

ŠIAULIŲ UNIVERSITETAS
TECHNOLOGIJOS FAKULTETAS
ELEKTRONIKOS KATEDRA

Žygimantas Laurutis

Garsinio signalo psichoakustinis įvertinimas

Magistro darbas

Darbo vadovas:
prof. G.Daunys

Šiauliai, 2014

TURINYS

ĮVADAS.....	3
1. GARSAS.....	5
2. GARSO SIGNALAI.....	9
2. 1. Analoginis garso signalas.....	9
2. 2. Skaitmeninis garso signalas.....	12
3. ŽMOGAUS KLAUSOS APRAŠYMAS.....	14
3. 1. Ausies anatomija.....	14
3. 2. Klausos ir garso virpesių jutimas.....	16
3. 3. Girdos slenkstis ir garso jutimas.....	17
4. MOKSLINIS TYRIMAS.....	25
4. 1. Teorinė dalis.....	25
4. 1. 1. Kvazivientakčio trakto perdavimo funkcijos tyrimas.....	30
4. 1. 2. Kvazidvitalakčio trakto perdavimo funkcijos tyrimas.....	36
4. 2. Eksperimentinė dalis.....	40
4. 2. 1. Eksperimento medžiagos sudarymas.....	40
4. 2. 2. Eksperimento rezultatų apžvalga.....	47
IŠVADOS.....	50
SUMMARY.....	51
LITERATŪRA.....	52

IVADAS

Darbo tema – garsinio signalo kokybinių parametru psichoakustinė analizė.

Darbo aktualumas – yra priimta įrangos techniniuose parametruose pateikti tik suminį signalo iškraipymo koeficientą. Darbe pateikiami įrodymai, kad iškraipymų spektrinė sudėtis yra žymiai svarbesnė, nei absoliuti vertė, išreikšta procentais.

Paprastai pirkėjas, pirkdamas garso įrangą, lygina ir studijuoja techninius parametrus, pateikiamus įvairių įrangos gamintojų. Valstybiniuose įrangos pirkimo konkursuose pateikiamos sąlygos, pavyzdžiui:

Iškraipymai ne didesni nei 0,05%. Atkuriamų dažnių diapazonas ne siauresnis kaip nuo 20 iki 20000 Hz.

Sąlygų negalintys įvykdyti gamintojai ar įrangos tiekėjai iš konkursų yra šalinami.

Labai dažnai pasitaiko atvejų, kuomet tokių sąlygų neatitinka tikrai kokybiška įranga, o laimi gamintojai, kurie ne visai sąžiningai nurodo gaminamos įrangos techninius parametrus, pavyzdžiui:

Harmonic distortion: 0,01%

Frequency response: 20 hz ~ 40 kHz @ - 10 dB

Pase pateikiamas praleidžiamos juostos plotis – įspūdingas, tačiau yra prierašas, kad įrenginys išlaiko šį parametą su 10 dB paklaida. Toks aprašymas iš karto padaro šį parametą visiškai neinformatyvų.

Gamintojo pateikiamas 0,01% iškraipymų koeficientas taip pat gerokai pranoksta sąlygose aprašytus 0,05%. Bet ar šis įrenginys tikrai kokybiškesnis? Ne, nes šis konkretus gamintojas pateikia tik harmoninius iškraipymus. Galbūt, pridėjus neharmoninius iškraipymus, lengvai viršytume sąlygose reikalaujamus 0,05%.

Galų gale, jei pripažinsime, kad žmogaus ausis skiria tik garsus, esančius 20 Hz - 20 kHz ribose bei neskiria harmoninių iškraipymų iki 0,1%, tai šiuos abu parametrus galėsime apskritai anuliuoti ir pagrindiniu kriterijumi laikyti tik įrenginio kainą.

Darbo uždaviniai

1. Išstudijuoti, kokie įrangos parametrai yra pateikiami įrangos techniniuose aprašymuose ir kokie parametrai reikalaujami valstybinių įrangos pirkimo konkursų sąlygose.
2. Išanalizuoti publikacijas, kuriose šie kokybiniai parametrai yra siejami su žmogaus klausa.
3. Sudaryti tyrimo metodiką ir atlikti eksperimentą.
4. Išanalizuoti gautus rezultatus, palyginti su kitų mokslininkų gautais rezultatais.

Problemos ištirtumas

Nepaisant to, kad garsiniai signalai, garsinių signalų perdavimo terpės ir akustinės sistemos paklūsta klasikinės fizikos dėsniams, ši sritis, palyginus, yra labai mažai studijuota ir aprašyta. Net ir šiuolaikinėje literatūroje gausu dviprasmiškumo ir mistikos. Apie garso santykį su žmogaus klausa objektyvios literatūros dar mažiau. Viešai sutinkama, kad matavimo rezultatai mažai koreliuoja su įrenginio garso kokybe [1].

Tyrimo metodai

Tyrimas atliekamas nuotolinės apklausos metodu. Respondentams elektroniniu paštu išsiunčiamas „klausimynas“ sudarytas iš trumpų garso pavyzdžių. Kiekvienas „klausimas“ sudarytas iš ABX testo.

ABX testas šiuo atveju labai tinkamas, nes respondentų akustinės sistemos yra skirtingos, t. y., kai kurie respondentai namuose turi brangias ir kokybiškas garso sistemas, kiti tyrimą atliks su vidiniais nešiojamo kompiuterio garsiakalbiais ar naudos ausines. Tačiau, kadangi konkretus respondentas visų trijų (A, B ir X) garso atkarpų klausys per tą pačią sistemą, tai jos sukuriamai iškraipymai neutralizuojami.

1. GARSAS

Žmonės daug laiko praleidžia kalbėdami ir klausydami. Gebėjimas girdėti yra greitas žinių gavimo būdas. Garsai gali mus apsaugoti, iš karto įspėdami apie pavojus. Tai, ką girdime, taip pat gali sukelti stiprių emocinių reakcijų:

- muzika, juokas arba malonus pokalbis pakelia nuotaiką,
- pakeltas balso tonas neigiamai veikia aplinkinius,
- triukšminga aplinka sukelia nuovargį, net susirgimus,
- verkiantis kūdikis sužadina globėjiškus instinktus.

Fizikoje garsas – tai oro bangų sklidimas ore arba kitoje terpėje.

Vienas iš garso parametrų yra garso dažnis. Muzikoje jis vadinamas garso tono (tono aukščio) sąvoka, tuo tarpu garso technikoje vartojama tik dažnio (Hz) sąvoka.

Žmogus girdi ne visus garsus, o tik tokius, kurie patenka į jo girdos diapazoną (20 – 20000 Hz). Garsas, žemesnis už žmogaus girdos apatinę ribą, vadinamas infragarsu (*infrasound*) (žemės drebėjimo sukeltos bangos), o aukštesnis, viršgarsinis – ultragarsu (*supersound*). Ultragarsas plačiai naudojamas šiuolaikinėje medicinoje ir technikoje.

Žinoma, kad garsas ore sklinda gana lėtai (~340 m/s), žemės grunte greičiau (~1500 m/s), bet vis tiek lėtai, palyginus su šviesos greičiu (300000 km/s). Be to, garso sklidimo greitis ore priklauso nuo temperatūros (1.1 lentelė; 1.1 formulė):

$$c = 331,3 + 0,606t \quad (1.1 \text{ formulė})$$

čia t – oro temperatūra, °C., c – bangos sklidimo greitis; ρ – garso slėgis; Z_a – akustinė varža.

1.1 lentelė. Oro, kaip garso bangos sklidimo erdvės, parametrų priklausomybė nuo temperatūros

$T, ^\circ C$	+35	+30	+25	+20	+15	+10	+5	0	-5	-10	-15	-20	-25
$c, \frac{m}{s}$	351,9	349,0	346,1	343,2	340,3	337,3	334,3	331,3	328,3	325,2	322,1	318,9	315,8
$\rho, \frac{kg}{m^3}$	1,146	1,164	1,184	1,204	1,225	1,247	1,269	1,292	1,316	1,341	1,367	1,394	1,422
$Z_a, \frac{Ns}{m^3}$	403,2	406,5	409,4	413,3	416,9	420,5	424,3	428,0	432,1	436,1	440,3	444,6	449,1

Garso technikoje greta dažnio sąvokos naudojama bangos ilgio sąvoka (1.2 formulė):

$$\lambda = \frac{c}{f} \quad (1.2 \text{ formulė})$$

čia λ – bangos ilgis, f – dažnis.

Žmogaus girdimas dažnių diapazonas (20 – 20000 Hz), perskaičiuotas į bangos ilgius (1.2 lentelė), parodo, kad garso bangų ilgiai (1,7 cm – 17 m) kelia daug reikalavimų bangų sklidimo aplinkai ir žmogaus klausai.

1.2 lentelė. Dažnio ir bangos ilgio priklausomybė

Dažnis, Hz	20	50	100	200	500	1000	2000	5000	10000	15000	20000
Bangos ilgis	17m	6,8m	3,4m	1,7m	68cm	34cm	17cm	6,8cm	3,4cm	2,27cm	1,7cm

Ne visi žemės gyvūnai turi tokį patį girdos diapazoną, pavyzdžiui dramblio 16 – 12000 Hz, kačių 100 – 32000 Hz, šikšnosparniai ir delfinai skleidžia ir priima garsus iš diapazono 1000 – 150000 Hz.

Aplinkos erdvėje, kurioje sklinda garso bangos (virpesiai), gali būti oras, vanduo, žemės gruntas ir kt. Ore garsas sklinda spinduliavimo kryptimi. Tokias bangas vadiname išilginėmis bangomis. Jei erdvė nėra ribojama jokiais kliūtimis, susidaro, vadinamoji, bėgančioji banga. Tokių garso bangų dažnis f , bangos ilgis λ , sklidimo greitis c ir bangos periodas T yra susieti lygybe (1.3 formulė):

$$\lambda = \frac{c}{f} = cT. \quad (1.3 \text{ formulė})$$

Garso laukui apibrėžti yra naudojami parametrai (1.3 lentelė), tokie, kaip garso slėgis p_{gr} , intensyvumas I_{gr} , akustinė varža Z_a ir garso energijos tankis E_{gr} .

1. Garso slėgis p_{gr} yra skirtumas tarp momentinių slėgio verčių, aplinkos dalelėms susispaudžiant ir išsiplečiant, stabilios būsenos (statinio) slėgio atžvilgiu. Garso slėgis – skaliarinis dydis, turintis kintamą ženklą laiko ir vietos atžvilgiu. Jis matuojamas paskaliais (1.4 formulė).

$$1Pa = 1 \frac{N}{m^2}. \quad (1.4 \text{ formulė})$$

Audiotechnikoje susidarę garso slėgiai yra silpnesni už aplinkos (pavyzdžiui, oro) stabilios būsenos slėgį.

1.3 lentelė. Garso lauko parametrai

Pavadinimas	Garso slėgio lygis	Dažnis	Aplinkos tankis	Garso greitis	Dalelių greitis	Kampinis dažnis	Dalelių poslinkis	Akustinė varža	Dalelių pagreitis	Garso intensyvumas	Garso energijos tankis	Akustinė galia	Plotas
Žymėj.	p_{gr}	f	ρ	c	v	ω	ξ	Z_a	a	I_{gr}	E_{gr}	P_{gr}	A
SI sist. vnt.	$\frac{N}{m^2} = Pa$	$\frac{1}{s} = Hz$	$\frac{kg}{m^3}$	$\frac{m}{s}$	$\frac{m}{s}$	$\frac{rad}{s}$	m	$\frac{N \cdot s}{m^3}$	$\frac{m}{s^2}$	$\frac{W}{m^2}$	$\frac{W \cdot s}{m^3}$	W	m^2

Pastaba. Prisiminkime, kad $1N = 1\frac{kg \cdot m}{s^2}$, $1W = 1\frac{kg \cdot m^2}{s^3}$.

1. Garso intensyvumas I_{gr} – garso jėga. Tai garso srautas, sklindantis per ploto vienetą (statmeną sklidimo kryptčiai) ir laiko vienetą. Jis matuojamas $\frac{W}{m^2}$. (1.5 formulė)

2. Akustinė varža Z_a yra garso aplinkos ploto vieneto pasipriešinimas garso bangų energijos sklidimui. Ši varža priklauso nuo aplinkos tankio ir garso greičio. Ji apskaičiuojama:

$$Z_a = \rho \cdot c \left(\frac{Ns}{m^3} \right). \quad (1.6 \text{ formulė})$$

3. Garso energijos tankis nusako, koks energijos kiekis tenka garso aplinkos tūrio vienetui. Tai universali garso lauko energinė charakteristika:

$$E_{gr} = \frac{I_{gr}}{c} \left(\frac{Ws}{m^3} \right). \quad (1.7 \text{ formulė})$$

Žinomos tokios ryšio lygtys tarp garso lauko parametrų:

$$I_{gr} = \frac{(p_{gr})^2}{Z_a} = Z_a v^2 = \xi^2 \omega^2 Z_a = \frac{a^2 Z_a}{\omega^2} = E_{gr} c = \frac{P_{gr}}{A} \left(\frac{W}{m^2} \right), \quad (1.8 \text{ formulė})$$

$$p_{gr} = \rho c 2\pi f \xi = \rho c \omega \xi = Z_a \omega \xi = 2\pi f \xi Z_a = \frac{a Z_a}{\omega} = Z_a v = c \sqrt{\rho E_{gr}} = \sqrt{\frac{P_{gr} Z_a}{A}}. \quad (1.9 \text{ formulė})$$

Negalime painioti garso sklidimo greičio c su garso aplinkos (pavyzdžiui, oro) dalelių judėjimo greičiu v :

$$I_{gr} = Z_a v^2 = E_{gr} c,$$

(1.10 formulè)

$$v = \sqrt{\frac{I_{gr}}{Z_a}}.$$

(1.11 formulè)

2. GARSO SIGNALAI

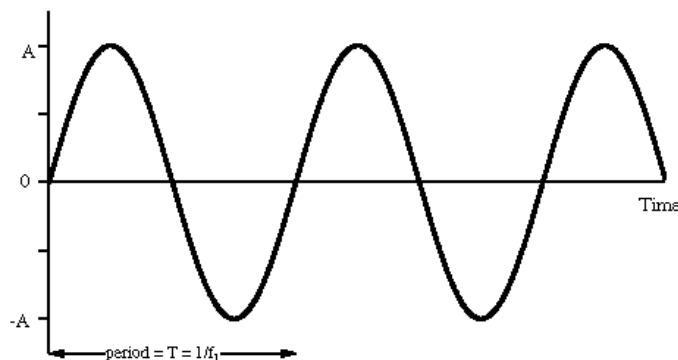
2. 1. Analoginis garso signalas

Analoginis garso signalas – tai garsinio signalo forma, kurioje mechaninis svyravimas vienu ar kitu būdu yra paverstas elektros įtampa (arba rečiau – srove). Analoginiai signalai turi daugybę parametru, kuriuos keičiant perduodami duomenys. Periodiniai kintamos srovės ar įtampos analoginiai signalai turi tokius parametrus:

- Amplitudė – tai skirtumas tarp dviejų signalo reikšmių.
- Periodas – tai einamosios amplitudės reikšmės pasikartojimo laiko intervalas.
- Dažnis – tai periodų skaičius, telpantis į laiko vienetą. Dažnis matuojamas hercais (Hz).
- Fazė – tai laikas tarp dviejų signalo amplitudės reikšmių pasirodymo, išreikštas laipsniais pagal signalo dažnį.

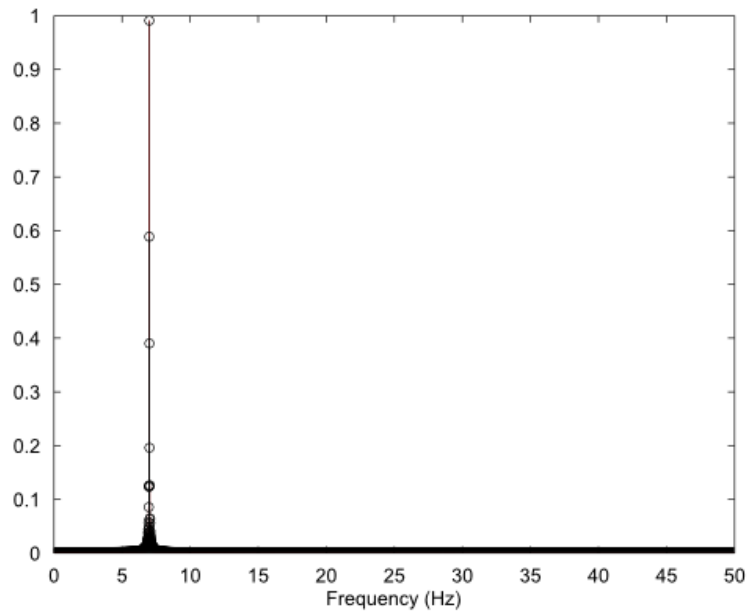
Garso laboratorijose, tiriant įrenginius, sutinkami trys pagrindiniai garso signalo tipai:

Sinusinis signalas, pavaizduotas 2.1.1 paveiksle, yra paprasčiausias analoginio garso signalo pavyzdys.



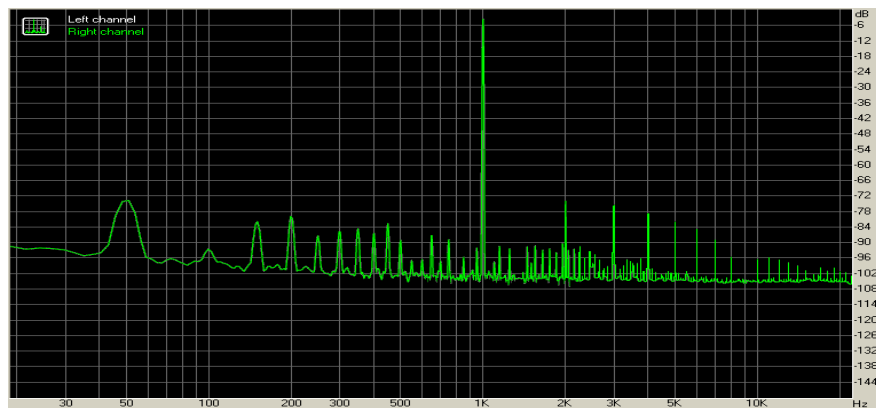
Pav. 2.1.1 Sinusinis signalas

Šiuo atveju, X ašyje pavaizduotas laikas, Y ašyje – įtampa. Atlikus šio signalo Furje transformaciją gaunamas spektras. Amplitudės spektras pavaizduotas 2.1.2 paveiksle, t. y. X ašyje atidėjus dažnį, o Y ašyje – Furje atvaizdo modulius. Iš paveikslo matyti, kad sinusinio signalo spektrą sudaro vienintelė dedamoji.

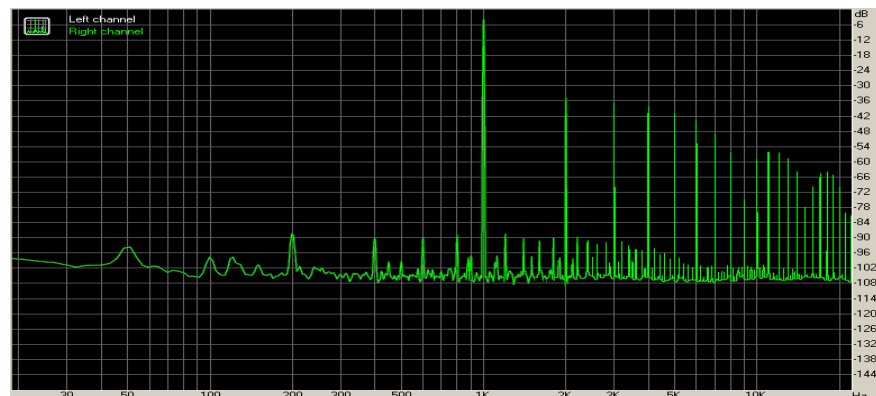


Pav. 2.1.2 Sinusinio signalo FFT

Dėl savo primityvumo, tai pats populiariausias signalas, tiriant audiosistemas. Į įrenginio jėgimą paduodamas sinusinis signalas ir stebimas įrenginio išėjimas. Tiesiškos (idealios) sistemos išėjime gautume tokios pat formos signalą. Bet kokie šio signalo formos (atitinkamai spektro) pasikeitimai yra laikomi iškraipymais. 2.1.3 ir. 2.1.4 paveiksluose matome realių įrenginių iškraipytos sinusoidės spektrus.

