ŠIAULIŲ UNIVERSITETAS

INFORMATIKOS, MATEMATIKOS, E. STUDIJŲ INSTITUTAS
MATEMATIKOS KATEDRA

Viktorija Ripinskaitė

Tam tikrų dzeta funkcijų jungtinis reikšmių pasiskirstymas

Magistro darbas

Darbo vadovė:
prof. dr. R. Kačinskaitė

ŠIAULIAI, 2014

TURINYS

Žymėjimai

p	– pirminis skaičius
k, l, m, n, j	– natūralieji skaičiai
$\mathbb{N}$	– natūraliųjų skaičių aibė
$\mathbb{N}_0$	– natūraliųjų skaičių aibė ir $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{Z}$	– sveikųjų skaičių aibė
$\mathbb{R}$	– realiųjų skaičių aibė
$\mathbb{C}$	– kompleksinių skaičių aibė
i	– menamasis vienetas, $i = \sqrt{-1}$
$s = \sigma + it$	– kompleksinis kintamasis
$\mathrm{Re}s = \sigma$	– kompleksinio kintamojo s realioji dalis
$\mathrm{Im}s = t$	– kompleksinio kintamojo s menamoji dalis
$\mathrm{meas}\{A\}$	– aibės A Lebego matas
$\xrightarrow{\mathcal{D}}$	– konvergavimas pagal skirstinį
$\mathcal{B}(S)$	– erdvės S Borelio aibių klasė
$\mathbb{E}X$	– atsitiktinio elemento X vidurkis
γ	– vienetinis apskritimas kompleksinėje plokštumoje, t. y. $\{s \in \mathbb{C} : \lvert s \rvert = 1\}$
$A \triangle A_t$	– aibių A ir A_t simetrinis skirtumas
m_H	– Haaro matas,
$H(D)$	– analizinių srityje $D := \{s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1\}$ funkcijų erdvė.

Įvadas

Skaičių teorijoje ypatingą vietą užima dzeta funkcijos. Tai kompleksinio kintamojo $s = \sigma + it$ funkcijos, kurios tam tikroje pusplokštumėje yra apibrėžiamos Dirichlė eilute

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m e^{-\lambda_m s};$$

čia $\{a_m\}$ – kompleksinių skaičių seka, $\{\lambda_m\}$ – griežtai didėjanti teigiamų skaičių seka, $\lim\limits_{m\to\infty} \lambda_m = +\infty$. Kai $\lambda_m = \log m$, gauname paprastąją Dirichlė eilutę.

Viena iš žinomiausių dzeta funkcijų yra Rymano dzeta funkcija

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s},$$

kuri apibrėžiama pusplokštumėje $\sigma > 1$. Ji taip pat yra išreiškiama Oilerio sandauga pagal pirminius skaičius

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}, \quad \sigma > 1.$$

Funkcija $\zeta(s)$ yra analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą, o taškas $s = 1$ yra jos paprastasis polius su reziduumu 1.

Tačiau yra dzeta funkcijų, kurios neturi išraiškos Oilerio sandauga. Pavyzdžiui, Hurvico dzeta funkcija $\zeta(s, \alpha)$. Sakykime, kad α yra fiksuotas parametras, $0 < \alpha \leq 1$. Tada funkcija $\zeta(s, \alpha)$ pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra apibrėžiama Dirichlė eilute

$$\zeta(s, \alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m + \alpha)^s}$$

ir analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą, išskyrus paprastąjį polių su reziduumu 1 taške $s = 1$. Kai parametras $\alpha = 1$, Hurvico dzeta funkcija tampa Rymano dzeta funkcija $\zeta(s)$, o kai $\alpha = \frac{1}{2}$,

$$\zeta\left(s, \frac{1}{2}\right) = 2^s L(s, \chi);$$

čia $L(s, \chi)$ yra Dirichlė L funkcija, χ – charakteris mod 2. Bendru atveju funkcija $\zeta(s, \alpha)$ neturi išraiškos Oilerio sandauga pagal pirminius skaičius.

Savo statistinėmis savybėmis įdomios yra taip vadinamos periodinės dzeta funkcijos, t. y. funkcijos, kurių koeficientai sudaro periodines sekas.

Tegul $\mathfrak{A} = \{a_m : m \in \mathbb{N}\}$ yra multiplikatyvi periodinė kompleksinių skaičių a_m seka su minimaliu periodu $k \in \mathbb{N}$. Pusplokštumėje $\sigma > 1$ periodinė dzeta funkcija $\zeta(s, \mathfrak{A})$ yra apibrėžiama eilute

$$\zeta(s; \mathfrak{A}) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m^s}.$$

Iš sekos $\mathfrak{A}$ periodiškumo bei Hurvico dzeta funkcijos $\zeta(s; \alpha)$ savybių turime

$$\zeta(s; \mathfrak{A}) = \frac{1}{k^s} \sum_{m=1}^{k} a_m \zeta\left(s, \frac{m}{k}\right), \quad \sigma > 1.$$

Šios lygybės pagalba funkcija $\zeta(s; \mathfrak{A})$ yra analiziškai pratęsiama į kompleksinę plokštumą, išskyrus, gal būt, paprastąjį polių taške $s = 1$ su reziduumu

$$a := \frac{1}{k} \sum_{m=1}^{k} a_m.$$

Jei $a = 0$, periodinė dzeta funkcija $\zeta(s, \mathfrak{A})$ yra sveikoji funkcija. Priminsime, kad šią funkciją pirmasis apibrėžė V. Šni [6].

