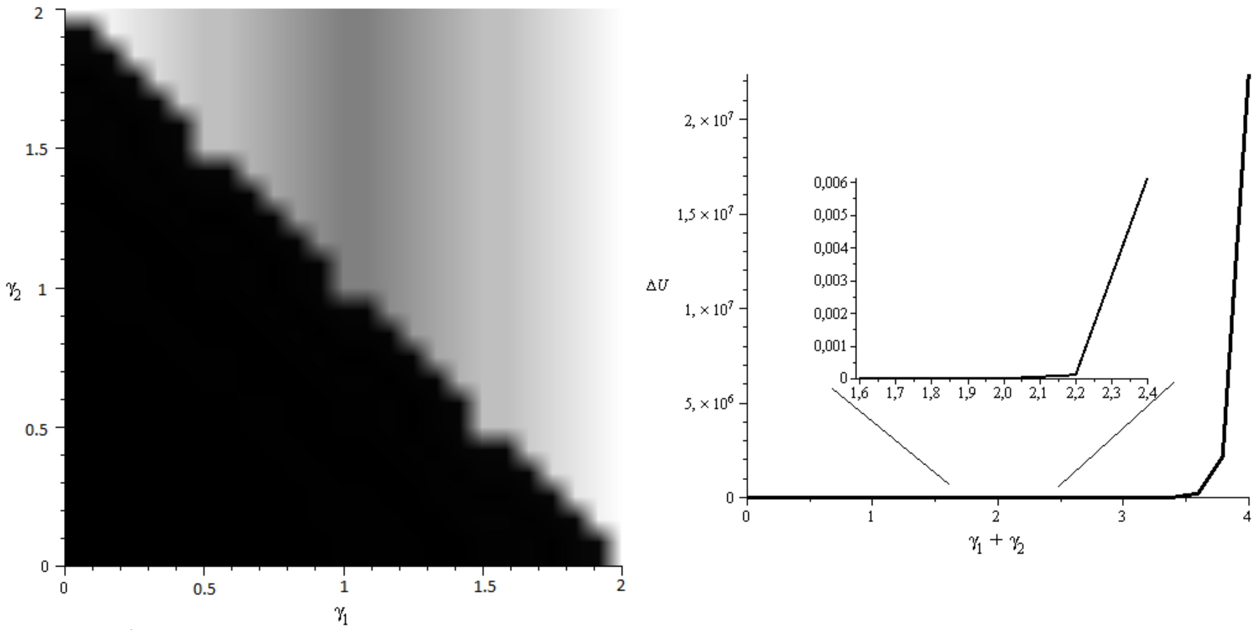
Iš 2 ir 3 pav. matome aiškią stabilumo sritį, kai $\gamma_1 + \gamma_2 \leq 2$, o nestabilumo sritis pasireiškia, kai tik yra patenkinama sąlyga $\gamma_1 + \gamma_2 > 2$. Iš šito pastebėjimo galima padaryti išvadą, kad didelėms T reikšmėms ($T > 10$) pakankamoji stabilumo sąlyga $\gamma_1 + \gamma_2 \leq 2$ yra esminė, ir jei kraštinių sąlygų parametrai γ_1 ir γ_2 jos netenkina, tai išreikštinės skirtuminės schemos sprendinys nekonverguoja į analitinį sprendinį, o tai reiškia, kad schema yra nestabili.

1 pav. Maksimali paklaida ΔU prie skirtingų γ_1 ir γ_2 reikšmių, kai $h = 0.001$, $T = 1$, $\tau = 0.0005$