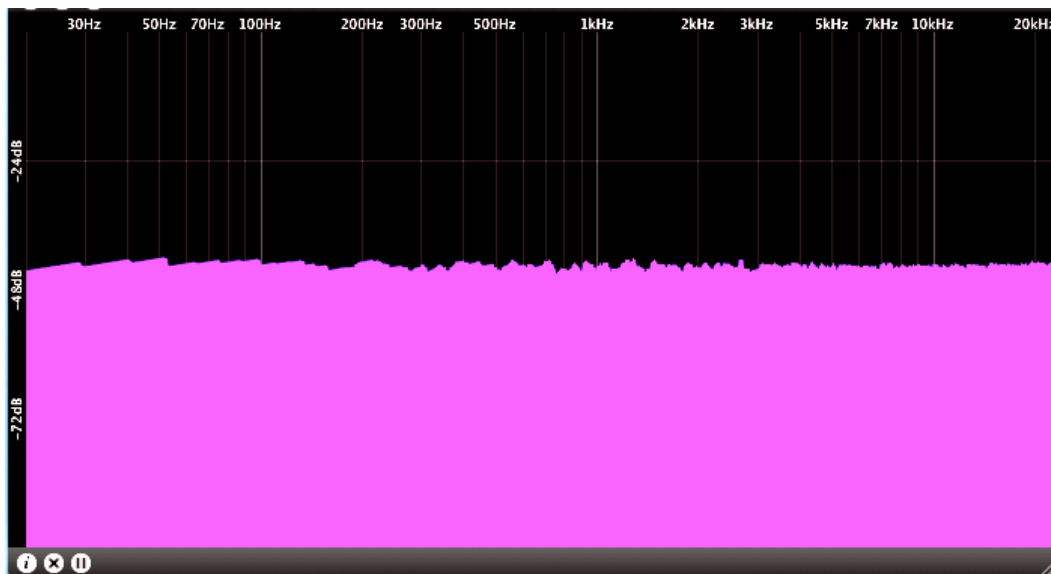


Pav. 2.1.3 Įrenginio iškraipytos sinusoidės spektras (0.05%)



Pav. 2.1.4 Įrenginio iškraipytos sinusoidės spektras (2.9%)

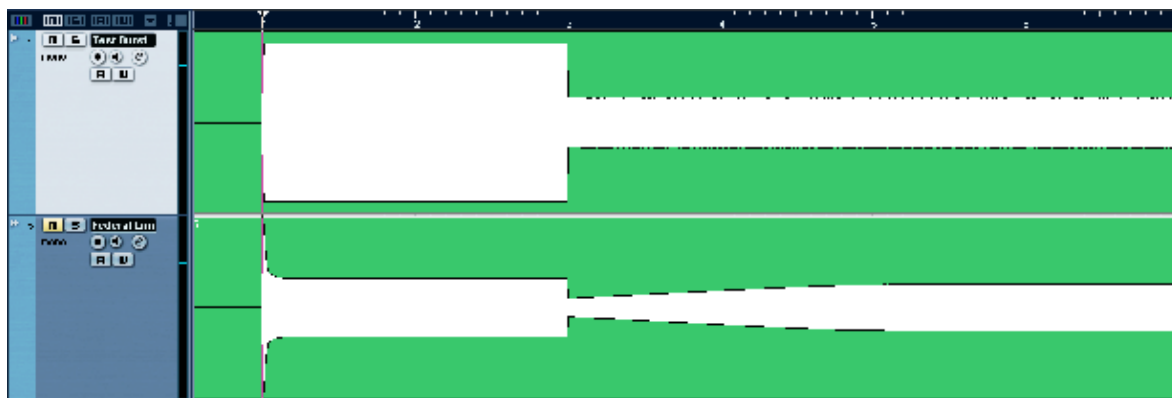
Kadangi, reali garsinė informacija yra daug sudėtingesnė, vienu metu signale yra daug dažnio dedamųjų. Todėl tiriant sistemą naudojamas ir blogiausias scenarijus – **rožinis triukšmas**. Jis sudarytas iš be galo daug spektro dedamųjų, tačiau jų suminė galia pasiskirsčiusi vienodai visose oktavose (žr. pav. 2.1.5). Dar šis triukšmas vadinamas $1/f$ triukšmu.



Pav. 2.1.5 Rožinio triukšmo spektras

Tiriant sistemą, į jos įėjimą paduodamas rožinis triukšmas ir stebimas išėjimas. Idealios sistemos išėjime matomas toks pat signalo spektras. Bet kokie spektro netolygumai išėjime, laikomi juostos iškraipymais.

Kadangi, realiame garso signale spektro dedamųjų suminė amplitudė nėra pastovi laike, įrenginių tyrimui į įėjimą paduodamas **šuliškai kintančios amplitudės signalas**. Idealios sistemos išėjime dviejų amplitudžių santykis turi būti išlaikytas. Paveiksle 2.1.6 matomos dinamiškai netiesiškos sistemos įėjimo ir išėjimo signalo formos:



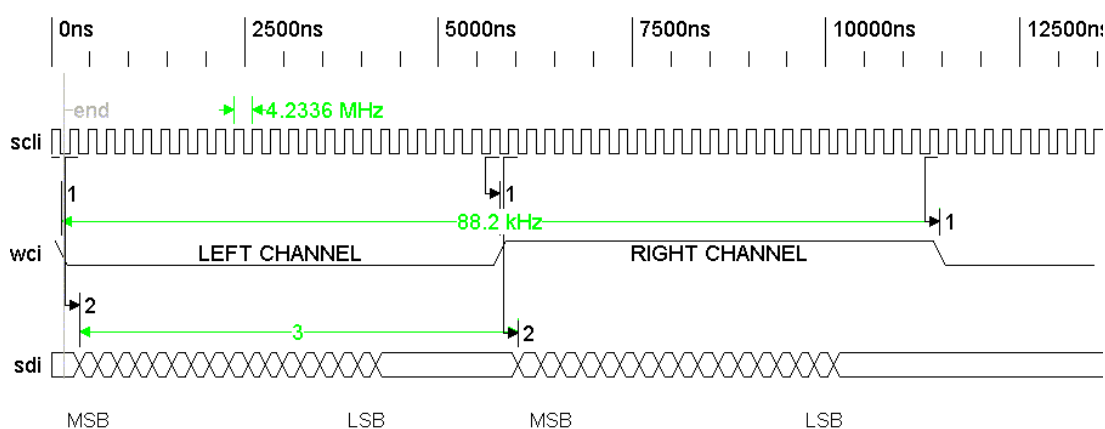
Pav. 2.1.6 Dinamiškai netiesiškos sistemos signalo formos

2. 2. Skaitmeninis garso signalas

Skaitmeninis garso signalas – tai analoginis garso signalas, užkoduotas skaitinėmis vertėmis. Tiriant sistemas, iš esmės nėra labai svarbu kokia informacija užkoduota skaitmeniniame signale, svarbesni yra patys standartai, kuriais šis signalas koduojamas ir perduodamas. Kaip žinome, skaitmeninio signalo kodavimas vyksta dvejais etapais – diskretizuojant ir kvantuojant.

Audiopramonėje garsiniai signalai diskretizuojami dviem standartais. Buitiniu – 44,1 kHz ir profesionaliu – 48 kHz. Šiuolaikiniai profesionalūs garso keitikliai leidžia dvigubinti ir keturgubinti diskretizavimo dažnį iki 96 kHz ir 192 kHz. Suprantama, motyvuojama tuo, kad kuo labiau Naikvisto dažnis viršija ribinį signalo dažnį, tuo tiksliau išsaugomos signalo atskaitos. Kvantavimas paprastai vyksta dviem standartais – 16 arba 24 bitų.

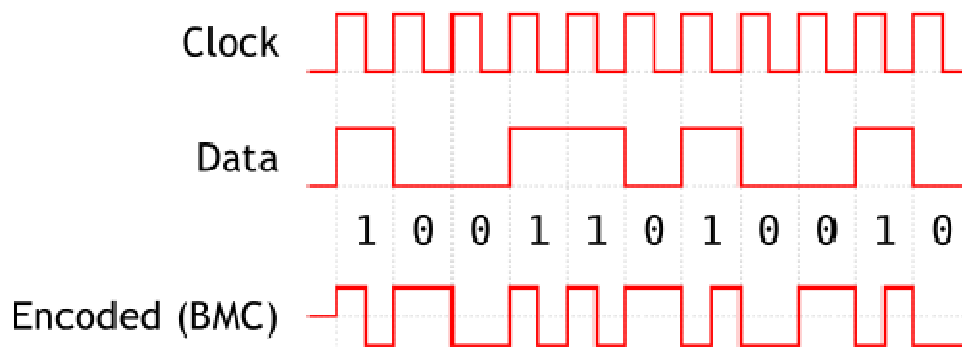
Skaitmeninis garsas, įrenginių viduje tarp mikroschemų, paprastai perduodamas **I²S sąsaja** (nepainioti su I²C). Ši sąsaja sudaryta iš trijų signalų – kadrų sinchronizacijos (*Word clock*), bitų sinchronizacijos (*Bit clock*) ir nuosekliųjų duomenų (*Serial data*). 2.2.1 paveiksle matoma šių signalų diagrama:



Pav. 2.2.1 I²S signalų diagrama

Nepaisant 6 μ s vėlinimo (kol gaunantis įrenginys priima vieną kadrą), praktiškai neįmanomi jokie iškreipimai perduodant signalą šia sąsaja.

Skaitmeninis signalas, skirtas garso perdavimui tarp įrenginių, koduojamas diferencialiniu Mančesterio kodu (*BMC*). 2.2.2 paveiksle matome, kaip šis kodas leidžia į vieną bendrą signalą užkoduoti bitų sinchronizacijos (*Bit clock*) ir nuosekliųjų duomenų (*Serial data*) signalus:



Pav. 2.2.2 Diferencialinis Mančesterio kodas

Fiziškai šis signalas perduodamas dvejais profesionaliais ir dvejais buitinais standartais. 2.2.1 lentelėje matomi skaitmeninio signalo standartai.

2.2.1 lentelė. Skaitmeninio signalo standartai

Standartas	Profesionalus		Buitinis	
	Simetrinis AES3	Nesimetrinis AES3	SPdif	Toslink
Kabelis	110 ohm	75 ohm	75 ohm	Šviesolaidis
Jungtis	XLR	BNC	RCA	Toslink
Max. ilgis	100 m	1000 m	10 m	10 m
Loginė įtampa	2 – 7 V	1 V	0,5 V	-

Visiems šiems signalo perdavimo standartams, išskyrus Toslink standartą, labai didelę įtaką turi kabelio ilgis ir tipas, nes iškraipyti signalo frontai labai apsunkina Mančesterio kodo iškodavimą, neretai „pametami“ kadrai. Negana to, šie standartai yra labai jautrūs sinchronizacijos paklaidoms (*Jitter*), nes iškoduoiant signalą atsiranda mažos, bet tam tikrais aspektais reikšmingos, fazės paklaidos.

3. ŽMOGAUS KLAUSOS APRAŠYMAS

3. 1. Ausies anatomija

Ausis turi sudėtingą struktūrą (žr. pav. 3.1), jos pagrindinės dalys:

- išorinė ausis,
- vidurinioji ausis;
- vidinė ausis.

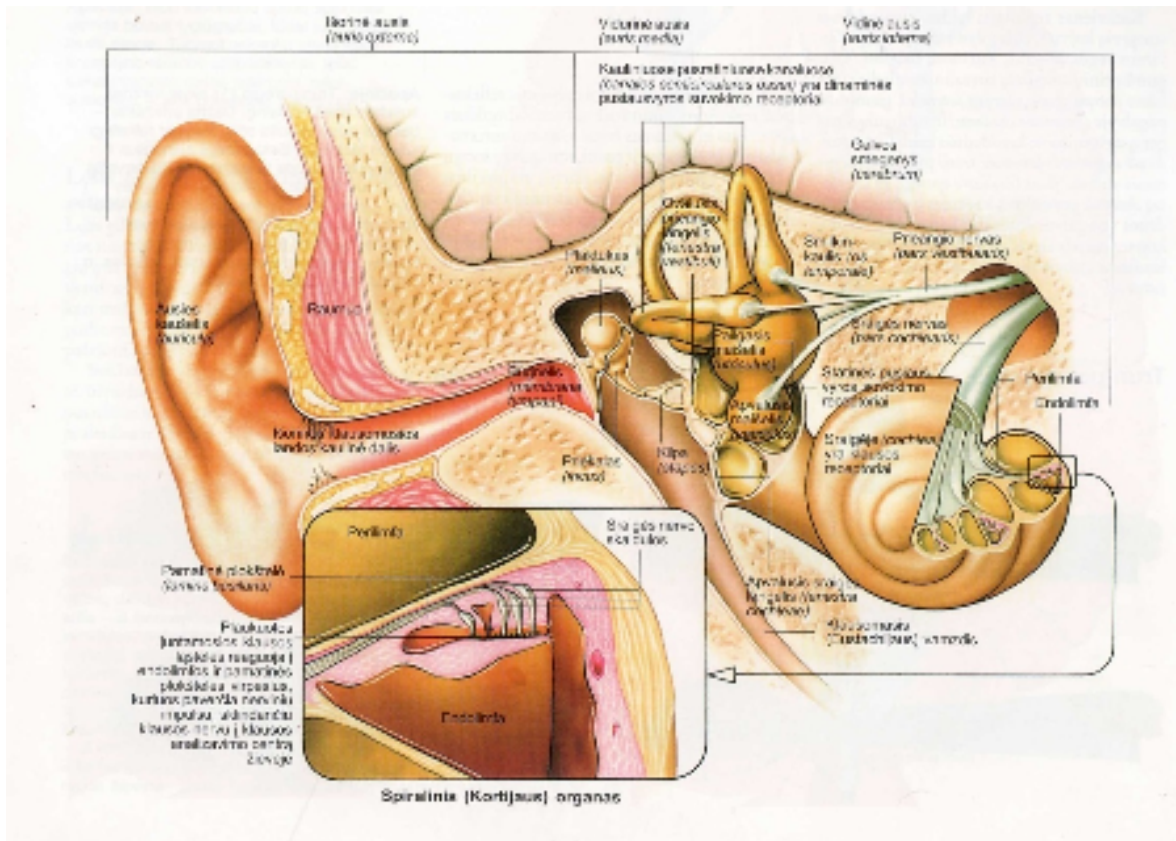
Panagrinėkime kiekvienos dalies paskirtį ir svarbą :

Išorinė ausis susideda iš ausies kaušelio (*auricula*), kurį sudaro raumuo ir kremzlė, suteikianti kaušeliui formą ir stangrumą, bei išorinės klausomosios landos (*meatus acusticus externus*). Pagrindinė išorinės ausies paskirtis yra surinkti garsą ir nukreipti jį į ausies kanalą.

Ausies kanalas veikia kaip stiprintuvas ir efektyviai reaguoja į oro slėgio svyravimus. Dar viena išorinės ausies paskirtis – apsaugoti viduriniają ir vidinę ausį.

Vidurinioji ausis prasideda nuo gležnos, vėduokliškos formos plėvelės – ausies būgnelio (*membrana tympani*), kuris, iš esmės, yra mikrofono diafragma. Prie ausies būgnelio liečiasi 3 maži kauleliai (*ossicles*). Su ausies būgneliu jungiasi plaktukas (*incus*), kuris membranos virpesius perduoda priekalui (*malleus*). Priekalas jungiasi su U formos kilpa (*stapes*), kuri yra sujungta su apvaliuoju langeliu, o šis yra vartai į vidinę ausį. Viduriniojoje ausyje taip pat yra klausomasis kanalas (*tuba auditiva*), kitaip dar vadinamas ausies trimitu arba Eustachijaus vamzdeliu. Jis jungia viduriniają ausį su gerklėje esančia nosies užpakaline dalimi. Šis vamzdelis padeda išlyginti oro slėgį tarp vidinės ausies ir išorinės ausies. Jis ypač svarbus, kai žmogus patiria žymius slėgio pasikeitimus, pvz., kylant ir leidžiantis lėktuvui.

Vidinės ausies sandara yra sudėtingiausia prie pat jos pradžios. Ji prasideda membrana, susieta su vidurinės ausies ovaliuoju langeliu (*fenestra vestibuli*) ir spiraline sraige (*cochlea*), esančia vidinėje ausyje. Sraigė yra pripildyta skysčio, apytiksliai tik lašo tūrio. Spiralės pavidalo sraigėje yra spiralinis organas – klausos receptorius su milijonais plaukuotųjų ląstelių, kurios turi kyšančius jautrius plaukelius. Sraigės nervas perduoda nervinius impulsus iš vidinės ausies į smegenis. Sraigė baigiasi apvaliuoju langeliu (*fenestra cochleae*) [2], [3].



Pav. 3.1 Žmogaus ausies sandara

Kaip ausis apdoroja garso virpesius:

- Garso bangos (oro virpesiai) pasiekusios ausį, ausies kaušelio yra nukreipiamos į išorinę klausomąją landą, kurią praėjusios pasiekia ausies būgnelį.
- Garso bangos priverčia virpėti būgnelį.
- Centrinė būgnelio dalis yra sujungta su plaktuku, kuris taip pat pradeda vibruoti. Ši vibracija per priekalą persiduoda U formos kilpai. Klausomieji kaulėliai (plaktukas, priekalas ir kilpa) virpesius sustiprina apie 25 kartus.
- Kilpa virpėdama judina apvalųjį langelį.
- Apvaliojo langelio virpesiai sukelia perilimfos bangavimą sraiginiame latake. Perilimfos bangos prieangio kanale sukulia endolimfos bangavimą sraiginiame latake.
- Garso bangos iš prieangio kanalo per pamatinę membraną sklinda ir į būgninį kanalą, todėl ovalusis langelis išsipučia.
- Pamatinei membranai judant, plaukuotųjų ląstelių plaukeliai, panirę į dengiančiąją membraną, nulinksta. Plaukelių judėjimas stimuliuoja neuronų dendritus ir garso bangos paverčiamos nerviniais impulsais.
- Nerviniai impulsai klausos nervu toliau keliauja į smegenų kamieną. Galiausiai impulsai pasiekia galvos smegenų smilkinines sritis, kur jie suvokiami kaip garsas [4].

3. 2. Klausos ir garso virpesių jutimas

Kaip jau žinome, girdime dėl to, kad garso bangos, keliaudamos klausos organu, paverčiamos nerviniais signalais. Yra keletas girdėjimo koncepcijų [5].

Tradicinė teorija. Kaip jau minėta, vidurinėsios ausies kaulėliai (plaktukėlis, priekalas ir kilpa) pro apvalųjį langelį perduoda mechaninius virpesius į vidinės ausies sraigę, pripildytą skysčio, dėl to juda plaukuotosios ląstelės, esančios jos paviršiuje. Plaukuotųjų ląstelių judėjimas dirgina nervų ląsteles, kurios, susijungusios į skaidulas, sudaro klausos nervą. Taip oro virpėjimas per judančius kaulėlius, skysčio bangas transformuojamas į elektrinius impulsus, veikiančius galvos smegenis.

Kol garso virpesiai yra per maži ir dar nepajudina sraigės plaukelių, žmogus nieko negirdi. Nuo tam tikro garso stiprumo virpesių energijos pakanka, plaukeliai pradeda judėti, nervas dirginamas – žmogus garsą išgirsta. Todėl perėjimas iš negirdėjimo būsenos į girdėjimą įvyksta šuoliu. Šis perėjimo slenkstis vadinamas **girdos slenksčiu**. Tolydžiai didinant garso intensyvumą, dirginimas ir jutimas auga šuoliais, nes vis nauji plaukeliai (plaukelių zonos) pradeda dirginti. Jei dar labiau didinsime garsą, pasieksime **skausmo ribą**. Tarp girdos slenkščio ir skausmo ribos yra šimtai elementarių jutimo slenkščių. Žemųjų ir aukštųjų dažnių srityse tokių jutimo slenkščių yra mažiau. Kitaip tariant, jei garso signalo dažnis ir amplitudė keičiasi tolygiai, jutimas yra diskretinis. Analoginiams garso signalams, nuo girdos slenkščio iki skausmo slenkščio, ir dažniams iš diapazono 20 – 20000 Hz yra apie 22000 jutimo gradacijų [6]

Šio aiškinimo trūkumas – lieka neaišku, kaip žmogus atskiria garso dažnį.

Vietos teorija nurodo, kad skirtingo dažnio bangos veikia skirtingas sraigės plaukelių zonas (žemesni dažniai – gilesnes), todėl mūsų smegenys nustato iš kurios sraigės vietos atėjo dirginimas, t. y. kurio dažnio bangos pasiekė ausį. Vengrų mokslininkas Georg von Békésy (1899–1972) nustatė, kad mažos amplitudės bėgančiosios bangos nuo pamatinės membranos juda link apvaliojo langelio, kur, dėl rezonansinių sraigės savybių, tam tikroje vietoje pasiekia maksimumą ir vėliau greitai nusilpsta [7]. Šis atradimas jam pelnė Nobelio premiją.

Vietos teorija nepaaiškina, kaip yra girdimos žemesnio dažnio bangos.

Dažnio teorija tvirtina, kad sraigės plaukeliai vibruoja sinchroniškai su garso bangos signalu, todėl nervinių signalų dažnis sutampa su virpinančių garso bangų dažniu. Tai reiškia, kad garso dažnį žmogaus smegenys atpažįsta pagal nervinio signalo dažnį [7].

