ŠIAULIŲ UNIVERSITETAS
INFORMATIKOS, MATEMATIKOS IR E. STUDIJŲ INSTITUTAS
MATEMATIKOS KATEDRA

Jolita Mazelskienė

Ribinė teorema Selbergo klasės poklasio L funkcijoms

Magistro darbas

Darbo vadovė
Prof. dr. R.Macaitienė

Šiauliai, 2014

Turinys

Įvadas **2**

1. Selbergo klasės ir nagrinėjamo poklasio apibrėžimai **6**

2. Naudojami apibrėžimai, sąvokos ir rezultatai **10**

3. Ribinės teoremos klasės $\tilde{S}'$ funkcijoms įrodymas **15**

3.1. Ribinė teorema sveikąjai funkcijai 15

3.1.1. Ribinė teorema absoliučiai konverguojančiai eilutei 16

3.1.2. Aproksimavimas vidurkiu 19

3.2. Pagrindinės teoremos įrodymas 23

Išvados **24**

Literatūra **25**

Summary **27**

ĮVADAS

Kompleksinio kintamojo funkcijos, tam tikroje pusplokštumėje apibrėžiamos Dirichlė (Dirichlet) eilutėmis
$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m e^{-\lambda_m s}, \quad s \in \mathbb{C},$$
vadinamos dzeta arba L funkcijomis. Čia $\{a_m : m \in \mathbb{N}\}$ – kompleksinių skaičių seka, $\{\lambda_m : m \in \mathbb{N}\}$ – nemažėjanti realiųjų skaičių seka, tokia, kad $\lim_{m\to\infty} \lambda_m = +\infty$. Tokio tipo eilutė vadinama bendrąja Dirichlė eilute su koeficientais a_m ir rodikliais λ_m. Jeigu $\lambda_m = \log m$, turime paprastąją Dirichlė eilutę $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m^s}$. Klasikinės dzeta ir L funkcijos yra vieni iš svarbiausių objektų, tiriant daugelį analizinės skaičių teorijos problemų. Pavyzdžiui, jau daugiau nei pusantro šimtmečio nagrinėjama garsioji Rymano hipotezė apie Rymano dzeta funkcijos
$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s}, \quad \sigma > 1,$$
nulių išsidėstymą priskirta prie svarbiausių XXI a. matematikos problemų.

Magistro darbe nagrinėsime paprastųjų Dirichlė eilučių, turinčių Oilerio sandaugą, analizinį pratesimą, Rymano tipo funkcinę lygtį ir tenkinančią Ramanudžano hipotezę koeficientams a_m, klasės, pavadintos *Selbergo* (Alte Selberg) vardu, tam tikro poklasio funkcijų reikšmių pasiskirstymą (plačiau apie Selbergo klasę ir nagrinėjamą poklasį pateikiame 1 skyriuje). Pastarąjį dešimtmetį daug dėmesio skirta ne vien Selbergo klasės, bet ir įvairių jos poklasių sandaros bei funkcijų reikšmių pasiskirstymo tyrimams. Šioje srityje dirba daug matematikų, kaip Bombieris (E. Bombieri) [2] – [3], Konris (J. B. Conrey) [4], Gošas (A. Ghosh) [4], Džoneris (D. Joyner) [7], Heihalas (D. A. Hejhal) [2], Perelis (A. Perelli) [15] – [16], Štaudingas (J. Steuding) [18] – [19], R. Macaitienė [12]. Magistro darbe nagrinėsime Selbergo klasės poklasio (žym. $\tilde{\mathcal{S}}$), apibrėžto J. Štaudingo, plėtinį (žym. $\tilde{\mathcal{S}}'$) ir įrodysime ribinę teoremą silpno tikimybinių matų konvergavimo prasme šio poklasio funkcijomis (išsami poklasių analizė bei funkcijų pavyzdžiai pateikiami 1 skyriuje). Kodėl pasirinkta platesnė funkcijų klasė? Kadangi J. Štaudingas nagrinėjo L funkcijų universalumą, apibrėždamas klasę $\tilde{\mathcal{S}}$ jis įvedė du reikalavimus – polinominės Oilerio (Euler) sandaugos bei vidurkio kvadrato aprėžtumo – būtinus šios savybės egzistavimo įrodymui. Tačiau tikimybinių ribinių teoremų įrodymuose naudojamas tik vienas iš poklasį apibrėžiančių reikalavimų – polinominės Oilerio sandaugos egzistavimas. Tokiu atveju prasminga nagrinėti platesnio poklasio reikšmių pasiskirstymą.

Ribines teoremas tikimybinių matų silpno konvergavimo prasme poklasio $\tilde{\mathcal{S}}$ funkcijoms analizinių funkcijų erdvėje pateikė J. Štaudingas [19], poklasio $\tilde{\mathcal{S}}'$ funkcijoms kompleksinėje plokštumoje – R. Macaitienė [12]. Suformuosime minėtus J. Štaudingo ir R. Macaitienės rezultatus.

Tegul G yra kompleksinės plokštumos sritis, $H(G)$ – analizinių srityje G funkcijų erdvė su tolygaus konvergavimo ant kompaktų topologija. Pažymėkime $\mathcal{B}(U)$ erdvės U Borelio aibių klasę, γ – vienetinį apskritimą kompleksinėje plokštumoje ir

$$\Omega = \prod_{p}^{\infty} \gamma_p,$$

begaliniamatį erdvinį torą, kur $\gamma_p = \gamma, \{s \in \mathbb{C} : |s| = 1\}$ visiems pirminiams p. Pagal Tichonovo teoremą, su sandaugos topologija ir pataškine daugyba begaliniamatis toras Ω yra kompaktinė topologinė Abelio grupė. Todėl erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ gali būti apibrėžtas tikimybinis Haro matas m_H. Gauname tikimybinę erdvę $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$.

Pažymėkime d_L funkcijos $L \in \mathcal{S}$ laipsnį. Žinoma, jog šis laipsnis apibrėžiamas suma

$$d_L = 2\sum_{j=1}^{r} \lambda_j$$

ir, kad $d_L \geq 1$, kai $1 \neq L \in \mathcal{S}$.

Tegul

$$D_0 = \left\{ s \in \mathbb{C} : \max\left(\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{d_L}\right) < \sigma < 1 \right\},$$

o $\omega(p)$ yra elemento $\omega \in \Omega$ projekcija į koordinatinę erdvę γ_p. Pažymėkime

$$L_0(s, \omega) = \prod_p \prod_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{c_j(p)\omega(p)}{p^s}\right)^{-1}, \quad s \in D_0, \tag{1}$$

$H(D_0)$-reikšmį atsitiktinį elementą, apibrėžtą tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$, o P_{L_0} – atsitiktinio elemento $L_0(s, \omega)$ skirstinį

$$P_{L_0}(A) = m_H(\omega \in \Omega : L_0(s, \omega) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(H(D_0)).$$

Taip pat naudosime standartinį pažymėjimą

$$\nu_T(...) = \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0; T] : ...\}, \quad T > 0,$$

kur $meas\{A\}$ žymi mačios aibės $A \subset \mathbb{R}$ Lebego matą, o vietoje daugtaškių rašoma sąlyga, kurią tenkina τ.

A teorema (J. Steuding, 2003). *Tegul $L \in \tilde{\mathcal{S}}$. Tuomet tikimybinis matas*

$$P_T(A) = \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0; T] : L(s + i\tau) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(H(D_0)),$$

kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į matą P_{L_0}.

Vėliau gautas rezultatas kompleksinėje plokštumoje.

B teorema (R. Macaitienė, 2011). *Tarkime, kad $L(s) \in \tilde{\mathcal{S}}'$. Tuomet tikimybinis matas*

$$P_T(A) = \frac{1}{T} meas\{t \in [0;T] : L(\sigma + it) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}),$$

kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į atsitiktinio elemento $L(\sigma, \omega)$ skirstinį

$$P_L(A) = m_H(\omega \in \Omega : L(\sigma, \omega) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}).$$

Kaip jau minėjome, magistro darbe nagrinėsime J. Štaudingo apibrėžto Selbergo klasės poklasio $\tilde{\mathcal{S}}$ plėtinį (atsisakoma vidurkio kvadrato apibrėžtumo reikalavimo). Be to, visos Selbergo klasės funkcijos yra meromorfinės, turinčios r eilės polių taške $s = 1$, todėl šios klasės funkcijų asimptotinės savybės geriausiai nusakomos ribinėmis teoremomis meromorfinių funkcijų erdvėje.

Darbo tikslas – įrodyti ribinę teoremą silpno tikimybinių matų konvergavimo prasme meromorfinių funkcijų erdvėje Selbergo klasės funkcijoms, turinčioms polinominę Oilerio sandaugą.

