ŠIAULIŲ UNIVERSITETAS

INFORMATIKOS, MATEMATIKOS, E. STUDIJŲ INSTITUTAS

MATEMATIKOS KATEDRA

Monika Dokšienė

Gryno funkcija kraštinio uždavinio antros eilės paprastąjai diferencialinei lygčiai

Magistro baigiamasis darbas

Darbo vadovas: prof. D. Jurgaitis

Šiauliai, 2014

TURINYS

ĮVADAS

Dažniausiai tam, kad nusakyti objekto savybes ar ryšius reikia žinoti tų savybių ar ryšių funkciją. Jeigu procesas realus, tai jis dažniausiai nėra stacionarus ir tam, kad jį aprašyti būtina įvertinti proceso vyksmo greitį. Iš matematinės analizės kurso žinome, kad funkcijos išvestinės mechaninė prasmė yra momentinis greitis, o antroji funkcijos išvestinė yra pagreitis. Tikslesniam realaus proceso matematinio modelio sukūrimui būtina įvertinti, t. y. rasti ryšį tarp funkcijos ir jos išvestinių.

Paprasčiausias ir vienas iš geriausių būdų yra realų procesą aprašyti diferencialine lygtimi ar diferencialinių lygčių sistema. Tokiuose modeliuose sutinkamos viena ar kelios lygtys, kurias sieja nepriklausomas kintamasis, ieškomoji funkcija ir jos išvestinės.

Jei diferencialinėje lygtyje yra tik vienas nepriklausomas kintamasis, tai tokią lygtį vadiname paprastąja diferencialine lygtimi [1]

$$F(x, y, y') = 0,$$

čia F – žinoma funkcija, apibrėžta kokioje nors srityje $D \subset \mathbb{R}^{k+2}$, čia k yra nulis, y(x) – ieškomoji vieno nepriklausomo kintamojo funkcija, o $y(x)$ su brūkšneliu ieškomosios funkcijos pirmoji išvestinė.

Lygtis vadinama k-osios eilės diferencialine lygtimi, jeigu į ją įeina ieškomosios funkcijos k-osios eilės išvestinė ir neįeina aukštesniųjų eilių išvestinės. Bendruoju atveju k-os eilės paprastąją diferencialinę lygtį galima užrašyti taip [1]

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(k)}) = 0,$$

čia F – žinoma funkcija, apibrėžta kokioje nors srityje $D \subset \mathbb{R}^{k+2}$, y(x) – ieškomoji vieno nepriklausomo kintamojo funkcija, o y(x) su brūkšneliais ieškomosios funkcijos išvestinės.

Diferencialinės lygties sprendinių aibė yra begalinė. Sprendiniai priklauso nuo laisvai parenkamų konstantų, kurių skaičius priklauso nuo diferencialinės lygties eilės.

Taikymuose visada reikia rasti vieną ir būtų gerai vienintelį diferencialinės lygties sprendinį, kuris vienareikšmiškai aprašo nagrinėjamą procesą. Tam, kad iš rastųjų diferencialinės lygties sprendinių, apibrėžtų tam tikrame intervale ar sudėtingesnėje aibėje, išskirti tuos, kurie aprašo nagrinėjamą situaciją vienareikšmiai, būtina sprendiniams formuluoti papildomas sąlygas, kuriuos vadinamos kraštinėmis sąlygomis. Šios sąlygos yra apibrėžiamos srities, kurioje ieškomas sprendinys, kraštiniuose taškuose, o nagrinėjami uždaviniai vadinami kraštiniais uždaviniais [2].

Darbo tikslas: kraštinio uždavinio antros eilės diferencialinei lygčiai suvedimas į integralinę lygtį ir

Gryno funkcijos kraštiniam uždaviniui radimas.

Darbo uždaviniai:

1. Naudojant faktorizacijos metodą ieškomąją funkciją išreikšti funkcijų *v(r)* ir *w(x)* sandauga, t. y. sudaryti ir išspręsti diferencialines lygtis, kurias tenkina šios funkcijos.
2. Naudojant konstantų variavimo metodą, nagrinėjamą lygtį suvesti į integralinę lygtį bei sukonstruoti kraštinio uždavinio Gryno funkciją.