3.3. Girdos slenkstis ir garso jutimas

Žmonių klausa yra nevienodo jautrumo. Matavimams naudojamas vidutinis (standartinis) girdos slenkstis, esant 1000 Hz dažniui. Paprastai standartiniu girdos slenkščiu laikomas garso slėgis (3.3.1 formulė)

$$p_{gr.0} = 2 \cdot 10^{-5} \frac{N}{m^2} = 2 \cdot 10^{-5} Pa = 20 \mu Pa$$

(3.3.1 formulė)

arba garso intensyvumas (3.3.2 formulė)

$$I_{gr.0} = \frac{(p_{gr.0})^2}{Z_a} = \frac{\left(2 \cdot 10^{-5} \frac{N}{m^2}\right)^2}{\rho \frac{kg}{m^3} \cdot c \frac{m}{s}} = \frac{4 \cdot 10^{-10} \frac{N^2}{m^4}}{1,204 \frac{kg}{m^3} \cdot 343,2 \frac{m}{s}}$$

$$= \frac{4 \cdot 10^{-10} \frac{kg^2 m^2}{m^4 s^4}}{1,204 \cdot 343,2 \frac{kg m}{m^3 s}} \approx 1 \cdot 10^{-12} \frac{kg \cdot m^2}{m^2 s^3} = 1 \cdot 10^{-12} \frac{W}{m^2}.$$

(3.3.2 formulė)

Skausmo riba susitarta laikyti garso slėgį (3.3.3. formulė)

$$p_g = 20 \frac{N}{m^2} = 20 Pa$$

(3.3.3 formulė)

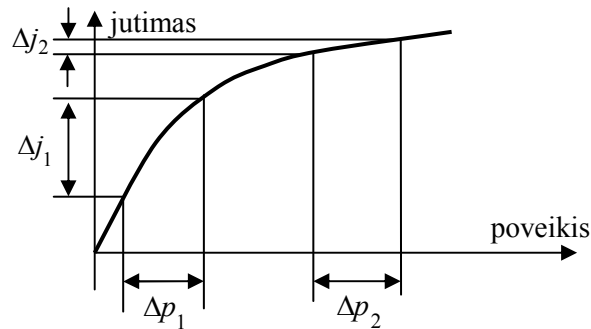
arba garso intensyvumą (3.3.4 formulė):

$$I_{gr.0} = \frac{(p_g)^2}{Z_a} = \frac{\left(20 \frac{N}{m^2}\right)^2}{\rho \frac{kg}{m^3} \cdot c \frac{m}{s}} = \frac{400 \frac{N^2}{m^4}}{1,204 \frac{kg}{m^3} \cdot 343,2 \frac{m}{s}}$$

$$= \frac{400 \frac{kg^2 m^2}{m^4 s^4}}{1,204 \cdot 343,2 \frac{kg m}{m^3 s}} \approx 1 \frac{kg \cdot m^2}{m^2 s^3} = 1 \frac{W}{m^2}.$$

(3.3.4 formulė)

Žmogus toleruoja labai platų garso slėgio kitimo diapazoną: nuo $p_{gr.0} = 20 \mu Pa$ iki $p_g = 20 \cdot 10^6 \mu Pa = 20 Pa$. Šis dinaminis diapazonas yra 10^6 pločio. Garso intensyvumas taip pat turi platų dinaminį diapazoną, nuo $I_{gr.0} = 1 \cdot 10^{-12} \frac{W}{m^2}$ iki $I_g = 1 \frac{W}{m^2}$. Šis dydis lygus 10^6 kvadratui.



Pav. 3.3.1 Girdos netiesinė priklausomybė nuo poveikio stiprio.

Garso jutimo lygis netiesiškai priklauso nuo garso slėgio ir garso intensyvumo, be to pastebėjome, kad jutimas yra diskretusis dydis, nors poveikis ir yra analoginis.

Matome, kad vienodi garso bangų poveikiai $\Delta p_1 = \Delta p_2$ (3.3.1 pav.) sukelia skirtingus jutimus $\Delta j_1 \neq \Delta j_2$.

Ernst Weber (1795-1878) buvo vienas iš pirmųjų žmonių, kuris pabandė nusakyti žmogaus reakciją į fizinį garso ir šviesos poveikį [8]. Jo mokinys, Gustav Theodor Fechner (1801-1887) šiuos tyrimus išplėtė ir nustatė, kad pojūčio Δj pokytis yra tiesiogiai proporcingas poveikio pokyčio Δp santykiui su pačiu poveikio dydžiu P , t. y. $\Delta j = k \frac{\Delta p}{P}$, todėl galime sudaryti diferencialinę lygtį su pradinėmis sąlygomis (3.3.5 formulė):

$$dj = k \frac{dp}{P}, p \leq p_0, \text{ tai } j = 0. \quad (3.3.5 \text{ formulė})$$

Sprendžiame šią diferencialinę lygtį ir gauname:

$$\int dj = k \int \frac{dp}{P}, \quad (3.3.6 \text{ formulė})$$

$$j = k \ln|p| + C = k \frac{\lg|p|}{\lg e} + C = \frac{k}{\lg e} \lg|p| + C = k_1 \lg|p| + C. \quad (3.3.7 \text{ formulė})$$

Įvertiname pradines sąlygas:

$$\begin{aligned} 0 &= k_1 \lg|p_0| + C, \\ C &= -k_1 \lg|p_0|, \end{aligned} \quad (3.3.8 \text{ formulė})$$

ir gauname:

$$j = k_1 \lg|p| - k_1 \lg|p_0| = k_1 \lg \left| \frac{p}{p_0} \right|. \quad (3.3.9 \text{ formulė})$$

Jei koeficientą k_1 laikysime lygiu vienetui, tai jautrumą J matuosime B – belais, jei $k_1 = 10$, tai dB – decibelais ($1B = 10dB$).

Gauname taip vadinamąją jutimo lygtį (3.3.10 formulė):

$$J_a = 10 \lg \left(\frac{I_g}{I_{gr.0}} \right) = 10 \lg \left(\frac{P_g^2}{P_{gr.0}^2} \right) = 20 \lg \left(\frac{P_g}{P_{gr.0}} \right), \quad (3.3.10 \text{ formulė})$$

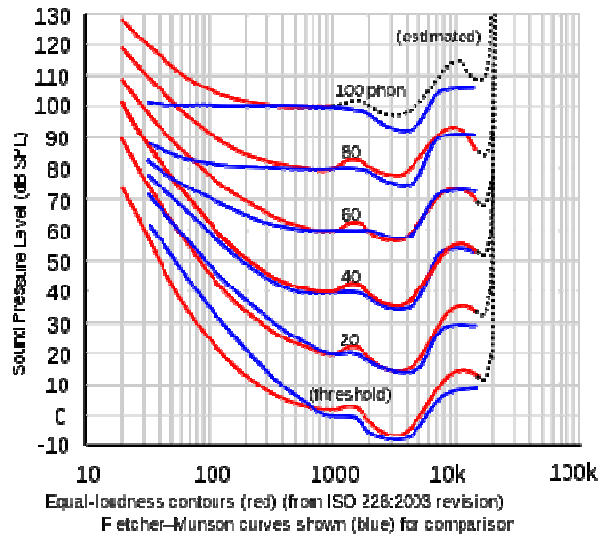
Čia J_a yra absoliutus akustinis lygis.

Taip pat buvo atlikta tyrimų, kurie rodo žmogaus ausies jautrumą mažiausiems signalo amplitudės pokyčiams. Pavyzdžiui, Eugen Reisz nustatė, kad žmogus jaučia 1 dB skirtumą [9], F. L. Dimmick ir R. M. Olson teigia, kad žmogus jaučia 1,5 – 3 dB skirtumą [10]. B. Atal (ir kt.) rašo, kad vos juntamas lygis lygus 0,5 dB [11], W. Jestaedt (ir kt.) – 1,5 dB [12]. F. E. Toole ir S. Olive teigia, kad žmogus girdi net 0,25 dB skirtumą [13]. Rezultatai, kaip matome, yra labai skirtingi. Tokie skirtumai yra atsiradę dėl skirtingai pasirinkto testinio signalo. Eugen Reisz tyrimus atliko naudodamas du gretimo dažnio tonus, o F. E. Toole ir S. Olive naudojo 0,25 dB $Q=1$ rezonansą ties 5 khz.

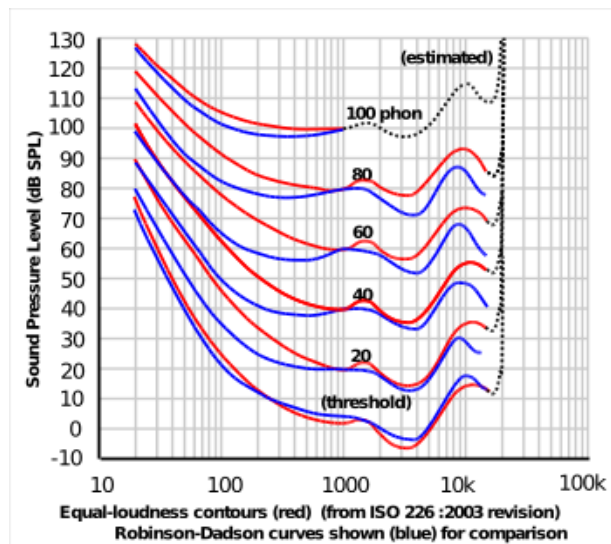
Žmogaus klausos sistema yra jautri dažniams nuo 20 Hz ir maždaug iki 20000 Hz. Bibliografiniuose įrašuose vieningos nuomonės nėra:

- „Eksperimentai parodė, kad jaunas žmogus girdi garsus tarp 20 Hz ir 20 kHz“ [14].
- „Maksimalus žmogaus klausos diapazonas yra tarp 15 ir 18,000 bangų arba ciklų per sekundę“ [15].
- „Jauno žmogaus klausos diapazonas yra tarp 20 Hz ir 20 kHz“ [16].
- „Žmogus girdi vibracijas tarp 15 ar 16 iki 20,000 virpesių per sekundę“ [17].
- „Pilnas žmogaus klausos spektras tęsiasi nuo 20 iki 20,000 hercų“ [18].
- „Žmogaus ausis turi receptorius, kurie gali aptikti dažnius nuo 16 iki 20,000 vibracijų per sekundę“ [19].
- „Maksimalų žmogaus klausos diapazoną sudaro dažniai tarp 15 ir 18,000 bangų ar ciklų per sekundę“ [20].
- „Žmogaus ausis gali girdėti dažnius diapazone nuo apie 20 ciklų per sekundę iki ~20,000 ciklų per sekundę (kai kurie individai girdi siauresnį diapazoną)“ [21].
- „Normalus klausos diapazonas jaunam sveikam asmeniui yra nuo 20 iki 20,000 Hz. Klausla slopsta senstant arba būnant labai triukšmingoje aplinkoje“ [22].

Šiame intervale žmogaus ausis yra jautresnė dažniams tarp 2 ir 5 kHz, daugiausia dėl vidurinėsios ausies trijų kaulėlių (*ossicles*) rezonansinių savybių.



Pav. 3.3.2 Flečerio-Munsono vienodo garso lygio kreivės (mėlyna) ir ISO 226:2003 patikslinimas (raudona)



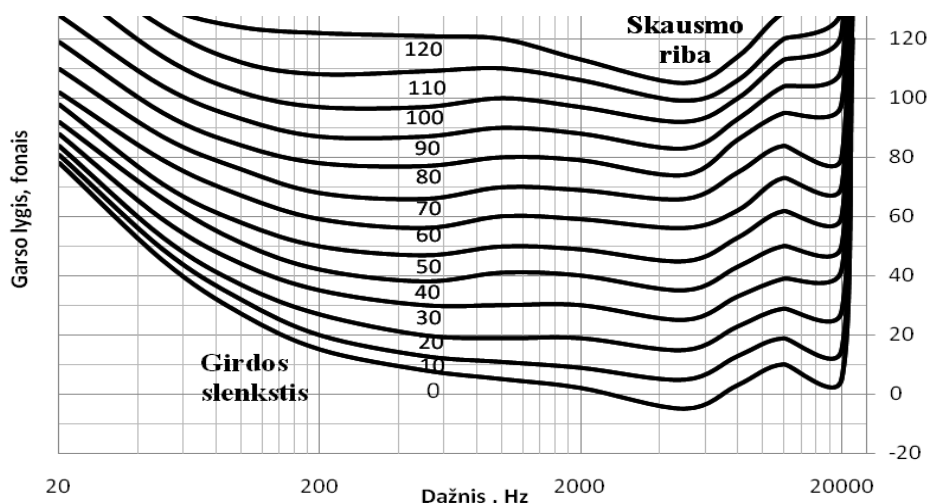
Pav. 3.3.3 Robinsono-Datsono vienodo garso lygio kreivės (mėlyna) ir ISO 226:2003 patikslinimas (raudona)

Harvey Fletcher ir Wilden A. Munson 1933 metais pirmieji išmatavo žmogaus ausies jautrumą skirtingiems garso dažniams. Tyrimo metu jie naudojo ausines ir klausytojams pateikė įvairaus dažnio grynojo tono garsinius signalus ir greta to palyginimui 1 kHz palyginamąjį signalą. Jiems buvo svarbu išsiaiškinti, kokios amplitudės skirtingo dažnio signalai yra juntami tokiu pačiu garsumu, kaip ir palyginamasis 1 kHz signalas. Tokiu būdu jie gavo vienodo garso jutimo kontūrus su 10 dB garso jutimo žingsniais (3.3.2 pav.). Suprantama, kad garsumo suvokimas yra psichologinė savybė, todėl jiems teko surasti vidutinę auditorijoje dalyvavusių

klausytojų suvokimo reikšmę. Apatinis garsumo kontūras yra tyliausias garsinis signalas, kurį pradeda girdėti klausytojai; tai – girdos slenkstis, aukščiausias – skausmo slenkstis.

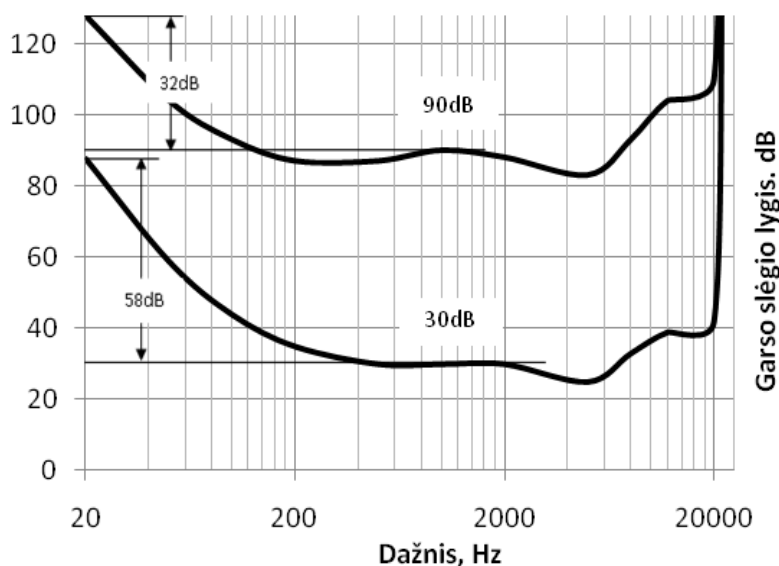
Vėliau, 1937 metais panašius tyrimus atliko B. G. Churcher ir A. J. King – šie tyrimai parodė esant nemažų skirtumų tyrimo rezultatuose.

Tiksliausias rezultatus 1956 metais gavo D. W. Robinson ir R. S. Dadson (3.3.3 pav). Šie rezultatai iki 2003 metų buvo standartu (ISO 226) [23]. Rezultatai buvo laikomi galutiniais iki 2003 metų, kai standartas, remiantis įvairių viso pasaulio mokslininkų tyrimais (3.3.4 pav.), buvo peržiūrėtas.



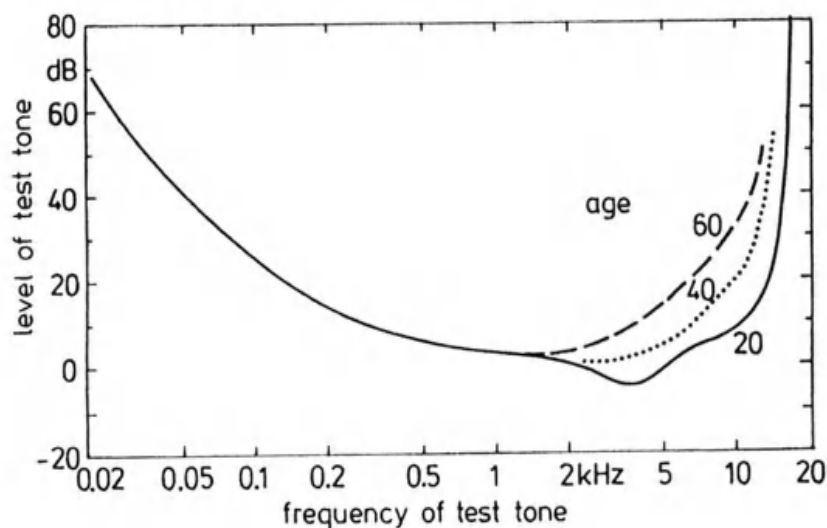
Pav. 3.3.4 Žmogaus klausos vienodo garso lygio linijos (ISO 226:2003 standartas)

Atkreipkime dėmesį, kad žmogaus klausa yra nevienodai jautri esant įvairiems garso slėgio lygiams (pav. 3.3.5) – pavyzdžiui, garso slėgio lygiui esant 30 dB, klausos dinaminis diapazonas yra platesnis (58 dB), tuo tarpu garso slėgio lygiui esant 90 dB, klausos dinaminis diapazonas yra siauresnis (32 dB).



Pav. 3.3.5 Žmogaus klausos jautrumo priklausomybė nuo garso slėgio lygio

Be to, žemo dažnio garsų suvokimo galimybė yra mažesnė nei aukštų. Tai reiškia, kad garsų šaltinis turi didinti žemų garsų lygį. Būtina pabrėžti, kad ne visų žmonių girdos slenkstis yra vienodas – jis priklauso nuo asmens amžiaus (pav. 3.3.6).



Pav. 3.3.6 Girdos slenkščio priklausomybė nuo recipiento amžiaus

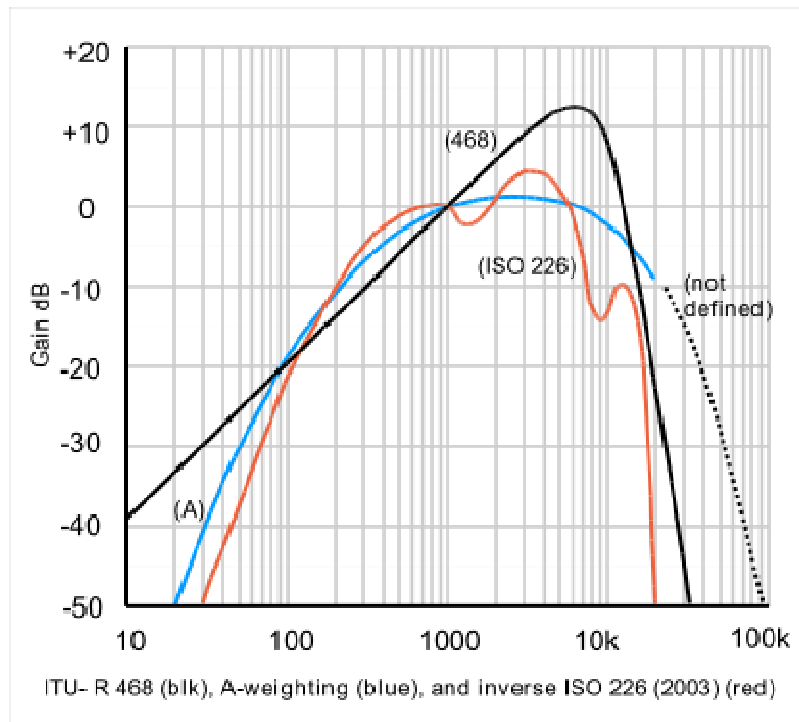
Garso lygiui nusakyti yra naudojami matavimo vienetai **fonas** (*phon*) ir **sonas** (*sone*). Susitarta 1 fonu vadinti tokį garso lygį, kurį žmogus jaučia ir pripažįsta tokiu pačiu, kaip ir 1000 Hz harmoninį signalą su 1 dB garso lygiu. Lygiai taip pat, 100 fonų garso lygis yra tas, kurį žmogus girdi tokiu pat garsumu kaip ir 1000 Hz harmoninį signalą su 100 dB garso lygiu.

Skausmo riba yra laikomas 120 fonų garso lygis. Jis atitinka 120 dB harmoninio signalo (1 kHz) garso lygį. 1 sonas atitinka 40 fonų garso lygį. Be to, sonų skaičiaus dvigubėjimas atitinka fonų skaičiaus pasikeitimą per 10 vienetų [24], o garso slėgio pasikeitimą $\sqrt{10}$ kartų (3.3.1 lentelė).

3.3.1 lentelė. Garso lygio matavimo vienetų sonų ir fonų sąsaja.

Garso lygis, sonais	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16
Garso lygis, fonais	10	20	30	40	50	60	70	80
Garso slėgio lygių santykis $\frac{p}{p_0}$	$\sqrt{10}$	10	$10\sqrt{10}$	100	$100\sqrt{10}$	1000	$1000\sqrt{10}$	10000

Vietoj matavimo vieneto – fono, ypač garso lauko matavimuose, yra vartojamas A svertinis decibelas – dBA. Jei garso slėgio lygį matuosime koku nors garso slėgio matuokliu, pavyzdžiui mikrofonu, tai galime gauti klaidingus rezultatus, nes toks matuoklis neįvertina garso spektro. Matavimo grandinėje turime naudoti filtrą, įvertinantį žmogaus klausos ypatumus.