Tegul $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ yra Rymano sfera su metrika d, apibrėžta formulėmis

$$d(s_1, s_2) = \frac{2|s_1 - s_2|}{\sqrt{1+|s_1|^2}\sqrt{1+|s_2|^2}}, \quad d(s, \infty) = \frac{2}{\sqrt{1+|s_1|^2}}, \quad d(\infty, \infty) = 0,$$

kur $s, s_1, s_2 \in \mathbb{C}$. Sričiai G iš $\mathbb{C}$ apibrėžiame meromorfinių srityje G funkcijų $g : G \to (\mathbb{C}_\infty, d)$ erdvę $M(G)$ su tolygaus konvergavimo ant kompaktų topologija. Šioje topologijoje, $\{g_n\} \subset M(G)$ konverguoja į funkciją $g \subset M(G)$, jei kiekvienam kompaktiškam poaibiui K iš G teisinga lygybė

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{s \in K} d(g_n(s), g(s)) = 0.$$

Akivaizdu, jog erdvė $H(G)$ yra erdvės $M(G)$ poerdvis.

Nagrinėsime kompleksinės plokštumos sritį

$$D = \left\{ s \in \mathbb{C} : \sigma > \max\left(\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{d_L}\right) \right\}.$$

Tegul $L(s, \omega)$ yra $H(D)$-reikšmis atsitiktinis elementas, apibrėžtas tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$ (1) formule, tačiau šiuo atveju $s \in D$. Pažymėkime P_L elemento $L(s, \omega)$ skirstinį.

Teorema. *Tarkime, kad $L \in \tilde{\mathcal{S}}'$. Tuomet tikimybinis matas*

$$P_{T,L}(A) = \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0;T] : L(s + i\tau) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(M(D)),$$

kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į matą P_L.

Darbą sudaro 3 skyriai, išvados, literatūros sąrašas, santrauka anglų kalba.

Pirmąjame darbo skyriuje pateikiame išsamų Selbergo klasės ir nagrinėjamo poklasio aprašą.

Kad darbas būtų lengvai skaitomas, antrąjame skyriuje pateikiami pagrindiniai vartojami apibrėžimai ir sąvokos, suformuluojamos teoremos.

Trečiąjame darbo skyriuje įrodoma pagalbinė ribinė teorema tikimybinių matų silpno konvergavimo prasme analizinėje funkcijų erdvėje, jungtinė ribinė teorema meromorfinių funkcijų erdvėje, pateikiami reikalingi ergodiškumo aspektai bei įrodoma pagrindinė teorema.

Apibrėžimai, teiginiai, teoremos ar lemos, žymimi skaičiais, atskirtais taškais, nurodant skyriaus, poskyrių bei teiginio poskyryje numerius (jei skyriuje nėra poskyrių, numeruojama tik dviem skaitmenimis, nurodant skyriaus bei teiginio numerius). Formulės žymimos skliaustuose dviem skaičiais: pirmasis iš jų nurodo skyriaus, antrasis – formulių jame numerius. Teoremų įrodymų pabaiga žymima simboliu ▲.

1. SELBERGO KLASĖS IR NAGRINĖJAMO POKLASIO APIBRĖŽIMAI

Šiame skyriuje išsamiau susipažinsime su funkcijomis, apibrėžiamomis paprastosiomis Dirichlė eilutėmis

$$L(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m^s}, \quad s \in \mathbb{C},$$

ir tenkinančiomis reikalavimus:

- *kiekvienam* $\epsilon > 0$, $a(m) \ll m^{\epsilon}$ (Ramanudžano hipotezė);
- *egzistuoja sveikasis skaičius* $r \geq 0$, *toks kad* $(s-1)^r L(s)$ *yra sveikoji baigtinė funkcija* (funkcijos turi analizinį pratęsimą);
- *teigiamiems sveikiesiems skaičiams* Q *ir* λ_j *bei kompleksiniams skaičiams* μ_j, $\Re\mu_j \geq 0$, *ir* $\omega, |\omega| = 1, j = 1, ..., l$, *funkcija*

$$\Lambda_L(s) = L(s) Q^s \prod_{j=1}^{l} \Gamma(\lambda_j s + \mu_j) = L(s) \cdot \gamma(s),$$

tenkina funkcinę lygtį

$$\Lambda_L(s) = \omega \overline{\Lambda_L(1-\overline{s})}.$$

- *turi Oilerio (L. Euler) sandaugą, t.y., egzistuoja skaičiai* $b(p^{\alpha})$, *tenkinantys įvertį* $b(p^{\alpha}) \ll p^{\alpha\theta}$, *su tam tikrais* $\theta < \frac{1}{2}$ *tokiais, kad*

$$L(s) = \prod_p \exp\left\{ \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{b(p^{\alpha})}{p^{\alpha s}} \right\}.$$

Kaip jau minėjome įvade, tokia funkcijų klasė vadinama Selbergo vardu (žymėsime $\mathcal{S}$). Taip pat susipažinsime su tam tikrais šios funkcijų poklasiais. Pirmiausia išsamiau aptarsime reikalavimus Selbergo klasės funkcijoms bei pateiksime juos tenkinančių funkcijų pavyzdžių.

Ramanudžano hipotezė teigia, jog kiekvienam $\epsilon > 0$, $a(m) \ll m^{\epsilon}$. Jei tenkinama ši hipotezė, Dirichlė eilutė konverguoja absoliučiai pusplokštumėje $\sigma > 1$ ir tolygiai kiekviename kompaktiškame poaibyje. Tuomet, pagal Vejerštraso teoremą, funkcija $L(s)$ yra analizinė pusplokštumėje $\sigma > 1$, o tai suteikia prasmę kalbėti apie analizinį pratęsimą.

Analizinio pratęsimo sąlyga, jog egzistuoja sveikasis skaičius $r \geq 0$, toks kad $(s-1)^r L(s)$ yra sveikoji baigtinės eilės funkcija, nurodanti, kad egzistuoja mažiausiai vienas polius ir, kad jis yra taške $s = 1$, yra labai natūrali. Niekas nepasikeistų, jei mes turėtumėme daugiau polių, (ant tiesės $\sigma = 1$). Taigi pakanka nagrinėti funkcijas, su mažiausiai vienu poliumi taške $s = 1$.

Reikalavime, jog teigiamiems sveikiesiems skaičiams Q ir λ_j bei kompleksiniams skaičiams $\mu_j, \Re\mu_j \geq 0$, ir $\omega, |\omega| = 1, j = 1, ..., l$, funkcija $\Lambda_L(s) = L(s)Q^s \prod_{j=1}^{l} \Gamma(\lambda_j s + \mu_j) = L(s) \cdot \gamma(s)$ turi tenkinti funkcinę lygtį $\Lambda_L(s) = \omega\overline{\Lambda_L(1-\overline{s})}$, apribojimas $\Re\mu_j \geq 0$ kilęs iš Maso (Maass) teorijos. Tarkime, jog egzistuoja aritmetinis pogrupis $SL_2(\mathbb{R}) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) : a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1 \right\}$ iš $SL_2(\mathbb{R})$ kartu su Maso paraboline forma bei tenkinama Ramanudžano hipotezė. Tuomet Maso parabolinių formų L funkcija $L(s, F)$ turi funkcinę lygtį su μ_j, kurie tenkina sąlygą $Re\mu_j < 0$, bet ši L funkcija pažeidžia Rymano hipotezės analogą, jog $L(s) \neq 0$, kai $\sigma > \frac{1}{2}$.

Priminsime, jog funkcijos $L(s)$ trivialūs nuliai pasiskirstę γ - faktoriaus $\gamma(s)$ poliuose:

$$\rho = -\frac{\mu_j + k}{\lambda_j}, \quad k = 0, 1, 2, ..., \; j = 1, 2, ..., l,$$

t.y., guli pusplokštumėje $\delta < 0$. Kai $\rho = 0$, reikia nagrinėti atskirai, atsižvelgiant į galimus polius taške $s = 1$. Beje, γ - faktorius gali turėti ne vieną išraišką, nes galima naudoto Ležanro (Legendre) dublikavimo formules Γ-funkcijai.

Pavyzdžiui, Rymano dzeta funkcija, Dirichlė L funkcijos tenkina šį reikalavimą, o jų funkcinės lygtys užrašomos lygybėmis:

$$\begin{aligned} \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) &= \pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s); \\ \left(\frac{\pi}{d}\right)^{-\frac{1-s+\delta}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s+\delta}{2}\right)L(1-s,\overline{\chi}) &= \frac{i^\delta\sqrt{d}}{\tau(\chi)}\left(\frac{\pi}{d}\right)^{-\frac{s+\delta}{2}}\Gamma\left(\frac{s+\delta}{2}\right)L(s,X). \end{aligned}$$

čia $\chi(m)$–primityvus Dirichlė L funkcijos charakteris moduliu d.

