ŠIAULIŲ UNIVERSITETAS
INFORMATIKOS, MATEMATIKOS IR E. STUDIJŲ INSTITUTAS
MATEMATIKOS KATEDRA

Dovilija Jančiauskienė

Dirichlė L funkcijų universalumas

Magistro baigiamasis darbas

Darbo vadovas
prof. habil. dr. Antanas Laurinčikas

Šiauliai, 2014

Turinys

1. Įvadas **3**

2. Pagalbiniai tikimybiniai rezultatai **5**

3. Ribinė teorema **9**

4. Ribinio mato P_L atrama **16**

5. Universalumo teorema **22**

Summary **24**

Literatūra **25**

1. Įvadas

1975m. rusų matematikas S. M. Voroninas įrodė [8] labai įdomų tvirtinimą, kad vienos funkcijos pagalba galima aproksimuoti norimu tikslumu tam tikros srities kompleksinėse aibėse bet kurią analizinę funkciją. Pasirodė, kad ši įdomi funkcija yra gerai žinoma Rymano dzeta funkcija. Tegul $s = \sigma + it$ yra kompleksinis kintamasis, tuomet Rymano dzeta funkcija $\zeta(s)$ pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra apibrėžiama Dirichlė eilute

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s}.$$

Iš eilutės absoliutaus konvergavimo ir žinomos Vejerštraso teoremos apie tolygiai konverguojančios eilutės sumos analiziškumą išplaukia, jog funkcija $\zeta(s)$ yra analizinė pusplokštumėje $\sigma > 1$. Be to, ji yra analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą, išskyrus paprastąjį polių taške $s = 1$ su reziduumu 1.

Pradinė Voronino teorema, kurią jis pavadino funkcijos $\zeta(s)$ universalumo teorema, yra formuluojama taip. Tarkime, kad $0 < r < \frac{1}{4}$, o funkcija $f(s)$ yra tolydi ir neturinti nulių skritulyje $|s| \le r$ ir analizinė šio skritulio viduje. Tuomet kiekvieną $\varepsilon > 0$ atitinka toks $\tau = \tau(\varepsilon) \in \mathbb{R}$, kad yra teisinga nelygybė

$$\max_{|s| \le r} \left| \zeta(s + \frac{3}{4} + i\tau) - f(s) \right| < \varepsilon.$$

Ši teorema buvo sustiprinta. Naujam Voronino teoremos formulavimui reikalingi kai kurie žymenys. Tegul $D = \left\{ s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1 \right\}$. Simboliu $\mathcal{K}$ žymėsime juostos D kompaktinių aibių, turinčių jungųjį papildinį, klasę, o simboliu $H_0(K)$, $K \in \mathcal{K}$, žymėsime klasę funkcijų, kurios yra tolydžios ir neturi nulių aibėje K ir yra analizinės aibės K viduje. Tegul $meas\{A\}$ yra mačios aibės $A \subset \mathbb{R}$ Lebego matas. Tuomet šiolaikinės Voronino teoremos variantas yra toks tvirtinimas [4].

1 teorema. *Tarkime, kad $K \in \mathcal{K}$, o $f(s) \in H_0(K)$. Tuomet, su kiekvienu $\varepsilon > 0$ yra teisinga nelygybė*

$$\liminf_{T \to \infty} \frac{1}{T} meas \left\{ \tau \in [0, T] : \sup_{s \in K} |\zeta(s + i\tau) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Teoremos nelygybė rodo, kad aibė postūmių $\zeta(s + i\tau)$, aproksimuojančių funkciją $f(s) \in H_0(K)$, yra begalinė, ji netgi turi teigiamą apatinį tankį. Be to, šioje teoremoje skritulys pradinėje Voronino teoremoje yra pakeičiamas bet kuria kompaktine aibe.

Voroninas cituotame straipsnyje [8] paminėjo, kad panašią universalumo savybę turi ir visos Dirichlė L funkcijos.

Trumpai priminsime L funkcijų apibrėžimą. Tarkime, kad $k \in \mathbb{N}$, $\chi(m)$, $m \in \mathbb{N}$, yra Dirichlė charakteris moduliu k. Negriežtai kalbant, $\chi(m)$ yra visiškai multiplikatyvi funkcija, t.y. $\chi(mn) = \chi(m) \cdot \chi(n)$ su visais $m, n \in \mathbb{N}$, periodinė su periodu k, t.y. $\chi(m + k) = \chi(m)$ su visais $m \in \mathbb{N}$,

$\chi(m) = 0$, kai $(m,k) > 1$ ir $\chi(m) \neq 0$, kai $(m,k) = 1$.

Dirichlė L funkcija $L(s,\chi)$ pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra apibrėžiama Dirichlė eilute

$$L(s,\chi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(m)}{m^s}.$$

Dirichlė charakteris yra vadinamas pagrindiniu, žymimas $\chi_0(m)$, jeigu $\chi_0(m) = 1$ su visais $(m,k) = 1$. Funkcija $L(s,\chi_0)$ yra analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę ploktšumą, išskyrus paprastąjį polių taške $s = 1$ su reziduumu

$$\prod_{p|k} \left(1 - \frac{1}{p}\right),$$

čia $p-$ pirminis skaičius. Kai $\chi \neq \chi_0$, tai funkcija $L(s,\chi)$ yra analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą, kitaip sakant ji yra sveikoji funkcija.

Voroninas neįrodė 1 teoremos analogo Dirichlė L funkcijom.

Todėl ***magistro darbo tikslas:*** pateikti šios teoremos pilną įrodymą.

2 teorema. *Tarkime, kad $K \in \mathcal{K}$, $f(s) \in H_0(K)$, o χ yra bet kuris Dirichlė charakteris. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$ yra teisinga nelygybė*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas \left\{ \tau \in [0,T] : \sup_{s\in K} |L(s+i\tau,\chi) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

2 teoremos įrodymas remiasi ribine teorema apie tikimybinių matų silpnąjį konvergavimą analizinių funkcijų erdvėje. Todėl didžioji magistro darbo dalis yra skiriama tokios teoremos įrodymui. Svarbu pastebėti, kad reikalingas ribinės teoremos ribinio mato išreikštinis pavidalas, bei to mato atramos išraiška.

2. Pagalbiniai tikimybiniai rezultatai

Ribinėse teoremose apie silpnąjį tikimybinių matų konvergavimą reikalinga tikimybinio mato sąvoka. Todėl pradėsime primindami šią sąvoką.

Tarkime, kad X yra metrinė erdvė, o $\mathcal{B}(X)$ yra Borelio σ kūnas (σ algebra). Primename, kad aibių klasei $\mathcal{B}(X)$ priklauso visų erdvės X atvirųjų aibių sistema. Porą $(X, \mathcal{B}(X))$ vadiname mačia erdve. Šioje erdvėje yra apibrėžiamas tikimybinis matas.

1 apibrėžimas. *Tikimybiniu matu yra vadinama aibės funkcija $P : \mathcal{B}(X) \to \mathbb{R}$, tenkinanti aksiomas:*

1. *P yra neneigiama, t.y. $P(A) \geq 0$ su be kuria $A \in \mathcal{B}(A)$;*

2. *P yra normuota funkcija, t.y. $P(X) = 1$;*

3. *Funkcija P yra σ adityvi, t.y. jei aibės $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{B}(X)$ ir kas dvi neturi bendrų elementų, tai tuomet*
$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k).$$

Dabar pateiksime silpnojo matų konvergavimo apibrėžimą.