Pav. 3.3.7 Svertinių filtrų kreivės

Svertinis filtras A (pav. 3.3.7) yra dažniausiai naudojamas, norint pabrėžti dažnius nuo 3 iki 6 kHz, kuriems žmogaus ausis yra jautriausia, o slopinti didelio ir ypač žemo dažnio garsus, kuriems žmogaus ausis nejautri. Tokio tipo filtras gerai atitinka žmogaus ausies savybes. Šio tipo filtras ypač tinka tais atvejais, kai matuojamas garsas yra pastovius tono arba jo dinaminis diapazonas yra siauras, nes A filtro dažninė-amplitudinė charakteristika yra panaši į Flečerio-Munsono 40 dB lygio garso slėgio kreivę (atvirkščia, nes filtras). B ir C kreivės yra skirtos didesnio dinaminio diapazono signalams. Jos gautos, įvertinus sudėtingesnius garsus, tokius, kaip spragtelėjimas, staigus pikas, rausvas triukšmas ar pan. (dėl to jos rečiau naudojamos).

Svertinių filtrų kiekybinės charakteristikos aproksimuojamos matematinėmis formulėmis (3.3.11 formulė; 3.3.12 formulė; 3.3.13 formulė):

$$A(f) = 2,0 + 20 \lg \frac{12200^2 f^4}{(f^2 + 20,6^2) \sqrt{(f^2 + 107,7^2)(f^2 + 737,9^2)(f^2 + 12200^2)}}, \quad (3.3.11 \text{ formulė})$$

$$B(f) = 0,17 + 20 \lg \frac{12200^2 f^3}{(f^2 + 20,6^2) \sqrt{(f^2 + 158,5^2)(f^2 + 12200^2)}}, \quad (3.3.12 \text{ formulė})$$

$$C(f) = 0,06 + 20 \lg \frac{12200^2 f^2}{(f^2 + 20,6^2)(f^2 + 12200^2)}, \quad (3.3.13 \text{ formulė})$$

čia f – dažnis, o koeficientai 2,0; 0,17 ir 0,06, panaudoti šiose aproksimacijos formulėse – atitinkamai $A(f)$, $B(f)$, $C(f)$, normalizuoja aproksimacijas girdos slenksčio aplinkoje.

Žmogaus klausos jautrumas signalo formos pokyčiams taip pat buvo tyrinėtas ir gauti tokie rezultatai:

- Žmogus jaučia 1% – 2% iškraipymų, dažniuose $> \sim 500$ Hz [25].
- Sistemoje, kurios juostos plotis nuo 40 Hz iki 14 kHz, aptinkama jau nuo 0,7% iškraipymų [26].
- Vos juntamas iškraipymų lygis yra tarp 0,8% ir 1,3% [27].

M. E. Bryan ir H. D. Parbrook atliko matavimus su skirtingomis signalo harmonikomis [28]. Jų 1960 m. rezultatai pateikiami 3.3.2 lentelėje.

3.3.2 lentelė. Garso lygio matavimo vienetų sonų ir fonų sąsaja

Signalų lygis (dB)	II harmonika	III harmonika	IV harmonika
52,5	44	52	52
60	52	57	61
70	47	62	67
76	-	54	59

Pianinu atliekamoje muzikoje yra girdimi tik 2% – 4% intermoduliacinių iškraipymų, kitokio tipo signaluose – girdima nuo 5% [29].

Vos juntamas iškraipymų lygis ne mažesnis nei 1% [30].

Šiuo atveju, mokslininkai taip pat pasirinko skirtingus tyrimo objektus ir gavo skirtingus rezultatus. M. E. Bryan ir H. D. Parbrook tyrė klausos jautrumą atskiroms harmonikoms elementariuose signaluose, tačiau juk realiose sistemose retai kada atsiranda tik vienos harmonikos perteklius. Šioje srityje labai trūksta sistemingo tyrimo.

4. MOKSLINIS TYRIMAS

4. 1. Teorinė dalis

Mokslinis tyrimas sudarytas iš teorinės ir eksperimentinės dalies. Teorinėje dalyje matematiškai simuliuojami vientakčiai ir dvitakčiai stiprinimo kaskadų modeliai. Tai atliekama naudojant Čebyševio polinomus, kaip stiprinimo laipsnių perdavimo charakteristikas. Stebima, kaip keičiasi iškraipymai, keičiant amplitudę ir nuolatinės dedamąsias.

Čebyševas (*Chebychev*, kitur *Chebysheff*, *Chebyshov*, *Tchebychev*) 1821-1894 metais išvedė vadinamąją rekurentinę formulę, su kuria galima apskaičiuoti jo vardu vadinamus polinomus ir išsiaiškinti tų polinomų taikymo galimybes [31].

Žinome trigonometrines formules:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta, \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.\end{aligned}\quad (4.1.1 \text{ formulė})$$

Sudedame šias formules ir gauname:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) &= 2 \cos \alpha \cos \beta, \\ \text{arba} \quad \cos(\alpha + \beta) &= 2 \cos \alpha \cos \beta - \cos(\alpha - \beta).\end{aligned}\quad (4.1.2 \text{ formulė})$$

Tuo atveju, kai $\alpha = n\varphi$, $\beta = \varphi$, gauname

$$\boxed{\cos(n+1)\varphi = 2 \cos n\varphi \cos \varphi - \cos(n-1)\varphi.} \quad (4.1.3 \text{ formulė})$$

Gautoji formulė vadinama rekurentine, su ja galime rasti įvairių harmonikų kosinusoidžių išraiškas pirmosios harmonikos kosinusoidės atžvilgiu [32]:

kai $n = 1$,

$$\cos 2\varphi = 2 \cos^2 \varphi - 1,$$

kai $n = 2$,

$$\cos 3\varphi = 2 \cos 2\varphi \cos \varphi - \cos \varphi = 2(2 \cos^2 \varphi - 1) \cos \varphi - \cos \varphi = 4 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi,$$

kai $n = 3$,

$$\begin{aligned}\cos 4\varphi &= 2 \cos 3\varphi \cos \varphi - \cos 2\varphi = 2(4 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi) \cos \varphi - (2 \cos^2 \varphi - 1) = \\ &= 8 \cos^4 \varphi - 8 \cos^2 \varphi + 1,\end{aligned}$$

kai $n = 4$,

$$\begin{aligned}\cos 5\varphi &= 2 \cos 4\varphi \cos \varphi - \cos 3\varphi = 2(8 \cos^4 \varphi - 8 \cos^2 \varphi + 1) \cos \varphi - (4 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi) = \\ &= 16 \cos^5 \varphi - 20 \cos^3 \varphi + 5 \cos \varphi.\end{aligned}$$

(4.1.4 formulė)

Visiškai taip pat galėtume rasti dar aukštesnių harmonikų kosinusoidžių išraiškas. Dabar imkime $\varphi = \arccos x$, tada gauname

$$\cos((n+1)\arccos x) = 2\cos(n\arccos x)\cos(\arccos x) - \cos((n-1)\arccos x). \quad (4.1.5 \text{ formulė})$$

Įvertiname, kad $\cos(\arccos x) = x$, tada

$$\boxed{\cos((n+1)\arccos x) = 2x\cos(n\arccos x) - \cos((n-1)\arccos x)}. \quad (4.1.6 \text{ formulė})$$

Jei pažymėsime

$$\begin{aligned} F_{n+1}(x) &= \cos((n+1)\arccos x), \\ F_n(x) &= \cos(n\arccos x), \\ F_{n-1}(x) &= \cos((n-1)\arccos x), \end{aligned} \quad (4.1.7 \text{ formulė})$$

gausime

$$\boxed{F_{n+1}(x) = 2xF_n(x) - F_{n-1}(x)}. \quad (4.1.8 \text{ formulė})$$

Pastebėkime, kad

$$\begin{aligned} F_0(x) &= \cos(0\arccos x) = \cos 0 = 1, \\ F_1(x) &= \cos(1\arccos x) = x. \end{aligned} \quad (4.1.9 \text{ formulė})$$

Su gauta rekurentine formule galime rasti įvairių laipsnių Čebyševio polinomus:

$$\begin{aligned} F_0(x) &= 1, \\ F_1(x) &= x, \\ F_2(x) &= 2x^2 - 1, \\ F_3(x) &= 4x^3 - 3x, \\ F_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1, \\ F_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x, \\ F_6(x) &= 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1. \end{aligned}$$

bendruoju atveju

$$F_{n+1}(x) = 2xF_n(x) - F_{n-1}(x). \quad (4.1.10 \text{ formulė})$$

Nustatykime, kokia yra polinomo $F_n(x)$ koeficiento reikšmė prie x^n . Lengva matyti, kad šis koeficientas yra 2^{n-1} . Pabandykime tuo įsitikinti. Tarkime, kad tvirtinimas: polinomo $F_n(x)$ koeficiento prie x^n yra 2^{n-1} yra teisingas. Tada polinomo $F_{n+1}(x)$ koeficiento prie x^{n+1} reikšmė turi būti 2^n . Iš rekurentinės formulės (4.1.10) taip pat matome, kad polinomo

aukščiausias laipsnis yra x^{n+1} , o koeficientas prie jo yra $2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$. Taigi, anksčiau išsakytas tvirtinimas yra teisingas.

Dabar apskaičiuokime polinomo $F_n(x)$ šaknis, nustatykite, kokia paties polinomo reikšmių aibė. Suprantama, kad $F_n(x)$ būtinai turi n šaknų. Įrodykite, kad visos šaknys yra tikrieji skaičiai, patenka į intervalą $(-1; 1)$, o $F_n(x)$ reikšmių aibė yra $[-1; 1]$. Kaip jau matėme $F_n(x) = \cos(n \arccos x)$. Nors $n \arccos x \in (-\infty; +\infty)$, $F_n(x) = \cos(n \arccos x) \in [-1; 1]$.

Dabar spręskime lygtį

$$F_n(x) = 0 \Rightarrow \cos(n \arccos x) = 0.$$

Iš jos seka

$$n \arccos x = \frac{\pi}{2}(2k-1), k \in N,$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2n}(2k-1),$$

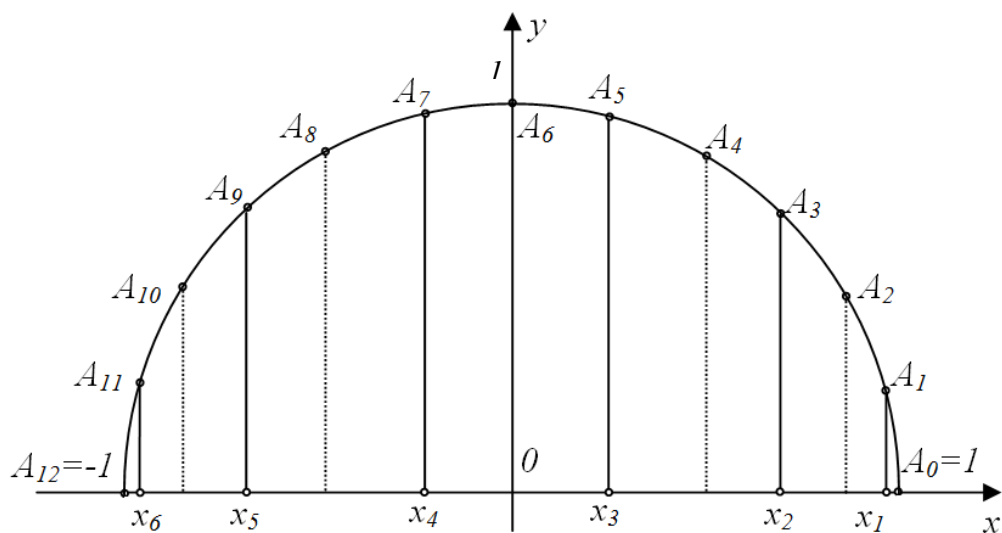
$$x_n = \cos \frac{\pi}{2n}(2k-1), k \in N.$$

Matome, kad rasime n skirtingų reikšmių, jos visos yra tikrieji skaičiai ir sutelpa į intervalą $(-1; 1)$ (nes kosinuso reikšmės). Visus šiuos sprendinius $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_n$ gausime, skaičiui k suteikdami skirtingas sveikųjų skaičių reikšmes $k = 1, 2, 3, \dots, n$. Kai rasime n skirtingų reikšmių, skaičiavimą galime stabdyti, nes rastos reikšmės tik kartos jau rastąsias. Iš tiesų:

$$\begin{aligned} x_{n+p} &= \cos \frac{\pi}{2n}(2(n+p)-1) = \cos \frac{\pi}{2n}(2n+2p-1) = \cos \left(\pi + \frac{\pi}{2n}(2p-1) \right) = \\ &= \cos \left(2\pi - \left(\pi + \frac{\pi}{2n}(2p-1) \right) \right) = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{2n}(2p-1) \right) = \cos \left(\frac{2n\pi - \pi(2p-1)}{2n} \right) = \\ &= \cos \frac{\pi}{2n}(2n-2p+1) = \cos \frac{\pi}{2n}(2(n-p)+1) = x_{n-p+1}. \end{aligned}$$

Iš čia matome, kad $x_{n+1} = x_n, x_{n+2} = x_{n-1}, x_{n+3} = x_{n-2}, \dots$. Tai reiškia, kad sprendiniai $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_n$ yra vieninteliai, tikrieji, pavieniai – nėra kartotinių.

Sprendinius $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_n$ galime rasti grafiškai, sudarydami brėžinį (pav. 4.1.1). Imame viršutinę vienetinio spindulio apskritimo dalį ($y \geq 0$). Apskritimo lanko dalį padaliname į $2n$ dalių, kurių kiekvienos ilgis yra $\frac{\pi}{2n}$. Gautuosius taškus pavadiname $A_0, A_1, A_2, A_3, \dots, A_k, \dots, A_{2n}$. Imame tik nelyginio eilės numerio taškus ir juos projektuojame į Ox ašį. Gautosios projekcijos ir yra ieškomieji taškai, sprendiniai $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_n$.



Pav. 4.1.1. Grafinis lygties $F_n(x) = 0$ sprendinių radimas, kai $n = 6$.

Kaip jau matėme $F_n(x) = \cos(n \arccos x) \in [-1; 1]$. Raskime tas \hat{x} reikšmes, kurioms $F_n(x) = \cos(n \arccos \hat{x}) = \pm 1$.

$$\text{Jei } \cos(n \arccos \hat{x}) = 1, \text{ tai } n \arccos \hat{x} = 2\pi k, \arccos \hat{x} = \frac{2\pi k}{n}, \hat{x} = \cos \frac{2\pi k}{n},$$

$$\text{jei } \cos(n \arccos \hat{x}) = -1, \text{ tai } n \arccos \hat{x} = (2k + 1)\pi, \arccos \hat{x} = \frac{2k + 1}{n}\pi, \hat{x} = \cos \frac{2k + 1}{n}\pi.$$

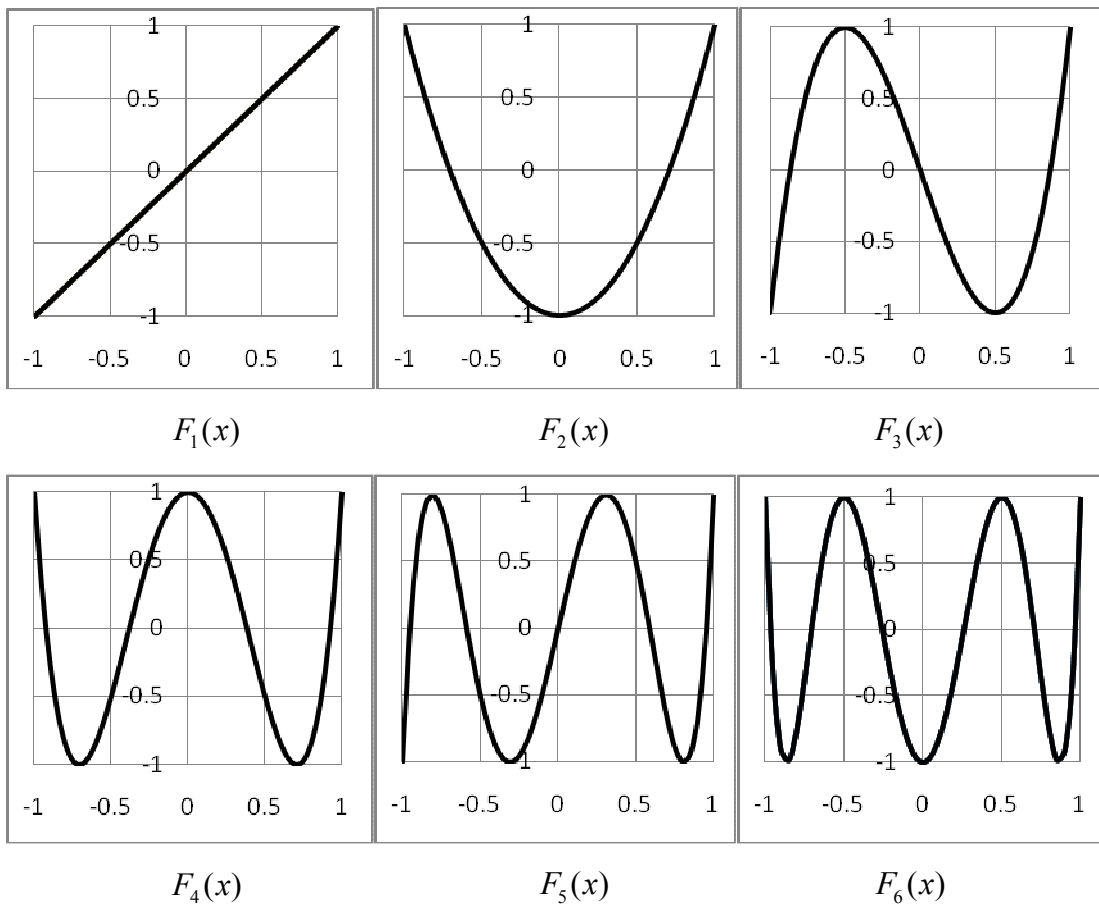
Iš šių lygybių randame:

$$\hat{x}_0 = 1, \hat{x}_1 = \cos \frac{\pi}{n}, \hat{x}_2 = \cos \frac{2\pi}{n}, \dots, \hat{x}_n = -1.$$

Dėl to:

$$F_n(\hat{x}_0) = F_n(1) = 1, F_n(\hat{x}_1) = -1, F_n(\hat{x}_2) = 1, F_n(\hat{x}_3) = -1, \dots, F_n(\hat{x}_n) = F_n(-1) = (-1)^n.$$

Galime nubraižyti įvairių laipsnių Čebyševio polinomų grafikus (pav. 4.1.2).



Pav. 4.1.2 Skirtingų laipsnių Čebyševio polinomų grafikai

Dabar nagrinėkime polinomą $\overline{F}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} F_n(x)$.

Šio polinomo visų dėmenų koeficientai yra sumažinti dydžiu $\frac{1}{2^{n-1}}$. Būtent todėl polinomo $\overline{F}_n(x)$ koeficientas prie x^n yra lygus vienetui. Suprantama, kad polinomas $\overline{F}_n(x)$ turi tas pačias šaknis, kaip ir polinomas $F_n(x)$, bet paties polinomo reikšmių aibė yra $-\frac{1}{2^{n-1}} \leq \overline{F}_n(x) \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.

Išnagrinėkime polinomų $\overline{F}_n(x)$ taikymo galimybes. Su jais galime aproksimuoti bet kokią įrenginio perdavimo funkciją $f(x)$, apibrėžtą atkarpoje $[-1;1]$:

$$f(x) = k_0 \overline{F}_0(x) + k_1 \overline{F}_1(x) + k_2 \overline{F}_2(x) + \dots + k_n \overline{F}_n(x) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} k_n \overline{F}_n(x).$$

4. 1. 1. Kvazivientakčio trakto perdavimo funkcijos tyrimas

Išstudijuokime, ar Čebyševio polinomiali yra tinkami simuluoti stiprintuvo modelio kuriamus iškraipymus.