Oilerio sandaugos egzistavimo sąlyga, t.y., jog egzistuoja skaičiai $b(p^\alpha)$, tenkinantys įvertį $b(p^\alpha) \ll p^{\alpha\theta}$, su tam tikrais $\theta < \frac{1}{2}$ tokiais, kad $L(s) = \prod_p \exp\left\{ \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{b(p^\alpha)}{p^{\alpha s}} \right\}$, yra būtina (bet nepakankama) sąlyga Rymano hipotezei. Iš pirmo žvilgsnio sąlyga $\theta < \frac{1}{2}$ atrodo kiek nenatūrali, tačiau, jei $\theta = \frac{1}{2}$ būtų galimas, funkcija

$$(1 - 2^{1-s})\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$$

priklausytų klasei $\mathcal{S}$, bet tai akivaizdžiai pažeidžia Rymano hipotezę. Be to, iš funkcijos išraiškos Oilerio sandauga akivaizdu, kad joks Selbergo klasės elementas nėra lygus nuliui absoliutaus konvergavimo pusplokštumėje $\sigma > 1$. Apskritai, nulių pasiskirstymo Selbergo klasėje klausimai yra esminiai. Pavyzdžiui, vis dar nežinoma, ar $L(1 + it) \neq 0$, visiems $t \in \mathbb{R}$.

Jei kuris nors iš aptartų apribojimų būtų išmestas, gauta platesnė klasė apimtų Dirichlė eilutes, kurios prieštarauja Rymano hipotezei.

Pateiksime keletą *Selbergo klasės narių pavyzdžių:*

• Rymano dzeta funkcija

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s}, \quad \sigma > 1.$$

• Dirichlė L funkcijos

$$L(s,\chi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(m)}{m^s} = \prod_p \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1},$$

čia χ – charakteris iš multiplikatyvios grupės $\mathbb{Z}^*{}_q$ (t.y., iš tarpusavyje pirminių likinių klasės moduliu q).

Akivaizdu, jog $\zeta(s)$ yra specialus $L(s,\chi)$ atvejas, atitinkantis charakterį moduliu 1.

• Hekės (Hecke) L funkcijos

$$L_K(s,\chi) = \sum_I \frac{\chi(I)}{N(I)^s}, \quad \sigma > 1,$$

susietos su algebrinių skaičių lauku K. Čia I perbėga nenulinius idealus sveikųjų skaičių žiede iš $K; N(I)$ žymi I normą, o χ - baigtinės ar begalinės eilės Hekės charakterį. Kai $K = Q, L_K(s,\chi)$ susiveda į $L(s,\chi)$.

• Su atitinkamais apribojimais ir normavimu, klasei $\mathcal{S}$ priklauso holomorfinių modulinių formų F Hekės L funkcijos

$$L_F(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c(m)}{m^s} = \prod_p \left(1 - \frac{\alpha(p)}{p^s}\right)^{-1} \left(1 - \frac{(p)}{p^s}\right)^{-1},$$

čia $c(p) = \alpha(p) + \beta(p)$, $F(z)$ yra holomorfinė modulinė forma, o $c(m)$ – jos Furjė koeficientai.

• Artinio L funkcijos priklauso aibei $\mathcal{S}$, jei teisinga Artinio hipotezė.

Visi žinomi funkcijų iš Selbergo klasės pavyzdžiai yra automorfinės arba hipotetiškai automorfinės L funkcijos.

Kaip jau minėjome įvade, Selbergo klasė yra pakankamai plati ir sudėtinga, todėl dauguma matematikų, kaip Bombieris, Konris, Gošas, Heihalas, Perelis, Štaudingas nagrinėja tam tikrus klasės $\mathcal{S}$ poklasius.

Aptarsime vieną iš jų – J. Štaudingo apibrėžtą Selbergo klasės poklasį, kurį autorius žymi $\tilde{\mathcal{S}}$. Funkcijos $L \in \tilde{S} \subset \mathcal{S}$, jei jos tenkina papildomus reikalavimus:

• *Funkcijos turi polinominę Oilerio sandaugą, t.y., kiekvienam pirminiam p ir $j = 1, ..., k$ egzistuoja kompleksiniai skaičiai c_j, tenkinantys sąlygą $|c_j(p)| \le 1$, tokie, kad*

$$L(s) = \prod_p \prod_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{c_j(p)}{p^s}\right)^{-1}.$$

Šis reikalavimas nusako koeficientų a_m multiplikatyvumą, ir tai, jog kiekvienas Oilerio faktorius gali būti išreiškiamas Dirichlė eilute. Sąlyga $|c_j(p)| \leq 1$ pakeičia Ramanudžano hipotezę Selbergo klasėje.

- *Aprėžtas vidurkio kvadratas t.y., egzistuoja teigiama konstanta κ tokia, kad*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\pi(x)} \sum_{p\leq x} |a(p)|^2 = \kappa,$$

kur

$$\pi(x) = \sum_{p\leq x} 1.$$

Šis reikalavimas parodo, jog egzistuoja be galo daug pirminių skaičių, kuriems (ne visiems) $c_j(p)$ artėja į nulį. Be to, šis reikalavimas artimai susijęs su Selbergo prielaidomis. Jei papildomai tarsime, kad vidurkio kvadrato hipotezėje $\kappa \in \mathbb{N}$, sumuodami dalimis, gausime silpną Selbergo hipotezės versiją, t.y.:

$$\sum_{p\leq x} \frac{|a(p)|^2}{p} \sim K \log\log x.$$

Nesunku pastebėti, jog *poklasiui $\tilde{\mathcal{S}}$ priklauso šios funkcijos:*

- Rymano dzeta funkcija $\zeta(s)$.
- Dirichlė L funkcijos $L(s,\chi)$ su primityviu charakteriu χ.
- Hekės L funkcijos

$$L_k(s,\chi) = \sum_{I} \frac{\chi(I)}{N(I^s)} = \prod_{I} \left(1 - \frac{\chi(p)}{N(p)^s}\right)^{-1},$$

čia suma yra imama virš visų nenulinių idealų, o sandauga – virš visų pirminių idealų iš algebrinių skaičių lauko K.

- Normuotos L funkcijos, susijusios su naujausiomis formomis.
- Dedekindo dzeta funkcija $\zeta_K(s) = \sum\limits_{I} \frac{1}{N(I)^s}$.
- Rankino - Selbergo L funkcijos.

Darbe nagrinėsime poklasio $\tilde{\mathcal{S}}$ plėtinį (žymėsime $\tilde{\mathcal{S}}'$) – Selbergo klasės funkcijų, tenkinančių tik polinominės Oilerio sandaugos egzistavimo reikalavimą, elgesį, t.y., įrodysime ribinę teoremą silpno tikimybinių matų konvergavimo prasme meromorfinių funkcijų erdvėje.

Svarbu pabrėžti, kad šis poklasis nesutampa su jokia kita funkcijų klase, kuriai jau kada nors yra gautos ribinės teoremos meromorfinių funkcijų erdvėje. Klasės $\tilde{\mathcal{S}}$ funkcijoms ribinės teoremos pateiktos [11], [13] darbuose, o klasės $\tilde{\mathcal{S}}'$) – [12] (kompleksinėje plokštumoje).

2. NAUDOJAMI APIBRĖŽIMAI, SĄVOKOS IR REZULTATAI

Šiame skyriuje pateikiami matematinės analizės, skaičių teorijos, tikimybių teorijos bei silpno matų konvergavimo teorijos apibrėžimai, terminai ir teoremos, supažindinama su ergodinės teorijos elementais.

2.1 apibrėžimas. *Tarkime, kad $E \subset \mathbb{C}$ – atviroji aibė, o funkcija $f : E \to \mathbb{C}$. Funkciją f vadinsime diferencijuojama kompleksine prasme taške $z_0 \in E$, jei egzistuoja riba*

$$\lim_{z \to z_o} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \in \mathbb{C}, \quad z \in E.$$

Ši riba žymima $f'(z_0)$ arba $\frac{df(z_0)}{dz_0}$ ir vadinama funkcijos f išvestine taške z_0.