2 apibrėžimas. *Tarkime, kad P_n, $n \in \mathbb{N}$, ir P yra tikimybiniai matai erdvėje $(X, \mathcal{B}(X))$. Matas P_n, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja į matą P, jei su kiekviena realia, tolydžia, aprėžta funkcija g erdvėje X galioja lygybė*
$$\lim_{n\to\infty} \int_X g dP_n = \int_X g dP.$$

Dabar apibrėšime erdvę X. Mūsų atveju tai bus analizinių funkcijų erdvė. Taigi, tegul $H(D)$ (primename, kad $D = \left\{s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1\right\}$) yra analizinių funkcijų juostoje D erdvė su tolygiu konvergavimo kompaktinėse aibėse topologija. Ši topologija reiškia, kad seka $\{g_n\} \subset H(D)$, kai $n \to \infty$, konverguoja į funkciją $g \in H(D)$, jei su kiekviena kompaktine juostos D aibe K yra teisinga lygybė
$$\lim_{n\to\infty} \sup_{s\in K} |g_n(s) - g(s)| = 0.$$

Šiame apibrėžime supremumas rodo tolygų konvergavimą.

Erdvę $H(D)$ apibrėžiame kaip topologinę erdvę. Tačiau joje galima apibrėžti metriką, kuri indukuoja anksčiau minėtą topologiją. Tai daroma taip. Imame juostos D kompaktinių aibių seką $\{K_l : l \in \mathbb{N}\}$, kuri tenkina reikalavimus:

1. $D = \bigcup\limits_{l=1}^{\infty} K_l$;

2. Su visais $l \in \mathbb{N}$ galioja sąryšis $K_l \subset K_{l+1}$;

3. Jeigu K yra kompaktinė juostos D aibė, tai egzistuoja toks $l \in \mathbb{N}$, kad $K \subset K_l$.

Tokios sekos $\{K_l : l \in \mathbb{N}\}$ egzistavimas yra įrodomas bet kurios atviros aibės, ne tik D atveju [4]. Metriką d aibėje $H(D)$ apibrėžiame formule

$$d(g_1,g_2) = \sum_{l=1}^{\infty} 2^{-l} \frac{\sup\limits_{s\in K_l} |g_1(s)-g_2(s)|}{1+\sup\limits_{s\in K_l} |g_1(s)-g_2(s)|}, \quad g_1,g_2 \in H(D).$$

Tuomet turime, kad jei

$$\lim_{n\to\infty} d(g_1,g_2) = 0,$$

tai g_n, kai $n \to \infty$, konverguoja į g erdvės $H(D)$ prasme.

Reikalingos kai kurios silpnojo matų konvergavimo savybės.

Tarkime, turime dvi metrines erdves X_1 ir X_2. Sakome, kad atvaizdis $h : X_1 \to X_2$ yra $(\mathcal{B}(X_1),\mathcal{B}(X_2))$ matus, jei su kiekviena aibe $A \in \mathcal{B}(X_2)$ turime, kad $h^{-1}A \in \mathcal{B}(X_1)$. Jei h yra matus atvaizdis, tai yra žinoma [1], kad kiekvienas tikimybinis matas P erdvėje $(X_1,\mathcal{B}(X_1))$ apibrėžia matą Ph^{-1} erdvėje $(X_2,\mathcal{B}(X_2))$ formulės

$$Ph^{-1}(A) = P(h^{-1}A), \quad A \in \mathcal{B}(X_2),$$

pagalba. Taip pat yra žinoma [1], kad kiekvienas tolydus atvaizdis yra ir $(\mathcal{B}(X_1),\mathcal{B}(X_2))$ matus.

Mums bus naudingas toks tvirtinimas.

2.1 lema. *Tarkime, kad P_n, $n \in \mathbb{N}$, ir P yra tikimybiniai matai erdvėje $(X_1,\mathcal{B}(X_1))$, $h : X_1 \to X_2$ yra tolydus atvaizdis ir P_n, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja į matą P. Tuomet ir matas $P_n h^{-1}$, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja į matą Ph^{-1} erdvėje $(X_2,\mathcal{B}(X_2))$.*

Lemos įrodymas yra duotas monografijoje [1].

Silpnasis tikimybinių matų konvergavimo apibrėžimas turi keletą ekvivalentų, įvairių aibių terminais. Mums bus reikalingi du iš šių ekvivalentų. Primename, aibė A yra vadinama mato P tolydumo aibe, jei $P(\partial A) = 0$, o ∂A yra aibės A kraštas.

2.2 lema. [1] *Tarkime, kad P_n, $n \in \mathbb{N}$, ir P yra tikimybiniai matai erdvėje $(X,\mathcal{B}(X))$, tuomet šie tvirtinimai yra ekvivalentūs:*

1. *P_n, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja į P;*
2. *$\lim\limits_{n\to\infty} P_n(A) = P(A)$ su kiekviena mato P tolydumo aibe;*
3. *$\liminf\limits_{n\to\infty} P_n(A) \geq P(A)$ su kiekviena erdvės X atvirąja aibe A.*

Įrodyti silpnąjį tikimybinių matų konvergavimą nėra lengva. Tai padaryti padeda tikimybinių matų šeimos suspaustumo ir reliatyvaus kompaktiškumo sąvokos. Tarkime, kad $\{P\}$ yra tikimybinių matų šeima erdvėje $(X, \mathcal{B}(X))$. Sakome, kad ši šeima yra reliatyviai kompaktiška, jei iš kiekvienos jos sekos galima išskirti silpnai konverguojantį posekį į kurį nors matą erdvėje $(X, \mathcal{B}(X))$. Ši šeima yra vadinama suspaustąja jeigu kiekvieną $\varepsilon > 0$ atitinka tokia kompaktiška aibė $K = K(\varepsilon) \subset X$, kad visiems matams $P \in \{P\}$ yra teisinga nelygybė

$$P(K) > 1 - \varepsilon.$$

Reliatyvaus kompaktiškumo ir suspaustumo sąvokas riša Prochorovo teorema, kurią formuluojame lemos pavidalu.

2.3 lema. *Jei tikimybinių matų šeima yra suspausta, tai ji yra ir reliatyviai kompaktiška.*

Lemos įrodymą taip pat galima rasti [1] monografijoje.

3 apibrėžimas. *Tarkime, kad $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), P)$ yra tikimybinė erdvė, o $(X, \mathcal{B}(X))$ yra mati erdvė. Funkcija $\Theta : \Omega \to X$ yra vadinama X reikšmiu atsitiktiniu elementu, jeigu su kiekviena aibe $A \in \mathcal{B}(X)$ yra teisingas sąryšis*

$$\{\omega \in \Omega : \Theta(\omega) \in A\} \in \mathcal{B}(\Omega).$$

4 apibrėžimas. *Atsitiktinio elemento Θ pasiskirstymu vadiname tikimybinį matą $\hat{P}$, apibrėžtą formule*

$$\hat{P}(A) = P\{\omega \in \Omega : \Theta(\omega) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(A).$$

5 apibrėžimas. *Tarkime, kad Θ_n, $n \in \mathbb{N}$, ir Θ yra X reikšmiai atsitiktiniai elementai tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), P)$. Sakome, kad Θ_n, kai $n \to \infty$, konverguoja į Θ pagal pasiskirstymą, jeigu elemento Θ_n pasiskirstymas, kai $n \to \infty$ silpnai konverguoja į elemento Θ pasiskirstymą. Šį faktą užrašome pavidalu $\xrightarrow{D}$.*

Naudosimės tokiu tvirtinimu apie konvergavimą pagal pasiskirstymą.