1. UŽDAVINIO FORMULAVIMAS

Nagrinėjame antros eilės paprastąją diferencialinę lygtį

$$u'' + \left(E + V(r) - \frac{a(a+1)}{r^2}\right)u = 0, \tag{1}$$

čia u – ieškomoji funkcija, E – energijos vertė, r – nepriklausomas kintamasis, V(r) – potencialas, kurio analizinė išraiška tokia:

$$V(r) = \frac{A}{r}. \tag{2}$$

A, a – fizikinės konstantos.

Spręsime kraštinį uždavinį. Rasime (1) diferencialinės lygties sprendinį, kuris tenkintų dvi kraštines sąlygas:

$$u(0) = 0, \quad \lim_{r\to\infty} u(r) = 0. \tag{3}$$

Kraštinio uždavinio (1) - (3) sprendiniai ir jų savybės svarbios fizikiniuose taikymuose.

2. FAKTORIZACIJOS METODO TAIKYMAS

(1) diferencialinės lygties sprendinio ieškosime faktorizacijos metodu, todėl ieškomąją funkciją $u(r)$ užrašysime dviejų funkcijų $v(r)$ ir $w(x)$sandauga

$$u(r) = v(r) \cdot w(x), \tag{4}$$

čia kintamasis x yra toks:

$$x = c(e^{\frac{r}{a}} - 1),$$

o funkcija $v(r)$ yra tik kintamojo r funkcija ir funkcija $w(x)$ yra tik kintamojo x funkcija.

Faktorizacijos metodo taikymui ir (1) lygties sprendinio radimui yra reikalingos funkcijos $u(r)$ pirmoji ir antroji išvestinės. Diferencijuojame (4) lygybę kintamojo r atžvilgiu ir gauname:

$$u'_r = v'_r \cdot w + v \cdot w' \cdot x'_r \ ,$$

čia

$$x'_r = \frac{c}{a} e^{\frac{r}{a}} = \frac{c}{a}\left(1 + \frac{x}{c}\right) = \frac{c+x}{a}.$$

Gautąją lygybę užrašome tokiu pavidalu:

$$u'_r = v'_r \cdot w + v \cdot w' \cdot \frac{c+x}{a}.$$

Ieškome funkcijos $u(r)$ antrosios išvestinės. Tuo tikslu pastarąją lygybę diferencijuojame kintamojo r atžvilgiu ir turime

$$u''_{rr} = (v'_r \cdot w + v \cdot w' \cdot \frac{c+x}{a})' = v'' \cdot w + v' \cdot w' \cdot x'_r + \frac{1}{a}\big(w'' \cdot x'_r \cdot (c+x) \cdot v + w' \cdot x'_r \cdot v + w' \cdot v' \cdot (c+x)\big) = v'' \cdot w + v' \cdot w' \cdot \frac{c+x}{a} + \frac{1}{a}\left(w'' \cdot x'_r \cdot \frac{(c+x)^2}{a} \cdot v + w' \cdot \frac{c+x}{a} \cdot v + w' \cdot v' \cdot (c+x)\right) = v'' \cdot w + v' \cdot w' \cdot \frac{c+x}{a} + w'' \cdot \frac{(c+x)^2}{a^2} \cdot v + w' \cdot \frac{c+x}{a^2} \cdot v + w' \cdot v' \cdot \frac{(c+x)}{a} = v'' \cdot w + 2 \cdot v' \cdot w' \cdot \frac{(c+x)}{a} + w'' \cdot v \cdot \frac{(c+x)^2}{a^2} + w' \cdot v \cdot \frac{c+x}{a^2}\,. \tag{5}$$

Pasinaudoję (4) ir (5) lygybėmis, t. y. įrašę jas į (1) diferencialinę lygtį gauname tokią išraišką:

$$v'' \cdot w + \frac{2\cdot(c+x)}{a} \cdot v' \cdot w' + w'' \cdot v \cdot \frac{(c+x)^2}{a^2} + w' \cdot v \cdot \frac{c+x}{a^2} + \left(E + V(r) - \frac{a(a+1)}{r^2}\right) \cdot v \cdot w = 0. \qquad (6)$$

Padauginame (6) lygtį iš $\frac{a^2}{v(c+x)^2}$ bei atlikę veiksmus (6) antros eilės diferencialinę lygtį užrašome tokiu pavidalu:

$$w'' + \frac{w'}{c+x} \cdot \left(2a\frac{v'}{v} + 1\right) + \frac{a^2 \cdot w}{(c+x)^2}\left(\frac{v''}{v} + E + V(r) - \frac{a(a+1)}{r^2}\right) = 0. \qquad (7)$$

(7) diferencialinėje lygtyje bandysime atskirti kintamuosius r ir x, gauti diferencialines lygtis ieškomosioms funkcijoms $v(r)$ ir $w(x)$ rasti.