2.2 apibrėžimas. *Funkcija f, diferencijuojama $\mathbb{C}$ prasme visuose aibės $E \subset \mathbb{C}$ taškuose, vadinama analizine (reguliariąja, holomorfine) aibėje E.*

2.3 apibrėžimas. *Jei funkcija $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ yra analizinė kompleksinėje plokštumoje, išskyrus galbūt, jos polių taškus, tai ji vadinama meromorfine funkcija.*

2.4 apibrėžimas. *Analizinė visoje baigtinėje kompleksinėje plokštumoje funkcija vadinama sveikąja funkcija.*

2.5 apibrėžimas. *Neneigiama funkcija P, apibrėžta šeimoje $\mathcal{F}$ ir turinti savybes*

a) $P(\Omega) = 1$;

b) $P(\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_m) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} P(A_m)$ visoms $A_m \in \mathcal{F}$ tokioms, kad $A_k \cap A_l \neq 0$, jei $k \neq l$, *vadinama tikimybiniu matu.*

2.6 apibrėžimas. *Tarkime, kad Ω yra netuščia aibė. Aibės Ω poaibių sistema $\mathcal{F}$ vadinama Borelio kūnu (σ-kūnu), jei:*

a) $\Omega \in \mathcal{F}$;

b) $A^c \in \mathcal{F}$, čia $A \in \mathcal{F}$ (kur A^c aibės A papildinys);

c) $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_m \in \mathcal{F}$ visoms $A_m \in \mathcal{F}$, $m = 1, 2, \ldots$.

2.7 apibrėžimas. *Trejetas $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vadinamas tikimybine erdve.*

Tegul $\mathcal{T}$ topologinė erdvė, o $\mathcal{B}(\mathcal{T})$ – erdvės $\mathcal{T}$ Borelio aibių klasė, t.y. visų atvirų aibių sistemos generuotas σ-kūnas. Tada kiekvienas matas klasėje $\mathcal{B}(\mathcal{T})$ vadinamas *Borelio matu.*

Tikimybinių metodų panaudojimo idėja, tyrinėjant funkcijų, apibrėžtų Dirichlė eilutėmis, reikšmių pasiskirstymą, yra grindžiama silpno tikimybinių matų konvergavimo taikymu, kuris yra vienas pagrindinių asimptotinių metodų. Tarkime, kad P_n ir P – tikimybiniai matai erdvėje $(\mathrm{S}, \mathcal{B}(\mathrm{S}))$.

2.8 apibrėžimas. *Sakome, kad P_n silpnai konverguoja į P, kai $n \to \infty$, jei*

$$\int_{\mathrm{S}} f dP_n \to \int_{\mathrm{S}} f dP, \quad n \to \infty,$$

kiekvienai realiai, apibrėžtai, tolydžiai funkcijai f iš S. Žymėsime $P_n \Rightarrow P$.

2.9 apibrėžimas. *Aibė $A \in \mathcal{B}(S)$ yra mato P tolydumo aibė, jei $P(\partial S) = 0$* (t.y. sienos matas lygus nuliui).

Yra žinoma keletas tikimybinių matų silpnojo konvergavimo ekvivalentų.

2.10 teorema. *Tegu P_n ir P yra tikimybiniai matai erdvėje $(S, \mathcal{B}(S))$. Tada šie tvirtinimai yra ekvivalentūs:*

1. $P_n \Rightarrow P$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_S f dP_n = \int\limits_S f dP$ visoms realioms aprėžtoms ir tolygiai tolydžioms funkcijoms $f \in S$;
3. $\liminf\limits_{n\to\infty} P_n(F) \leq P(F)$ visoms uždaroms aibėms F;
4. $\limsup\limits_{n\to\infty} P_n(G) \geq P(G)$ visoms atviroms aibėms G;
5. $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(A) = P(A)$ visoms mato $\mathbb{P}$ tolydumo aibėmis A (t.y., kurioms $P(\partial A) = 0$).

Teoremos įrodymą galima rasti [1].

Darbe pasinaudosime vienu iš paprasčiausių silpno konvergavimo kriterijų ([1, 2.2 teorema]).

2.11 apibrėžimas. *$P_n \Rightarrow P$ tada ir tik tada, jei iš kiekvieno posekio $\{P'_n\}$ galima išskirti kitą posekį $\{P''_n\}$, taip kad $P''_n \Rightarrow P$.*

2.12 apibrėžimas. *Aibė $A \subset S$ vadinama kompaktiška, jei kiekvienas jos atviras denginys turi baigtinį denginį.*

2.13 apibrėžimas. *Apibrėžtų erdvėje $(S, \mathcal{B}(S))$ tikimybinių matų šeima $\{P\}$ yra reliatyviai kompaktiška, jei kiekvienas elementų iš $\{P\}$ posekis turi silpnai konverguojantį posekį.*

2.14 apibrėžimas. *Tikimybinių matų šeima P vadinama suspausta (tiršta), jei $\forall \varepsilon > 0$ egzistuoja kompaktiška aibė $K \subset S$ tokia, kad $P(K) > 1 - \varepsilon$, visiems P iš $\{P\}$.*

Tikimybinių matų silpno konvergavimo teorijoje svarbų vaidmenį atlieka Prochorovo teoremos, susiejančios reliatyvaus kompaktiškumo ir suspaustumo (tirštumo) sąvokas bei labai dažnai naudojamos taikymuose.

2.15 teorema. *Jei tikimybinių matų šeima $\{P\}$ yra tiršta, tai ji yra ir reliatyviai kompaktiška.*

2.16 teorema. *Tegul S – pilna separabili metrinė erdvė. Jei apibrėžtų erdvėje $(S, \mathcal{B}(S))$ tikimybinių matų šeima $\{P\}$ yra reliatyviai kompaktiška, tai ji yra ir suspausta (tiršta).*

2.15, 2.16 teoremų įrodymai pateikti $[1]$.

Tegul S_1 ir S_2 metrinės erdvės, o $\mathcal{B}(S_1)$, $\mathcal{B}(S_2)$ jų Borelio aibių klasės. Be to, tegul $h : S_1 \to S_2$ yra išmatuojamas atvaizdis, o P tikimybinis matas erdvėje $(S_1, \mathcal{B}(S_1))$. Tuomet šis matas indukuoja erdvėje $(S_2, \mathcal{B}(S_2))$ vienintelį tikimybinį matą Ph^{-1}, apibrėžiamą lygybe

$$Ph^{-1}(A) = P(h^{-1})A, \quad A \in \mathcal{B}(S_2).$$

2.17 apibrėžimas. *Funkcija $h : S_1 \to S_2$ vadinama mačia, jei $h^{-1}\mathcal{B}(S_2) \subset \mathcal{B}(S_1)$, t.y., $h^{-1}A \in \mathcal{B}(S_1)$ visoms $A \in \mathcal{B}(S_2)$.*

2.18 apibrėžimas. *Funkcija $h : S_1 \to S_2$ vadinama tolydžia, jei aibė $h^{-1}G_2$ yra atvira separabilioje metrinėje erdvėje S_1 kiekvienai atvirai aibei $G_2 \in S_2$.*

2.19 teorema. *Tegul $h : S_1 \to S_2$ tolydi funkcija. Tada iš $P_n \Rightarrow P$, kai $n \to \infty$, seka, kad $P_n h^{-1} \Rightarrow Ph^{-1}$.*

Tegul h ir h_n – mačios funkcijos iš S_1 į S_2 ir

$$E = \{x \in S_1 : h_n(x_n) \nrightarrow h(x) \text{ visiems } x_n \to \infty, \text{ kai } n \to \infty\}.$$

2.20 teorema. *Tarkime, $P_n \Rightarrow P$ ir $P(E) = 0$. Tada $P_n h_n^{-1} \Rightarrow Ph^{-1}$.*

Teoremos įrodymą galima rasti $[1$, 5.5 teorema$]$.

Darbe nagrinėsime tikimybinių matų silpną konvergavimą $P_T \Rightarrow P$, kai $T \to \infty$, kur T yra tolydus parametras. Svarbu paminėti tai, jog $P_T \Rightarrow P$, kai $T \to \infty$, tada ir tik tada, jei $P_{T_n} \Rightarrow P$, kai $n \to \infty$ kiekvienai sekai $T_n : \lim\limits_{n\to\infty} T_n = \infty$.

Tegul $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ yra tikimybinė erdvė, o $(S, \mathcal{B}(S))$ – metrinė erdvė su Borelio aibių klase.

2.21 apibrėžimas. *Tegul $X : \Omega \to S$. Jei $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\} \in \mathcal{F}$ kiekvienai $A \in \mathcal{B}(S)$, tuomet X vadinamas S-reikšmiu atsitiktiniu elementu, apibrėžtu aibėje Ω.*

Jei $S = \mathbb{R}$, sakome, kad X yra atsitiktinis dydis.

2.22 apibrėžimas. *S-reikšmio atsitiktinio elemento X skirstiniu vadinamas tikimybinis matas P, apibrėžtas erdvėje $(S, \mathcal{B}(S))$, toks kad*

$$P(A) = \mathbb{P}(X^{-1}A) = \mathbb{P}\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\},$$

visoms $A \in \mathcal{B}(S)$.