2.4 lema. *Tarkime, kad (X, d) yra separabili metrinė erdvė, o η_n, $\Theta_{1n}, \Theta_{2n}, \ldots$ yra X reikšmiai atsitiktiniai elementai tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), P)$. Tegul su kiekvienu $k \in \mathbb{N}$ galioja sąryšis*

$$\Theta_{kn} \xrightarrow[n\to\infty]{D} \Theta_k$$

ir

$$\Theta_n \xrightarrow[n\to\infty]{D} \Theta.$$

Be to, tegul su kiekvienu $\varepsilon > 0$ yra teisinga lygybė

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{k\to\infty} P\left(d(\Theta_{kn}, \eta_n) \geq \varepsilon\right) = 0.$$

Tuomet yra teisingas sąryšis

$$\eta_n \xrightarrow[n\to\infty]{D} \Theta.$$

Lemos įrodymas yra duotas [1] monografijoje, 4.2 teorema.

Dar priminsime kai kurias ergodinės teorijos sąvokas. Tarkime, kad turime tikimybinę erdvę $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), P)$ ir aibės Ω transformacijų grupę $\{\varphi_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}$. Sakome, kad aibė $A \in \mathcal{B}(\Omega)$ yra invariantinė šios transformacijų grupės atžvilgiu, jeigu su kiekvienu $\tau \in \mathbb{R}$, aibės A ir $A_\tau = \varphi_\tau(A)$ skiriasi ne daugiau negu aibe, kurios matas P yra lygus 0. Yra žinoma, kad visos invariantinės aibės sudaro Borelio σ kūną. Grupė $\{\varphi_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}$ yra vadinama ergodine, jeigu jos invariantiškų aibių Borelio σ kūnas yra sudarytas tik iš aibių, kurių matas P yra lygus 0 arba 1.

Primename ir ergodinio atsitiktinio proceso sąvoką. Tarkime, turime atsitiktinį procesą $\xi(t), t \in \mathbb{R}$, apibrėžtą tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), P)$.

Kaip ir transformacijų grupės atveju analogiškai apibrėžiamos invariantinės aibės. Stacionarus procesas vadinamas ergodiniu, jeigu jo invariantinių aibių Borelio σ kūnas yra sudarytas tik iš aibių, kurių P matas yra 0 arba 1. Ergodiniams procesams yra teisinga labai svarbi Birkhofo-Chinčino teorema, kurios tvirtinimas yra duotas 2.5 lemoje. Simboliu $\mathbb{E}\xi$ žymėsime atsitiktinio elemento ξ vidurkį.

2.5 lema. *Tarkime, kad ergodinis atsitiktinis procesas $\xi(t, \omega)$ yra apibrėžtas tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), P)$, $\mathbb{E}|\xi(t, \omega)| < \infty$ ir proceso trajektorijos beveik tikrai yra integruojamos Rymano prasme kiekviename baigtiniame intervale. Tuomet beveik visiems $\omega \in \Omega$ mato P atžvilgiu yra teisinga lygybė*

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \xi(t, \omega) dt = \mathbb{E}\xi(0, \omega).$$

Lemos įrodymas yra duotas [2] monografijoje.

3. Ribinė teorema

Prieš universalumo teoremos Dirichlė L funkcijoms įrodymą, gausime šiai funkcijai ribinę teoremą analizinių funkcijų erdvėje. Kalbant tiksliau, nagrinėsime tikimybinio mato

$$P_T(A) = \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0,T] : L(s+i\tau,\chi) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(H(D)),$$

kai $T \to \infty$, silpnąjį konvergavimą.

Ribinės teoremos formulavimui yra reikalingi kai kurie apibrėžimai. Sudėtingiausiai yra apibrėžti mato P_T ribinį pavidalą. Tegul $\gamma = \{s \in \mathbb{C} : |s| = 1\}$ žymi vienetinį apskritimą kompleksinėje plokštumoje. Apibrėžiame aibę

$$\Omega = \prod_p \gamma_p.$$

Čia $\gamma_p = \gamma$ su visais pirminiais p. Pagal Dekarto sandaugos apibrėžimą, turime, kad aibę Ω sudaro visos funkcijos, atvaizduojančios visų pirminių skaičių aibę vienetiniame apskritime.

Dažnai aibė Ω yra vadinama begaliniamačiu toru. Tore Ω apibrėžiame pataškinės daugybos operaciją, kurios atžvilgiu jis tampa komutatyvia arba Abelio grupe. Be to, aibėje Ω standartiniu [6] būdu yra apibrėžiama sandaugos topologija. Su taip apibrėžtomis operacija ir topologija toras Ω tampa topologine Abelio grupe. Kadangi vienetinis apskritimas yra kompaktinė aibė, tai pagal klasikinę Tichonovo teoremą [6] toras Ω yra kompaktinė topologinė grupė. Yra gerai žinoma [4], kad tokiose grupėse galima apibrėžti tikimybinį Haro matą m_H. Šis matas išsiskiria iš kitų tikimybinių matų savo invariantiškumo savybe, kuri reiškia, kad su kiekviena aibe $A \in \mathcal{B}(\Omega)$ yra teisingos lygybės

$$m_H(A) = m_H(\omega A) = m_H(A\omega)$$

su visais $\omega \in \Omega$. Visi tie apibrėžimai duoda tikimybinę erdvę $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$. Tegul $\omega(p)$ yra elemento $\omega \in \Omega$ p-toji koordinatė. Tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$ apibrėžiame $H(D)$ reikšmį atsitiktinį elementą $L(s,\omega,\chi)$ formule

$$L(s,\omega,\chi) = \prod_p \left(1 - \frac{\omega(p)\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}.$$

Pastebime, kad pastaroji sandauga su beveik visais ω konverguoja tolygiai juostos D kompaktinėse aibėse, todėl apibrėžia $H(D)$ reikšmį atsitiktinį elementą. Tarkime, kad P_L yra atsitiktinio elemento $L(s,\omega,\chi)$ pasiskirstymas,t.y. timimybinis matas, apibrėžiamas formule

$$P_L(A) = m_H\{\omega \in \Omega : L(s,\omega,\chi) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(H(D)).$$

Dabar galime formuluoti ribinę teoremą funkcijai $L(s,\chi)$.

3.1 teorema. *Timimybinis matas P_T, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į matą P_L.*

3.1 teoremos įrodymas yra panašus į analogiškos teoremos įrodymą Rymano dzeta funkcijai [4], tačiau yra pakankamai ilgas ir sudėtingas, todėl jį padalysime į kelias lemas apie silpną tikimybinių matų konvergavimą įvairiose erdvėse.

Pradedame erdve $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$. Tegul $\mathcal{P}$ - visų pirminių skaičių aibė ir

$$Q_T(A) = \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0,T] : (p^{-i\tau} : \ p \in \mathcal{P}) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(\Omega).$$

3.2 lema. *Tikimybinis matas Q_T, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į Haro matą m_H.*

Galima sakyti, kad lema yra klasikinis tvirtinimas naudojamas įvairių Dirichlė eilučių ribinių teoremų įrodymuose. Jos įrodymas duotas [4] monografijoje.