Sakykime, kad $\mathfrak{B} = \{b_m : m \in \mathbb{N}_0\}$ yra periodinė kompleksinių skaičių b_m seka, kurios minimalus periodas yra $l \in \mathbb{N}$. Periodinė Hurvico dzeta funkcija $\zeta(s, \alpha; \mathfrak{B})$, $0 < \alpha \leq 1$, pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra apibrėžiama Dirichlė eilute

$$\zeta(s, \alpha; \mathfrak{B}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m}{(m + \alpha)^s}.$$

Jeigu $b_m \equiv 1$, tai gauname klasikinę Hurvico dzeta funkciją. Kadangi seka $\mathfrak{B}$ yra periodinė, tai pusplokštumėje $\sigma > 1$ turime

$$\begin{aligned} \zeta(s, \alpha; \mathfrak{B}) &= \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_r}{(mk + r + \alpha)^s} = \frac{1}{k^s} \sum_{r=0}^{k-1} b_r \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m + (\frac{r+\alpha}{k}))^s} = \\ &= \frac{1}{k^s} \sum_{r=0}^{k-1} b_r \zeta\left(s; \frac{r + \alpha}{k}\right). \end{aligned} \tag{1}$$

Gerai žinoma, kad Hurvico dzeta funkcija $\zeta(s, \alpha)$ yra analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą, išskyrus tašką $s = 1$, kuris yra paprastasis polius su reziduumu 1. Todėl iš (1) lygybės išplaukia, kad periodinė Hurvico dzeta funkcija $\zeta(s, \alpha; \mathfrak{B})$ yra analizinė visoje s-plokštumoje, išskyrus, gal būt, paprastąjį polių $s = 1$ su reziduumu

$$b := \frac{1}{k} \sum_{r=0}^{k-1} b_r.$$

Jeigu $b = 0$, tai funkcija $\zeta(s, \alpha; \mathfrak{B})$ taip pat yra sveikoji funkcija. Pastebime, kad periodinę dzeta funkciją apibrėžė A. Laurinčikas ir A. Javtokas [2].

Dzeta funkcijų reikšmių pasiskirstymą galima nagrinėti taikant ribines teoremas aprašomas silpnojo tikimybinių matų konvergavimo prasme.

Tegul P_n ir P yra tikimybiniai matai erdvėje $(S, \mathcal{B}(S))$. Sakome, kad matas P_n, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja į matą P, jeigu

$$\int_S f dP_n \to \int_S f dP$$

kiekvienai realiai, aprėžtai tolydžiai funkcijai f iš S.

Dzeta funkcijų reikšmių pasiskirstymo tyrimą nagrinėjo daugelis matematikų, iš jų galima būtų paminėti B. Bagčį (Bagchi), K. Matsumoto, J. Štoidingą (Steuding), A. Laurinčiką, R. Kačinskaitę, R. Macaitienę, D. Šiaučiūną, V. Garbaliauskienę ir kt.

Jungtinio dzeta funkcijų reikšmių pasiskirstymo pirmąjį rezultatą gavo S. Voroninas (Voronin) Dirichlė L funkcijoms [7].

Pažymėkime meas$\{A\}$ mačios aibės $A \subset \mathbb{R}$ Lebego matą. Sakykime, kad $T > 0$. Apibrėžkime

$$\nu_T(\ldots) = \frac{1}{T} \text{meas}\,\{t \in [0, T] : \ldots\},$$

o vietoje daugtaškio įrašysime sąlygas, kurias tenkina t. $\mathcal{B}(S)$ pažymėkime erdvės S Borelio aibių klasę, o $D = \{s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1\}$.

A teorema. *Sakykime, kad $\sigma > 1$, o $\chi_1, \ldots, \chi_n$ yra poromis neekvivalentūs Dirichlė charakteriai. Pažymėkime $L(s, \chi_1), \ldots, L(s, \chi_n)$ atitinkamas Dirichlė L funkcijas. Tada, kai $T \to \infty$, tikimybinis matas*

$$\frac{1}{T} \text{meas}\{\tau \in [0, T] : (L(s + i\tau, \chi_1), \ldots, L(s + i\tau, \chi_n)) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(H(D)),$$

silpnai konverguoja į atsitiktinio elemento, apibrėžto Dirichlė L funkcijų rinkiniui, pasiskirstymą.

Mūsų darbo tikslas – įrodyti jungtinę ribinę teoremą silpno tikimybinių matų konvergavimo prasme periodinei dzeta funkcijai ir periodinei Hurvico dzeta funkcijai kompleksinėje plokštumoje. Ją suformuluosime pirmajame skyriuje.

Darbas yra sudarytas iš trijų skyrių. Pirmajame pateikiama teoremos formuluotė, antrajame – pagalbiniai teiginiai, reikalingi pagrindinės teoremos įrodymui.

Trečiajame skyriuje yra įrodomas pagrindinis darbo rezultatas. Taip pat pateikiamos išvados bei magistro darbo santrauka lietuvių bei anglų kalbomis.

1. Teoremos formuluotė

Šiame skyriuje suformuluosime pagrindinę mūsų darbo teoremą.

Sakykime, kad $\mathbb{C}^2$ yra aibių $\mathbb{C}$ ir $\mathbb{C}$ Dekarto sandauga, t. y. $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Pažymėkime γ vienetinį apskritimą kompleksinėje plokštumoje, t. y. $\gamma = \{s \in \mathbb{C} : |s| = 1\}$. Apibrėžkime torus Ω_1 ir Ω_2 tokiu būdu:

$$\Omega_1 = \prod_p \gamma_p \quad \text{ir} \quad \Omega_2 = \prod_{m=0}^{\infty} \gamma_m;$$

čia pirmoji sandauga yra skaičiuojama pagal visus pirminius skaičius ir $\gamma_p = \gamma$, o antroji sandauga – pagal visus teigiamus sveikuosius ir $\gamma_m = \gamma$, kai $m \in \mathbb{N}_0$. Torai Ω_1 ir Ω_2 su sandaugos topologija ir pataškine daugyba yra kompaktiškos topologinės Abelio grupės. Todėl erdvėje $(\Omega_j, \mathcal{B}(\Omega_j))$ galima apibrėžti tikimybinį Haaro matą m_{jH}, $j = 1, 2$. Tokiu būdu gauname tikimybinę erdvę $(\Omega_j, \mathcal{B}(\Omega_j), m_{jH})$, $j = 1, 2$. Tegul $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$. Tada Ω taip pat yra kompaktinė topologinė grupė ir gauname naują tikimybinę erdvę $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$, kurios matas m_H yra Haaro matas apibrėžtas $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ ir gaunamas sudauginus matus m_{1H} ir m_{2H}. Pažymėkime $\omega_1(p)$ elemento $\omega_1 \in \Omega_1$ projekciją į koordinatinę erdvę γ_p, o $\omega_2(m)$ elemento $\omega_2 \in \Omega_2$ projekciją į koordinatinę erdvę γ_m. Kai $m \in \mathbb{N}$,

$$\omega_1(m) = \prod_{p^r || m} \omega_1^r(p);$$

čia $p^r||m$ reiškia, kad $p^r|m$, bet $p^{r+1} \nmid m$. Apibrėžkime kompleksines reikšmes įgyjančius atsitiktinius elementus atitinkamose erdvėse $(\Omega_1, \mathcal{B}(\Omega_1), m_{1H})$ ir $(\Omega_2, \mathcal{B}(\Omega_2), m_{2H})$ periodinei dzeta ir periodinei Hurvico dzeta funkcijoms formulėmis

$$\zeta(\sigma, \omega_1; \mathfrak{A}) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m \omega_1(m)}{m^\sigma}$$

ir

$$\zeta(\sigma, \alpha, \omega_2; \mathfrak{B}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m \omega_2(m)}{(m+\alpha)^\sigma}.$$