Funkcijai $v(r)$ rasti iš (7) lygties paimame tokius narius, į kuriuos įeina kintamasis r bei jo funkcija $v(r)$, prilyginame juos atskyrimo konstantai λ, nes funkcijos $v(r)$ ir $w(x)$ yra lygios tik tada ir tik tada, kai jos yra konstantos. Funkcijai $v(r)$ rasti gauname lygtį

$$\frac{v''}{v} + E - \frac{a(a+1)}{r^2} = \lambda,$$

lygtį padauginame iš vr^2 ir ją užrašome kanoniniu pavidalu

$$r^2 v'' + r^2 E v - a(a+1)v - \lambda r^2 v = 0. \qquad (8)$$

Iš (2) lygybės gauname potencialo $V(r)$ išraišką per kintamąjį x ir ji yra tokia:

$$V(r) = \frac{A}{r} = \frac{A}{aln(1+\frac{x}{c})}.$$

Gautąją išraišką įrašome į (7) lygtį ir gauname tokią diferencialinę lygtį ieškomajai funkcijai $w(x)$ rasti:

$$w'' + \frac{w'}{c+x} \cdot \left(2a\frac{v'}{v} + 1\right) + \frac{a^2 \cdot w}{(c+x)^2}\left(\frac{A}{aln(1+\frac{x}{c})} + \lambda\right) = 0.$$

3. RADIALINĖS LYGTIES SPRENDIMAS

Bendrąjį (8) lygties sprendinį gausime pasinaudoję [4] šaltinio 2.162 uždaviniu (1a) punktu bei parinkę tokius parametrus turime, kad

$$r^2 v'' + \big((E-\lambda)r^2 - a(a+1)\big)v = 0,$$

$$k = 0, m = 2,\ b = E - \lambda, c = -a(a+1).$$

Bendrasis sprendinys, kai $b = 0$, tai $E = \lambda$, yra toks:

$$v(r) = \begin{cases} C_1 r^{\frac{1-k+\mu}{2}} + C_2 r^{\frac{1-k-\mu}{2}}, & kai\ \mu = \sqrt{(1-k)^2 - 4c} \neq 0, \\ r^{\frac{1-k}{2}}(C_1 + C_2 \ln r), & kai\ (1-k)^2 - 4c = 0, \end{cases}$$

čia C_1 ir C_2 – laisvos konstantos.

4. POTENCIALINĖS LYGTIES SPRENDIMAS

Spręsime diferencialinę lygtį ir rasime ieškomąją funkciją $w(x)$.

Lygtyje

$$w'' + \frac{w'}{c+x} \cdot \left(2a\frac{v'}{v} + 1\right) + \frac{a^2 \cdot w}{(c+x)^2}(V(r) + \lambda) = 0$$

įrašę potencialo išraišką

$$V(r) = \frac{A}{r} = \frac{A}{aln(1 + \frac{x}{c})}$$

bei atlikę matematinius veiksmus gauname tokią diferencialinę lygtį ieškomąjai funkcijai $w(x)$ rasti:

$$(c+x)^2 w'' + w'(c+x)\left(2a\frac{v'}{v} + 1\right) + a^2 w\left(\frac{A}{aln(1+\frac{x}{c})} + \lambda\right) = 0. \tag{7}$$

(7) lygtį užrašome taip:

$$(c+x)^2 w'' + w'(c+x)\left(2a\frac{v'}{v} + 1\right) = -a^2 w\left(\frac{A}{aln(1+\frac{x}{c})} + \lambda\right) = T. \tag{7*}$$

ir jos dešiniąją pusę pažymime raide T:

$$T = -a^2 w\left(\frac{A}{aln(1+\frac{x}{c})} + \lambda\right).$$

(7*) diferencialinę lygtį spręsime kaip nehomogeninę antros eilės diferencialinę lygtį. Pirmiausia nagrinėsime jos atitinkamą homogeninę diferencialinę lygtį, kuri yra tokia:

$$(c+x)^2 w'' + w'(c+x)\left(2a\frac{v'}{v} + 1\right) = 0. \tag{9}$$

(9) lygtį padauginę iš $\frac{1}{c+x}$ ir atlikę pakeitimus $w' = \beta$, $w'' = \beta'$, čia $\beta(x)$ nauja ieškomoji funkcija, gauname tokią pirmos eilės diferencialinę lygtį funkcijai $\beta(x)$ rasti

$$(c+x)\beta' = -\left(2a\frac{v'}{v} + 1\right)\beta. \tag{10}$$

Šią diferencialinę lygtį sprendžiame kintamųjų atskyrimo metodu [2] ir atlikę skaičiavimus gauname (10) lygties bendrąjį sprendinį

$$\beta(x) = e^{-2a\int\frac{dv}{v(c+x)}-\int\frac{dx}{c+x}} = e^{\frac{-2a}{c+x}-\frac{x}{c}-\ln x}.$$

Tada, pasinaudoję pastarąja išraiška bei keitiniu $w' = \beta$ gauname atskirąjį (9) lygties sprendinį:

$$w_1 = w_1(x) = \int \beta(x)dx = \int e^{\frac{-2a}{c+x}-\frac{x}{c}-ln\,x}dx.$$

Pasinaudoję [3] šaltinio 38 formule gauname ir antrąjį (9) diferencialinės lygties sprendinį, kuris yra tiesiškai nepriklausomas su ką tik gautuoju ir jo išraiška yra tokia:

$$w_2 = w_2(x) = w_1(x)\int\frac{e^{-\int\left(2a\frac{v'}{v}+1\right)\frac{1}{(c+x)}dx}}{w_1(x)^2}dx.$$

Bendras (9) lygties sprendinys yra

$$w(x) = C_1w_1(x) + C_2w_2(x),$$

čia w_1 ir w_2 tiesiškai nepriklausomi (9) lygties sprendiniai, o C_1 ir C_2 – laisvos konstantos.

(7*) nehomogeninės diferencialinės lygties sprendinių ieškosime konstantų varijavimo metodu [2]. Metodo esmė ta, jog atskirasis (7*) lygties sprendinys ieškomas pavidalu:

$$w(x) = C_1(x)w_1(x) + C_2(x)w_2(x), \tag{11}$$

čia $C_1(x)$ ir $C_2(x)$ – ieškomosios diferencijuojamos funkcijos nepriklausomo kintamojo x funkcijos, o w_1 ir w_2 – (9) homogeninės diferencialinės lygties tiesiškai nepriklausomi sprendiniai.

Diferencijuojame (11) lygybę kintamojo x atžvilgiu ir gauname funkcijos $w(x)$ pirmąją išvestinę. Jos išraiška yra tokia:

$$w' = C_1w_1' + C_2w_2' + C_1'w_1 + C_2'w_2.$$

Pareikalaujame, jog

$$C_1'w_1 + C_2'w_2 = 0$$

ir dar kartą diferenciajuodami (11) lygybę gauname antrąją šios funkcijos išvestinę

$$w'' = C_1'w_1' + C_2'w_2' + C_1w_1'' + C_2w_2''w_1'' + C_2w_2''.$$

Abi rastąsias funkcijos $w(x)$ išvestines įrašome į (7*) diferencialinę lygtį, tuomet sprendžiame sistemą, sudarytą iš $C_1'w_1 + C_2'w_2 = 0$ ir gautosios lygties. Gautoji sistema yra tokia:

$$C_1'w_1 + C_2'w_2 = 0,$$

$$(c+x)^2(C_1'w_1' + C_2'w_2' + C_1w_1'' + C_2w_2'') + (C_1w_1' + C_2w_2' + C_1'w_1 + C_2'w_2)(c+x)\left(2a\frac{v'}{v} + 1\right) =$$

$$-a^2w\left(\frac{A}{aln(1+\frac{x}{c})} + \lambda\right).$$

Pastebėsime, kad antrojoje lygtyje dingsta varijuotos konstantos C_1 ir C_2 ir gautoje sistemoje nežinomos yra dvi varijuotų konstantų išvestinės. Galutinė sistemos išraiška yra tokia:

$$\begin{cases} C_1'w_1 + C_2'w_2 = 0, \\ C_1'w_1' + C_2'w_2' = \frac{-a^2w}{(c+x)^2}\left(\frac{A}{aln(1+\frac{x}{c})} + \lambda\right) = T*, \end{cases} \tag{12}$$