Remdamiesi 3.2 lema įrodysime ribinę teoremą erdvėje $H(D)$ funkcijoms, kurios yra apibrėžiamos absoliučiai konverguojančiomis Dirichlė eilutėmis. Imame fiksuotą skaičių $\sigma_1 > \frac{1}{2}$ ir visiems $m, n \in \mathbb{N}$ apibrėžiame

$$v_n(m) = \exp\left\{-\left(\frac{m}{n}\right)^{\sigma_1}\right\}.$$

Funkciją $\omega(p)$ pratęsiame į visą aibę $\mathbb{N}$ formule

$$\omega(m) = \prod_{\substack{p^\alpha | m \\ p^{\alpha+1} \nmid m}} \omega^\alpha(p)$$

ir apibrėžiame funkcijas

$$L_n(s, \chi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(m) v_n(m)}{m^s} \tag{3.1}$$

ir

$$L_n(s, \omega, \chi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(m)\omega(m) v_n(m)}{m^s}. \tag{3.2}$$

Yra žinoma [4], kad pastarosios dvi eilutės konverguoja absoliučiai pusplokštumėje $\sigma > \frac{1}{2}$.

Tegul $\omega_0 \in \Omega$ yra fiksuotas elementas erdvėje $(H(D), \mathcal{B}(H(D)))$. Apibrėžiame tikimybinius matus

$$P_{T,n}(A) = \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0,T] : L_n(s + i\tau, \chi) \in A\}$$

ir

$$\hat{P}_{T,n}(A) = \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0,T] : L_n(s + i\tau, \omega_0, \chi) \in A\}.$$

3.3 lema. *Tikimybiniai matai $P_{T,n}$ ir $\hat{P}_{T,n}$, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į tą patį tikimybinį matą P_n erdvėje $(H(D), \mathcal{B}(H(D)))$.*

Įrodymas. Atvaizdį $h_n : \Omega \to H(D)$ apibrėžiame formule

$$h_n(\omega) = L_n(s, \omega, \chi), \quad \omega \in \Omega.$$

Iš (3.1) eilutės absoliutaus konvergavimo išplaukia atvaizdžio h_n tolydumas. Be to, iš h_n ir matų $P_{T,n}$ ir Q_T apibrėžimų turime, kad

$$P_{T,n}(A) = Q_T(h_n^{-1}A) = Q_T h_n^{-1}(A), \quad A \in \mathcal{B}(H(D)).$$

Todėl iš 2.1 ir 3.2 lemų gauname, kad matas $P_{T,n}$, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į matą $m_H h_n^{-1}$. Lieka įrodyti, kad tokią pačią savybę turi ir matas $\hat{P}_{T,n}$.
Apibrėžiame atvaizdį $\hat{h}_n : \Omega \to H(D)$ formule

$$\hat{h}_n(\omega) = L_n(s, \omega\omega_0, \chi), \quad \omega \in \Omega.$$

Tuomet analogišku būdu gauname, kad matas $\hat{P}_{T,n}$, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į matą $\hat{P}_n = m_H \hat{h}_n^{-1}$. Lemos pilnam įrodymui lieka parodyti, kad matai P_n ir $\hat{P}_n$ sutampa. Šiam tikslui apibrėžiame dar vieną atvaizdį $h : \Omega \to \Omega$ formule

$$h(\omega) = \omega\omega_0, \quad \omega \in \Omega.$$

Tuomet gauname sąryšį $\hat{h}_n(\omega) = h_n(h(\omega))$. Dabar pasiremsime Haro mato m_H invariantiškumu. Turime, kad

$$m_H \hat{h}_n^{-1} = m_H (h_n h)^{-1} = (m_H h^{-1}) h_n^{-1} = m_H h_n^{-1}, \tag{3.3}$$

nes atvaizdis h yra toro Ω elementų postūmis fiksuotu elementu ω_0, o nuo to Haro mato m_H reikšmė nesikeičia. Taigi, iš (3.3) lygybės gauname, kad $P_n = \hat{P}_n$. Lema įrodyta.
3.3 lema rodo, kad 3.1 teoremos įrodymui pakanka pereiti nuo funkcijos $L_n(s,\chi)$ prie funkcijos $L(s,\chi)$. Šiam tikslui pasinaudosime funkcijos $L(s,\chi)$ vidurkine aproksimacija funkcija $L_n(s,\chi)$. Yra teisingi tokie tvirtinimai.
Tegul d yra erdvės $H(D)$ metrika, apibrėžta 2 skyrelyje.
3.4 lema. *Teisinga lygybė*

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T d\left(L(s+i\tau,\chi), L_n(s+i\tau,\chi)\right) d\tau = 0.$$

Įrodymas. Lema yra [5] straipsnio 2 lemos atskiras atvejis su $a_m = \chi(m)$.
3.5 lema. *Beveik visiems* $\omega \in \Omega$ *yra teisinga lygybė*

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T d\left(L(s+i\tau,\chi), L_n(s+i\tau,\chi)\right) d\tau = 0.$$

Įrodymas. Lema yra [5] straipsnio 3 lemos atskiras atvejis su $a_m = \chi(m)$.
3.1 teoremos ribinio mato identifikavimui dar bus reikalinga ribinė teorema tikimybiniam matui

$$\hat{P}_T(A) = \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0,T] : L_n(s+i\tau,\omega,\chi) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(H(D)).$$

3.6 lema. *Tikimybiniai matai P_T ir $\hat{P}_T$, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į tą patį matą P erdvėje* $(H(D), \mathcal{B}(H(D)))$.

Įrodymas. Tarkime, kad atsitiktinis dydis θ yra apibrėžtas tikimybinėje erdvėje $(\hat{\Omega}, \mathcal{B}(\hat{\Omega}), \mathbb{P})$ ir turi pasiskirstymo funkciją $F(x)$ apibrėžiamą formule

$$F(x) = \begin{cases} 0, \; kai \; x \leq 0\,, \\ x, \; kai \; 0 < x \leq 1\,, \\ 1, \; kai \; x > 1\,. \end{cases}$$

Tuomet sakome, kad θ yra tolygiai pasiskirstęs intervale $[0;1]$. Tikimybinėje erdvėje $(\hat{\Omega}, \mathcal{B}(\hat{\Omega}), \mathbb{P})$ apibrėžiame $H(D)$ reikšmį atsitiktinį elementą

$$L_{T,n} = L_{T,n}(s) = L_n(s + i\tau\theta, \chi).$$

Tuomet iš 3.5 lemos išplaukia, kad

$$L_{T,n} \xrightarrow[n\to\infty]{D} L_n, \tag{3.4}$$

čia $L_n = L_n(s,\chi)$ yra $H(D)$ reikšmis atsitiktinis elementas, kurio pasiskirstymas yra 3.5 lemos ribinis matas P_n.