2.23 apibrėžimas. *Atsitiktinių elementų seka* $\{X_n\}$ *konverguoja pagal skirstinį (pasiskirstymą) į atsitiktinį elementą* X, *kai* $n \to \infty$, *jei elementų* X_n *skirstiniai silpnai konverguoja į elemento* X *skirstinį. Žymėsime* ($X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$).

Suformuluosime 2.19 teoremos analogą konvergavimo pagal pasiskirstymą terminais.

Tegul S – separabili metrinė erdvė su metrika ρ, o $X_n, X_{n1}, X_{n2}, ...$ yra S-reikšmiai atsitiktiniai elementai, apibrėžti erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

2.24 teorema. *Tarkime, kad* $X_{k_n} \xrightarrow{\mathcal{D}} X_k$, *kai* $n \to \infty$, *kiekvienam* k, *bei* $X_k \xrightarrow{\mathcal{D}} X$, *kai* $k \to \infty$. *Jei kiekvienam* $\varepsilon > 0$

$$\lim_{k\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} \mathbb{P}\{\rho(X_{k_n}, Y_n) \geq \varepsilon\} = 0,$$

tai $Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$, *kai* $n \to \infty$.

Įrodymą galima rasti $\big[$1, 4.2 teorema$\big]$.

Taip pat pateikiame sąvokas, susijusias su vienu iš pagrindinių komponentų ribinių teoremų įrodymuose – Haro (Haar) matu.

2.25 apibrėžimas. *Tegul aibėje* G *apibrėžta grupės bei topologinė struktūra. Jei funkcija* $h : G \times G \to G$, *apibrėžiama lygybe* $h(x, y) = xy^{-1}$, *yra tolydi, tuomet aibė* G *vadinama topologine grupe.*

2.26 apibrėžimas. *Topologinė grupė vadinama kompaktiška, jei jos topologija yra kompaktiška.*

2.27 apibrėžimas. *Borelio matas* P, *apibrėžtas kompaktiškoje topologinėje grupėje* G, *vadinamas invariantiniu, jei* $P(A) = P(xA) = P(Ax)$ *visoms* $A \in \mathcal{B}(G)$ *ir* $x \in G$. *Čia* xA *ir* Ax *yra atitinkamai aibės* $\{xy : y \in A\}$ *ir* $\{xy : x \in A\}$.

2.28 apibrėžimas. *Invariantinis Borelio matas, apibrėžtas kompaktiškoje topologinėje grupėje, vadinamas Haro (Harr) matu.*

2.29 teorema. *Kiekvienoje kompaktiškoje topologinėje grupėje egzistuoja vienintelis tikimybinis Haro matas.*

Teoremos įrodymą galima rasti $\big[$6$\big]$.

Kitas svarbus aspektas ribinės teoremos įrodyme yra ergodinės teorijos taikymas, todėl šiame skyriuje pateikiame pagrindines sąvokas.

2.30 apibrėžimas. *Atsitiktinis procesas* $X(\tau, \omega)$ *vadinamas aprėžtai stacionariu, jei visi jo baigtiniamačiai skirstiniai yra invariantiški postūmio dydžio* u *atžvilgiu.*

Yra žinoma, kad jei atsitiktinis procesas $X(\tau,\omega)$ yra stipriai stacionarus, tai postūmis g_u yra išsaugantis matą, t.y., kiekvienai aibei $A \in \mathcal{B}(Y)$ ir visiems $u \in \mathbb{R}$ yra teisinga lygybė $Q(A) = Q(A_u)$, kur $A_u = g_u(A)$.

2.31 apibrėžimas. *Aibė $A \in \mathcal{B}(Y)$ vadinama proceso $X(\tau,\omega)$ invariantine aibe, jei kiekvienam u aibės A ir A_u skiriasi viena nuo kitos nulinio Q-mato aibe. Kitaip sakant, $Q(A\Delta A_u) = 0$.*

2.32 apibrėžimas. *Griežtai stacionarus procesas $X(\tau,\omega)$ yra ergodiškas, jei jo invariantinių aibių σ–kūną sudaro aibės, kurių matas Q lygus 0 arba 1.*

Ergodiniam procesui yra teisinga klasikinė Birkhofo – Kinčino (Birkhoff – Kintchin) teorema.

2.33 teorema. *Tarkime, procesas $X(\tau,\omega)$ ergodiškas, $E|X(\tau,\omega)| < \infty$, ir tegul trajektorijos yra integruojamos Rymano prasme kiekviename baigtiniame intervale. Tuomet beveik visur galioja lygybė*

$$\lim_{T\to\infty} \int\limits_0^T X(\tau,\omega)d\tau = EX(0,\omega).$$

Teoremos įrodymas pateiktas [5].

3. RIBINĖS TEOREMOS KLASĖS $\tilde{\mathcal{S}}'$ FUNKCIJOMS ĮRODYMAS

Pirmąjame šio skyriaus poskyryje pateikiami klasikiniai teiginiai ir įrodomi nauji rezultatai, reikalingi pagrindinės teoremos, suformuluotos įvade, įrodymui: įrodoma ribinė teorema absoliučiai konverguojančioms eilutėms, pateikiamas aproksimavimas vidurkiu ir įrodoma ribinė teorema analizinių funkcijų erdvėje.

Antrąjame poskyryje įrodomas rezultatas dvimatėje analizinių funkcijų erdvėje bei įrodoma pagrindinė teorema.

Visuose poskyriuose naudosime pažymėjimą

$$\nu_T(...) = \frac{1}{T}\text{meas}\{\tau \in [0;T] : ...\}, \quad T > 0,$$

čia vietoje taškų yra rašoma sąlyga, kurią tenkina τ, o meas$\{A\}$ žymi mačios aibės $A \subset \mathbb{R}$ Lebego matą.

3.1. RIBINĖ TEOREMA SVEIKĄJAI FUNKCIJAI

Nagrinėsime funkciją

$$L_1(s) = (1 - 2^{1-s})^r L(s).$$

Kadangi taškas $s = 1$ yra funkcijos $L(s)$ r-osios eilės polius, funkcija $L_1(s)$ yra sveikoji. Be to, kai $\sigma > 1$, funkcija $L_1(s)$ gali būti užrašoma lygybe

$$(1 - 2^{1-s})^r \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m^s} = \sum_{j=0}^{r} \sum_{m=1}^{\infty} a_{m,j} \frac{1}{m^2} \frac{1}{2^{js}}$$

su tam tikrais koeficientais $a_{m,j} \ll |a_m|, m \in \mathbb{N}$, ir $j = 0, 1, ..., r$.

Kaip minėjome įvade, nagrinėsime kompleksinės plokštumos sritį

$$D = \left\{ s \in C : \sigma > \max\left(\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{d_L}\right)\right\},$$

čia d_L-funkcijos $L \in \mathcal{S}$ laipsnis.

Visiems $s \in D$ apibrėžkime funkciją

$$L_1(s, \omega) = \left(1 - \frac{2\omega(2)}{2^s}\right)^r \prod_p \prod_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{c_j(p)\omega(p)}{p^s}\right)^{-1}.$$

Tuomet $L_1(s,\omega)$ yra $H(D)$-reikšmis atsitiktinis elementas, apibrėžtas tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$. Be to, standartiniu būdu [9], galima įrodyti, jog visiems $s \in D$ ir beveik visiems $\omega \in \Omega$,

$$L_1(s,\omega) = \sum_{j=0}^{r} \sum_{m=1}^{\infty} a_{m,j} \frac{\omega(m)}{m^2} \frac{\omega(2^j)}{2^{js}}.$$

Tegul P_{L_1} yra atsitiktinio elemento $L_1(s,\omega)$ skirstinys. Apibrėžiame tikimybinį matą

$$P_{T,L_1}(A) = \nu_T(L_1(s+i\tau) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(H(D)).$$

3.1.1 teorema. *Tikimybinis matas P_{T,L_1}, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į matą P_{L_1}.* Teoremos įrodymą pateiksime šio poskyrio pabaigoje.

3.1.1. Ribinė teorema absoliučiai konverguojančiai eilutei

3.1.1 teoremos įrodymui reikalingi papildomi rezultatai atsitiktiniams elementams, nusakytiems absoliučiai konverguojančiomis eilutėmis. Taigi, įrodysime ribinę teoremą absoliučiai konverguojančiai eilutei.