Tai galima padaryti naudojant Randemačerio teoremą apie atsitiktinių elementų porų ortogonalumą, nes sekos $\mathfrak{A}$ ir $\mathfrak{B}$ yra aprėžtos. ω pažymėkime porą (ω_1, ω_2), t. y. $\omega = (\omega_1, \omega_2)$, o

$$\underline{\zeta}(\sigma) = (\zeta(\sigma; \mathfrak{A}), \zeta(\sigma, \alpha; \mathfrak{B})$$

ir

$$\underline{\zeta}(\sigma,\omega) = (\zeta(\sigma,\omega_1;\mathfrak{A}), \zeta(\sigma,\alpha,\omega_2;\mathfrak{B})).$$

Tuomet $\underline{\zeta}(\sigma,\omega)$ yra $\mathbb{C}^2$-reikšmis atsitiktinis elementas tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$, kurio pasiskirstymas yra

$$P_{\underline{\zeta}}(A) \stackrel{def}{=} m_H(\omega \in \Omega : \underline{\zeta}(\sigma,\omega) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^2)).$$

Erdvėje $(\mathbb{C}^2, \mathcal{B}(\mathbb{C}^2))$ apibrėžkime tikimybinį matą

$$P_T(A) = \nu_T(t \in [0,T] : \underline{\zeta}(\sigma) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^2).$$

1 teorema. *Sakykime, kad α yra transcendentusis skaičius ir $\sigma > \frac{1}{2}$. Tada tikimybinis matas P_T, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į tikimybinį matą $P_{\underline{\zeta}}$.*

2. Pagalbiniai rezultatai

Šiame skyriuje pirmiausiai pateiksime žinomus apibrėžimus ir teiginius, kurių reikės pagrindinės darbo teoremos įrodymo etapuose. Po to įrodysime pagalbines teorems, reikalingas nuosekliam įrodyme.

2.1. Žinomi apibrėžimai ir rezultatai

Sakykime, kad Q yra tikimybinis matas apibrėžiamas erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$.

Apibrėžimas. Mato Q Furje transformacija $g(\underline{k})$ yra apibrėžiama formule

$$g(\underline{k}) = \int\limits_{\Omega} \prod_{p} x_p^{k_p} dQ;$$

čia $\underline{k} = (k_2, k_3, \ldots)$ ir tik baigtinis sveikųjų k_p skaičius yra nenuliai, $x_p \in \gamma$, p yra pirminis.

1 lema. *Tegul $\{Q_n\}$ yra tikimybinių matų erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ seka, o $\{g_n(k)\}$ – atitinkamų Furje transformacijų seka. Tarkime, kad kiekvienam vektoriui $\underline{k}$ egzistuoja riba*

$$g(\underline{k}) = \lim_{n\to\infty} g(\underline{k}).$$

Tada erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ egzistuoja tikimybinis matas Q toks, kad Q_n silpnai konverguoja į matą Q. Be to $g(\underline{k})$ yra mato Q Furje transformacija.

Šios lemos įrodymą galime rasti [4] (1.3.21 teorema).

Tarkime, kad $u : S \to S_1$ yra mati funkcija. Tada kiekvienas tikimybinis matas P iš erdvės $(S, \mathcal{B}(S))$ erdvėje $(S_1, \mathcal{B}(S_1))$ indukuoja vienintelį tikimybinį matą Pu^{-1} apibrėžiamą lygybe

$$Pu^{-1}(A) = P(u^{-1}A), \quad A \in \mathcal{B}(S_1).$$

2 lema. *Tarkime kad $u : S \to S_1$ yra tolydi funkcija. Tada iš matų P_n silpno konvergavimo į P seka, kad $P_n u^{-1}$ silpnai konverguoja Pu^{-1}, kai $n \to \infty$.*

Tai 5.1 teorema iš [1].

Apibrėžimas. Atsitiktinių elementų seka $\{X_n\}$ konverguoja pagal skirstinį į atsitiktinį elementą X, kai $n \to \infty$, jei elementų X_n skirstiniai silpnai konverguoja į elemento X skirstinį (žymime $X_n \xrightarrow{D} X$).

Tegul S yra separabili metrinė erdvė, kurioje apibrėžta metrika ρ, o $Y_n, X_{1,n}, X_{2,n}, \dots$ yra S–reikšmiai atsitiktiniai elementai apibrėžti erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

3 lema. *Tarkime, kad* $X_{kn} \xrightarrow{D} X_k$, *kai* $n \to \infty$, *kiekvienam* k *ir* $X_k \xrightarrow{D} X$, *kai* $k \to \infty$. *Jeigu kiekvienam* $\varepsilon > 0$

$$\lim_{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\{\rho(X_{kn}, Y_n) \geqslant \varepsilon\} = 0,$$

tada $Y_n \xrightarrow{D} X$, $n \to \infty$.

Tai 4.2 teorema iš [1].

Periodinės Hurvico dzeta funkcijos $\zeta(s, \alpha; \mathfrak{B})$ ir periodinės dzeta funkcijos $\zeta(s; \mathfrak{A})$ vidurkiams pusplokštumėje $\sigma > \frac{1}{2}$ yra teisingi įverčiai.

4 lema. *Sakykime, kad* $\sigma > \frac{1}{2}$. *Tada*

$$\frac{1}{T}\int_0^T |\zeta(\sigma + it, \alpha; \mathfrak{B})|^2 dt = O(1).$$

5 lema. *Sakykime, kad* $\sigma > \frac{1}{2}$. *Beveik visiems* $\omega_2 \in \Omega_2$ *teisingas įvertis*

$$\int_0^T |\zeta(\sigma + it, \alpha, \omega_2; \mathfrak{B})|^2 dt = O(T).$$

6 lema. *Sakykime, kad* $\sigma > \frac{1}{2}$. *Beveik visiems* $\omega_1 \in \Omega_1$ *teisingas įvertis*

$$\int_0^T |\zeta(\sigma + it, \omega_1; \mathfrak{A})|^2 dt = O(T).$$

Šių teiginių įrodymus galima rasti [2].