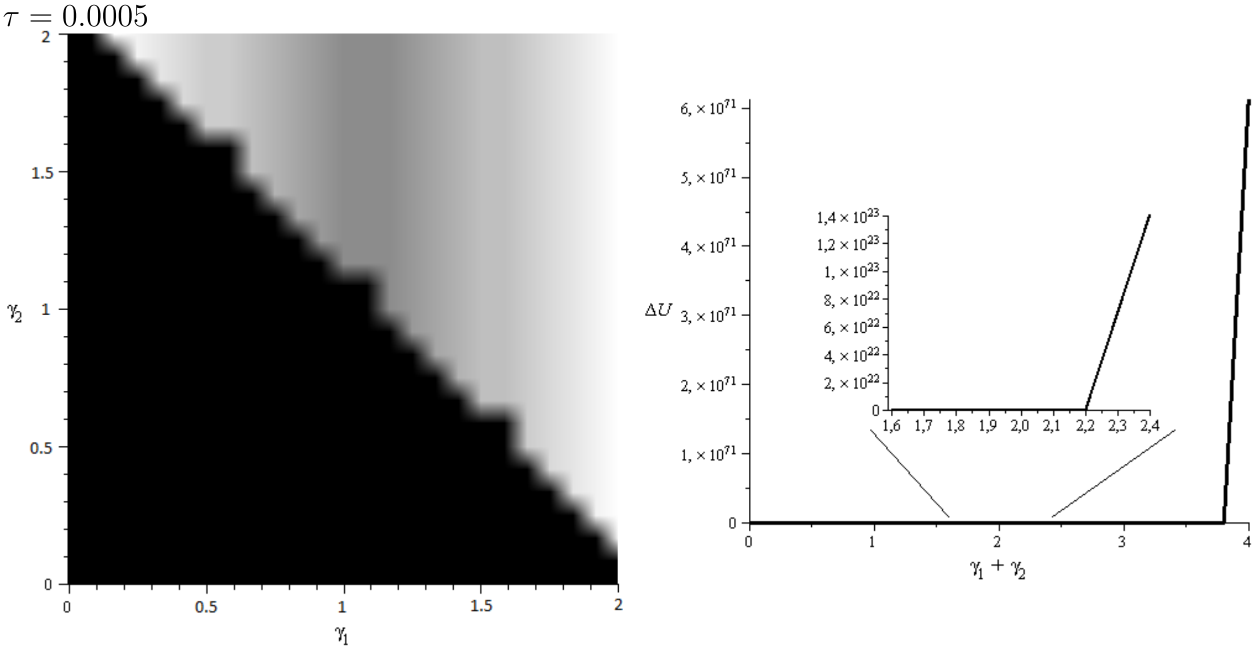
$\gamma_1+\gamma_2$	0	0.2	0.4	0.6	$\cdots$	1.4	1.6
ΔU	$3.1{\cdot}10^{-10}$	$6.1\cdot10^{-8}$	$1.3\cdot10^{-7}$	$2.2\cdot10^{-7}$	$\cdots$	$8.3\cdot10^{-7}$	$1.1\cdot10^{-6}$
$\gamma_1+\gamma_2$	**1.8**	**2.0**	**2.2**	2.4	$\cdots$	3.8	4
ΔU	$\mathbf{1.4\cdot10^{-6}}$	$\mathbf{1.9\cdot10^{-6}}$	$\mathbf{2.4\cdot10^{-6}}$	$3.1\cdot10^{-6}$	$\cdots$	$1.8\cdot10^{-5}$	$2.4\cdot10^{-5}$

2 pav. Maksimali paklaida ΔU prie skirtingų γ_1 ir γ_2 reikšmių, kai $h = 0.001$, $T = 10$, $\tau = 0.0005$



$\gamma_1+\gamma_2$	0	0.2	0.4	0.6	$\cdots$	1.4	1.6
ΔU	$6.8{\cdot}10^{-13}$	$1.2{\cdot}10^{-10}$	$1.8{\cdot}10^{-10}$	$9.2{\cdot}10^{-11}$	$\cdots$	$3.2{\cdot}10^{-10}$	$1.8\cdot10^{-9}$
$\gamma_1+\gamma_2$	**1.8**	**2.0**	**2.2**	2.4	$\cdots$	3.8	4
ΔU	$\mathbf{2.9\cdot10^{-9}}$	$\mathbf{1.5\cdot10^{-7}}$	$\mathbf{9.0\cdot10^{-5}}$	$6.1\cdot10^{-3}$	$\cdots$	$2.2\cdot10^{6}$	$2.2\cdot10^{7}$

3 pav. Maksimali paklaida ΔU prie skirtingų γ_1 ir γ_2 reikšmių, kai $h = 0.001$, $T = 50$, $\tau = 0.0005$



$\gamma_1+\gamma_2$	0	0.2	0.4	0.6	$\cdots$	1.4	1.6
ΔU	$1.4{\cdot}10^{-13}$	$4.5{\cdot}10^{-13}$	$1.4{\cdot}10^{-12}$	$2.4{\cdot}10^{-12}$	$\cdots$	$9.0{\cdot}10^{-12}$	$2.9{\cdot}10^{-12}$

$\gamma_1+\gamma_2$	**1.8**	**2.0**	**2.2**	2.4	$\cdots$	3.8	4
ΔU	$\mathbf{3.3 \cdot 10^{-11}}$	$\mathbf{3.0 \cdot 10^{-8}}$	$\mathbf{1.2 \cdot 10^{13}}$	$1.4 \cdot 10^{23}$	$\cdots$	$5.3 \cdot 10^{66}$	$6.1 \cdot 10^{71}$

Išvados

1. Išreikštinės skirtuminės schemos hiperbolinei lygčiai su integralinėmis kraštinėmis sąlygomis stabilumą galima išnagrinėti, suvedant trisluoksnę skirtuminę schemą į dvisluoksnę ir naudojant netiesinio tikrinių reikšmių uždavinio rezultatus.