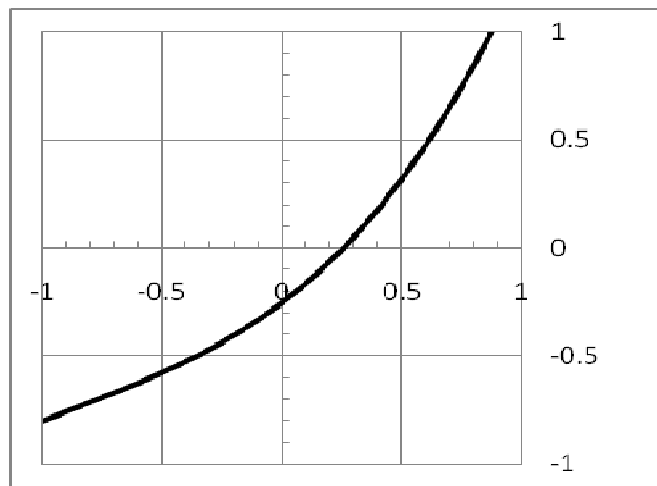
Suformuokime perdavimo funkciją, kurioje yra sudedamosios $\overline{F}_1(x)$, $\overline{F}_2(x)$ ir $\overline{F}_3(x)$ su svertiniais koeficientais 1, 0,5 ir 0,2, atitinkamai:

$$\begin{aligned} f(x) &= \overline{F}_1(x) + 0,5\overline{F}_2(x) + 0,2\overline{F}_3(x) = \\ &= x + 0,5\left(x^2 - \frac{1}{2}\right) + 0,2\left(x^3 - \frac{3}{4}x\right) = \\ &= 0,85x + 0,5x^2 + 0,2x^3 - 0,25. \end{aligned}$$

Tokia perdavimo funkcija (pav. 5.1.1.1.), suprantama, sukels netiesinius įėjimo signalo $x = a + b \cos \omega t$, ($|a| + b \leq 1, 0 < b \leq 1$) iškraipymus. (4.1.4) formules pertvarkę harmoniniam signalui ($a = 0, b = 1$), gauname:

$$\begin{aligned} \cos^2 \omega t &= \frac{1}{2} \cos 2\omega t + \frac{1}{2}, \\ \cos^3 \omega t &= \frac{1}{4} \cos 3\omega t + \frac{3}{4} \cos \omega t, \\ \cos^4 \omega t &= \frac{1}{8} \cos 4\omega t - \frac{1}{8} + \cos^2 \omega t = \frac{1}{8} \cos 4\omega t - \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \cos 2\omega t + \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \cos 4\omega t + \frac{1}{2} \cos 2\omega t + \frac{3}{8}, \\ \cos^5 \omega t &= \frac{1}{16} \cos 5\omega t + \frac{5}{4} \cos^3 \omega t - \frac{5}{16} \cos \omega t = \frac{1}{16} \cos 5\omega t + \frac{5}{4} \left(\frac{1}{4} \cos 3\omega t + \frac{3}{4} \cos \omega t \right) - \frac{5}{16} \cos \omega t = \\ &= \frac{1}{16} \cos 5\omega t + \frac{5}{16} \cos 3\omega t + \frac{5}{8} \cos \omega t. \end{aligned} \tag{4.1.1.1}$$

Analogiškai galime apskaičiuoti harmoninių signalų aukštesnių laipsnių (šeštojo, septintojo ir t.t.) harmonikų sudėtį. Dabar apskaičiuokime harmoninio signalo, praėjusio traktą su perdavimo funkcija (pav. 4.1.1.1), iškraipymą:



Pav. 4.1.1.1 Perdavimo funkcija
 $f(x) = 0,85x + 0,5x^2 + 0,2x^3 - 0,25$

Matome, kad harmoninis signalas su vienetine amplitude perdavimo trakte yra iškraipomas, o iškraipytas signalas turi žymias antros (25%) ir trečios (5%) harmonikų amplitudes.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 0,85 \cos \omega t + 0,5 \cos^2 \omega t + 0,2 \cos^3 \omega t - 0,25 = \\
 &= 0,85 \cos \omega t + 0,5 \left(\frac{1}{2} \cos 2\omega t + \frac{1}{2} \right) + 0,2 \left(\frac{1}{4} \cos 3\omega t + \frac{3}{4} \cos \omega t \right) - 0,25 = \\
 &= \cos \omega t + 0,25 \cos 2\omega t + 0,05 \cos 3\omega t.
 \end{aligned} \tag{4.1.1.2}$$

Manome, kad teisingai parinkę įėjimo signalo $x = a + b \cos \omega t$ amplitudę ($0 < b \leq 1$) ir perdavimo trakto darbo tašką ($|a| \leq 1$), galime sumažinti iškraipymus, t. y. nepageidaujamų harmonikų amplitudžių procentinę vertę. Įsitikinkime tuo. Turime:

$$\begin{aligned}
 x &= a + b \cos \omega t, \\
 x^2 &= a^2 + 2ab \cos \omega t + b^2 \cos^2 \omega t = \\
 &= a^2 + 2ab \cos \omega t + b^2 \left(\frac{1}{2} \cos 2\omega t + \frac{1}{2} \right) = \\
 &= \left(a^2 + \frac{b^2}{2} \right) + 2ab \cos \omega t + \frac{b^2}{2} \cos 2\omega t,
 \end{aligned} \tag{4.1.1.3}$$

$$\begin{aligned}
 x^3 &= a^3 + 3a^2b \cos \omega t + 3ab^2 \cos^2 \omega t + b^3 \cos^3 \omega t = \\
 &= a^3 + 3a^2b \cos \omega t + 3ab^2 \left(\frac{1}{2} \cos 2\omega t + \frac{1}{2} \right) + b^3 \left(\frac{1}{4} \cos 3\omega t + \frac{3}{4} \cos \omega t \right) = \\
 &= \left(a^3 + \frac{3ab^2}{2} \right) + \left(3a^2b + \frac{3b^3}{4} \right) \cos \omega t + \frac{3ab^2}{2} \cos 2\omega t + \frac{b^3}{4} \cos 3\omega t.
 \end{aligned} \tag{4.1.1.4}$$

Signalas, praėjęs traktą su perdavimo funkcija $f(x) = 0,85x + 0,5x^2 + 0,2x^3 - 0,25$ yra:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 0,85(a + b \cos \omega t) + 0,5 \left(\left(a^2 + \frac{b^2}{2} \right) + 2ab \cos \omega t + \frac{b^2}{2} \cos 2\omega t \right) + \\
 &+ 0,2 \left(\left(a^3 + \frac{3ab^2}{2} \right) + \left(3a^2b + \frac{3b^3}{4} \right) \cos \omega t + \frac{3ab^2}{2} \cos 2\omega t + \frac{b^3}{4} \cos 3\omega t \right) - 0,25 = \\
 &= \left(0,85a + \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{5} + \frac{3ab^2}{10} - 0,25 \right) + \left(0,85b + ab + \frac{3a^2b}{5} + \frac{3b^3}{20} \right) \cos \omega t + \\
 &\quad + \left(\frac{b^2}{4} + \frac{3ab^2}{10} \right) \cos 2\omega t + \frac{b^3}{20} \cos 3\omega t.
 \end{aligned} \tag{4.1.1.5}$$

Turime trijų harmonikų amplitudes:

$$A_1 = 0,85b + ab + \frac{3a^2b}{5} + \frac{3b^3}{20} = \frac{b(17 + 20a + 12a^2 + 3b^2)}{20},$$

$$A_2 = \frac{b^2}{4} + \frac{3ab^2}{10} = \frac{b^2(5 + 6a)}{20},$$

$$A_3 = \frac{b^3}{20}.$$

Norime rasti minimalius nepageidaujamų harmonikų amplitudžių santykius su pirmosios harmonikos amplitude:

$$B_2 = \frac{A_2}{A_1} = \frac{\frac{b^2(5 + 6a)}{20}}{\frac{b(17 + 20a + 12a^2 + 3b^2)}{20}} = \frac{b(5 + 6a)}{17 + 20a + 12a^2 + 3b^2}, \quad (4.1.1.6)$$

$$B_3 = \frac{A_3}{A_1} = \frac{\frac{b^3}{20}}{\frac{b(17 + 20a + 12a^2 + 3b^2)}{20}} = \frac{b^2}{17 + 20a + 12a^2 + 3b^2}. \quad (4.1.1.7)$$

Suminis (bendras) abiejų harmonikų amplitudžių rezultatas yra

$$B_\Sigma = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} = \sqrt{\frac{b^2(5 + 6a)^2 + b^4}{(17 + 20a + 12a^2 + 3b^2)^2}} =$$

$$= \frac{b\sqrt{(5 + 6a)^2 + b^2}}{|17 + 20a + 12a^2 + 3b^2|} = \frac{b\sqrt{(5 + 6a)^2 + b^2}}{17 + 20a + 12a^2 + 3b^2}. \quad (4.1.1.8)$$

Tirsime, kiekvienos nepageidaujamos harmonikos ir suminio (abiejų harmonikų), kaip dviejų kintamųjų funkcijų $B_2 = \varphi(a, b)$, $B_3 = \psi(a, b)$ ir $B_\Sigma = \theta(a, b)$, minimumus. Pirmiausia išstirkime, ar yra optimalus variantas, kada antrosios harmonikos procentinė vertė yra mažiausia. Skaičiuojame:

$$\frac{\partial B_2}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{b(5 + 6a)}{17 + 20a + 12a^2 + 3b^2} \right) = \frac{6b(17 + 20a + 12a^2 + 3b^2) - b(5 + 6a)(20 + 24a)}{(17 + 20a + 12a^2 + 3b^2)^2} \quad (4.1.1.9)$$

$$= \frac{6b(17 + 20a + 12a^2 + 3b^2) - 4b(5 + 6a)^2}{(17 + 20a + 12a^2 + 3b^2)^2} = \frac{2b(1 - 60a - 36a^2 + 9b^2)}{(17 + 20a + 12a^2 + 3b^2)^2},$$

$$\frac{\partial B_2}{\partial b} = \frac{\partial}{\partial b} \left(\frac{b(5 + 6a)}{17 + 20a + 12a^2 + 3b^2} \right) = \frac{(5 + 6a)(17 + 20a + 12a^2 + 3b^2) - b(5 + 6a)6b}{(17 + 20a + 12a^2 + 3b^2)^2} =$$

$$= \frac{(85 + 202a + 180a^2 + 18ab^2 + 72a^3 + 15b^2) - 6b^2(5 + 6a)}{(17 + 20a + 12a^2 + 3b^2)^2} =$$

$$= \frac{85 + 202a + 180a^2 - 18ab^2 + 72a^3 - 15b^2}{(17 + 20a + 12a^2 + 3b^2)^2}. \quad (4.1.1.10)$$

Ekstremumo taške

$$\begin{cases} \frac{\partial B_2}{\partial a} = 0, \\ \frac{\partial B_2}{\partial b} = 0, \end{cases}$$

o tai reiškia:

$$\begin{cases} 1 - 60a - 36a^2 + 9b^2 = 0, \\ 85 + 202a + 180a^2 - 18ab^2 + 72a^3 - 15b^2 = 0, \\ 17 + 20a + 12a^2 + 3b^2 \neq 0, \\ |a| \leq 1, \\ 0 < b \leq 1. \end{cases}$$

Pirmąją sistemos lygtį pertvarkome

$$\begin{aligned} 36a^2 + 60a - (9b^2 + 1) &= 0, \\ D = 60^2 + 4 \cdot 36(9b^2 + 1) &= 144(26 + 9b^2) > 0, \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$a_{1,2} = \frac{-60 \pm 12\sqrt{26+9b^2}}{72} = \frac{-5 \pm \sqrt{26+9b^2}}{6},$$

$$a_1 = \frac{-5 + \sqrt{26+9b^2}}{6}, \text{ tinka, nes } b \in (0,1), a \in \left(\frac{-5 + \sqrt{26}}{6}, \frac{-5 + \sqrt{35}}{6} \right),$$

$$a_2 = \frac{-5 - \sqrt{26+9b^2}}{6}, \text{ netinka, nes } |a| \leq 1.$$

Tai reiškia, kad ekstremumas (minimumas arba maksimumas) gali egzistuoti intervale

$$a \in \left(\frac{-5 + \sqrt{26}}{6} \approx 0,016; \frac{-5 + \sqrt{35}}{6} \approx 0,153 \right).$$

Grįžtame į antrąją lygtį:

$$\begin{aligned} 85 + 202a + 180a^2 - 18ab^2 + 72a^3 - 15b^2 &= 0, \\ \text{kai } a &= \frac{-5 + \sqrt{26+9b^2}}{6}. \end{aligned}$$

Keičiame kintamąjį $u = \sqrt{26+9b^2} > 0$, tada $b^2 = \frac{u^2 - 26}{9}$, $a = \frac{u-5}{6}$, įrašome

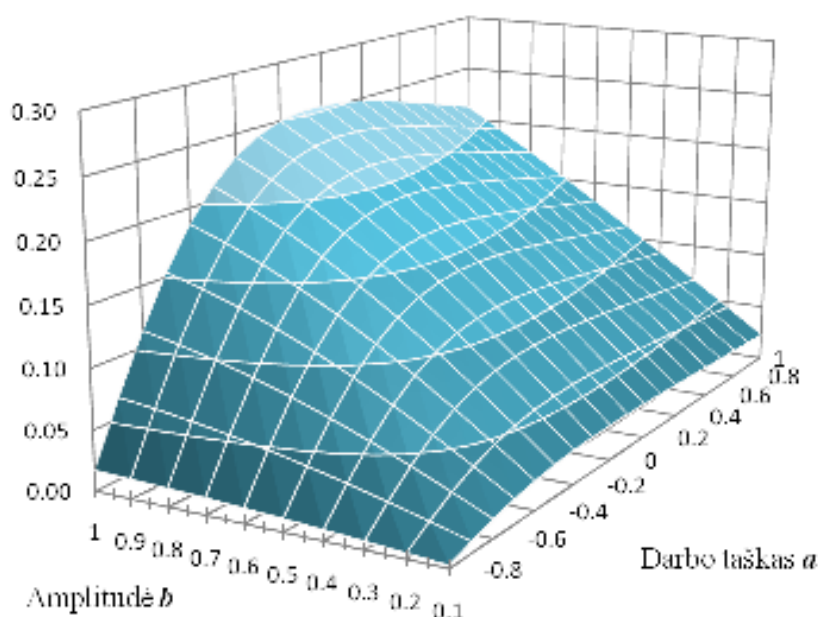
$$\begin{aligned} 85 + 202 \frac{u-5}{6} + 180 \left(\frac{u-5}{6} \right)^2 - 18 \frac{(u-5)(u^2-26)}{6 \cdot 9} + 72 \left(\frac{u-5}{6} \right)^3 - 15 \frac{u^2-26}{9} &= 0, \\ 85 + 101 \frac{u-5}{3} + 5(u^2 - 10u + 25) - \frac{u^3 - 5u^2 - 26u + 130}{3} + \\ + \frac{u^3 - 15u^2 + 75u - 125}{3} - 5 \frac{u^2 - 26}{3} &= 0, \end{aligned}$$

Sutvarkę gauname:

$$\frac{51}{3}u = 0 \Rightarrow u = 0 \Rightarrow a = -\frac{5}{6} \notin \left(\frac{-5 + \sqrt{26}}{6}, \frac{-5 + \sqrt{35}}{6} \right).$$

Tai reiškia, kad tiriamoji funkcija $B_2 = \varphi(a, b)$ leistinų reikšmių intervale $a \in \left(\frac{-5 + \sqrt{26}}{6}, \frac{-5 + \sqrt{35}}{6} \right)$ ekstremumų neturi

Apskaičiuojame ir nubraižome šios funkcijos $B_2 = \varphi(a, b)$, kaip dviejų kintamųjų funkcijos, erdvinį paviršių (pav. 4.1.1.2.).



Pav. 4.1.1.2 II harmonikos santykinė vertė

Kaip ir apskaičiavome, kintamojo a kryptimi intervale $a \in \left(\frac{-5 + \sqrt{26}}{6}, \frac{-5 + \sqrt{35}}{6} \right)$ funkcija

turi aiškų maksimalumo ekstremumą, bet, deja, kintamojo b kryptimi ji monotoniška. Mažoms signalo amplitudėms II harmonikos santykinė vertė yra mažesnė, labiausiai netinka perdavimo trakto darbo taškas, patenkantis į intervalą $a \in (\approx 0,016; \approx 0,153)$.

Ištirkime trečiosios harmonikos procentinio minimumo atvejį:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_3}{\partial a} &= \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{b^2}{17 + 20a + 12a^2 + 3b^2} \right) = \frac{0 - b^2(20 + 24a)}{(17 + 20a + 12a^2 + 3b^2)^2} = \\ &= -\frac{4b^2(5 + 6a)}{(17 + 20a + 12a^2 + 3b^2)^2}, \\ \frac{\partial B_3}{\partial b} &= \frac{\partial}{\partial b} \left(\frac{b^2}{17 + 20a + 12a^2 + 3b^2} \right) = \frac{2b(17 + 20a + 12a^2 + 3b^2) - b^2 \cdot 6b}{(17 + 20a + 12a^2 + 3b^2)^2} = \\ &= \frac{2b(17 + 20a + 12a^2)}{(17 + 20a + 12a^2 + 3b^2)^2}. \end{aligned}$$

Trečiosios harmonikos procentinio santykio minimumo taškas yra, kai

$$\begin{cases} \frac{\partial B_3}{\partial a} = 0, \\ \frac{\partial B_3}{\partial b} = 0, \end{cases}$$

o tai reiškia:

$$\begin{cases} b^2(5 + 6a) = 0, \\ b(17 + 20a + 12a^2) = 0, \\ 17 + 20a + 12a^2 + 3b^2 \neq 0, \\ a \neq 0, \\ b \neq 0. \end{cases}$$

Iš sistemos seka, kad

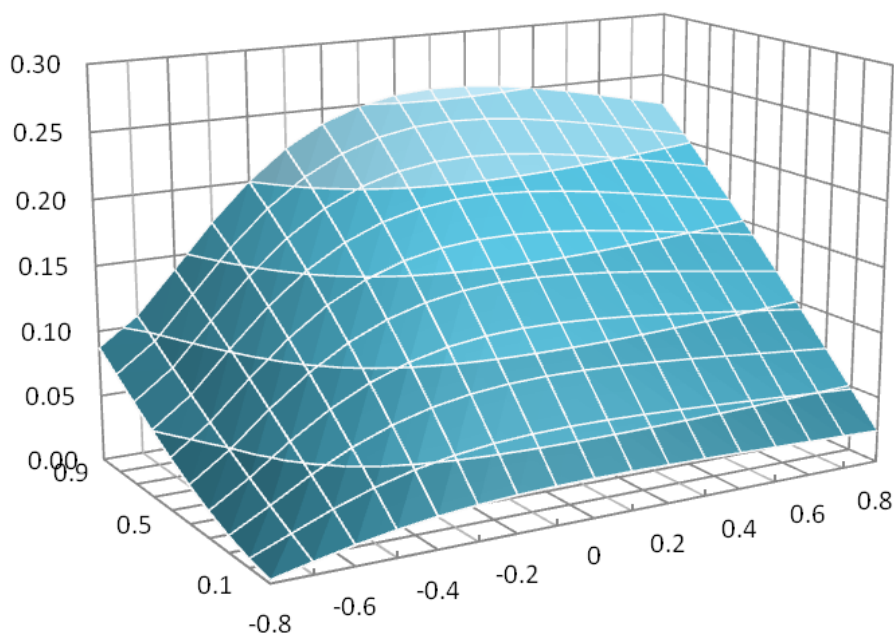
$$\begin{cases} 5 + 6a = 0 \Rightarrow a = -\frac{5}{6}, \\ 17 + 20a + 12a^2 = 0 \Rightarrow D = 20^2 - 4 \cdot 12 \cdot 17 < 0 \Rightarrow \emptyset. \end{cases}$$

Taigi, randame, kad trečiosios harmonikos santykinė reikšmė taip pat neturi ekstremumo:

a kryptimi yra ypatingas taškas $a = -\frac{5}{6} \approx -0,833$, tačiau b kryptimi funkcijos $B_2 = \psi(a, b)$

kitimas yra monotoniškas.

Apskaičiuojame ir nubrėžiame dviejų kintamųjų funkcijų $B_3 = \psi(a, b)$ ir $B_\Sigma = \theta(a, b)$ paviršius (pav. 4.1.1.3). Matome, kad didžiausia harmonikų santykinė reikšmė iš tiesų yra tame pačiame, analitiškai apskaičiuotame darbo taške $a \approx -0,833$, o didėjant amplitudei b iškraipymai monotoniškai didėja.



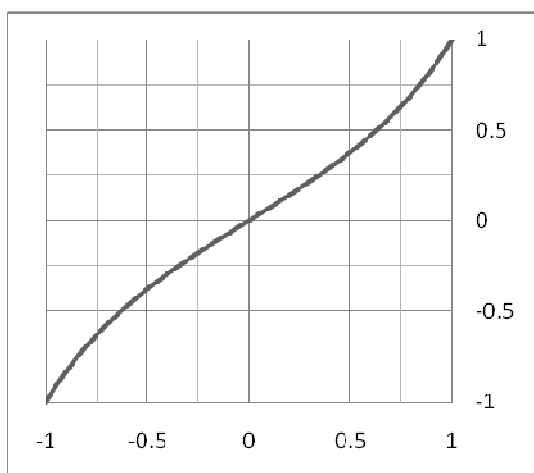
Pav. 4.1.1.3 Suminė II ir III harmonikos vertė

4. 1. 2. Kvazidvitakčio trakto perdavimo funkcijos tyrimas

Dabar analizuokime funkcijos $f(x) = 0,7x + 0,2x^3 + 0,1x^5$ įnešamus netiesinius iškreipimus. Ši funkcija Čebyševo polinomais išreiškiama:

$$f(x) = \frac{73}{80} \overline{F}_1(x) + \frac{13}{40} \overline{F}_2(x) + \frac{1}{10} \overline{F}_3(x). \quad (4.1.2.1)$$

Tokia perdavimo funkcija yra artima simetrinių galios stiprintuvų, dirbančių B (ir C) režime, voltamperinei charakteristikai (VAch), todėl įneša panašius iškreipimus.