Tarkime $a_h = \{p^{-it}, p - \text{pirminis}\}$. Tore Ω apibrėžkime transformaciją $f_h(\omega) = a_h\omega$, $\omega \in \Omega$. Tada f_h yra mati matą išsauganti transformacija erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$.

Aibė $A \in \mathcal{B}(\Omega)$ yra vadinama invariantiška transformacijos f_h atžvilgiu, jei aibės A ir $A_h = f_h(A)$ skiriasi viena nuo kitos nulinio m_H-mato aibe, t. y. $m_H(A \triangle A_h) = 0$.

7 lema. *Tegul* T *yra mati matą išsauganti ergodinė transformacija erdvėje* $(\tilde{\Omega}, F, m)$. *Tada kiekvienai funkcijai* $f \in L^1(\Omega, F, m)$ *beveik kiekvienam* $\omega \in \tilde{\Omega}$ *teisinga lygybė*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k\omega) = \mathbb{E}(f).$$

Tai Birkhofo teorema; jos įrodymą galima rasti [8].

8 lema. *Tegul* α *yra transcendentusis skaičius. Tuomet vieno parametro grupė* $\{\Phi_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}$ *yra ergodinė.*

Lemos įrodymą galima rasti [3].

Sakome, kad tikimybinių matų $\{P\}$ šeima erdvėje $(S, \mathcal{B}(S))$ yra reliatyviai kompaktiška, jei kiekvienoje elementų iš $\{P\}$ sekoje yra silpnai konverguojantis posekis. Šeima $\{P\}$ vadinama suspausta, jei kiekvienam pakankamai mažam $\varepsilon > 0$ egzistuoja kompaktiška aibė K tokia, kad $P(K) > 1 - \varepsilon$ su visais matais P iš $\{P\}$.

9 lema. *Jei tikimybinių matų šeima* $\{P\}$ *yra suspausta, tai ji yra reliatyviai kompaktiška.*

10 lema. *Tarkime, kad* S *yra separabili pilna metrinė erdvė. Jeigu erdvės* $(S, \mathcal{B}(S))$ *tikimybinių matų šeima* $\{P\}$ *yra reliatyviai kompaktiška, tai ji yra suspausta.*

9 ir 10 lemos yra Prochorovo (Prokhorov) teoremos, jų įrodymus galima rasti [1].

2.2. Ribinė teorema tore

Apibrėžkime matą

$$Q_T(A) = \nu_T(((p^{-it} : p \in \mathbb{P}), ((m+\alpha)^{-it} : m \in \mathbb{N}_0)) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(\Omega).$$

2 teorema. *Tegul α yra transcendentusis skaičius. Tuomet tikimybinis matas Q_T, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į Haaro matą m_H.*

Įrodymas. Šios teormos įrodymas sutampa su 9 lemos įrodymu iš [3], todėl priminsime tik pagrindinius žingsnius. Sudarome dualiąją grupę Ω, kuri yra izomorfiška

$$G \stackrel{def}{=} \left(\bigoplus_{p\in\mathbb{P}} \mathbb{Z}_p \right) \bigoplus \left(\bigoplus_{m\in\mathbb{N}_0} \mathbb{Z}_m \right),$$

čia $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}$ visiems $p \in \mathbb{P}$ ir $\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}$ visiems $m \in \mathbb{N}_0$. Elementas $(\underline{k}, \underline{l}) = (k_p : p \in \mathbb{P}, l_m : m \in \mathbb{N}_0)$ iš G yra atvaizduojamas į Ω tokiu būdu

$$(\underline{x}, \underline{y}) \to (\underline{x}^{\underline{k}}, \underline{y}^{\underline{l}}) = \prod_{p\in\mathbb{P}} x_p^{k_p} \prod_{m\in\mathbb{N}_0} y_m^{l_m};$$

čia $\underline{x} = (x_p : p \in \mathbb{P}) \in \Omega_1$, $\underline{y} = (y_m : m \in \mathbb{N}_0) \in \Omega_2$, be to tik baigtinis k_p ir l_m kiekis yra nenuliai. Todėl mato Q_T Furje transformacija $g_T(\underline{k}, \underline{l})$ yra

$$\begin{aligned} g_T(\underline{k}, \underline{l}) &= \frac{1}{T} \int_0^T \left(\prod_{p\in\mathbb{P}} p^{-itk_p} \prod_{m\in\mathbb{N}_0} (m+\alpha)^{-itl_m} \right) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \exp\left\{ -it \left(\sum_{p\in\mathbb{P}} k_p \log p + \sum_{m\in\mathbb{N}_0} l_m \log(m+\alpha) \right) \right\} dt \qquad (2) \end{aligned}$$

(čia tik baigtinis skaičius sveikųjų k_p ir l_m nėra nuliai).

Kadangi α yra transcedentusis skaičius, sistema $\{\log p : p \in \mathbb{P}\} \cup \{\log(m+\alpha) : m \in \mathbb{N}_0\}$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$. Iš čia kartu su (2) išraiška turime

$$g_T(\underline{k}, \underline{l}) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 \quad \text{jei} \quad (\underline{k}, \underline{l}) = (\underline{0}, \underline{0}), & \\ -\frac{\exp\{-iT(\sum_{p\in\mathbb{P}} k_p \log p + \sum_{m\in\mathbb{N}_0} l_m \log(m+\alpha))\} - 1}{-iT(\sum_{p\in\mathbb{P}} k_p \log p + \sum_{m\in\mathbb{N}_0} l_m \log(m+\alpha))}, & \text{jei} \quad (\underline{k}, \underline{l}) \neq (\underline{0}, \underline{0}); \end{array} \right\}$$

ir

$$\lim_{T\to\infty} g_T(\underline{k}, \underline{l}) = \begin{cases} 1, & \text{jei} \quad (\underline{k}, \underline{l}) = (\underline{0}, \underline{0}), \\ 0, & \text{jei} \quad (\underline{k}, \underline{l}) \neq (\underline{0}, \underline{0}). \end{cases}$$

Pritaikę 1 lemą gauname teoremos tvirtinimą.