2. Jei $\tau < h$, tai trisluoksnės skirtuminės schemos, aproksimuojančios antros eilės hiperbolinę lygtį su nelokaliosiomis integralinėmis kraštinėmis sąlygomis, pakankamoji stabilumo sąlyga gali būti nusakyta paprasta lengvai patikrinama nelygybe $\gamma_1 + \gamma_2 \leq 2$.

3. Skirtuminės schemos hiperbolinei lygčiai su integralinėmis kraštinėmis sąlygomis stabilumas priklauso ne tik nuo diferencialinės lygties aproksimavimo, bet ir nuo parametrų γ_1, γ_2 reikšmių integralinėse sąlygose.

4. Skaitinio eksperimento rezultatai pilnai patikrina teorines išvadas apie skirtuminių schemų stabilumą. Atskirai galima pabrėžti, kad didėjant T reikšmei, pakankamoji stabilumo sąlyga $\gamma_1 + \gamma_2 \leq 2$ tampa vis labiau esmine — kai $\gamma_1 + \gamma_2 > 2$, nestabilumas pasireiškia iš karto.

Literatūros sąrašas

[1] W.T. Ang and A.B. Gumel. A boundary integral method for the three-dimensional heat equation subject to specification of energy. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 135(2):303–311, 2001.

[2] A. Ashyralyev and N. Aggez. Finite difference method for hyperbolic equations with the nonlocal integral condition. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2011(2011), 2011.

[3] J.R. Cannon, Y. Lin, and A.L. Matheson. The solution of the diffusion equation in two-space variables subject to the specification of mass. *Journal of Applied Analysis*, 50:1–19, 1993.

[4] Collatz, L. *Funktionalanalysis und Numerische Mathematik*. Springer-Verlag, 1964.

[5] M. Dehghan. The one-dimensional heat equation subject to a boundary integral specification. *Chaos, Solitions and Fractals*, 32(2):661–675, 2007.

[6] A.V. Goolin, N.I. Ionkin, and V.A. Morozova. Difference shemes with nonlocal boundary conditions. *Computational methods in applied mathematics*, 1(1):62–71, 2001.

[7] P. Lancaster. *Lambda-matrices and vibrating systems*. Pergamon Press, 1966.

[8] J. Novickij, M. Sapagovas, and F. Ivanauskas. On the stability of an explicit difference scheme for hyperbolic equation with integral conditions. In *17th International Conference Mathematical Modelling and Analysis, Abstracts*.

[9] L.S. Pulkina. A nonclassical problem for a degenerate hyperbolic equation. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 1991.

[10] L.S. Pulkina. A nonlocal problem for a loaded hyperbolic equation. *Tr. Mat. Inst. Steklova*, 236, 2002.

[11] L.S. Pulkina. A mixed problem with integral condition for the hyperbolic equation. *Mat. Zametki*, 74(3):435–445, 2003.

[12] L.S. Pulkina. A nonlocal problem with integral conditions for hyperbolic equation. *Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics*, 2(4), 2011.

[13] L.S. Pulkina and E.N. Klimova. Nelokal'naja kraevaja zadacha dlia nelineinogo uravnenija kolebanija struni. *Proceedings of the Third All-Russian Scientific Conference (29–31 May 2006). Part 3*, 2006.

[14] M. Ramezan, M. Dehghan, and M. Razzaghi. Combined finite difference and spectral methods for the numerical solution of hyperbolic equation with an integral condition. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 24(1):1–8, 2008.

[15] A. A. Samarskii. *The Theory of Difference Schemes.* Marcel Dekker, 2001.

[16] M. Sapagovas. *Diferencialinių lygčių kraštiniai uždaviniai su nelokaliosiomis sąlygomis.* Mokslo aidai, 2007.

[17] M. Sapagovas. On the stability of a finite-difference scheme for nonlocal parabolic boundary-value problems. *Lith. Math. J.*, 48(3):339–356, 2008.

[18] M. Sapagovas, T. Meškauskas, and F. Ivanauskas. Numerical spectral analysis of a difference operator with non-local boundary conditions. *Applied Mathematics and Computation*, 218:7515–7527, 2012.

[19] M. Sapagovas and A. Stikonas. On the structure of the spectrum of a differencial operator with a nonlocal condition. *Differencial Equations*, 41(7):1010–1018, 2005.