čia $T*$ nusakytas formule:

$$T* = \frac{-a^2w}{(c+x)^2}\left(\frac{A}{aln\left(1+\frac{x}{c}\right)} + \lambda\right).$$

(12) sistemos determinantas yra Vronskio determinantas

$$\begin{vmatrix} w_1 & w_2 \\ w_1' & w_2' \end{vmatrix} = \omega(w_1, w_2) = w_1w_2' - w_2w_1'$$

ir jis $w_1w_2' - w_2w_1' \neq 0$, nes sprendiniai w_1 ir w_2 yra tiesiškai nepriklausomi homogeninės diferencialinės lygties (12) sprendiniai. Apskaičiuojame sistemos determinantus, kuriuose pirmąjį stulpelį keičiame laisvaisiais (12) sistemos nariais. Turime

$$\begin{vmatrix} 0 & w_2 \\ T* & w_2' \end{vmatrix} = -w_2T*$$

ir

$$\begin{vmatrix} w_1 & 0 \\ w_1' & T* \end{vmatrix} = w_1T*.$$

Apskaičiavę determinantus ir pasinaudoję Kramerio taisykle [5] randame varijuotų konstantų išvestinių išraiškas ir jos yra tokios:

$$C_1' = \frac{-w_2 T*}{\omega(w_1, w_2)},$$

$$C_2' = \frac{w_1 T*}{\omega(w_1, w_2)}.$$

Suintegravę gautąsias išraiškas kintamojo x atžvilgiu gauname varijuotų konstantų išraiškas ir jos yra tokios:

$$C_1(x) = -\int \frac{w_2 T*}{\omega(w_1, w_2)} dx + C_1,$$

$$C_2(x) = \int \frac{w_1 T*}{\omega(w_1, w_2)} dx + C_2.$$

Gautąsias konstantų C_1 ir C_2 išraiškas įrašę į (11) lygybę gauname (7) diferencialinės lygties bendrąjį sprendinį

$$w(x) = C_1 w_1 + C_2 w_2 - w_1 \int \frac{w_2 T*}{\omega(w_1, w_2)} dx + w_2 \int \frac{w_1 T*}{\omega(w_1, w_2)} dx. \tag{13}$$

Ši išraiška ypatinga tuo, kad joje ieškomoji funkcija yra po integralo ženklu, t. y. mes antros eilės diferencialinę lygtį suvedėme į integralinę lygtį. Išspręsti analiziškai, t. y. gauti sprendinio išraišką formule, nepavyko.

5. KRAŠTINIO UŽDAVINIO SPRENDIMAS

Visų pirma užrašysime (1) ieškomosios diferencialinės lygties išraišką, t.y. pasinaudosime keitiniu apie ieškomosios funkcijos išraišką dviejų tarpinių funkcijų sandauga

$$u(r) = v(r) \cdot w(x).$$

Prisiminkime, kad buvome įsivedę naują kintamąjį $x = c(e^{\frac{r}{a}} - 1)$. Taip pat žinome, kad ieškomosios funkcijos $v(r)$ išraiška yra tokia:

$$v(r) = \begin{cases} C_1 r^{\frac{1-k+\mu}{2}} + C_2 r^{\frac{1-k-\mu}{2}}, & kai\ \mu = \sqrt{(1-k)^2 - 4c} \neq 0, \\ r^{\frac{1-k}{2}}(C_1 + C_2 \ln r), & kai\ (1-k)^2 - 4c = 0 \end{cases}$$

ir kitos ieškomosios funkcijos išraiška yra tokia:

$$w(x) = C_3 w_1 + C_4 w_2 - w_1 \int \frac{w_2 T*}{\omega(w_1, w_2)} dx + w_2 \int \frac{w_1 T*}{\omega(w_1, w_2)} dx\ ,$$

čia w_1, w_2 – tiesiškai nepriklausomi (9) lygties sprendiniai, o $\omega(w_1, w_2)$ – jų vroskianas arba Vronskio determinantas.

$$T *= \frac{-a^2 w}{(c+x)^2} \left(\frac{A}{a \ln\left(1+\frac{x}{c}\right)} + \lambda \right).$$