2.3. Ribinė teorema Dirichlė polinomams

Fiksuokime $\sigma_1 > \frac{1}{2}$ ir $n, m \in \mathbb{N}$ pažymėkime

$$\upsilon_1(m,n) = \exp\left\{-\left(\frac{m}{n}\right)^{\sigma_1}\right\},$$

o $m \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$

$$\upsilon_2(m,n) = \exp\left\{-\left(\frac{m+\alpha}{n+\alpha}\right)^{\sigma_1}\right\}.$$

Apibrėžiame eilutes

$$\zeta_n(\sigma;\mathfrak{A}) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m\upsilon_1(m,n)}{m^\sigma}$$

ir

$$\zeta_n(\sigma,\alpha;\mathfrak{B}) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{b_m\upsilon_2(m,n)}{(m+\alpha)^\sigma}.$$

Žinoma, kad eilutės $\zeta_n(\sigma;\mathfrak{A})$ ir $\zeta_n(\sigma,\alpha;\mathfrak{B})$ absoliučiai konverguoja, kai $\sigma_1 > \frac{1}{2}$ (žr. atitinkamai [5] ir [2]). Pažymime

$$P_{T,n}(A) = \nu_T(\underline{\zeta_n}(\sigma+it) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^2),$$

čia

$$\underline{\zeta_n}(\sigma) = (\zeta_n(\sigma;\mathfrak{A}), \zeta_n(\sigma,\alpha;\mathfrak{B})).$$

Be to, kai $\hat{\omega} = (\hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2) \in \Omega$, tegul

$$\zeta_n(\sigma,\hat{\omega}_1;\mathfrak{A}) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m\hat{\omega}_1(m)\upsilon_1(m,n)}{m^\sigma}$$

ir

$$\zeta_n(\sigma,\alpha,\hat{\omega}_2;\mathfrak{B}) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{b_m\hat{\omega}_2(m)\upsilon_2(m,n)}{(m+\alpha)^\sigma}.$$

Kadangi $|\hat{\omega}_1(m)| = 1$ ir $|\hat{\omega}_2(m)| = 1$, tuomet eilutės $\zeta_n(\sigma,\hat{\omega}_1;\mathfrak{A})$ ir $\zeta_n(\sigma,\alpha,\hat{\omega}_2;\mathfrak{B})$ taip pat absoliučiai konverguoja, kai $\sigma_1 > \frac{1}{2}$. Tegul

$$\underline{\zeta_n}(\sigma,\hat{\omega}) = (\zeta_n(\sigma;\hat{\omega}_1;\mathfrak{A}), \zeta_n(\sigma,\alpha,\hat{\omega}_2;\mathfrak{B})),$$

ir

$$\hat{P}_{T,n}(A) = \nu_T(\underline{\zeta_n}(\sigma+it,\hat{\omega}) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^2).$$

3 teorema. *Erdvėje* $(\mathbb{C}^2, \mathcal{B}(\mathbb{C}^2)))$ *egzistuoja tikimybinis matas* P_n *toks, kad matai* $P_{T,n}$ *ir* $\hat{P}_{T,n}$ *, kai* $T \to \infty$, silpnai konverguoja į P_n.

Įrodymas. Funkciją $u_n : \Omega \to \mathbb{C}^2$ apibrėžiame formule

$$u_n(\omega_1, \omega_2) = \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m \omega_1(m) \upsilon_1(m,n)}{m^\sigma}, \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m \omega_2(m) \upsilon_2(m,n)}{(m+\alpha)^\sigma} \right).$$

Funkcija u_n yra tolydi ir

$$\begin{aligned} & u_n((p^{-it} : p \in \mathbb{P}), ((m+\alpha)^{-it} : m \in \mathbb{N}_0)) \\ & = (\zeta_n(\sigma+it; \mathfrak{A}), \zeta_n(\sigma+it, \alpha; \mathfrak{B})) = \underline{\zeta_n}(\sigma+it). \end{aligned}$$

Vadinasi,

$$P_{T,n}(A) = Q_T u_n^{-1}(A) = Q_T(u_n^{-1}A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^2).$$

Čia, iš 2 teoremos ir 2 lemos seka, kad matas $P_{T,n}$ silpnai konverguoja į $m_H u_n^{-1}$, kai $T \to \infty$.

Funkciją $\upsilon : \Omega \to \Omega$ apibrėžiame formule

$$\upsilon(\omega) = \omega\hat{\omega}.$$

Tuomet

$$\begin{aligned} & u_n(\upsilon((p^{-it} : p \in \mathbb{P}), ((m+\alpha)^{-it} : m \in \mathbb{N}_0))) \\ & = (\zeta_n(\sigma+it, \hat{\omega}_1; \mathfrak{A}), \zeta_n(\sigma+it, \alpha, \hat{\omega}_2; \mathfrak{B})) = \underline{\zeta_n}(\sigma, \hat{\omega}). \end{aligned}$$

Taigi, panašiai kaip mato $P_{T,n}$ atveju gauname, kad matas $\hat{P}_{T,n}$ silpnai konverguoja į $m_H(u_n\upsilon)^{-1}$, kai $T \to \infty$. Iš Haro mato m_H invariantiškumo seka, kad $m_H(u_n\upsilon)^{-1} = (m_H\upsilon^{-1})u_n^{-1} = m_H u_n^{-1}$. Teorema yra įrodyta.

2.4. Aproksimavimas vidurkiu

Sakykime, kad $\underline{z}_1 = (z_{11}, z_{12})$, $\underline{z}_2 = (z_{21}, z_{22}) \in \mathbb{C}$. Apibrėžkime metriką ρ erdvėje $\mathbb{C}^2$ tokiu būdu

$$\rho(\underline{z}_1, \underline{z}_2) = \left(\sum_{j=1}^{2} |z_{1j} - z_{2j}|^2 \right)^{1/2}$$

ir visiems $\underline{z} \in \mathbb{C}$, $|z| = \rho(\underline{z}, \underline{0})$. Ši metrika apibrėžia topologiją erdvėje $\mathbb{C}^2$. Be to

$$\rho(\underline{z}_1, \underline{z}_2) \leq \sum_{j=1}^{2} |z_{1j} - z_{2j}|. \tag{3}$$

Dabar aproksimuosime vektorius $\underline{\zeta}(\sigma)$ ir $\underline{\zeta}(\sigma, \omega)$ atitinkamai vektoriais $\underline{\zeta}_n(\sigma)$ ir $\underline{\zeta}_n(\sigma, \omega)$.