Priedas Nr. 1.
Programos kodas

```
public class Magistrinis {
public static void main(String[] args) {
        double [][] arr,test,paklaida;
        final int i=1000,j=100000;
        final double dx= 1,
        T=50;
        double Tau,hx;
        double gamma1, gamma2;
        int k=0;
        hx=dx/i;
        Tau=T/j;
        arr = new double[i+1][j+1];
        test = new double[i+1][j+1];
        paklaida = new double [21][21];
for(int b=0; b<21;b++){
for(int c=0; c<21;c++){
        gamma1=b*0.1;
        gamma2=c*0.1;
for(int u=0; u<arr.length;u++){
        arr[u][0]=phi(u,hx);
}
for(int u=0; u<arr.length;u++){
        arr[u][1]=prad(arr,u,Tau,psi());
}
for(int v=2;v<arr[1].length;v++){
for(int u=1;u<arr.length-1;u++){
        arr[u][v]=schema(arr,u,v-1,hx,Tau,f(u,hx,v-1,Tau));
}
arr[0][v]=krastas0(arr,arr.length,v,gamma1,gamma2,mu1(v,Tau,gamma1),
          mu2(v,Tau,gamma2),hx);
arr[arr.length-1][v]=krastasN(arr,arr.length,v,gamma1,gamma2,
          mu1(v,Tau,gamma1), mu2(v,Tau,gamma2),hx);
}
fill1(test,hx,Tau);
paklaida[b][c]=paklaida(test,arr,i);
}
}
writeArray(paklaida);
}
public static void fill1(double test[][],double hx, double Tau){
        for (int u=0;u<test.length;u++){
                for (int v=0;v<test[u].length;v++){
                 test[u][v]=function(u,hx,v,Tau);
```

```
                }
        }
}
public static double paklaida(double test[][],double arr[][],int i){
        double pakl[];
        pakl = new double [i+1];
        for (int u=0;u<i+1;u++){
        pakl[u]=Math.abs((test[u][test[u].length-1]
        -arr[u][arr[u].length-1])
        /test[u][test[u].length-1]);
        }
return(max(pakl));
}
public static double phi(int i, double hx){
        double z;
        z=Math.pow(i*hx,3);
return(z);
 }
public static double mu1(int j, double Tau,double gamma1){
        double z;
        z=Math.pow(j*Tau,3)-gamma1*(0.25+Math.pow(j*Tau,3));
return(z);
}
public static double mu2(int j, double Tau,double gamma2){
        double z;
        z=1+Math.pow(j*Tau,3)-gamma2*(0.25+Math.pow(j*Tau,3));
return(z);
}
public static double psi(){
        double z;
        z=0;
return(z);
}
public static double f(int i, double hx,int j, double Tau){
        double z;
        z=6*Tau*j-6*hx*i;
return(z);
}
public static double function(int i, double hx,int j, double Tau){
        double z;
        z=Math.pow(hx*i,3)+Math.pow(Tau*j,3);
return(z);
}
public static  double schema(double [][] S,int i, int j,double hx,
  double Tau,double f){
        double z;
        z=((S[i-1][j]-2*S[i][j]+S[i+1][j])*Math.pow(hx,-2) + f)
```

```
          *Math.pow(Tau,2)-S[i][j-1]+2*S[i][j];
return(z);
}
public static  double prad(double [][] S,int i, double Tau,
  double phi){
          double z;
          z=S[i][0]+phi*Tau;
return(z);
}

public static double sum(double [][]S,int i,int v){
          double z;
          z=0;
          for (int u=1;u<S.length-1;u++){
                  z+=S[u][v];
          }
return(z);
 }
public static double krastas0(double [][]S,int i,int j,double gamma1,
  double gamma2, double mu1, double mu2,double hx){
          double z;
          z=-(gamma1*mu2*hx+2*mu1-gamma2*mu1*hx+2*hx*gamma1*sum(S,i,j))/
          (gamma2*hx-2+gamma1*hx);
return(z);
}
public static double krastasN(double [][]S,int i,int j,double gamma1,
  double gamma2, double mu1, double mu2,double hx){
          double z;
          z=(-2*mu2+gamma1*mu2*hx-gamma2*mu1*hx-2*gamma2*hx*sum(S,i,j))/
          (gamma2*hx-2+gamma1*hx);
return(z);
}
public static void writeArray(double arr[][]){
          try{
          FileWriter fw = new FileWriter("D:\\magistrinis\\1.txt");
          fw.write("m := Matrix([");
          for (int j = 0; j<arr[1].length; j++){
              fw.write("[");
          for (int i = 0; i<arr.length; i++){
                  fw.write(arr[i][j] + ",");
          }
          fw.write("],");
          fw.write("\n");
          }
          fw.write("])");
          fw.close();
          }
```

```
            catch(IOException e){}
        }
    public static double max(double[] array) {
           if (array== null) {
             throw new IllegalArgumentException
             ("The Array must not be null");
           } else if (array.length == 0) {
               throw new IllegalArgumentException
               ("Array cannot be empty.");
           }
           double max = array[0];
           for (int j = 1; j < array.length; j++) {
               if (Double.isNaN(array[j])) {
                   return Double.NaN;
               }
               if (array[j] > max) {
                   max = array[j];
               }
           }
           return max;
      }
    }
```