Tikrinsime ar (1) diferencialinės lygties sprendiniai tenkina kraštines sąlygas, kurios aprašytos (3) lygybe. Pareikalavę, kad būtų tenkinamos abi kraštinės sąlygos, gauname tokias lygybes:

<u>1variantas.</u> Jeigu

$$v(r) = C_1 r^{\frac{1-k+\mu}{2}} + C_2 r^{\frac{1-k-\mu}{2}},$$

tai pažymėję

$$\frac{1-k+\mu}{2} = \alpha > 0$$

ir

$$\frac{1-k-\mu}{2} = \beta < 0$$

turime, kad pirmoji konstanta yra teigiama, o antroji yra neigiama.

1(a) variantas.

Tikriname pirmąją sąlygą:

$$u(0) = v(0)w(0) = 0.$$

Tariame, kad $v(0)w(0) = 0$, o $w(0) \neq 0$, tuomet gauname, kad

$$v(r) = C_1 r^{\alpha} + C_2 r^{\beta}$$

turi būti nulis.

Kai $r \to 0$, tai parinkę $C_2 = 0$, o C_1 – laikydami bet kokia konstanta bei C_3 ir C_4 – laikydami laisvomis konstantomis, turime kad pirmoji kraštinė sąlyga patenkinta.

Tikriname antrąją sąlygą:

$$\lim_{r\to\infty} u(r) = v(\infty)w(\infty) = 0.$$

Kadangi

$$\lim_{r\to\infty} v(\infty) = \infty,$$

tai reikia, kad

$$\lim_{r\to\infty} w(\infty) = 0,$$

tuomet parinkę $C_3 = 0$ ir $C_4 = 0$, gauname, kad turi galioti tokia lygybė:

$$-w_1 \int_0^x \frac{w_2 T*}{\omega(w_1,w_2)} dx + w_2 \int_0^x \frac{w_1 T*}{\omega(w_1,w_2)} dx = 0.$$

Jei $r \to \infty$, tai, kadangi

$$x = c\left(e^{\frac{r}{a}} - 1\right),$$

gauname, kad ir kintamasis x artėja į begalybę. w_1, w_2 ir $\omega(w_1, w_2)$ nėra lygūs nului, tuomet ieškome, kam yra lygi atskyrimo konstanta λ. Tariame, kad

$$\frac{A}{a\ln\left(1+\frac{x}{c}\right)} + \lambda = 0.$$

Pasinaudoję riba

$$\lim_{x\to\infty} ln\left(1+\frac{x}{c}\right) = \infty,$$

gauname, jog trupmena, kurios vardiklis artėja į begalybę, skaitiklis yra konstanta, artėja į nulį, simboliškai ($\frac{A}{\infty} = 0$), taigi atskyrimo konstanta λ turi būti lygi nuliui.Šiuo atveju kraštinio uždavinio sprendinys yra toks

$$u(r) = C_1 r^{\alpha}(w_1 \int_0^x \frac{aAww_2\,(c+x)^{-2}}{ln\left(1+\frac{x}{c}\right)\omega(w_1,w_2)}dx - w_2 \int_0^x \frac{aAww_1\,(c+x)^{-2}}{ln\left(1+\frac{x}{c}\right)\omega(w_1,w_2)}dx),$$

čia C_1 – bet kokia laisva konstanta, $\alpha > 0$.

Suformuluojame teoremą, nusakančią gautą rezultatą:

1 teorema. (1), (3) *kraštinis uždavinys, kai atskyrimo konstanta λ lygi nului, turi be galo daug sprendinių*

$$u(r) = C_1 r^{\alpha}(w_1 \int_0^x \frac{aAww_2\,(c+x)^{-2}}{ln\left(1+\frac{x}{c}\right)\omega(w_1,w_2)}dx - w_2 \int_0^x \frac{aAww_1\,(c+x)^{-2}}{ln\left(1+\frac{x}{c}\right)\omega(w_1,w_2)}dx),$$

čia C_1 *– bet kokia laisva konstanta*, $\alpha > 0$.