Tuomet $\rho(f, g)$ yra metrika erdvėje $\mathbb{C}^2$

4 teorema. Turime

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \rho(\underline{\zeta}(\sigma + it), \underline{\zeta}_n(\sigma + it))dt = 0$$

ir visiems $\omega \in \Omega$

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \rho(\underline{\zeta}(\sigma + it, \omega), \underline{\zeta}_n(\sigma + it, \omega))dt = 0.$$

Įrodymas. Sakykime, kad $\min\limits_{1\leq j\leq 2} \sigma_j \geq \frac{1}{2}$. Pritaikius 4 lemą galima įrodyti, kad periodinę Hurvico dzeta funkciją $\zeta(\sigma, \alpha; \mathfrak{B})$ galima aproksimuoti $\zeta_n(\sigma, \alpha; \mathfrak{B})$, t. y. teisinga lygybė

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T |\zeta(\sigma + it, \alpha; \mathfrak{B}) - \zeta_n(\sigma + it, \alpha; \mathfrak{B})|dt = 0.$$

Analogiška lygybė yra teisinga ir periodinei dzeta funkcijai $\zeta(\sigma; \mathfrak{A})$

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T |\zeta(\sigma + it; \mathfrak{A}) - \zeta_n(\sigma + it; \mathfrak{A})|dt = 0.$$

Pritaikius (3) nelygybę turime

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \rho(\underline{\zeta}(\sigma + it), \underline{\zeta}_n(\sigma + it))dt$$

$$\leqslant \lim_{n\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left(\sum_{j=1}^{2} \left(\int_0^T |\underline{\zeta}(\sigma+it) - \underline{\zeta}_n(\sigma+it)|dt \right) \right) = 0$$

Tokiu būdu gauname pirmąją teoremos lygybę.

Norėdami gauti analogišką sąryšį $\zeta(\sigma+it,\omega_1;\mathfrak{A})$ ir $\zeta(\sigma+it,\omega_2;\mathfrak{B})$ pritaikome Birkhofo–Chinčino (Birkhoff–Khinchine) teoremą (7 lema) bei 5 ir 6 lemas, t. y. beveik visiems $\omega_1 \in \Omega_1$

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T |\zeta(\sigma+it,\omega_1;\mathfrak{A}) - \zeta_n(\sigma+it,\omega_1;\mathfrak{A})|dt = 0,$$

o beveik visiems $\omega_2 \in \Omega_2$

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T |\zeta(\sigma+it,\alpha,\omega_2;\mathfrak{B}) - \zeta_n(\sigma+it,\alpha,\omega_2;\mathfrak{B})|dt = 0.$$

Iš pastarųjų dviejų lygybių seka antrosios teoremos dalies tvirtinimas, t. y.

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \rho(\underline{\zeta}(\sigma+it,\omega), \underline{\zeta_n}(\sigma+it,\omega))dt = 0.$$

Teorema įrodyta.

2.5. Absoliučiai konverguojančios Dirichlė eilutės

Apibrėžkime kitą tikimybinį matą

$$\hat{P}_T(A) = \nu_T(\underline{\zeta}(\sigma + it, \omega) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^2).$$

5 teorema. *Erdvėje* $(\mathbb{C}^2, \mathcal{B}(\mathbb{C}^2))$ *egzistuoja tikimybinis matas* P *toks, kad, kai* $T \to \infty$*, matai* P_T *ir* $\hat{P}_T$ *abu silpnai konverguoja į* P.

Įrodymas. Tegul η yra atsitiktinis elementas aprėžtas tam tikroje tikimybinėje erdvėje $(\hat{\Omega}, \mathcal{B}(\hat{\Omega}), m)$ ir tolygiai pasiskirstęs intervale $[0,1]$. Apibrėžiame $\mathbb{C}^2$–reikšmį elementą tikimybinėje erdvėje $(\hat{\Omega}, \mathcal{B}(\hat{\Omega}), m)$

$$\underline{X}_{T,n} = \underline{X}_{T,n}(\sigma) = (\underline{X}_{T,n,1}(\sigma), \underline{X}_{T,n,2}(\sigma)) = \underline{\zeta}_n(\sigma + iT\eta).$$

Tuomet pagal 3 teoremą

$$\underline{X}_{T,n} \xrightarrow[T\to\infty]{D} \underline{X}_n, \tag{4}$$

čia $\underline{X}_n = \underline{X}_n(\sigma) = (X_{n,1}(\sigma), X_{n,2}(\sigma))$ yra $\mathbb{C}^2$– reikšmis atsitiktinis elementas, kurio pasiskirstymas yra P_n (ribinis matas 3 teoremoje).

Eilutės $\zeta_n(s;\mathfrak{A})$ ir $\zeta_n(s,\alpha;\mathfrak{B})$ konverguoja absoliučiai pusplokštumėje $\sigma > \frac{1}{2}$. Todėl

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T |\zeta_n(\sigma + it;\mathfrak{A})|^2 dt = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|a_m|^2 v_1^2(m,n)}{m^{2\sigma}} \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|a_m|^2}{m^{2\sigma}}$$

ir

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T |\zeta_n(\sigma + it,\alpha;\mathfrak{B})|^2 dt = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|b_m|^2 v_2^2(m,n)}{(m+\alpha)^{2\sigma}} \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|b_m|^2}{(m+\alpha)^{2\sigma}}$$

visiems $n \in \mathbb{N}$. Iš čia, kai $\sigma_{1,l} > \frac{1}{2}$ ir $\sigma_{2,l} > \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned} &\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sup_{\sigma\in K_l} |\zeta_n(\sigma + it;\mathfrak{A})| dt \\ &\leqslant c_{1l} \limsup_{T\to\infty} \left(\frac{1}{2T} \int_0^{2T} |\zeta_n(\sigma_{1l} + it;\mathfrak{A})|^2 dt \right)^{1/2} \leqslant c_{1l} R_{1l} < \infty \end{aligned} \tag{5}$$

ir

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sup_{\sigma\in K_l} |\zeta_n(\sigma + it,\alpha;\mathfrak{B})| dt$$

$$\leqslant c_{2l} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left(\frac{1}{2T} \int\limits_0^{2T} |\zeta_n(\sigma_{2l}+it,\alpha;\mathfrak{A})|^2 dt \right)^{1/2} \leqslant c_{2l} R_{2l} < \infty, \tag{6}$$

čia $R_{1l} = \left(\sum\limits_{m=1}^{\infty} \frac{|a_m|^2}{m^{2\sigma_{1l}}} \right)^{1/2}$ ir $R_{2l} = \left(\sum\limits_{m=1}^{\infty} \frac{|b_m|^2}{(m+\alpha)^{2\sigma_{2l}}} \right)^{1/2}$, o c_{1l} ir c_{2l} yra tam tikros teigiamos konstantos.