Pav. 4.1.2.1 Perdavimo funkcijos $f(x) = 0,7x + 0,2x^3 + 0,1x^5$ grafikas

Jau matėme, kai $x = a + b \cos \omega t$, tai

$$x^3 = \left(a^3 + \frac{3ab^2}{2} \right) + \left(3a^2b + \frac{3b^3}{4} \right) \cos \omega t + \frac{3ab^2}{2} \cos 2\omega t + \frac{b^3}{4} \cos 3\omega t.$$

Žinome

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5,$$

todėl

$$\begin{aligned} x^5 &= (a + b \cos \omega t)^5 = a^5 + 5a^4b \cos \omega t + 10a^3b^2 \cos^2 \omega t + 10a^2b^3 \cos^3 \omega t + 5ab^4 \cos^4 \omega t + \\ &+ b^5 \cos^5 \omega t = a^5 + 5a^4b \cos \omega t + 10a^3b^2 \left(\frac{1}{2} \cos 2\omega t + \frac{1}{2} \right) + 10a^2b^3 \left(\frac{1}{4} \cos 3\omega t + \frac{3}{4} \cos \omega t \right) + \\ &+ 5ab^4 \left(\frac{1}{8} \cos 4\omega t + \frac{1}{2} \cos 2\omega t + \frac{3}{8} \right) + b^5 \left(\frac{1}{16} \cos 5\omega t + \frac{5}{16} \cos 3\omega t + \frac{5}{8} \cos \omega t \right). \end{aligned}$$

Paskutinę išraišką sutvarkome:

$$\begin{aligned} x^5 &= \left(a^5 + 5a^3b^2 + \frac{15ab^4}{8} \right) + \left(5a^4b + \frac{15a^2b^3}{2} + \frac{5b^5}{8} \right) \cos \omega t + \left(5a^3b^2 + \frac{5ab^4}{2} \right) \cos 2\omega t + \\ &+ \left(\frac{5a^2b^3}{2} + \frac{5b^5}{16} \right) \cos 3\omega t + \frac{5ab^4}{8} \cos 4\omega t + \frac{b^5}{16} \cos 5\omega t. \end{aligned}$$

Sumuojame:

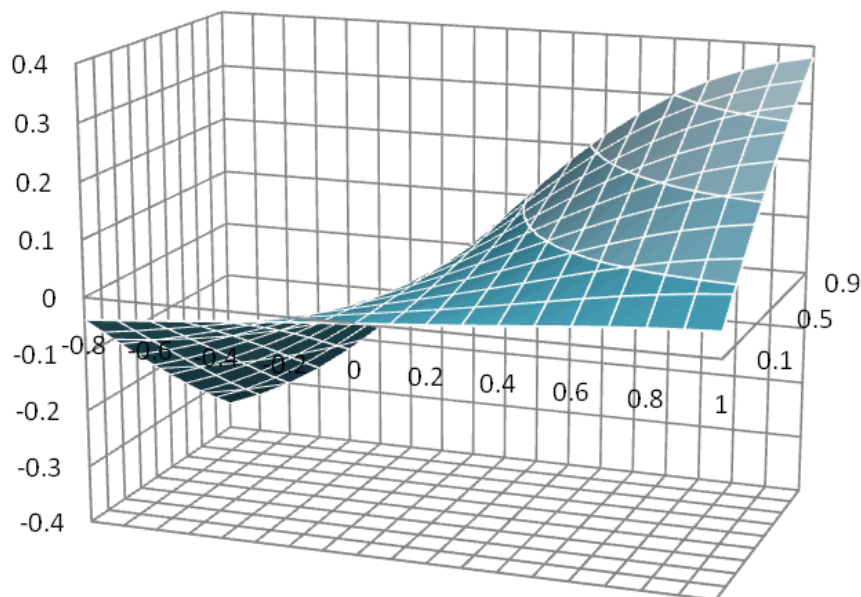
$$\begin{aligned}
 f(x) &= 0,7x + 0,2x^3 + 0,1x^5 = 0,7(a + b \cos \omega t) + \\
 &+ 0,2 \left(\left(a^3 + \frac{3ab^2}{2} \right) + \left(3a^2b + \frac{3b^3}{4} \right) \cos \omega t + \frac{3ab^2}{2} \cos 2\omega t + \frac{b^3}{4} \cos 3\omega t \right) + \\
 &0,1 \left(\left(a^5 + 5a^3b^2 + \frac{15ab^4}{8} \right) + \left(5a^4b + \frac{15a^2b^3}{2} + \frac{5b^5}{8} \right) \cos \omega t + \left(5a^3b^2 + \frac{5ab^4}{2} \right) \cos 2\omega t \right) + \\
 &+ 0,1 \left(\left(\frac{5a^2b^3}{2} + \frac{5b^5}{16} \right) \cos 3\omega t + \frac{5ab^4}{8} \cos 4\omega t + \frac{b^5}{16} \cos 5\omega t \right).
 \end{aligned}$$

Sutvarkę paskutinį reiškinį, randame perdavimo trakto, aproksimuojamo funkcija $f(x) = 0,7x + 0,2x^3 + 0,1x^5$, išėjimo signalą:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \left(\frac{7a}{10} + \frac{a^3}{5} + \frac{3ab^2}{10} + \frac{a^5}{10} + \frac{a^3b^2}{2} + \frac{3ab^4}{16} \right) + \\
 &+ \left(\frac{7b}{10} + \frac{3a^2b}{5} + \frac{3b^3}{20} + \frac{a^4b}{2} + \frac{3a^2b^3}{4} + \frac{b^5}{16} \right) \cos \omega t + \\
 &+ \left(\frac{3ab^2}{10} + \frac{a^3b^2}{2} + \frac{ab^4}{4} \right) \cos 2\omega t + \\
 &+ \left(\frac{b^3}{20} + \frac{a^2b^3}{4} + \frac{b^5}{32} \right) \cos 3\omega t + \frac{ab^4}{16} \cos 4\omega t + \frac{b^5}{160} \cos 5\omega t.
 \end{aligned}$$

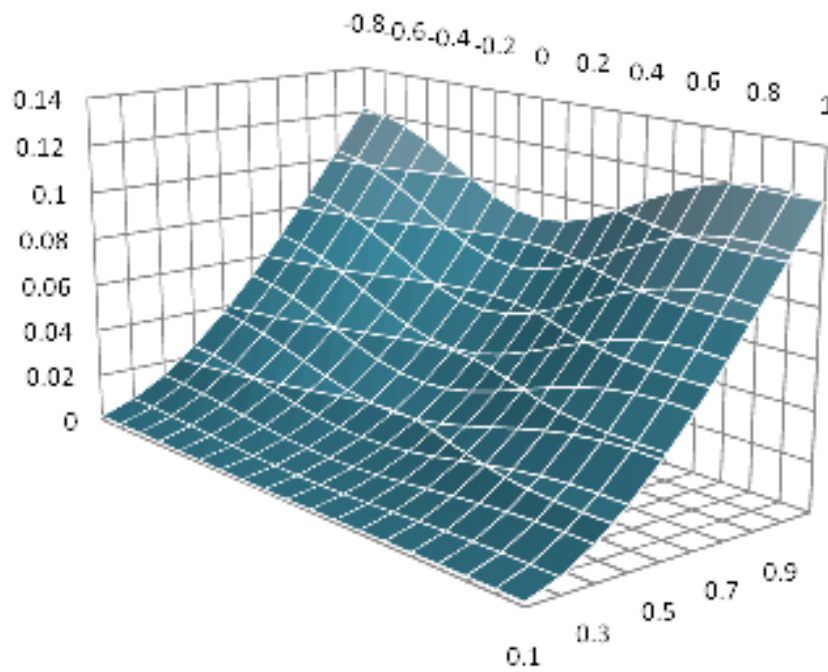
Jei parinktume $a = 0, b = 1$, gautume išėjimo signalą

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \left(\frac{7}{10} + \frac{3}{20} + \frac{1}{16} \right) \cos \omega t + \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{32} \right) \cos 3\omega t + \frac{1}{160} \cos 5\omega t = \\
 &= \frac{73}{80} \cos \omega t + \frac{13}{160} \cos 3\omega t + \frac{1}{160} \cos 5\omega t.
 \end{aligned}$$

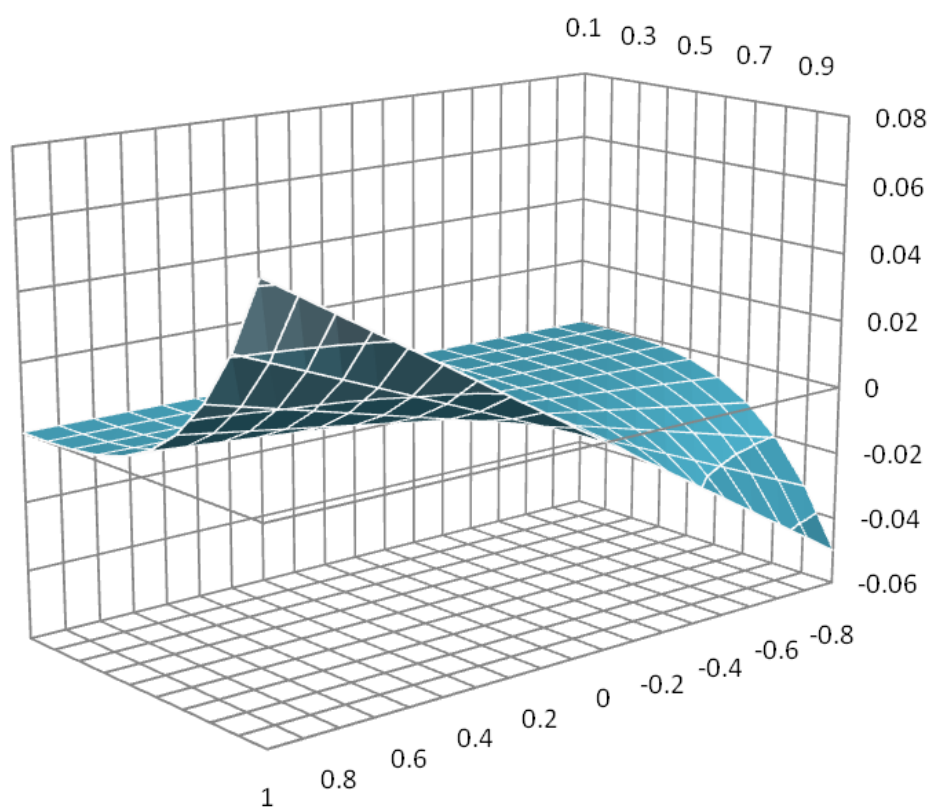


Pav. 4.1.2.2. II harmonikos santykinė vertė

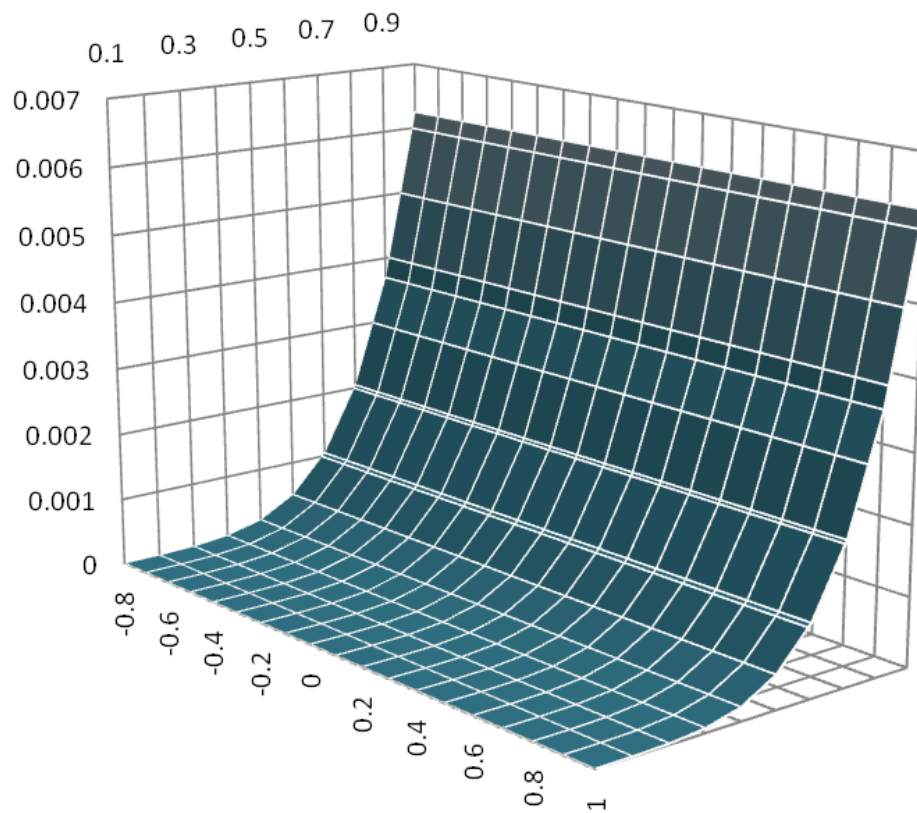
Apskaičiuokime visų harmonikų amplitudžių santykį su pirmosios harmonikos amplitude. Nubraižykime atskirų harmonikų $B_2(a,b), \dots, B_5(a,b)$ ir suminę visų nepageidaujamų harmonikų $B_\Sigma(a,b)$ santykinę vertę (4.1.2.2 – 4.1.2.6 pav.).



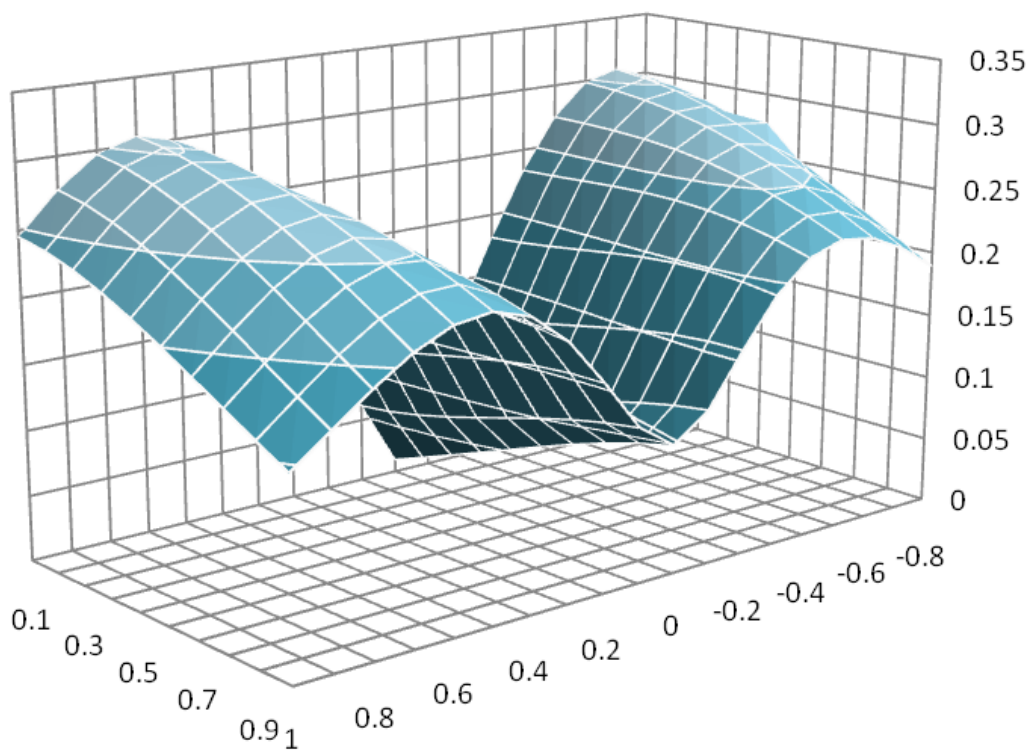
Pav. 4.1.2.3 III harmonikos amplitudės santykinė vertė



Pav. 4.1.2.4 IV harmonikos amplitudės santykinė vertė



Pav. 4.1.2.5 V harmonikos amplitudės santykinė vertė



Pav. 4.1.2.6 II ir V harmonikos amplitudės santykinė vertė

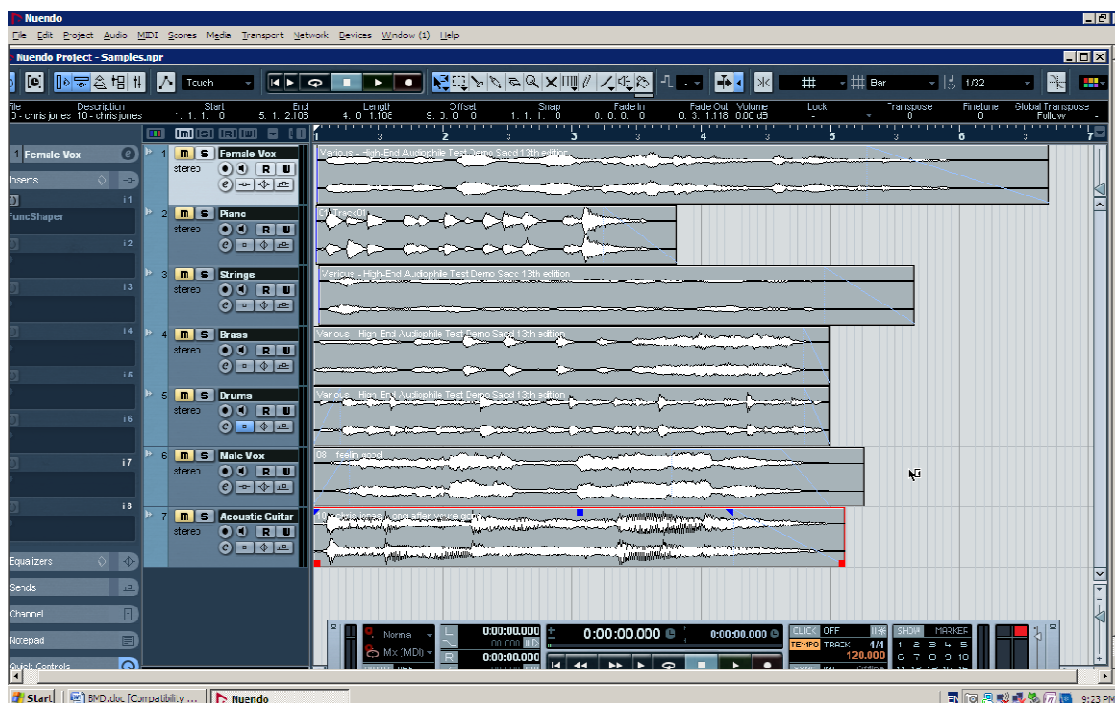
4. 2. EKSPERIMENTINĖ DALIS

4. 2. 1. Eksperimento medžiagos sudarymas

Eksperimentinėje dalyje siekiama išanalizuoti realių klausytojų reakciją į klausomo signalo formos pakitimus. Tyrimui buvo atrinkti charakteringi muzikiniai įrašai, kuriuose dominuoja tam tikras instrumentas. Šie įrašai apdorojami skaitmeniniu būdu ir pateikiami klausytojui.