1(a) varianto (1), (3) kraštinio uždavinio sprendinį galime užrašyti Gryno funkcijos išraiška, kuri yra

$$u(r) = C_1 r^{\alpha}(w_1(r)w(s)\int_0^x R(s)ds - w_2(r)w(s)\int_0^x R_1(s)ds) = C_1 r^{\alpha}(\int_0^x w_1(r)w(s)R(s)ds + \int_x^{\infty} w_2(r)w(s)R_1(s)ds) = \int_0^{\infty} w(s)G(r,s)ds,$$

čia

$$R(s) = \frac{aAw_2\,(c+x)^{-2}}{ln\left(1+\frac{x}{c}\right)\omega(w_1,w_2)},$$

$$R_1(s) = \frac{aAw_1\,(c+x)^{-2}}{ln\left(1+\frac{x}{c}\right)\omega(w_1,w_2)}$$

bei Gryno funkcija

$$G(r,s) = \begin{cases} C_1 r^{\alpha} w_1(r)R(s), & kai\ 0 \le s \le x, \\ C_1 r^{\alpha} w_2(r)R_1(s), & kai\ x \le s \le \infty. \end{cases}$$

<u>1(b) variantas.</u>

Tikriname pirmąją sąlygą:

$$u(0) = v(0)w(0) = 0.$$

Tariame, kad $v(0)w(0) = 0$, $\lim\limits_{r\to 0} v(0) = \infty$ ir tada pareikalaujame, kad $w(0) = 0$ bei gauname, kad

$$v(r) = C_1 r^{\alpha} + C_2 r^{\beta},$$

kai $r \to 0$, parenkame $C_1 = 0$, C_2 – bet kokia konstanta, o $C_3 = C_4 = 0$.

Tikriname antrąją kraštinę sąlygą:

$$\lim_{r\to\infty} u(\infty) = v(\infty)w(\infty) = 0.$$

Kadangi $\lim\limits_{r\to\infty} w(\infty) = 0$, kai $x \to \infty$, turime, kad funkcijos $w(x)$ riba, kai x auga į begalybę turi būti nulis

$$w(x) = -w_1 \int_0^x \frac{w_2 T*}{\omega(w_1, w_2)} dx + w_2 \int_0^x \frac{w_1 T*}{\omega(w_1, w_2)} dx.$$

Iš pastarosios lygties atskyrimo konstantos λ rasti negalime, taigi šiuo atveju kraštinio uždavinio sprendinio išraiška yra neapibrėžta, t.y. kraštinio uždavinio sprendinys neegzistuoja.

<u>2 variantas</u>. Kai

$$v(r) = r^{\frac{1-k}{2}}(C_1 + C_2 \ln r).$$

Tikriname pirmąją kraštinę sąlygą:

$$u(0) = v(0)w(0) = 0.$$

Tariame, kad $v(0)w(0) = 0$, $v(0) = 0$, $w(0) \neq 0$. Apskaičiavę ribą $v(r)$, kai $r \to 0$, gauname, kad

$$\lim_{r\to 0} v(r) = \lim_{r\to 0} r^{\frac{1-k}{2}}(C_1 + C_2 \ln r) = \lim_{r\to 0} C_1\, r^{\frac{1-k}{2}} + \lim_{r\to 0} C_2\, r^{\frac{1-k}{2}} \ln r = 0.$$

Taigi visos konstantos C_1, C_2, C_3, C_4 – bet kokios.

Antrosios kraštinės sąlygos tikrinimas

$$\lim_{r\to\infty} u(\infty) = v(\infty)w(\infty) = 0$$

analogiškas, iš esmės sutampa su 1(a) varianto antrosios kraštinės sąlygos tikrinimu, t.y. šiuo atveju konstantos $C_3 = 0$, $C_4 = 0$ ir atskyrimo konstanta λ lygi nuliui. Taigi šiuo atveju kraštinio uždavinio sprendinys aprašomas tokia formule:

$$u(r) = r^{\frac{1-k}{2}}(C_1 + C_2 \ln r)\left(w_1 \int_0^x \frac{aAww_2\,(c+x)^{-2}}{ln\left(1+\frac{x}{c}\right)\omega(w_1,w_2)}dx - w_2 \int_0^x \frac{aAww_1\,(c+x)^{-2}}{ln\left(1+\frac{x}{c}\right)\omega(w_1,w_2)}dx\right),$$

čia C_1, C_2 – bet kokios laisvos konstantos.