Sakykime, kad ε yra laisvai pasirenkamas teigiamas skaičius, o $M_{jl} = c_{jl} R_{jl} 2^{l+1}/\varepsilon$, $j = 1, 2$, $l \in \mathbb{N}$. Tada pritaikius (5) ir (6) nelygybes gauname

$$\begin{aligned} &\limsup_{T\to\infty} m \left(\sup_{\sigma\in K_l} |X_{T,n,j}(\sigma)| > M_{j,l} \quad \text{bent vienam} \quad j=1,2 \right) \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{2} \limsup_{T\to\infty} m \left(\sup_{\sigma\in K_l} |X_{T,n,j}(\sigma)| > M_{j,l} \right) \\ &\leqslant \frac{1}{M_{1l}} \sup_{n\in\mathbb{N}} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T \sup_{\sigma\in K_l} |\zeta_n(\sigma+it;\mathfrak{A})| dt \\ &+ \frac{1}{M_{2l}} \sup_{n\in\mathbb{N}} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T \sup_{\sigma\in K_l} |\zeta_n(\sigma+it,\alpha;\mathfrak{B})| dt \\ &\leqslant \frac{c_{1l}R_{1l}}{M_{1l}} + \frac{c_{2l}R_{2l}}{M_{2l}} = \frac{\varepsilon}{2^l}. \end{aligned}$$

Iš čia ir (4) seka

$$m \left(\sup_{s\in K_l} |X_{n,j}(\sigma)| > M_{j,l} \quad \text{bent vienam} \quad j=1,2 \right) \leqq \frac{\varepsilon}{2^l}. \tag{7}$$

Nagrinėkime aibę

$$H_\varepsilon^2 = \{(f_1, f_2) \in \mathbb{C}^2) : \sup_{\sigma\in K_l} |f_j(\sigma)| \leq M_{jl}, \quad j=1,2, \quad l \in \mathbb{N}\}.$$

Ji yra kompaktas erdvėje $\mathbb{C}^2$, o iš (7) sąryšio

$$m(\underline{X}_n \in H_\varepsilon^2) \geqslant 1 - \varepsilon.$$

Iš elemento $\underline{X}_n$ apibrėžimo seka, kad

$$P_n(H_\varepsilon^2) \geqslant 1 - \varepsilon$$

visiems $n \in \mathbb{N}$. Tai parodo, kad tikimybinių matų šeima $\{P_n : n \in \mathbb{N}\}$ yra suspausta. Pritaikius Prochorovo teoremą (9 lema), ji yra reliatyviai kompaktiška. Todėl egzistuoja posekis $\{P_{n_k}\} \subset \{P_n\}$, toks kad matai P_{n_k} silpnai konverguoja į tam tikrą tikimybinį matą P apibrėžtą erdvėje $(\mathbb{C}^2, \mathcal{B}(\mathbb{C}^2))$, kai $n_k \to \infty$. Todėl

$$\underline{X}_{n_k} \xrightarrow[n_k\to\infty]{D} P. \tag{8}$$

Dabar apibrėžkime

$$\underline{X}_T = \underline{X}_T(\sigma) = (\underline{X}_{T,1}(\sigma), \underline{X}_{T,2}(\sigma)) = \underline{\zeta}(\sigma + iT\eta).$$

Tada $\underline{X}_T$ yra $\mathbb{C}^2$–reikšmis atsitiktinis elementas erdvėje $(\hat{\Omega}, \mathcal{B}(\hat{\Omega}), m)$. Pritaikius 4 teoremą

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\limsup_{T\to\infty}\nu_T(\rho(\underline{\zeta}(\sigma+it),(\underline{\zeta}_n(\sigma+it))\geqslant\varepsilon)\\
&\leqslant \lim_{n\to\infty}\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{\varepsilon T}\int\limits_0^T\rho(\underline{\zeta}(\sigma+it),(\underline{\zeta}_n(\sigma+it))dt=0,
\end{aligned}$$

kiekvienam $\varepsilon > 0$. Tai parodo, kad

$$\lim_{n\to\infty}\limsup_{T\to\infty} m(\rho(\underline{X}_T(\sigma), \underline{X}_{T,n}(\sigma)) \geq \varepsilon) = 0. \tag{9}$$

Dabar (4), (8) ir (9) sąryšiai kartu su 4.2 teorema iš [1] gauname

$$\underline{X}_T \xrightarrow[T\to\infty]{D} P. \tag{10}$$

Tai parodo, kad matas P_T silpnai konverguoja į P, kai $T \to \infty$. Be to (10) parodo, kad matas P nepriklauso nuo sekos n_k pasirinkimo. Todėl kartu su šeimos $\{P_n\}$ reliatyviu kompaktiškumu gauname, kad

$$\underline{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{D} P. \tag{11}$$

Iš pastarojo sąryšio, 3 teoremos bei 4 teoremos antrosios dalies, analogišką situaciją gauname ir matui $\hat{P}_T$ beveik visiems ω, t. y., kad jis silpnai konverguoja į P, kai $T \to \infty$.