Funkciją $L_n(s,\chi)$ apibrėžianti Dirichlė eilutė konverguoja absoliučiai pusplokštumėje $\sigma > \frac{1}{2}$. Todėl [7]

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T |L_n(s + i\tau, \chi)|^2 dt = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|\chi(m)|^2 v_n^2(m)}{m^{2\sigma}} \leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2\sigma}} < \infty, \tag{3.5}$$

nes $\sigma > \frac{1}{2}$. Tegul aibė K_l yra iš metrikos d erdvėje $H(D)$ apibrėžimo. Tuomet paprastas integralinės Koši teoremos nelygybės pritaikymas bei (3.5) parodo, kad egzistuoja tokie skaičiai $\sigma_l > \frac{1}{2}$, kad yra teisinga nelygybė

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sup_{s\in K_l} |L_n(s + i\tau, \chi)| d\tau \leq c_l \limsup_{T\to\infty} \left(\frac{1}{2T} \int_0^{2T} |L_n(\sigma_l + it, \chi)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq c_l R_l < \infty \tag{3.6}$$

su teigiama konstanta c_l ir

$$R_l = \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2\sigma_l}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Tegul $\varepsilon > 0$ yra bet koks fiksuotas teigiamas skaičius ir

$$M_l = c_l R_l 2^l \varepsilon^{-1}, \quad l \in \mathbb{N},$$

Tuomet iš (3.6) nelygybės randame, kad

$$\begin{aligned}
&\limsup_{T\to\infty}\mathbb{P}(\sup_{s\in K_l}|L_{T,n}(s)|>M_l)=\\
&=\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}meas\{\tau\in[0;T]:\sup_{s\in K_l}|L_n(s+i\tau,\chi)|>M_l\}\leq\\
&\leq\frac{1}{M_l}\sup_{n\in\mathbb{N}}\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T\sup_{s\in K_l}|L_n(s+i\tau,\chi)|d\tau\leq\frac{c_lT_l}{M_l}=\frac{\varepsilon}{2^l}.
\end{aligned}$$

Iš čia, (3.4) sąryšio ir mato tolydumo randame, kad

$$\mathbb{P}\left(\sup_{s\in K_l}|L_n(s)|>M_l\right)\leq\frac{\varepsilon}{2^l}. \tag{3.7}$$

Apibrėžiame aibę

$$H_\varepsilon=\left\{g\in H(D):\sup_{s\in K_l}|g(s)|\leq M_l,\quad l\in\mathbb{N}\right\}.$$

Tuomet ši aibė yra tolygiai aprėžta, todėl galioja kompaktiškumo kriterijus [4]. Ir turime, kad H_ε - kompaktinė $H(D)$ aibė. Be to, iš (3.7) išplaukia, kad su visais $n\in\mathbb{N}$ galioja nelygybė

$$\mathbb{P}(L_n\in H_\varepsilon)\geq 1-\varepsilon\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{2^l}=1-\varepsilon\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1-\varepsilon.$$

Buvome paminėję, kad L_n turi pasiskirstymą P_n, todėl iš pastarosios nelygybės gauname, kad su visais $n\in\mathbb{N}$

$$P_n(H_\varepsilon)>1-\varepsilon.$$

Tai reiškia, kad tikimybinių matų šeima $\{P_n:n\in\mathbb{N}\}$ yra suspausta. Todėl pagal 2.3 lemą ji yra reliatyviai kompaktiška. Vadinasi, egzistuoja toks posekis $\{P_{n_k}\}\subset\{P_n\}$, kad P_{n_k}, kai $k\to\infty$, silpnai konverguoja į kurį nors matą P erdvėje $(H(D),\mathcal{B}(H(D)))$. Šis tvirtinimas ekvivalentus tvirtinimui

$$L_{n_k}\xrightarrow[n\to\infty]{D}P. \tag{3.8}$$

Erdvėje $(\hat{\Omega},\mathcal{B}(\hat{\Omega}),\mathbb{P})$ apibrėžiame dar vieną atsitiktinį elementą

$$L_T=L_T(s)=L(s+i\tau\theta,\chi).$$

Tuomet iš 3.4 lemos ir Čebyšovo tipo nelygybės randame, kad su visais $\varepsilon>0$

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\limsup_{T\to\infty}\mathbb{P}(d(L_T(s),L_{T,n}(s))>\varepsilon)=\\
&=\lim_{n\to\infty}\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}meas\{\tau\in[0;T]:d(L(s+i\tau,\chi),L_n(s+i\tau,\chi))>\varepsilon\}\leq\\
&\leq\lim_{n\to\infty}\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{\varepsilon T}\int\limits_0^T d\big(L(s+i\tau,\chi),L_n(s+i\tau,\chi)\big)d\tau=0.
\end{aligned}$$

Ši lygybė, bei (3.4) ir (3.8) lygybės rodo, kad galioja 2.4 lemos sąlygos. Todėl

$$L_T \xrightarrow[n\to\infty]{D} P. \tag{3.9}$$

Pastarasis sąryšis įrodo, kad matas P_T, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į P. Be to, (3.9) sąryšis rodo, kad matas P nepriklauso nuo sekos P_{n_k} parinkimo. Kadangi seka $\{P_n\}$ yra reliatyviai kompaktiška, tai iš čia gauname, kad kiekvienas posekis P_{n_k} silpnai konverguoja į matą P. Todėl yra teisingas sąryšis

$$L_n \xrightarrow[n\to\infty]{D} P. \tag{3.10}$$

Lieka parodyti, kad matas $\hat{P}_T$ taip pat silpnai konverguoja į matą P, kai $T \to \infty$. Šiam tikslui apibrėžiame atsitiktinius elementus

$$\hat{L}_{T,n} = \hat{L}_{T,n}(s) = L_n(s+i\tau\theta,\omega,\chi)$$

ir

$$\hat{L}_T = \hat{L}_T(s) = L(s+i\tau\theta,\omega,\chi).$$

Tuomet panašiai samprotaudami kaip ir mato P_T atveju, remdamiesi 3.5 lema bei (3.10) sąryšiu, įrodome, kad matas $\hat{P}_T$, kai $T \to \infty$, taip pat silpnai konverguoja į matą P. Lema įrodyta.

Iš 3.6 lemos tvirtinimo turime, kad 3.1 teoremos įrodymui belieka parodyti, kad ribinis matas P 3.6 lemoje sutampa su matu P_L. Šiam tikslui pasinaudosime ergodine teorija. Tegul

$$a_\tau = \left\{p^{i\tau} : p \in \mathcal{P}\right\}, \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

Apibrėžiame toro Ω transformacijų grupę $\{\varphi_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}$ formule

$$\varphi_\tau(\omega) = a_\tau\omega, \quad \omega \in \Omega.$$

Monografijoje [4] yra įrodyta, kad ši grupė yra ergodinė.