Tegul $\sigma_1 > \max(\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{d_L})$ fiksuotas skaičius,

$$\upsilon_n(m) = \exp\left\{ -\left(\frac{m}{n}\right)^{\sigma_1} \right\}, \quad m,n \in \mathbb{N},$$

ir

$$l_{n,j}(s) = \frac{s}{\sigma_1} \Gamma\left(\frac{2}{\sigma_1}\right) n^2 2^{js}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Apibrėžkime funkciją

$$L_{1,n}(s) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 - i\infty} L_1(s+z) l_{n,j}(z) \frac{x^z}{z} dz, \quad \text{kai} \quad \sigma > \frac{1}{2}. \tag{3.1}$$

Pažymėję

$$k_{n,j}(m) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} \frac{l_{n,j}(z) dz}{z m^z 2^{jz}},$$

turime įvertį

$$k_{n,j}(m) \ll m^{-\sigma_1} 2^{-j\sigma_1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |l_n(\sigma_1 + it)| dt \ll_n m^{-\sigma_1} 2^{-j\sigma_1}.$$

Iš čia turime, jog eilutė

$$\sum_{j=0}^{r}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_{m,j}k_{n,j}(m)}{m^s 2^{js}}, \quad \sigma > \frac{1}{2},$$

konverguoja absoliučiai. Tuomet iš išraiškos

$$L_1(s+z) = \sum_{j=0}^{r}\sum_{m=1}^{\infty} a_{m,j}\frac{1}{m^{s+z}}\frac{1}{2^{j(s+z)}}$$

bei sumavimo ir integravimo tvarkos pakeitimo (3.1) lygybėje, turime, jog

$$\begin{aligned} L_{1,n}(s) &= \sum_{j=0}^{r}\sum_{m=1}^{\infty} a_{m,j}\frac{1}{m^s}\frac{1}{2^{js}}\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty} l_{n,j}(z)\frac{dz}{zm^z 2^{jz}}\right) = \\ &= \sum_{j=0}^{r}\sum_{m=1}^{\infty} a_{m,j}k_{n,j}\frac{1}{m^s 2^{js}}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Be to, pasinaudoję Melino (Mellin) formule

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty}\Gamma(z)b^{-z}dz = e^{-b}, \quad b, c > 0,$$

gauname lygybę

$$k_{n,j}(m) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty}\frac{z}{\sigma_1}\Gamma\left(\frac{z}{\sigma_1}\right)\left(\frac{m}{n}\right)^{-z}\frac{d}{z}z = v_n(m),$$

bei pasinaudoję (3.2) turime, jog eilutė

$$L_{1,n}(s) = \sum_{j=0}^{r}\sum_{m=1}^{\infty} a_{m,j}\frac{v_n(m)}{m^s 2^{js}}$$

konverguoja absoliučiai pusplokštumėje $\sigma > \frac{1}{2}$.

Dabar apibrėžkime atsitiktinį elementą su visais $\widehat{\omega} \in \Omega$,

$$L_{1,n}(s,\widehat{\omega}) = \sum_{j=0}^{r}\sum_{m=1}^{\infty} a_{m,j}\frac{v_n(m)\widehat{\omega}(m)\widehat{\omega}(2^j)}{m^s 2^{js}}$$

ir nagrinėkime tikimybinių matų

$$P_{T,n,L_1}(A) = \nu_T(L_{1,n}(s+i\tau) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(H(D)),$$

ir

$$\widehat{P}_{T,n,L_1}(A) = \nu_T(L_{1,n}(s+i\tau,\widehat{\omega}) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(H(D)),$$

silpną konvergavimą.

3.1.1.1 teorema. *Tikimybiniai matai P_{T,n,L_1} ir $\widehat{P}_{T,n,L_1}$, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į tą patį tikimybinį matą erdvėje $(H(D), \mathcal{B}(H(D)))$.*

Šios teoremos įrodymui reikalinga įrodyti erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ apibrėžto tikimybinio mato

$$Q_T(A) = \nu_T((p^{-i\tau} : p \text{ yra pirminis}) \in A)$$

konvergavimą.

3.1.1.2 lema. *Tikimybinis matas Q_T, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į Haro matą m_H.*

Įrodymas. Toro Ω dualioji grupė yra izomorfinė į

$$\bigoplus \mathbb{Z}_p,$$

kur $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}$ kiekvienam pirminiam skaičiui p ($\mathbb{Z}$ – sveikųjų skaičių aibė). Tuomet elementui $\underline{k} = (k_2, k_3, ...) \in \oplus \mathbb{Z}_p$, kurio tik baigtinis sveikųjų skaičių k_p skaičius yra nelygus nuliui, galioja tvirtinimas

$$\omega \to \omega_{\underline{k}} = \prod_p \omega^{k_p}(p).$$

Turime, jog mato Q_T Furje transformacija $g_T(\underline{k})$ yra užrašoma tokia forma

$$g_T(\underline{k}) = \int_\Omega \prod_p \omega^{k_p}(p) dQ_T = \frac{1}{T}\int_0^T \prod_p p^{-i\tau k_p} dt = \frac{1}{T}\int_0^T \exp\Big\{ -i\tau \sum_p k_p \log p \Big\} d\tau,$$

kur tik baigtinis sveikųjų skaičių k_p skaičius yra nelygus nuliui. Kadangi sistema $\{\log p : p \text{ yra pirminis}\}$ yra tiesiškai nepriklausoma virš racionaliųjų skaičių kūno gauname, kad

$$g_T(\underline{k}) = \begin{cases} 1, & \text{jei } \ \underline{k} = \underline{0}, \\ \frac{\exp\{-iT\sum_p k_p \log p\} - 1}{-iT \sum_p k_p \log p}, & \text{jei } \ \underline{k} \neq \underline{0}. \end{cases}$$

Taigi,

$$\lim_{T\to\infty} g_T = \begin{cases} 1, & \text{jei } \ \underline{k} = \underline{0}, \\ 0, & \text{jei } \ \underline{k} \neq \underline{0}. \end{cases}$$

Pasinaudoję šiuo rezultatu bei ir $\big[$6, 1.42 teorema$\big]$, gauname lemos įrodymą.

3.1.1.1 teoremos įrodymas. Funkcija $h_n : \Omega \to H(D)$, apibrėžta formule

$$h_n(\omega) = \sum_{j=0}^{r} \sum_{m=1}^{\infty} a_{m,j} \frac{v_n(m)\omega(m)\omega(2^j)}{m^s 2^{js}},$$

yra tolydi, be to,

$$h_n((p^{-i\tau} : p \text{ yra pirminis skaičius})) = L_{1,n}(s + i\tau).$$

Iš čia seka, jog $P_{T,n,L_1} = Q_T h_n^{-1}$. Pasinaudoję $\left[1,\ 5.1 \text{ teorema}\right]$ bei 3.1.1.2 lema, gauname, kad matas P_{T,n,L_1}, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į matą $m_H h_n^{-1}$.

Norėdami įrodyti analogišką tvirtinimą matui $\widehat{P}_{T,n,L_1}$, apibrėžkime funkciją $h : \Omega \to \Omega$ sandauga

$$h(\omega) = \omega\widehat{\omega}^{-1}.$$

Tuomet

$$h_n(h((p^{-i\tau} : p \text{ yra pirminis skaičius}))) = L_{1,n}(s + i\tau, \widehat{\omega}).$$

Atlikę analogišką analizę ir atsižvelgę į Haro mato m_H invariantiškumą, gauname, kad matas $\widehat{P}_{T,n,L_1}$ taip pat silpnai konverguoja į matą $m_H(h_n h^{-1}) = (m_H h^{-1})h_n^{-1} = m_H h_n^{-1}$. ▲

3.1.2. Aproksimavimas vidurkiu

Funkciją $L_1(s)$ aproksimuosime funkcijomis $L_{1,n}(s)$. Prieš tai apibrėžkime metriką erdvėje $H(D)$. Pagal $\left[9,\ 1.7.1 \text{ teoremą}\right]$, egzistuoja kompaktiškų poaibių seka $\{K_l\} \subset D$, tokia kad

$$D = \bigcup_{l=1}^{\infty} K_l,$$

$K_l \subset K_{l+1}$,, ir jei K – kompaktiškas D poaibis, tai $K \subseteq K_l$ tam tikriems l. Parinkime $f, g \in H(D)$ tokius, kad

$$\varrho(f,g) = \sum_{l=1}^{\infty} 2^{-l} \frac{\sup\limits_{s\in K_l} |f(s) - g(s)|}{1 + \sup\limits_{s\in K_l} |f(s) - g(s)|}.$$

Tada ϱ yra metrika erdvėje $H(D)$ su indukuota tolygaus konvergavimo ant kompaktų topologija.