Įrašų montażui buvo pasirinktas Steinberg Nuendo (4.2.1.1 paveikslas) programinis paketas. Tai patogi programa, skirta kino ir reklamų garso takelių montażui. Labai svarbu yra tai, kad ši programa palaiko VST įskiepus (*plugins*). Iš pasaulyje pripažintų bliuzo ir džiazo įrašų buvo iškirpti septyni trumpi garso pavyzdžiai:

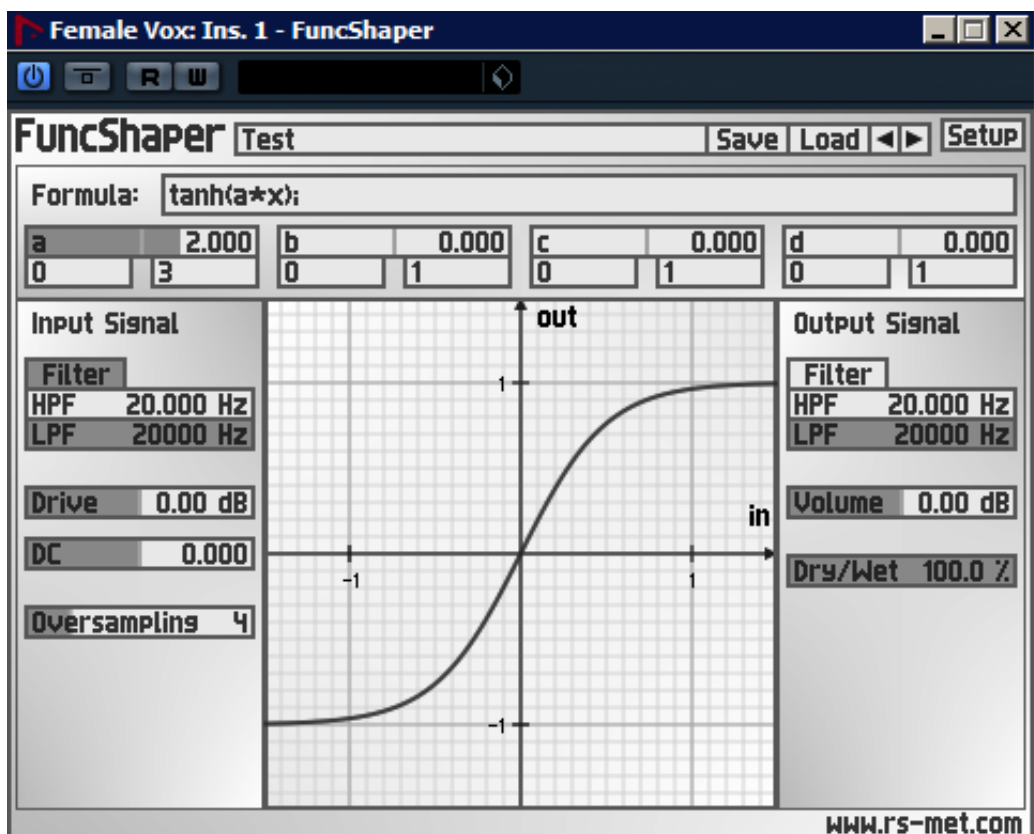
- Klavišiniai
- Pučiamieji
- Mušamieji
- Moteriškas balsas
- Vyriškas balsas
- Gitara



Pav. 4.2.1.1 Garso pavyzdžiai programoje Nuendo

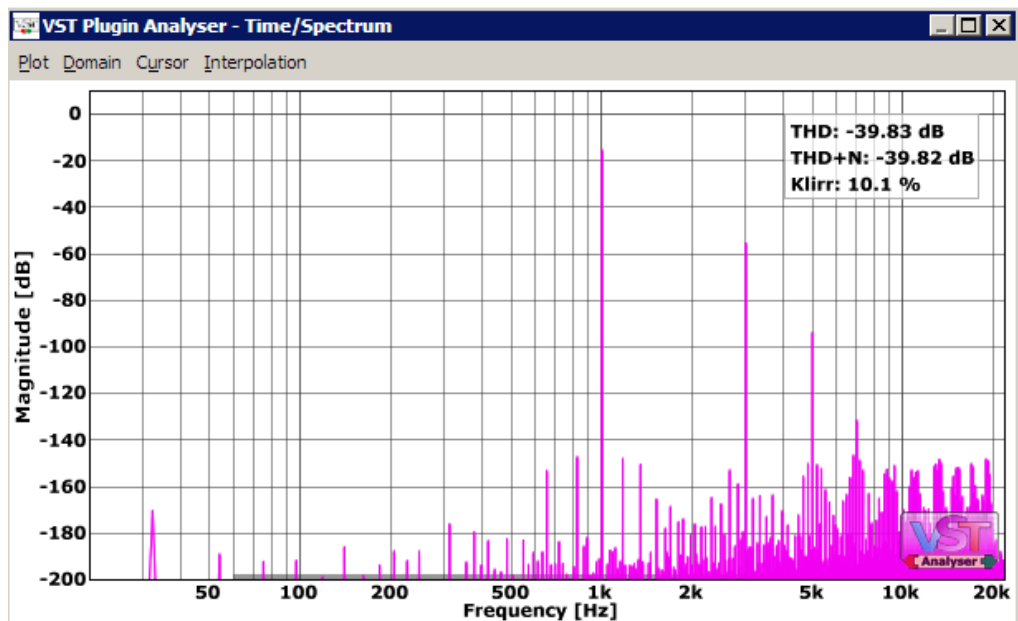
Signalų apdorojimui buvo panaudoti VST technologijos programiniai paketai. Tai yra konkrečios paskirties įskiepai, įdiegiami į garso montażo programas. Paprastai VST (Virtual Studio Technology) įskiepai skirti skaitmeniniu būdu emuliuoti konkrečius studijinius garso

apdoravimo įrenginius. Yra VST įskiepių, skirtų simuliuoti lempinio stiprintuvo iškreipimus ar net juostinio įrašo triukšmus ir kompresiją. Tačiau šio darbo tyrimui reikalinga galimybė keisti konkrečius signalo formos parametrus. Šiuo atveju, buvo panaudotas Robin Schmidt įskiepis Function Shaper (4.2.1.2 paveikslas). Tai, iš esmės vartotojo sąsajos neturintis signalo apdoravimo įskiepis, kurio perdavimo funkcija įvedama matematine išraiška. Pav. 4.2.1.2 matome amplitudės ribojimo perdavimo funkcija $Y=\text{Tanh}(a*x)$:



Pav 4.2.1.2 FuncShaper įskiepis

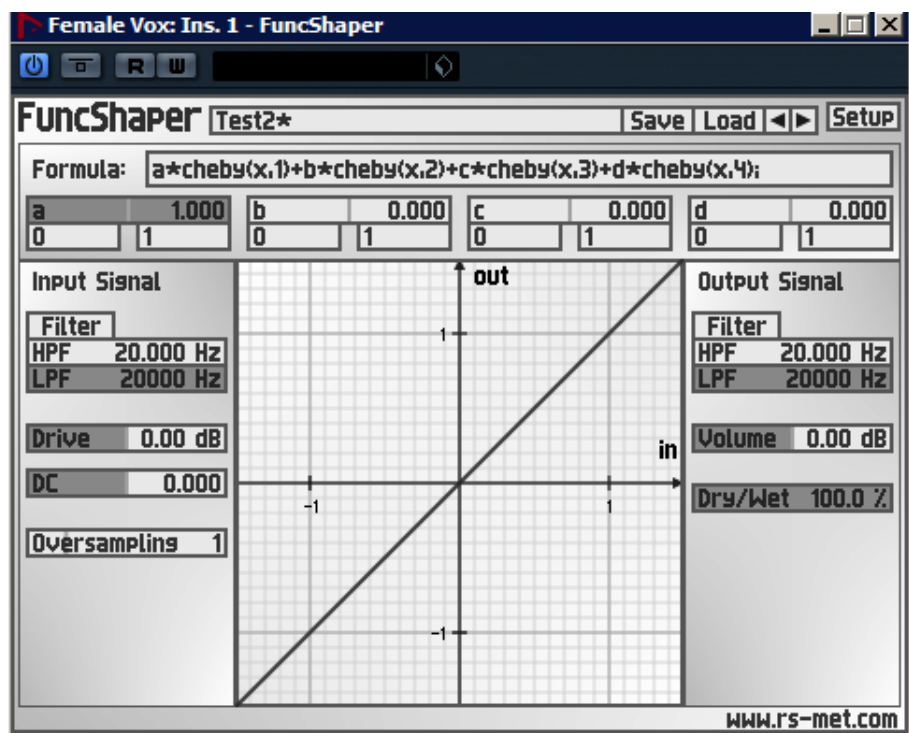
Analizei panaudojame programinį paketą VST Plugin Analyser. Pav. 4.2.1.3 matomas FuncShaper įskiepio iškreipymo spektras, įvedus $Y=\text{Tanh}(a*x)$ perdavimo funkciją:



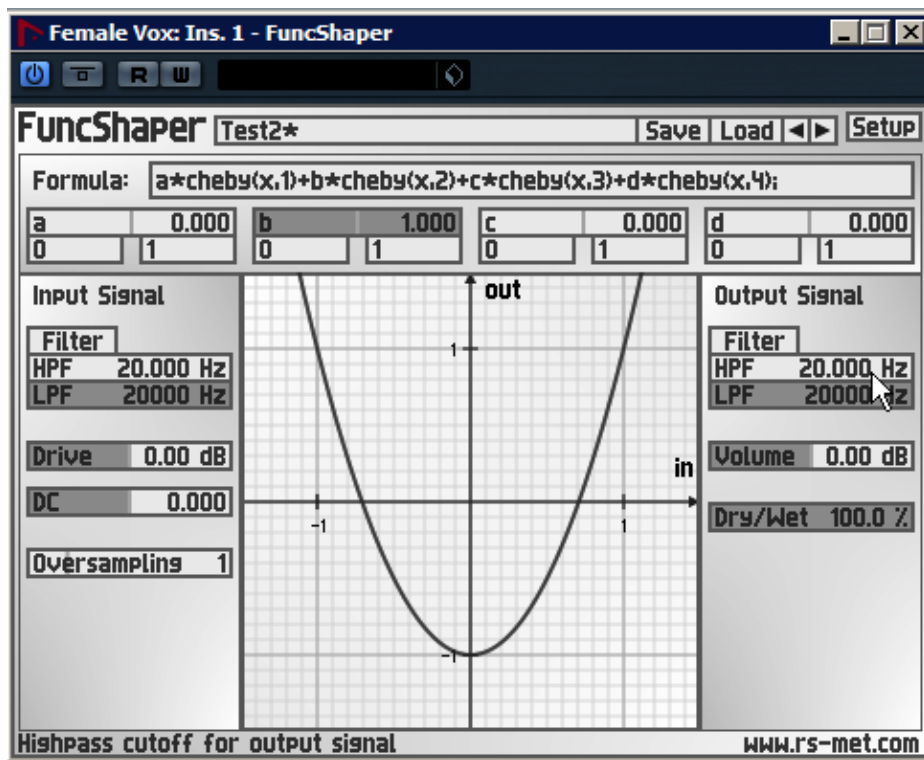
Pav. 4.2.1.3 $Y=\text{Tanh}(a*x)$ signalo spektras

Kaip matome, toks ribojimas duoda platų iškraipymų spektrą. Tačiau šiame tyrime reikalinga galimybė keisti kiekvienos harmonikos kiekį signale.

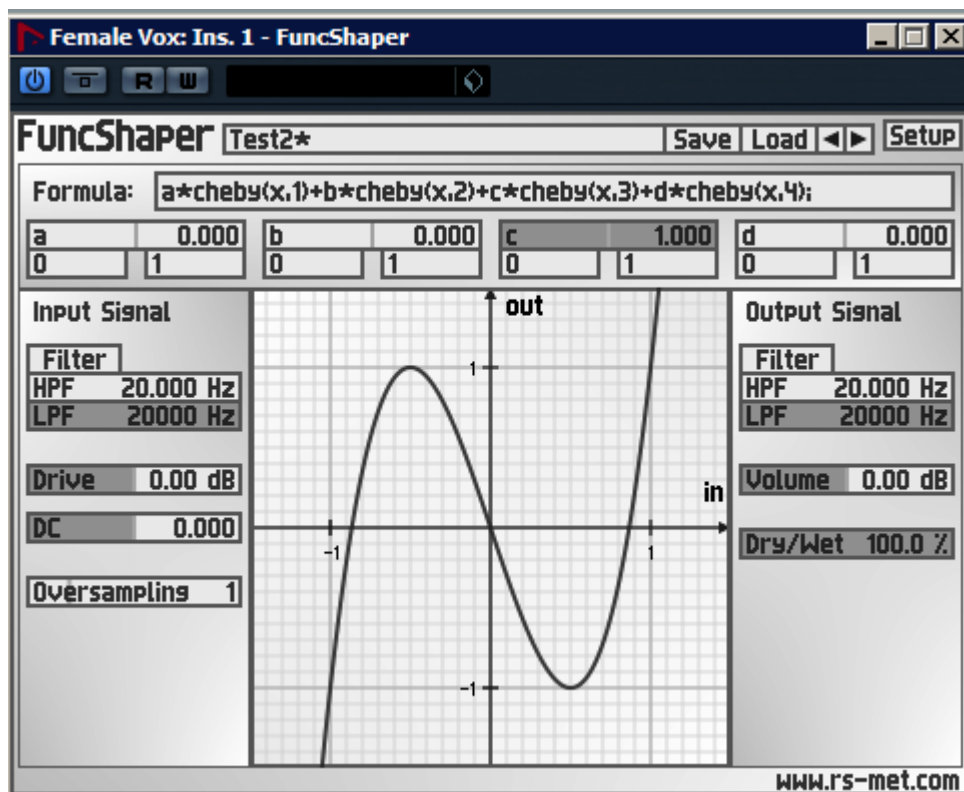
Perdavimo funkcijos aproksimavimas Čebyševio polinomis yra realizuojamame programiniame pakete Function Shaper:



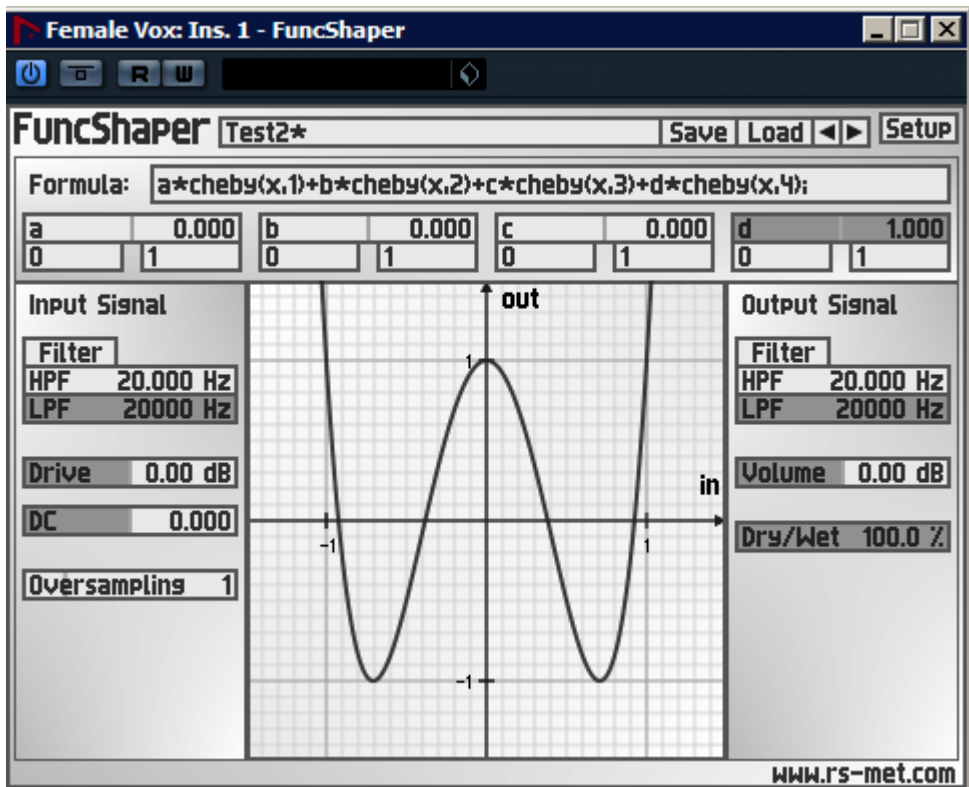
Pav. 4.2.1.4 Perdavimo funkcija aproksimuota pirmo laipsnio Čebyševio polinomu



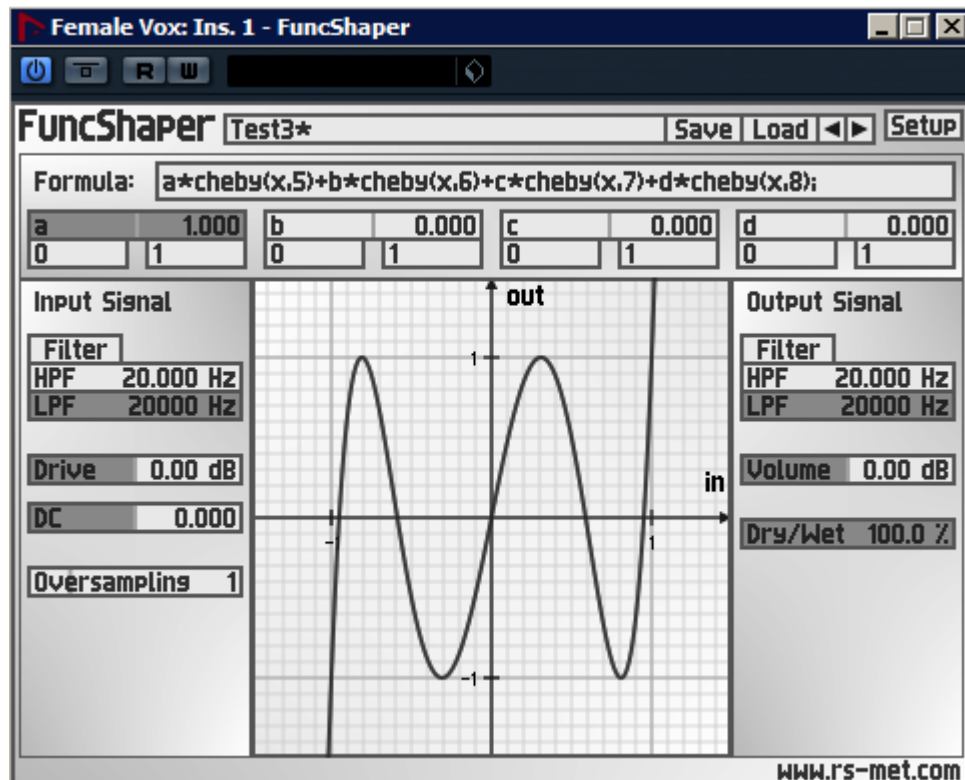
Pav. 4.2.1.5 Perdavimo funkcija aproksimuota antro laipsnio Čebyševo polinomu



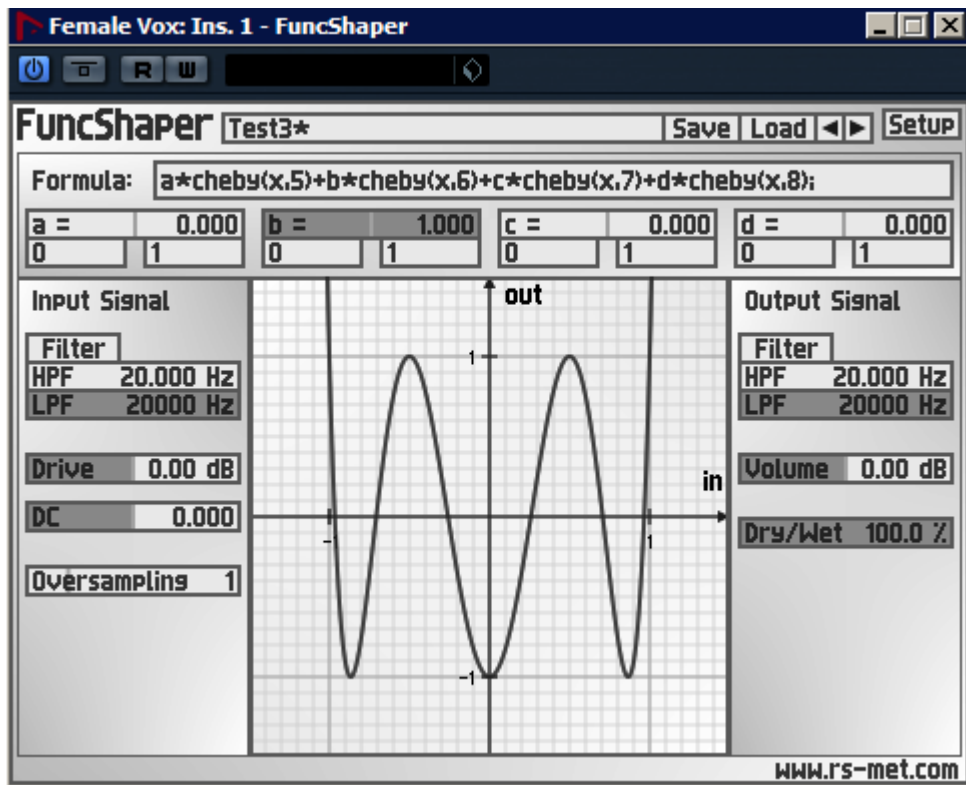
Pav. 4.2.1.6 Perdavimo funkcija aproksimuota trečio laipsnio Čebyševo polinomu



Pav. 4.2.1.7 Perdavimo funkcija aproksimuota ketvirto laipsnio Čebyševo polinomu



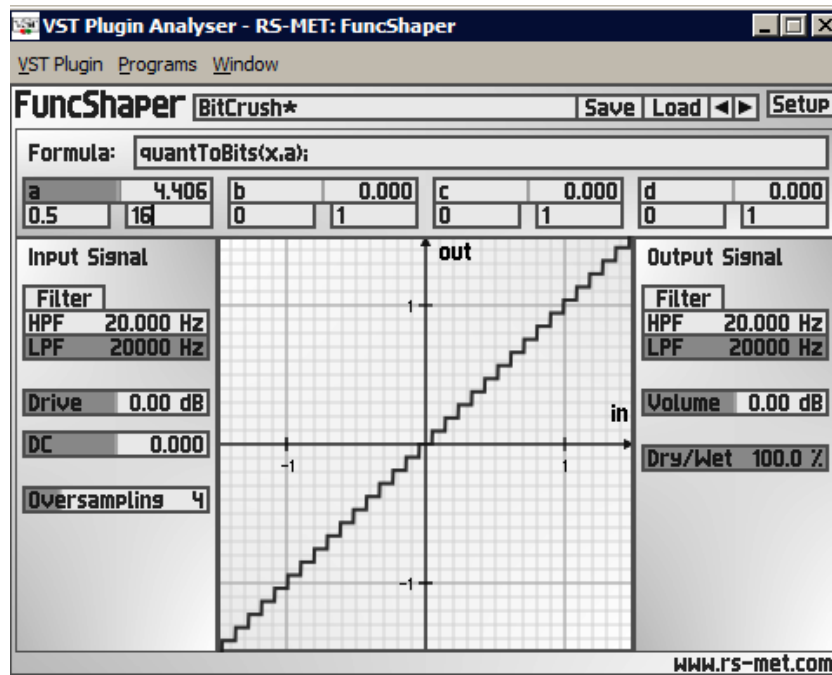
Pav. 4.2.1.8 Perdavimo funkcija aproksimuota penkto laipsnio Čebyševo polinomu



Pav. 4.2.1.9 Perdavimo funkcija aproksimuota šešto laipsnio Čebyševio polinomu

Akivaizdu, kad 4.2.1.4 - 4.2.1.9 paveiksluose matomos perdavimo charakteristikos idealiai atitinka Čebyševio polinomus 4.2.1.2 paveiksle.