3.1 teoremos įrodymas. Tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$ apibrėžiame atsitiktinį dydį ξ formule

$$\xi(\omega) = \begin{cases} 1, \ kai\ L(s,\omega,\chi) \in A, \\ 0, \ kai\ L(s,\omega,\chi) \notin A. \end{cases}$$

o A yra ribinio mato P 3.6 lemoje tolydumo aibė. Iš 2.2 ir 3.6 lemų turime, kad

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas\left\{\tau \in [0;T] : L(s+i\tau,\omega,\chi) \in A\right\} = P(A). \tag{3.11}$$

Iš atsitiktinio dydžio ξ apibrėžimo randame, kad

$$\mathbb{E}(\xi) = \int\limits_\Omega \xi dm_H = m_H\{\omega \in \Omega : L(s,\omega,\chi) \in A\},$$

tai yra

$$\mathbb{E}(\xi) = P_L(A). \tag{3.12}$$

Iš grupės $\{\varphi_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}$ ergodiškumo gauname atsitiktinio proceso $\xi(\varphi_\tau)$ ergodiškumą. Todėl iš 2.5 lemos turime, kad beveik visiems $\omega \in \Omega$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \xi(\varphi_\tau(\omega))d\tau = \mathbb{E}(\xi). \tag{3.13}$$

Be to, iš ξ ir φ_τ apibrėžimų gauname, kad

$$\frac{1}{T}\int_0^T \xi\big(\varphi_\tau(\omega)\big)d\tau = \frac{1}{T} meas\big\{\tau \in [0;T] : L(s+i\tau,\omega,\chi) \in A\big\}.$$

Todėl iš (3.12) ir (3.13) išplaukia, kad beveik visiems $\omega \in \Omega$ yra teisinga lygybė

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas\big\{\tau \in [0;T] : L(s+i\tau,\omega,\chi) \in A\big\} = P_L(A).$$

Pastaroji lygybė kartu su (3.11) lygybe įrodo, kad

$$P(A) = P_L(A). \tag{3.14}$$

Aibė A buvo kiekvieno mato P tolydumo aibė, todėl (3.14) lygybė galioja visoms mato P tolydumo aibėms. Tačiau yra žinoma [1], kad mato tolydumo aibės sudaro apibrėžiančią klasę. Iš čia gauname, kad $P(A) = P_L(A)$ su visomis aibėmis $A \in \mathcal{B}(H(D))$, t.y. matai P ir P_L sutampa.

Teorema įrodyta.

4. Ribinio mato P_L atrama

Pradžioje priminsime tikimybinio mato P_L erdvėje $(H(D), \mathcal{B}(H)(D))$ atramos apibrėžimą. Mato P_L atrama yra vadinama toks minimalus erdvės $H(D)$ poaibis S_{P_L}, kuriam galioja lygybė $P_L(S_{P_L}) = 1$. Atrama yra sudaryta iš tų funkcijų $g \in H(D)$, kurių kiekvienai atvirai aplinkai G galioja nelygybė

$$P_L(G) > 0.$$

Atsitiktinio elemento X atrama vadiname jo pasiskirstymo atramą ir žymime S_X.

Apibrėžiame aibę

$$S = \{g \in H(D) : g(s) \neq 0 \; arba \; g(s) \equiv 0\}.$$

Šio skyrelio pagrindinis rezultatas yra tokia teorema.

4.1 teorema. *Su bet kuriuo charakteriu χ mato P_L atrama yra aibė S.*

4.1 teoremos įrodymas yra gana sudėtingas, besiremiantis keliais gana giliais tikimybių teorijos ir funkcijų teorijos rezultatais. Juos mes formuluosime lemų pavidalu.

4.2 lema. *Tarkime, kad $\{X_m : m \in \mathbb{N}\}$ yra nepriklausomų $H(D)$ reikšmių atsitiktinių elementų seka, o eilutė $\sum_{m=1}^{\infty} X_m$ beveik tikrai konverguoja. Tada tos eilutės sumos atrama lygi aibės visų elementų $g \in H(D)$, kurie yra išreiškiami konverguojančia eilute*

$$g = \sum_{m=1}^{\infty} g_m, \quad g_m \in S_{X_m},$$

uždariniui.

Lemos įrodymas duotas [4] monografijoje. Sekanti lema duoda pakankamas sąlygas vienos eilučių aibės tiesiškumui erdvėje $H(D)$ elementų seka $\{g_m : m \in \mathbb{N}\}$ tenkina sąlygas:

1. Jei μ yra kompleksines reikšmes įgyjantis matas erdvėje $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ su atrama juostoje D ir sąlyga

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left| \int_{\mathbb{C}} g_m(s) d\mu(s) \right| < \infty,$$

tai tuomet su visais $l \in \mathbb{N}_0$ yra teisinga lygybė

$$\int_{\mathbb{C}} s^l d\mu(s) = 0;$$

2. Tegul $K \subset D$ yra kompaktinė aibė. Tuomet eilutė

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sup_{s \in K} |g_m(s)|^2$$

konverguoja;

3. Eilutė

$$\sum_{m=1}^{\infty} g_m$$

konverguoja erdvėje $H(D)$.

Tuomet aibė visų konverguojančių eilučių

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m g_m$$

su $|a_m| = 1$, $m \in \mathbb{N}$ yra visur tiršta erdvėje $H(D)$.

Lemos įrodymą galima rasti [4] monografijoje.

4.4 lema. *Tegul μ yra kompleksines reikšmes įgyjantis matas, turintis kompaktinę atramą srityje $\sigma > \sigma_0$, o*

$$g(s) = \int_{\mathbb{C}} e^{sz} d\mu(z) \not\equiv 0.$$

Tuomet

$$\limsup_{x \to \infty} \frac{\log |g(x)|}{x} < \sigma_0.$$

Ir šios lemos įrodymą galima rasti [4] monografijoje.

Funkcija $g(s)$ yra vadinama eksponentinio tipo, jei ji yra analizinė srityje $|arg\, s| \leq \theta_0$, $0 < \theta \leq \pi$, ir tolygiai θ atžvilgiu srityje $|\theta| \leq \theta_0$.

$$\limsup_{x \to \infty} \frac{\log |g(re^{i\theta})|}{r} < \infty.$$

4.5 lema. *Tegul $g(s)$ yra tokia eksponentinio tipo funkcija, kad*

$$\limsup_{x \to \infty} \frac{\log |g(x)|}{x} > -1.$$

Tuomet su visais tarpusavyje pirminiais l ir k

$$\sum_{p \equiv l (mod\, k)} |g(\log p)| = +\infty.$$

Lema yra [3] straipsnio 4.1 lemos rezultatas.

4.6 lema. *Tarkime, kad G yra sritis, apribota paprastu uždaru kontūru, $\{g_n(s) : n \in \mathbb{N}\}$ yra analizinių srityje G funkcijų seka, ir tolygiai srityje G*

$$\lim_{n \to \infty} g_n(s) = g(s) \not\equiv 0.$$

Tuomet vidinis srities G taškas s_0 yra ribinės funkcijos $g(s)$ nulis tada ir tik tada, kai egzistuoja tokia seka $\{s_n\} \subset G$, kad $s_n \to s$, ir $g_n(s_0) = 0$ su visais pakankamai dideliais n.

Lema yra vadinama Hurvico teorema, jos įrodymas yra duotas [7] monografijoje.

4.1 teoremos įrodymas. Tegul, trumpumo dėlei,

$$g_p(s, \omega) = -\frac{\chi(p)\omega(p)}{p^s}.$$

Tuomet atsitiktinį elementą užrašome pavidalu

$$L(s,\omega,\chi)=\prod_{p}\big(1+g_p(s,\omega)\big)^{-1}. \tag{4.1}$$

Tegul $|z|<1$. Tada $\log(1+z)$ apibrėžiame formule

$$\log(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\ldots.$$

Kadangi $|g_p(s,\omega)|<1$ srityje $\sigma>\frac{1}{2}$, tai vietoje (4.1) atsitiktinio elemento galime nagrinėti atsitiktinį elementą

$$-\sum_{p}\log(1+g_p(s,\omega)) \tag{4.2}$$

ir jo atramą.