Šiuo atveju kraštinio uždavinio Gryno funkcija konstruojama taip

$$u(r) = r^{\frac{1-k}{2}}(C_1 + C_2 \ln r)\left(w_1(r)w(s)\int_0^x R(s)ds - w_2(r)w(s)\int_0^x R_1(s)ds\right) = r^{\frac{1-k}{2}}(C_1 + C_2 \ln r)\left(\int_0^x w_1(r)w(s)R(s)ds + \int_x^\infty w_2(r)w(s)R_1(s)ds\right) = \int_0^\infty w(s)G(r,s)ds,$$

čia

$$R(s) = \frac{aAw_2\,(c+x)^{-2}}{ln\left(1+\frac{x}{c}\right)\omega(w_1,w_2)},$$

$$R_1(s) = \frac{aAw_1\,(c+x)^{-2}}{ln\left(1+\frac{x}{c}\right)\omega(w_1,w_2)}$$

ir

$$G(r,s) = \begin{cases} r^{\frac{1-k}{2}}(C_1 + C_2 \ln r)w_1(r)R(s), & kai\ 0 \le s \le x, \\ r^{\frac{1-k}{2}}(C_1 + C_2 \ln r)w_2(r)R_1(s), & kai\ x \le s \le \infty. \end{cases}$$

yra Gryno funkcija.

Gautąjį rezultatą suformuluosime kaip teoremas.

2 teorema. (1), (3) *kraštinis uždavinys, kai atskyrimo konstanta λ lygi nului, turi be galo daug sprendinių*

$$u(r) = r^{\frac{1-k}{2}}(C_1 + C_2 \ln r)\left(w_1 \int_0^x \frac{aAww_2\,(c+x)^{-2}}{ln\left(1+\frac{x}{c}\right)\omega(w_1,w_2)}dx - w_2 \int_0^x \frac{aAww_1\,(c+x)^{-2}}{ln\left(1+\frac{x}{c}\right)\omega(w_1,w_2)}dx\right),$$

čia C_1, C_2 *– bet kokios laisvos konstantos*.

3 teorema. *Kraštinio uždavinio* (1), (3) *Gryno funkcija yra*

$$G(r,s) = \begin{cases} C_1 r^{\alpha} w_1(r) R(s), & kai\ \ 0 \le s \le x, \\ C_1 r^{\alpha} w_2(r) R_1(s), & kai\ x \le s \le \infty, \end{cases}$$

arba

$$G(r,s) = \begin{cases} r^{\frac{1-k}{2}}(C_1 + C_2 \ln r) w_1(r) R(s), & kai\ \ 0 \le s \le x, \\ r^{\frac{1-k}{2}}(C_1 + C_2 \ln r) w_2(r) R_1(s), & kai\ x \le s \le \infty. \end{cases}$$

Abiem atvejais į kraštinio uždavinio išraišką įeinančios laisvosios konstantos randamos sprendinius normalizuojant pagal normalizavimo sąlygas.

LITERATŪRA

1. AMBRAZEVIČIUS, A.; MEILIŪNAS, M. *Matematinis modeliavimas*. Vilnius, 2004. 223 p.
2. GOLOKVOSČIUS, P. *Diferencialinės lygtys*. Vilnius, 2000. 511 p. ISBN 9986 – 546 – 81 – 8.
3. GOLOKVOSČIUS, P. *Pirmosios ir antrosios eilės tiesinės diferencialinės lygtys*. Vilnius, 1987. 156 p.
4. KAMKE, E. *Spravochnik po obyknovennym differentsial'nym uravneniyam*. Maskva, 1965. 703 p.
5. *Kramerio taisyklė.* [Žiūrėta 2013 11 26]. Prieiga per internetą: <http://lt.wikipedia.org/wiki/Faktorizavimas>.

SANTRAUKA

Magistro baigiamajame darbe išnagrinėta antros eilės paprastoji diferencialinė lygtis naudojant faktorizacijos bei konstantų variavimo metodus. Antros eilės diferencialinė lygtis suvesta į integralinę lygtį. Išnagrinėti du kraštiniai uždaviniai šiai lygčiai ir abiem atvejais sukonstruotos kraštinio uždavinio Gryno funkcijos.

SUMMARY

In this work, we study the second – order ordinary differential equation, using the factorization and variation of constant methods. The second – order differential equation boils down to the integral equation. Two boundary value problems have been analyzed and the boundary value problems Green´s functions have been constructed in both cases.