Kontrolei parašoma funkcija (pav. 4.2.1.10) tinkama generuoti kvantavimo triukšmą:



Pav. 4.2.1.10 Perdavimo funkcija, generuojanti kvantavimo triukšmą

Parašius reikiamas perdavimo funkcijas, programiniu paketu buvo sugeneruoti iškraipyti garso pavyzdžiai iki 5%. Tačiau, atlikus tyrimą su pirmaisiais respondentais, pastebėta, kad, toks kvantavimo triukšmo lygis yra lengvai aptinkamas, tačiau harmoniniai iškraipymai beveik neįjuntami su realiais muzikiniais signalais. Pakoregavus funkcijų parametrus buvo sugeneruoti tokie signalai:

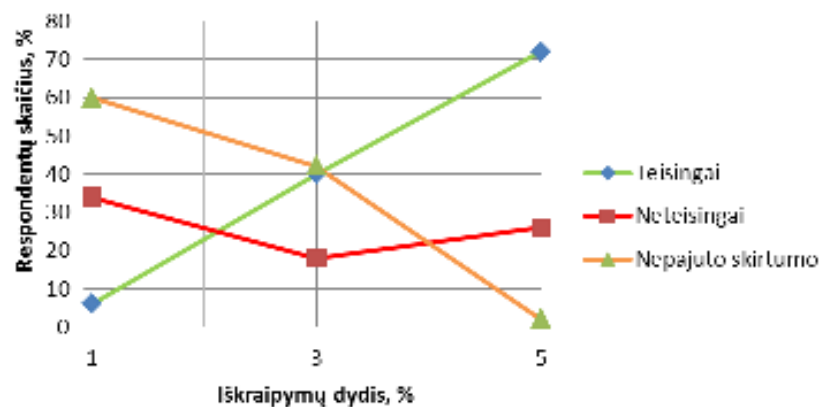
1. Variniai pučiamieji su 5% kvantavimo triukšmo
2. Variniai pučiamieji su 3% kvantavimo triukšmo
3. Variniai pučiamieji su 1% kvantavimo triukšmo
4. Fortepijonas su 50% II harmonikos
5. Fortepijonas su 40% II harmonikos
6. Fortepijonassu 20% II harmonikos
7. Ritminė grupė su 45% III harmonikos
8. Ritminė grupė su 80% III harmonikos
9. Ritminė grupė su 20% III harmonikos
10. Vyriškas vokalas su 30% IV harmonikos
11. Vyriškas vokalas su 20% IV harmonikos
12. Vyrišks vokalas su 10% IV harmonikos
13. Moteriškas vokalas 30% V harmonikos
14. Moteriškas vokalas 20% V harmonikos
15. Moteriškas vokalas 10% V harmonikos
16. Gitara su 30% nelyginių iškrpymų
17. Gitara su 20% nelyginių iškrpymų
18. Gitara su 10% nelyginių iškrpymų

Kiekvieną iš 18 „klausimų“ sudaro 3 garso pavyzdžiai- A ir B , kurių vienas yra originalus, o kitas iškraipytas, bei atsiktinis iš A ir B- X. Respondentas gali neribotą laiką klausyti visus 3 garso pavyzdžius, kol geba atsakyti, ar $X=A$ ar $X=B$. Jei klausytojui skirtumas atrodo minimalus, tuomet atsakoma $A=B$. Taip sumažinamas spėliojimo galimybė.

4. 2. 2 Eksperimento rezultatų apžvalga

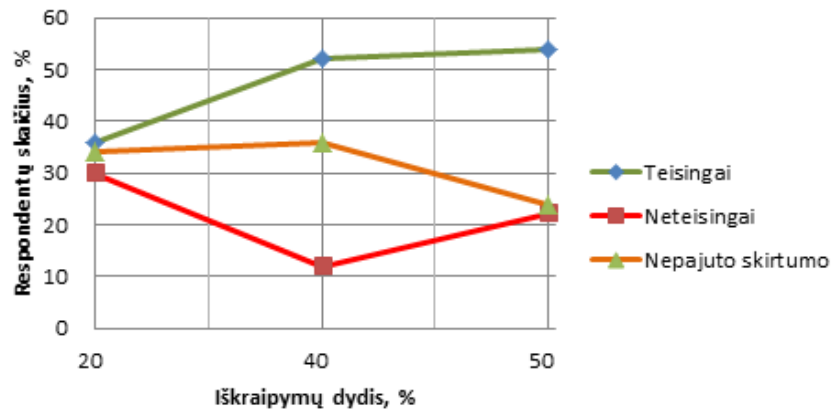
Anketos buvo išsiųstos 400 respondentų. Apie 100 respondentų turi muzikinius pagrindus (muzikantai, prodiuseriai), kiti – paprasti klausytojai. Buvo gauta 80 atsakymų su tyrimo rezultatais. Iš atsakymų buvo atrinkta 50 respondentų, kurie į mažiausią skaičių klausimų atsakė A=B. (Kaip jau minėta – nei viename klausime A=B nėra teisingas atsakymas). Taip tikimasi atmesti respondentus, kurie nepakankamai įsigilino į užduotį, arba jų garso sistemos rezoliucija buvo ženkliai per maža tyrimui.

Pirmi trys klausimai buvo sudaryti iš varinių pučiamųjų grupės su 1,3 ir 5% kvantavimo triukšmo. Paveiksle 4.2.1 akivaizdžiai matoma tiesioginė priklausomybė tarp iškraipymų lygio ir respondentų, atsakiusių teisingai. Pats varinių pučiamųjų tembras turi mažą procentą atsitiktinio triukšmo, o tiriamojo kvantavimo triukšmo nėra, jei nėra signalo, pavyzdžiui pauzėse tarp natų. Subtilesnėje muzikoje, ausis skiria ir iki 1% kvantavimo triukšmo.



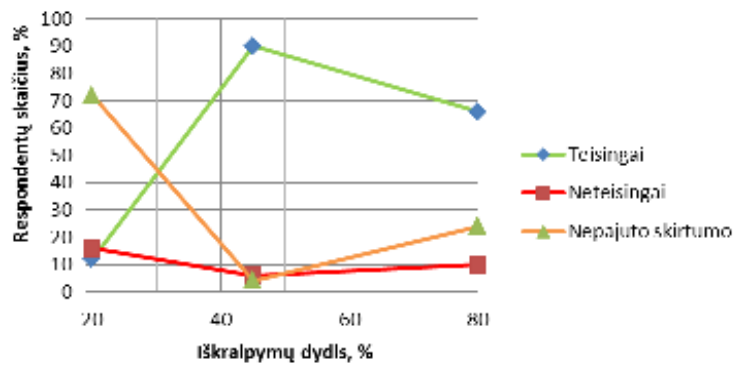
Pav. 4.2.1 Respondentų atsakymai į signalus su kvantavimo triukšmu

4-6 klausimus sudarė fortepijono įrašas su, atitinkamai 50,40 ir 20% iškraipymų, kuriuos sudarė vien II harmonika. Svarbu paminėti, kad tai yra ne vienalytis tonas, o dinamiškas signalas. T. y. šios iškraipymų vertės galioja ne visam signalui, o dalims, kurios siekia normalinį (0 dB) lygį. Nepaisant to, kad iškraipymų lygis buvo santykinai aukštas, akivaizdžios respondentų atsakymų tendencijos nėra, t. y. klausytojams labai sunku atskirti A ir B signalus. Paveiksle 4.2.2 matoma, kad tik pasiekus 50% iškraipymų, daugiau nei pusė respondentų atsakė teisingai.



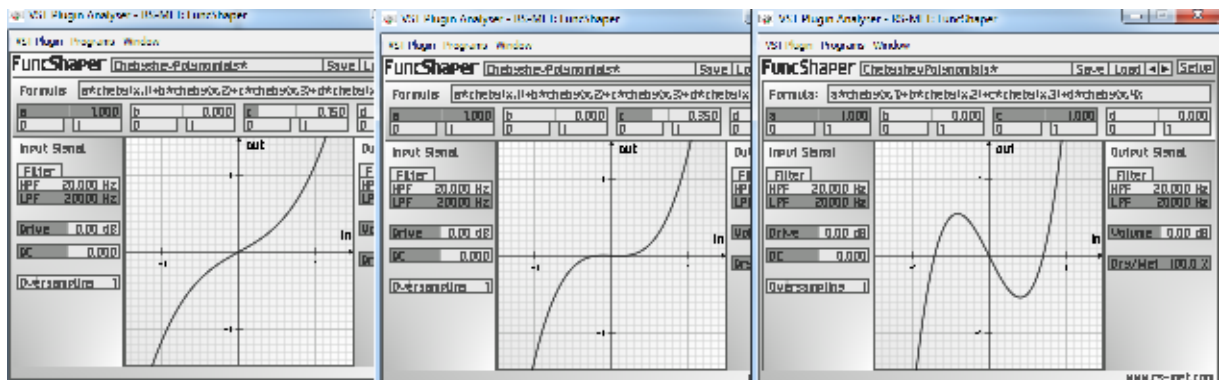
Pav. 4.2.2 Respondentų atsakymai į signalus su II harmonika

7-9 klausimus sudarė džiazo ritminės grupės įrašas su atitinkamai 45, 80 ir 20% iškraipymų, kuriuos sudarė vien III harmonika.



Pav. 4.2.3 Respondentų atsakymai į signalus su III harmonika

Paveiksle 4.2.3 pastebima, kad artėjant prie 50% iškraipymų, respondentams tampa lengviau teisingai atskirti A ir B signalus, o artėjant prie 100% skirtumas vėl mažėja. Taip yra dėl trečios eilės Čebyševio polinomas yra nelyginė funkcija. Paveiksle 4.2.4 stebėkime, kaip atstojamoji perdavimo funkcija, keičiant I ir III eilės Čebyševio polinomų dedamasias.

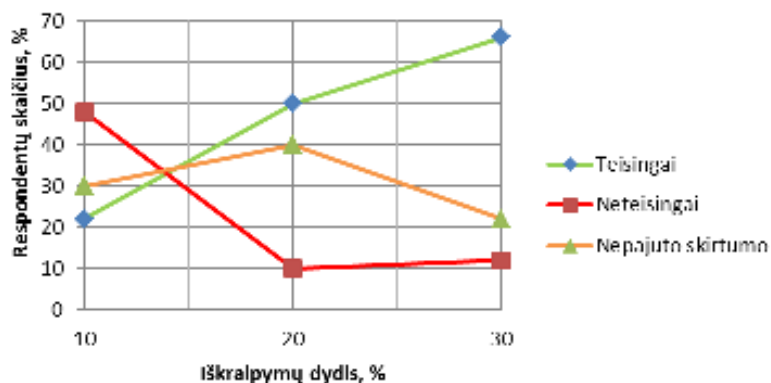


Pav. 4.2.4 Perdavimo funkcijos su 20, 50 ir 80% III harmonikos

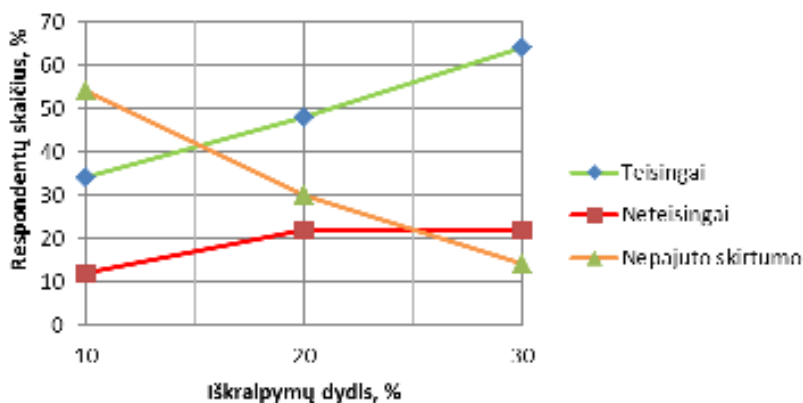
Kaip matome, esant 50% III harmonikos, signalas, artėdamas prie nulio, patenka į visiškos atkirtos zoną. Tai sukelia aiškiai girdimus signalo iškraipymus. III harmonikos kiekiui

artėjant prie 100%, silpnesni signalai praktiškai neiškraipomi, tik apverčiama signalo fazė išėjime.

Paveiksluose 4.2.5 ir 4.2.6 matoma tendencija, kad kuo didesnė harmonikos eilė, tuo lengviau girdimi iškraipymai. Rekomenduotina ateityje tyrimą pakartoti su dar aukštesnės eilės harmonikomis, kad patvirtintume šį teiginį.

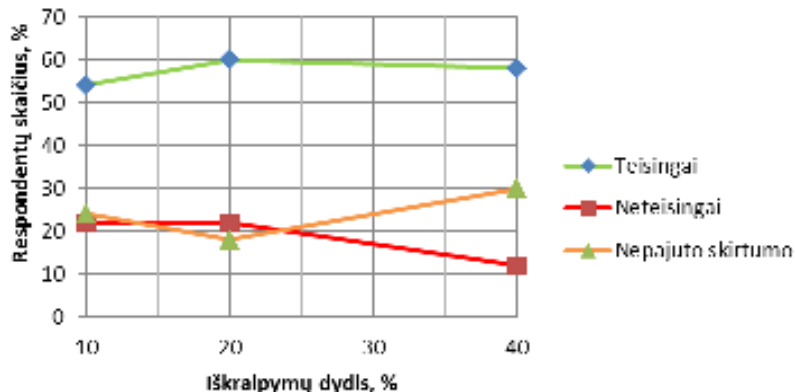


Pav. 4.2.5 Respondentų atsakymai į signalus su IV harmonika



Pav. 4.2.6 Respondentų atsakymai į signalus su V harmonika

Paveiksle 4.2.7 matome, kaip klausytojai jautė VII ir IIX eilės harmonikas kartu. Dauguma respondentų lengvai jautė iškraipymus jau nuo 10%. Kitaip tariant, tiriant šio pobūdžio iškraipymus, skalė turėjo būti tarp 1-10%.



Pav. 4.2.7 Respondentų atsakymai į signalus su VII ir IIX eilės harmonikas.

IŠVADOS

1. Tyrimas parodė, kad harmoninius iškraipymus žmogaus ausis skiria daug lengviau, negu triukšmą. Todėl sistemos parametras, nurodantis triukšmo ir harmoninių iškraipymų kiekį, yra neinformatyvus.
2. II eilės harmoninių iškraipymų žmogaus ausis beveik nejaučia. Įvertinant sistemą, svarbu atkreipti dėmesį, kiek procentų sudaro būtent II harmonika.
3. III eilės harmoniniai iškraipymai labai juntami artėjant prie 50% santykio su I harmonika. Artėjant prie 100%, šie iškraipymai mažiau girdimi.
4. IV, V ir aukštesnių harmonikų atsiradimas signale gana lengvai juntamas. Kuo aukštesnės eilės harmonika, tuo mažesnis jos procentas jaučiamas.
5. VII ir IIX eilės harmoniniai iškraipymai juntami iki dešimtimis kartų mažesniais kiekiais.

SUMMARY

Psychoacoustic analysis of audio signal quality parameters

This research is about distortion in audio systems and how human hearing perceives it. Author collects together data from other researches and compares them. The main goal of this research is to find, what type of audio distortion is most audible, and what type of signal distortion is prone to mask another. Results of the work can be used for increasing amount of useable information in product technical specifications. And, in future, improve audio equipment design with properties of human hearing in mind.

The experimental research consists of blind listening tests and computer aided statistical analysis of results.

LITERATŪRA

1. Daniel H. Cheever „A New Methodology For Audio Frequency Power Amplifier Testing Based on Psychoacoustic Data That Better Correlates With Sound Quality“, MSEE Thesis, University of New Hampshire , 2001
2. Robert Winston „Žmogus (geriausias iliustruotas žinynas)“, Vilnius: Alma litera, 2005
3. Trevoras Vestonas „Anatomijos atlasas“, Vilnius: Gamta, 1997
4. Gintautas Saulis „Biofizikiniai gyvūnų funkcionavimo pagrindai“, Vytauto Didžiojo universitetas Gamtos mokslų fakultetas, Kaunas, 2005
[http://gamta.vdu.lt/mokytojai/kursai/Biofizikiniai_gyvunu_funkcionavimo_pagrindai.pdf]
5. Yost, W.A. (1994) Fundamentals of hearing: an introduction. San Diego: Academic Press.
6. Schneider, M.E., Belyantseva, I.A., Azevedo, R.B. & Kachar, B. (2002) Structural cell biology: Rapid renewal of auditory hair bundles. *Nature*, 418:837-838. Evans, Rand B. (2003),
7. "Georg von Békésy: visualization of hearing", *The American Psychologist* (Sep 2003) **58** (9): 742–6.
8. Ross, H.E. and Murray, D. J.(1996)(Ed. and Transl.) *E.H.Weber on the tactile senses*. 2nd ed. Hove: Erlbaum (UK) Taylor & Francis.
9. R. Reisz, "Differential Intensity Sensitivity of the Ear for Pure Tones", *Physical Review*, vol 31, pp 867-875 (1928)
10. F.L. Dimmick and R. M. Olson, "The Intensive Difference Limen in Audition" *JASA*, vol. 12, pp. 517-525 (1941)
11. B. Atal, M. Schroeder, K. Kuttruff, "Perception of Coloration in Filtered Gaussian Noise Short-time Spectral Analysis of the Ear", 4th ICA , Copenhagen , Denmark 1962, paper H31.
12. W. Jesteadt, C. C. Weir and D. M. Green, "Intensity Discrimination as a Function of Frequency and Sensation Level" *JASA*, vol. 61, pp. 169-177 (1977)
13. F.E. Toole and S. Olive, "The Modification of Timbre by Resonances: Perception and Measurements", *JAES* vol 36, # 3, March 1988, pp 122-142
14. Cutnell, John D. and Kenneth W. Johnson. *Physics*. 4th ed. New York: Wiley, 1998: 466.
15. "Ear". Microsoft Encarta Encyclopedia. CD-ROM. 2000.
16. Acoustics. National Physical Laboratory (NPL), 2003.
17. "Body, Human." *The New Book of Knowledge*. New York: Grolier, 1967: 285
18. Caldarelli, David D. and Ruth S. Campanella. Ear. *World Book Online Americas Edition*. 26 May 2003.
19. Sebastian Haskel and David Sygoda. *Biology, A contemporary Approach*. New York: Amsco, 1996.
20. Lerder, Francis C. "The Human Ear." *Encarta Encyclopedia Deluxe 2004*. CD-ROM.

21. Peter Hamlin, St. Olaf College. Basic Acoustics for Electronic Musicians. January 1999.
22. Harris, Wayne. Sound and Silence. Termpro. Originally appeared in the March/April 1989 issue of Car Stereo Review magazine.
23. Richard L. St. Pierre, Jr. and Daniel J. Maguire (July 2004), The Impact of A-weighting Sound Pressure Level Measurements during the Evaluation of Noise Exposure, retrieved 2011-09-13.
24. Dumčius, Antanas. Garso inžinerija, Kaunas, Technologija, 2010
25. Braunmühl, Hans Joachim von und Weber, Walter, Einführung in die angewandte Akustik, insbesondere in die neueren Probleme der Schallmessung, Schallübertragung und Schallaufzeichnung. Leipzig: S. Hirzel, 1936.
26. Harry F Olson, Elements of Acoustic Engineering, Princeton, New Jersey, 1940.
27. D.E.L. Shorter, An investigation into non-linear distortion BBC interim report. 1950
28. Just audible thresholds for harmonic Distortion, Bryan, M.E.; Parbrook, H.D. Acustica, Volume 10, Number 2, 1960, pp. 87-91(5)
29. Intermodulation Distortion Listening Tests, Fryer, Peter AES Convention:50 (March 1975)
30. Just detectable distortion levels, James Moir, Wireless World Feb. 1981
31. Rivlin, Theodore J. The Chebyshev polynomials. Pure and Applied Mathematics. Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York-London-Sydney,1974. Chapter
32. Boyd, John P. (2001). Chebyshev and Fourier Spectral Methods (second ed.). Dover. ISBN 0-486-41183-4