Kadangi $L(s,\omega,\chi)$ yra atsitiktinis elementas, tai (4.1) sandauga beveik visiems $\omega\in\Omega$ konverguoja tolygiai srities D kompaktinėse aibėse. Iš čia išplaukia, kad eilutė

$$\sum_{p}g(s,b_p) \tag{4.3}$$

konverguoja erdvėje $H(D)$ su kuriais nors $|b_p|=1$.

Kadangi

$$g_p(s,\omega)=O\Big(\frac{1}{p^{\sigma}}\Big),\quad \sigma>\frac{1}{2},$$

tai turime, kad

$$\sum_{p}\sup|g_p(s,b_p)|^2<\infty$$

su kiekviena kompaktine aibe $K\subset D$. Pastarosios ir (4.3) eilučių konvergavimai rodo jog seka $\{g_p(s,b_p)\}$ tenkina 4.3 lemos antrą ir trečią sąlygas. Sudėtingiausia yra patikrinti minėtos lemos pirmąją sąlygą.

Tarkime, kad p_0 yra fiksuotas skaičius ir galioja sąlyga

$$\sum_{p>p_0}\left|\int_{\mathbb{C}}g_p(s,b_p)d\mu(s)\right|<\infty. \tag{4.4}$$

Kadangi charakteris χ yra periodinė funkcija, su periodu k, tai (4.4) sąlygą galime užrašyti pavidalu

$$\sum_{\substack{p>p_0\\ p\equiv l(\bmod k)}}\left|\chi(l)\int_{\mathbb{C}}\frac{1}{p^s}d\mu(s)\right|<\infty \tag{4.5}$$

su $l=1,...,k$, $(l,k)=1$.

Tegul $A\in\mathcal{B}(\mathbb{C})$ ir

$$\nu_l(A)=\chi(l)\mu(A),\quad l=1,...,k,\quad (l,k)=1.$$

Tuomet turime, kad ν taip pat yra kompleksines reikšmes įgyjantis matas su kompaktine atrama srityje D. Apibrėžiame

$$\rho_l(z) = \int_{\mathbb{C}} e^{-sz} d\nu_l(s), \quad l = 1, ..., k, \quad (l,k) = 1.$$

Tada (4.5) sąlyga užrašoma pavidalu

$$\sum_{\substack{p > p_0 \\ p \equiv l (\bmod k)}} |\rho_l(\log p)| < \infty, \quad l = 1, ..., k, \quad (l,k) = 1 \,. \tag{4.6}$$

Aišku, kad funkcijos ρ_l yra eksponentinio tipo. Todėl iš 4.4 lemos gauname, kad arba $\rho_l(z) \equiv 0$, arba

$$\limsup_{x \to \infty} \frac{\log |\rho_l(x)|}{x} > -1, \quad l = 1, ..., k, \quad (l,k) = 1.$$

Jei paskutinioji lygybė galioja su kuriuo nors l, tai tada pagal 4.5 lemą

$$\sum_{\substack{p > p_0 \\ p \equiv l (\bmod k)}} |\rho_l(\log p)| = \infty.$$

Tačiau tai prieštarauja (4.6). Vadinasi, su visais $l = 1, ..., k$, $(l,k) = 1$ galioja lygybė $\rho_l(z) \equiv 0$. Kadangi $\chi(l) \neq 0$, kai $(l,k) = 1$, tai iš $\rho(z)$ apibrėžimo gauname, kad

$$\int_{\mathbb{C}} e^{-sz} d\mu(s) \equiv 0.$$

Šią lygybę diferencijuojame z atžvilgiu ir imame $z = 0$, gauname lygybę

$$\int_{\mathbb{C}} s^l d\mu(s) = 0, \quad l \in \mathbb{N}_0.$$

Įrodėme, kad seka $\{g_p(s, b_p) : p > p_0\}$ tenkina 4.3 lemos pirmąją sąlygą. Taigi, visos 4.3 lemos sąlygos galioja. Pritaikę šią lemą turime, kad visų konverguojančių eilučių

$$\sum_{p > p_0} \hat{a}(p) g_p(s, b_p) \tag{4.7}$$

aibė su $|\hat{a}(p)| = 1$ yra visur tiršta erdvėje $H(D)$.

Tarkime, kad $x_0 \in H(D)$, $\varepsilon > 0$ yra bet koks skaičius ir $K \subset D$ yra kompaktinė aibė. Tuomet visada egzistuoja toks p_0, su kuriuo

$$\sup_{s \in K} \left(\sum_{p > p_0} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|g_p(s, a_p)|}{n} \right) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.8}$$

su $|a_p| = 1$. Iš (4.7) eilučių aibės tirštumo gauname, kad egzistuoja tokia $|\hat{a}_p| = 1$, kad

$$\sup_{s \in K} \left| x_0(s) - \sum_{p > p_0} \log(12 + g_p(s,1)) - \sum_{p > p_0} \hat{a}_p \cdot g_p(s, b_p) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \,. \tag{4.9}$$

Pažymėkime

$$a_p = \begin{cases} \hat{a}_p b_p, \ jei \ p > p_0, \\ \quad 1, \ jei \ p \le p_0. \end{cases}$$

Tuomet iš (4.8) ir (4.9) išplaukia, kad

$$\begin{aligned} &\sup_{s\in K}\Big|x_0(s) - \sum_p \log(1+g_p(s,a_p))\Big| \le \\ \le &\sup_{s\in K}\Big|x_0(s) - \sum_p \log(1+g_p(s,a_p)) - \sum_{p>p_0} \hat{a}_p g_p(s,b_p)\Big| + \\ + &\sup_{s\in K}\Big|\sum_{p>p_0}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{g_p^n(s,a_p)}{n} + \sum_{p>p_0}\frac{\hat{a}_p\chi(p)b_p}{p^s} - \sum_{p>p_0}\frac{\chi(p)a_p}{p^s}\Big| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Ši nelygybė įrodo, kad aibė visų konverguojančių eilučių

$$-\sum_p \log(1+g_p(s,a_p)) \tag{4.10}$$

su $|a_p| = 1$ yra visur tiršta erdvėje $H(D)$.

Gerai žinoma [4], kad sekos $\{\omega(p)\}$ atsitiktiniai dydžiai yra nepriklausomi. Todėl

$$\big\{\log(1+g_p(s,\omega))\big\} \tag{4.11}$$

yra nepriklausomų $H(D)$ reikšmių atsitiktinių elementų seka erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$. Aišku, kad kiekvieno atsitiktinio dydžio $\omega(p)$ atrama yra vienetinis apskritimas kompleksinėje plokštumoje. Todėl aibė

$$\big\{g \in H(D) : g(s) = \log(1+g_p(s,a_p))\big\}$$

su $|a_p| = 1$ yra (4.11) atsitiktinių elementų atrama. Pritaikę 4.2 lemą gauname, kad (4.2) atsitiktinio elemento atrama yra (4.10) konverguojančių eilučių aibės uždarinys. Mes įrodėme, kad ir aibė yra visur tiršta erdvėje $H(D)$, todėl (4.2) elemento atrama yra visa erdvė $H(D)$.