3.1.2.1 lema. *Tegul K yra pusplokštumės D kompaktiškas poaibis. Tada*

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T \sup_{s\in K} |L_1(s + i\tau) - L_{1,n}(s + i\tau)| d\tau = 0.$$

Įrodymas. J. Štaudingas $[18]$ įrodė, jog, kai $\sigma > max(\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{d_L})$, funkcija $L(s)$ yra baigtinės eilės ir

$$\int\limits_0^T |L(\sigma + it)|^2 dt \ll T.$$

Iš čia seka, kad toje pačioje srityje funkcija $L_1(s)$ taip pat yra baigtinės eilės ir

$$\int_0^T |L_1(\sigma+it)|^2 dt \ll T.$$

Įrodymas užbaigiamas pritaikius standartinį kontūrinį integravimą (žr. [9, 5.4.2 teoremą], kurioje nagrinėtas Rymano dzeta funkcijos atvejis). ▲

Analogiškas tvirtinimas yra teisingas ir funkcijoms $L_1(s,\omega), L_{1,n}(s,\omega)$.

3.1.2.2 lema. *Tegul K yra kompaktiškas pusplokštumės D poaibis. Tuomet beveik visiems $\omega \in \Omega$*

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sup_{s\in K} |L_1(s+i\tau,\omega) - L_{1,n}(s+i\tau,\omega)| d\tau = 0.$$

Įrodymas. Naudosime įvertį

$$\int_0^T |L_1(\sigma+it,\omega)|^2 dt \ll T.$$

kuris teisingas srityje $\sigma > \max\left(\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{d_L}\right)$ beveik visiems $\omega \in \Omega$, ir seka iš funkcijos $L(s,\omega)$ vidurkio įverčio [18].

Tolimesnis įrodymas analogiškas 3.1.2.1 lemos įrodymui. ▲

Dabar galime grįžti prie 3.1.1 teoremos įrodymo.

3.1.1 teoremos įrodymas. Analizinių funkcijų erdvėje apibrėžkime dar vieną tikimybinį matą

$$\widehat{P}_{T,L_1}(A) = \nu_T(L_1(s+i\tau,\omega) \in A).$$

Pirmiausiai įrodysime, kad matai P_{T,L_1} ir $\widehat{P}_{T,L_1}$, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į tą patį matą erdvėje $(H(D), \mathcal{B}(H(D)))$.

Remiantis 3.1.1.1 teorema, turime, kad matai P_{T,n,L_1}, $\widehat{P}_{T,n,L_1}$, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į tą patį matą P_{n,L_1}. Dabar $X_{n,L_1}(s)$ pažymėkime, $H(D)$-reikšmį atsitiktinį elementą su pasiskirstymu P_{n,L_1} ir apibrėžkime

$$X_{T,n,L_1}(s) = L_{1,n}(s+i\theta T),$$

kur θ yra atsitiktinė reikšmė, apibrėžta tam tikroje tikimybinėje erdvėje $(\widehat{\Omega}, \mathcal{B}(\widehat{\Omega}), \mathbb{P})$ ir tolygiai pasiskirsčiusi intervale [0,1]. Pasinaudoje konvergavimo pagal skirstinį apibrėžimu ir pažymėjimu $\xrightarrow{\mathcal{D}}$, turime, kad

$$X_{T,n,L_1(s)} \xrightarrow[T\to\infty]{\mathcal{D}} X_{n,L_1}(s). \tag{3.3}$$

Be to, nesunku pastebėti, kad tikimybinių matų šeima $\{P_{n,L_1}\}$ yra suspausta, o taip pat ir reliatyviai kompaktiška. Tuomet egzistuoja posekis $\{P_{n_1,L_1}\} \subset \{P_{n,L_1}\}$, toks, kad matas $\{P_{n_1}\}$, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja į tam tikrą matą P erdvėje $(H(D), \mathcal{B}(H(D)))$, kai $n_1 \to \infty$. Tai ekvivalentu tam, jog

$$X_{n_1,L_1} \xrightarrow[T\to\infty]{\mathcal{D}} P. \tag{3.4}$$

Pažymėkime

$$X_{T,L_1}(s) = L_1(s + i\theta T).$$

Pasinaudoję 3.1.2.1 lema gauname, kad kiekvienam $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \nu_T(\varrho(X_{T,L_1}(s), X_{T,n,L_1}(s)) \geq \epsilon)$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varrho(L_1(s + i\tau), L_1(s + i\tau))d\tau = 0$$

Iš čia (3.3), (3.4) ir $\big[$1, 4.2 teoremos$\big]$ turime, kad

$$X_{T,L_1(s)} \xrightarrow[T\to\infty]{\mathcal{D}} P, \tag{3.5}$$

tai yra matas P_{T,L_1} silpnai konverguoja į matą P, kai $T \to \infty$. Be to, iš (3.5) seka, jog matas P nepriklauso nuo posekio $\{P_{T,L_1}\}$ parinkimo. Todėl

$$X_{n,L_1} \xrightarrow[T\to\infty]{\mathcal{D}} P. \tag{3.6}$$

Dabar apibrėžkime

$$\widehat{X}_{T,n,L_1}(s) = L_{1,n}(s + i\theta T, \omega)$$

ir

$$\widehat{X}_{T,L_1}(s) = L_1(s + i\theta T, \omega)$$

Pasinaudoję (3.6) formule, 3.1.2.2 lema ir kartodami ankstesnius samprotavimus atsitiktiniams elementams $\widehat{X}_{T,n,L_1}$ ir $\widehat{X}_{T,L_1}$ gauname, kad matas $\widehat{X}_{T,L_1}$, kai $T \to \infty$, taip pat silpnai konverguoja į P.

Lieka įrodyti, kad P sutampa su P_{L_1}.

Tarkime $a_\tau = \{p^{-i\tau} : p$ yra pirminis skaičius$\}, \tau \in \mathbb{R}$. Apibrėžkime vienparametrinę transformacijų aibėje Ω šeimą $\varphi_\tau(\omega) = a_\tau \omega,\ \omega \in \Omega$. Tada $\{\varphi_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}$ yra mati išsauganti transformaciją tore Ω vienparametrinė grupė. Be to, pagal $\big[$9, 5.3.6 teoremą$\big]$, grupė $\{\varphi_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}$ yra ergodinė.

Dabar tegul A yra mato P, apibrėžto 3.1.1 teoremos įrodyme, tolydumo aibė. Tuomet iš šios ir $\left[1,\ 2.1 \text{ teoremų}\right]$ turime sąryšį

$$\lim_{T\to\infty} \nu_T(L_1(s+i\tau,\omega)\in A) = P(A). \tag{3.7}$$

Apibrėžkime atsitiktinį dydį ξ erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$

$$\xi(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{jei } \ L_1(s,\omega)\in A, \\ 0, & \text{jei } \ L_1(s,\omega)\notin A. \end{cases}$$

Kadangi grupė $\{\varphi_\tau : \tau\in\mathbb{R}\}$ yra ergodinė, procesas $\varphi_\tau(\xi(\omega))$ taip pat yra ergodiškas. Pažymėję $\mathbb{E}X$ atsitiktinio elemento X vidurkį ir pasinaudoję Birhofo-Kinčino teorema $\left[5\right]$ turime, jog

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \xi(\varphi_\tau(\omega))d\tau = \mathbb{E}\xi. \tag{3.8}$$

Tačiau, pagal ξ ir φ_τ apibrėžimus

$$\mathbb{E}\xi = \int_\Omega \xi(\omega)dm_H = m_H(\omega\in\Omega : L_1(s,\omega)\in A) = P_{L_1}(A)$$

ir

$$\frac{1}{T}\int_0^T \xi(\varphi_\tau(\omega))d\tau = \nu_T(L_1(s+i\tau,\omega)\in A).$$

Todėl, remiantis (3.8),

$$\lim_{T\to\infty} \nu_T(L_1(s+i\tau,\omega)\in A) = P_{L_1}(A)$$

ir, atsižvelgus į (3.7), gauname, kad $P(A) = P_{L_1}(A)$ visoms mato P tolydumo aibėmis A. Kadangi tolydžios aibės sudaro determinuojančią klasę, tai $P(A) = P_{L_1}(A)$ visoms $A\in\mathcal{B}(H(D))$.

▲

3.2. PAGRINDINĖS TEOREMOS ĮRODYMAS

Teoremos įrodymui bus reikalingas dar vienas pagalbinis rezultatas dvimatėje analizinių funkcijų erdvėje.

Pažymėkime $H^2(D) = H(D) \times H(D)$ ir tegul

$$g_r(s) = (1 - 2^{1-s})^r.$$

Kadangi $g_r(s)$ yra Dirichlė polinomas, remiantis 3.1.1.1 teoremos įrodymu, tikimybinis matas

$$\nu_T(g_r(s_i\tau) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(H(D)), \tag{3.9}$$

kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į atsitiktinio elemento

$$g_r(s, \omega) = \left(1 - \frac{2\omega(2)}{2^s}\right)^r$$

skirstinį.