4. Teoremos įrodymas

Sakykime, kad A yra mato P tolydumo aibė iš 5 teoremos. Tada

$$\lim_{n\to\infty} \nu_T(\underline{\zeta}(\sigma + it, \omega) \in A) = P(A) \tag{12}$$

beveik visiems $\omega \in \Omega$. Erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$ apibrėžkime atsitiktinį elementą θ tokiu būdu

$$\theta(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{jei} \quad \underline{\zeta}(\sigma, \omega) \in A, \\ 0, & \text{jei} \quad \underline{\zeta}(\sigma, \omega) \notin A. \end{cases}$$

Jo vidurkis $\mathbb{E}(\theta)$ yra

$$\mathbb{E}(\theta) = \int\limits_{\Omega} \theta dm_H = m_H(\omega \in \Omega : \underline{\zeta}(\sigma, \omega) \in A) = P_{\underline{\zeta}}(A). \tag{13}$$

8 lema parodo, kad atsitiktinis procesas $\theta(\Phi_t(\omega))$ yra ergodiškas. Pritaikius 7 lemą (Birkhofo–Chinčino teoremą) randame, kad beveik visiems $\omega \in \Omega$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T \theta(\Phi_t(\omega))dt = \mathbb{E}(\theta). \tag{14}$$

Be to iš θ ir Φ_t apibrėžimų seka

$$\frac{1}{T} \int\limits_0^T \theta(\Phi_t(\omega))dt = \nu_T(\underline{\zeta}(\sigma + it, \omega) \in A).$$

Iš čia kartu su (13) ir (14) lygybėmis turime, kad

$$\lim_{T\to\infty} \nu_T(\underline{\zeta}(\sigma + it, \omega) \in A) = P_{\underline{\zeta}}(A)$$

beveik visiems $\omega \in \Omega$. Vadinasi, atsižvelgus į (12), $P(A) = P_{\underline{\zeta}}(A)$ visoms mato P tolydumo aibėms A. Kadangi tolydumo aibės sudaro apibrėžiančią klasę, tai $P(A) = P_{\zeta}(A)$ visoms $A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^2)$. Teorema įrodyta.

Išvados

Magistro darbe nagrinėjamos periodinės dzeta funkcijos $\zeta(s;\mathfrak{A})$ ir periodinės Hurvico dzeta funkcijos $\zeta(s,\alpha;\mathfrak{B})$, $s = \sigma + it$ jungtinis reikšmių pasiskirstymas. Jei α yra transcendentusis skaičius ir $\sigma > \frac{1}{2}$, tai funkcijoms $\zeta(s;\mathfrak{A})$ ir $\zeta(s,\alpha;\mathfrak{B})$ yra teisinga jungtinė ribinė teorema tikimybinių matų silpno konvergavimo prasme kompleksinėje plokštumoje $\mathbb{C}^2$.

Santrauka

Sakykime, kad $s = \sigma + it$ yra kompleksinis kintamasis, α - fiksuotas parametras, $0 < \sigma \leqslant 1$, o $\mathfrak{A} = \{a_m : m \in \mathbb{N}\}$ yra periodinė kompleksinių skaičių seka su minimaliu periodu $k \in \mathbb{N}$, o $\mathfrak{B} = \{b_m : m \in \mathbb{N}_0\}$ kita periodinė kompleksinių skaičių seka su minimaliu periodu $l \in \mathbb{N}$. Pusplokštumėje $\sigma > 1$ periodinė dzeta funkcija $\zeta(s; \mathfrak{A})$ yra apibrėžiama eilute

$$\zeta(s; \mathfrak{A}) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m^s},$$

ir analiziškai pratęsiama į kompleksinę plokštumą išskyrus, gal būt, tašką $s = 1$. Periodinė Hurvico dzeta funkcija toje pat pusplokštumėje yra apibrėžiama Dirichlė eilute

$$\zeta(s, \alpha; \mathfrak{B}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m}{(m+\alpha)^s},$$

bei yra analizinė visoje s-plokštumoje, išskyrus, gal būt, tašką $s = 1$.

Magistro darbe yra nagrinėjamas jungtinis periodinės ir periodinės Hurvico dzeta su transcendenčiuoju parametru α funkcijų reikšmių pasiskirstymas. Yra įrodyta jungtinė ribinė teorema šių funkcijų porai tikimybinių matų silpno konvergavimo prasme erdvėje $\mathbb{C}^2$.

Summary

Joint value distribution of certain zeta-functions

Let $s = \sigma + it$ be a complex variable, and α is fixed parameter, $0 < \sigma \leqslant 1$. Ler $\mathfrak{A} = \{a_m : m \in \mathbb{N}\}$ be a periodic with least period $k \in \mathbb{N}$ sequence of complex numbers, and let $\mathfrak{B} = \{b_m : m \in \mathbb{N}_0\}$ be another periodic with least period $l \in \mathbb{N}$ sequence of complex numbers. The periodic zeta-function $\zeta(s; \mathfrak{A})$, for $\sigma > 1$, is defined by the series

$$\zeta(s; \mathfrak{A}) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m^s},$$

and by analytic continuation elsewhere except, maybe, point $s = 1$. The periodic Hurwitz zeta-function $\zeta(s, \alpha; \mathfrak{B})$, for $\sigma > 1$, is given by

$$\zeta(s, \alpha; \mathfrak{B}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m}{(m+\alpha)^s},$$

and analytically continued to whole complex plane except possible simple pole at $s = 1$.

In Master thesis, the joint value-distribution of functions $\zeta(s; \mathfrak{A})$ and $\zeta(s, \alpha; \mathfrak{B})$ (with transcendental parameter α) is obtained. It is proved the joint limit theorem in the sense of weak convergence of probability measures for the paire of mentioned functions in the space $\mathbb{C}^2$.

Literatūra

1. P. Billingsley, *Convergence of Probability Measures*, Wiley, New York, **80c** (1978).

2. A. Javtokas, A. Laurinčikas, *On the periodic Hurwitz zeta-function*, Hardy–Ramanujan J., **29**, 18–36 (2006).

3. R. Kačinskaitė, A. Laurinčikas, *Joint distribution of periodic zeta-functions*, Studia Scient. Math. Hungar., **48**(2), 257–279 (2011).

4. A. Laurinčikas, *A Limit Theorems for the Riemann Zeta-Function*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London (2002).

5. A. Laurinčikas, D. Šiaučiūnas, *Remarks on the universality of the periodic zeta-function*, Math. Notes, **80**(3-4), 711–722 (2006).

6. W. Schnee, *Dir Funktionalgliechung det Zeta function und der Dirichletshen Reben mit periodishen Koeffizienten*, Math. Z., **31**, 378–390 (1930).

7. S. M. Voronin, *On the functional independence of L-functions*, Acta Arith., **20**, 493–503 (1975), rusų kalba.

8. A. A. Tempelman, *Ergodic Theorems on Groups*, Vilnius, Mokslas 1986.