Lieka pereiti prie (4.1) elemento atramos. Imame funkciją $h : H(D) \to H(D)$, apibrėžiamą formule

$$h(g) = e^g, \quad g \in H(D).$$

Tuomet funkcija $H(D)$ yra tolydi, erdvės $H(D)$ elementui

$$-\sum_p \log(1+g_p(s,\omega))$$

priskiria elementą

$$\prod_p (1+g_p(s,\omega))^{-1}$$

ir erdvę $H(D)$ atvazduoja į aibę $S \setminus \{0\}$. Iš čia turime, kad (4.11) atsitiktinio elemento atramai priklauso aibė $S \setminus \{0\}$. Tačiau šio elemento atrama yra uždara aibė. Todėl aibės $S \setminus \{0\}$ uždarinys

$\overline{S \setminus \{0\}}$ taip pat priklauso (4.11) elemento atramai. Iš 4.6 lemos išplaukia , kad $\overline{S \setminus \{0\}} = S$. Todėl aibė S guli (4.11) elemento atramoje.

Įrodysime, kad (4.11) elemento atrama priklauso aibei S. Turime, kad sandaugos

$$\prod_p (1 + g_p(s,\omega))^{-1}$$

visi daugikliai yra ne nuliai ir ši sandauga konverguoja beveik visiems ω erdvės $H(D)$ prasme. Todėl vėl iš 4.6 lemos išplaukia, kad aibei S priklauso (4.11) atsitiktinio elemento atrama. Todėl galutinai gauname, kad (4.11) atsitiktinių elementų atrama sutampa su aibe S. Teorema pilnai įrodyta.

5. Universalumo teorema

Dabar įrodysime pagrindinį darbo rezultatą – universalumo teoremą Dirichlė L funkcijoms.

5.1 teorema. *Tarkime, kad $K \in \mathcal{K}$, $f(s) \in H_0(K)$, o χ yra bet kuris Dirichlė charakteris. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$ yra teisinga nelygybė*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas\left\{\tau \in [0,T] : \sup_{s\in K} |L(s+i\tau,\chi) - f(s)| < \varepsilon\right\} > 0.$$

Mums bus reikalinga Mergeliano teorema apie analizinių funkcijų aproksimavimą polinomais.

5.2 lema. *Tarkime, kad $K \subset \mathbb{C}$ yra kompaktinė aibė, turinti jungųjį papildinį, o funkcija $g(s)$ yra tolydi aibėje K ir analizinė jos viduje. Tuomet kiekvieną $\varepsilon > 0$ atitinka toks polinomas $p(s)$, su kuriuo*

$$\sup_{s\in K} |g(s) - p(s)| < \varepsilon.$$

Lemos įrodymą galima rasti [9] monografijoje.

5.1 teoremos įrodymas. Iš 5.2 lemos išplaukia, kad egzistuoja toks polinomas $p(s)$, kad

$$\sup_{s\in K} |f(s) - e^{p(s)}| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5.1}$$

Apibrėžiame aibę

$$G = \left\{g \in H(D) : \sup_{s\in K} \left|g(s) - e^{p(s)}\right| < \frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

Tuomet aibė G yra atvira. Be to, pagal 4.1 teoremą ji yra ribinio mato P_L atramos elemento $e^{p(s)}$ atviroji aplinka. Tuomet galioja nelygybė

$$P_L(G) > 0. \tag{5.2}$$

Iš 3.1 teoremos ir 2.2 lemos 3 tvirtinimo turime, kad

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas\left\{\tau \in [0;T] : L(s+i\tau,\chi) \in G\right\} \geq P_L(G).$$

Iš čia, (5.2) nelygybės ir aibės G apibrėžimo gauname, kad

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas\left\{\tau \in [0;T] : \sup_{s\in K} \left|L(s+i\tau,\chi) - e^{p(s)}\right| < \frac{\varepsilon}{2}\right\} > 0. \tag{5.3}$$

Tarkime, kad $\tau \in \mathbb{R}$ tenkina nelygybę

$$\sup_{s\in K} \left|L(s+i\tau,\chi) - e^{p(s)}\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tuomet iš (5.1) nelygybės randame, kad

$$\sup_{s\in K} \left|L(s+i\tau,\chi) - f(s)\right| \leq \sup_{s\in K} \left|L(s+i\tau,\chi) - e^{p(s)}\right| +$$
$$+ \sup_{s\in K} \left|f)(s) - e^{p(s)}\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Vadinasi

$$\left\{\tau \in [0;T] : \sup_{s\in K}\Big|L(s+i\tau,\chi)-f(s)\Big| < \varepsilon\right\} \subset$$
$$\subset \left\{\tau \in [0;T] : \sup_{s\in K}\Big|L(s+i\tau,\chi)-e^{p(s)}\Big| < \frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

Iš čia, mato monotoniškumo savybės ir (5.3) nelygybės gauname teoremos tvirtinimą, kad

$$\liminf_{T\to\infty}\frac{1}{T}meas\left\{\tau \in [0;T] : \sup_{s\in K}\Big|L(s+i\tau,\chi)-f(s)\Big| < \varepsilon\right\} > 0.$$

Summary

Universality of Dirichlet L-functions

Let $s = \sigma + it$ be a complex variable, and χ be a Dirichlet character. Dirichlet L-function $L(s,\chi)$ is defined, for $\sigma > 1$, by the series

$$L(s,\chi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(m)}{m^s},$$

and is continued analytically to the whole complex plane if χ is non-principal character. If χ is the principal character , then $L(s,\chi)$ has a simple pole at the point $s = 1$.

In the master work, we present a generalization of the Voronin universlity theorem for Dirichlet L-functions. Let $D = \{s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1\}$. Denote by the class of compact subsets of D with connected complement, and by $H_0(K)$, $K \in \mathcal{K}$, the class of continuous non-vanishing functions on K which are analytic in the interior of K. Moreover, let $meas\{A\}$ be the Lebesgue measure of a measurable set $A \subset \mathbb{R}$. Then we prove the following statement.

Suppose that $K \in \mathcal{K}$, $f(s) \in H_0(K)$ and let χ be an arbitrary Dirichlet character. Then for every $\varepsilon > 0$,

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas\left\{\tau \in [0,T] : \sup_{s\in K} |L(s+i\tau,\chi) - f(s)| < \varepsilon\right\} > 0.$$

Literatūra

[1] P. Billingsley, Convergence of Probability Measures, Willey, New York, 1968.

[2] H. Cramėr, M. Leadbetter, Stationary and Related Stochastic Processes, Willey, New York, 1967.

[3] A. Laurinčikas, K. Matsumoto, The joint universality and the functional independence for Lerch zeta-functions, *Nagoya Math. J.*, 157, p.211-227, 2000.

[4] A. Laurinčikas, Limit Theorems for the Riemann Zeta-Function, Kluwer, Dordrecht, 1996.

[5] A. Laurinčikas, D. Šiaučiūnas, Remarks on the universality of the periodic zeta-functions, Mat. Zametki, 80(4), (2006), 561-568.

[6] V. Paulauskas, A. Račkauskas, Funkcinė analizė, I knyga. Erdvės, Vilnius, 2007.

[7] C. E. Titchmarch, The Theory of Functions, Oxford University Press., Oxford, 1939.

[8] S. M. Voronin Theorem on the "universality" of the Riemann zeta-function, Izv. Akad. nauk. SSSR, Ser. matem. 39 (1975), 475-486 (rusų kalba).

[9] J. L. Walsh, Interpolation and Approximation by Rational Functions in the Complex Domain, Amer. Math. Soc. Colloq. Vol. 20, 1960.