Erdvėje $(H^2(D), \mathcal{B}(H^2(D)))$ apibrėžkime tikimybinį matą

$$P_T^{(2)} = \nu_T((g_r(s + i\tau), \quad L_1(s + i\tau)) \in A)$$

ir pažymėkime

$$F(s, \omega) = (g_r(s, \omega), \quad L_1(s, \omega)).$$

Pasinaudoję (3.9) mato silpnu konvergavimu, 3.1.1 teorema ir modifikuotu Kramerio-Valdo (Cramer-Wald) kriterijumi [6] gauname tvirtinimą.

3.2.1 lema *Tikimybinis matas $P_T^{(2)}$, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į atsitiktinio elemento $F(s, \omega)$ skirstinį P_F.*

Dabar apibrėžkime funkciją $u : H^2(D) \to M(D)$ formule

$$d(g_1, g_2) = \frac{g_2}{g_1}, \quad (g_1, g_2) \in H^2(D).$$

Ši funkcija yra tolydi (išskyrus P_F-mato aibę), kadangi metrika d (pagal erdvės $M(D)$ apibrėžimą) tenkina lygybę

$$d(g_1, g_2) = d\left(\frac{1}{g_1}, \frac{1}{g_2}\right), \quad (g_1, g_2) \in H(D).$$

Be to, $P_{T,L} = P_T^{(2)} u^{-1}$. Tuomet iš 3.2.1 lemos, bei 5.1 teoremos [1] turime, kad matas $P_{T,L}$, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į atsitiktinio elemento

$$\frac{L_1(s, \omega)}{g_r(s, \omega)} = L(s, \omega)$$

skirstinį.

▲

IŠVADOS

Darbe nagrinėjamas paprastųjų Dirichlė eilučių

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m^s}, \quad a_m \in \mathbb{C}, \quad s \in \mathbb{C},$$

turinčių polinominę Oilerio sandaugą, analizinį pratęsimą, Rymano tipo funkcinę lygtį bei tenkinančių Ramanudžano hipotezę, klasės funkcijų reikšmių pasiskirstymas.

Įrodyta ribinė teorema silpnojo tikimybinių matų konvergavimo prasme šios klasės funkcijoms, meromorfinių funkcijų erdvėje pateiktas išreikštinis ribinio mato pavidalas.

LITERATŪRA

1. Billingsley, P. *Convergence of Probability Measures.* New York: Wiley, 1968.

2. Bombieri, E.; Hejhal, D. A. On the distribution of zeros of linear combinations of Euler products. *Duke Math. J.*, **80** (1995), p. 821–862.

3. Bombieri, E.; Perelli, A. Distinct zeros oh L-functions. *Acta Arith.*, **83** (1998), p. 271–281.

4. Conrey, J. B.; Ghosh, A. On the Selberg class of Dirichlet series: small degrees. *Duke Math. J.*, **72** (1993), p. 673–693.

5. Cramer, H.; Leadbetter, M. R. *Stationary and related Stochastic Process.* New York: Wiley, 1967.

6. Heyer, H. *Probability measures on Locally Compact Groups.* Springer-Verlag, 1977.

7. Joyner, D. *Distribution Theorems of L-functions.* Harlow: Longman Scietific, 1986.

8. Kazorowski, J.; Perelli, A. The Selberg class: asurvey. *Number Theory in Progress. Proc. of the Intern. Conf. in honor of 60th birthday of A Schinzel (Zakopane, 1997). Vol. 2: Elemantary and Analytic Number Theory*, De Gruyter, Berlin 1999, p. 953–992.

9. Laurinčikas, A. *Limit theorems for the Riemman zeta-function.* London: Boston, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1996.

10. Laurinčikas, A.; Macaitienė, R. *Įvadas į Dirichlė eilučių teoriją.* Šiauliai: Šiaulių universiteto leidykla, 2008.

11. Loeve, M. *Probability Theory.* New York: Toronto, Von Wostrand, 1995.

12. Macaitienė, R. On the value distribution of L-functions of the Selberg class. *Journal of Mathematical Sciences*, **180**(5) 2012, p. 599–609.

13. Montgomery, H. L. *Topics in multiplicative number theory.* Berlin: Springer, 1971.

14. Molteni, G. A note on result of Bochner and Conrey-Ghosh about the Selberg class. *Arch. Mth.*, **72**, p. 219–222.

15. Perelli, A. General L-functions. *Ann. Mat. pura Appl.*, **130** (1982), p. 287–306.

16. Perelli, A. A Survey of the Selberg class of L-functions. *I. Milan J. Math.*, **73** (2005), p. 19–52.

17. Selberg, A. *Old and new conjectures and results about a class of Dirichlet series, in: Proceedings of yhe Amalfi conference on Analitic Number Theory.* Mayori, 1989, E. Bombieri etal. (eds), 1992, p. 367–385.

18. Stauding, J. On the universality for functions in the Selberg class. *Proc. of the Sesion in Analytic number theory and Diophantine equotions* (Bonn, 2002), D. R. Health-Brown et al (Eds), Bonner Math Schriften, **360** (2003), p. 22–29.

19. Steuding, J. *Value distribution of L-functions and allied zeta - functions with an emphasis on aspects of universality,* Frankfurt, 2003.

SUMMARY

Limit Theorem for L-Functions from a Subclass of the Selberg Class

Selberg introduced a general class $\mathcal{S}$ of Dirichlet series

$$L(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m^s}, \quad s = \sigma + it,$$

satisfying the following hypotheses:

(1) *for every* $\epsilon > 0$, $a(m) \ll m^{\epsilon}$ (Ramanujan's hypothesis);

(2) *there exists an integer* $r \geq 0$, *such that* $(s-1)^r L(s)$ *is an entire function of finite order* (analytic continuation);

(3) *there exist positive real numbers* Q *and* λ_j *and complex numbers* $\mu_j, \Re\mu_j \geq 0$, $j = 1, ..., l$, *and* $\omega, |\omega| = 1$, *such that the function*

$$\Lambda_L(s) = L(s) Q^s \prod_{j=1}^{l} \Gamma(\lambda_j s + \mu_j)$$

satisfies the functional equation

$$\Lambda_L(s) = \omega \overline{\Lambda_L(1-\overline{s})}$$

(functional equation);

(4) *there exist numbers* $b(p^{\alpha})$, $b(p^{\alpha}) \ll p^{\alpha\theta}$, *with some* $\theta < \frac{1}{2}$ *such that*

$$L(s) = \prod_p \exp\left\{ \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{b(p^{\alpha})}{p^{\alpha s}} \right\},$$

where the product is taken over all primes p (Euler product).

In view of (1), the function $L(s)$ is analytic on the half plane $\{s \in \mathbb{C} : \sigma > 1\}$.

Some subclasses of the Selberg class were introduced and studied also. We shall be concerned with the subclass $\tilde{\mathcal{S}}$ of the Selberg class defined by J. Steuding. A function L is said to belong to the subclass $\tilde{\mathcal{S}}$ of $\mathcal{S}$ if the following hypotheses are satisfied:

(1) *for each prime* p *and* $j = 1, ..., k$, *there exist complex numbers* $c_j(p), |c_j(p)| \leq 1$, *such that*

$$L(s) = \prod_p \prod_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{c_j(p)}{p^2}\right)^{-1};$$

(2) *there exists a positive constant* κ *such that*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\pi(x)} \sum_{p\le x} |a(p)|^2 = \kappa,$$

where

$$\pi(x) = \sum_{p\le x} 1.$$

Examples of elements of $\tilde{\mathcal{S}}$ are furnished by the Riemann zeta-function, Dirichlet L-functions, Hecke L-functions, Dedekind zeta-functions.

J. Steuding proved a limit theorem in the sense of weak convergence of probability measures for functions $L \in \tilde{\mathcal{S}}$ in the space of analytic functions. It is important that the proof of this Theorem depends only on hypothesis (1) for the subclass $\tilde{\mathcal{S}}$. Therefore, this suggests to considere an extension $\tilde{\mathcal{S}}'$ of the class $\tilde{\mathcal{S}}$ defined only in terms of hypothesis (1) for $\tilde{\mathcal{S}}$. The result of such a type for L-functions from the class $\tilde{\mathcal{S}}'$ on the complex plane has been given by R. Macaitienė.

In general, $\mathcal{S}$ is a class of meromorphic functions having a simple pole of order r at the point $s = 1$. Therefore, asymptotic properties of L-functions from the class $\mathcal{S}$ are better reflected by limit theorems in the space of meromorphic functions.

In this work we prove the limit theorem of such a type for L-functions from the class $\tilde{\mathcal{S}}' \subset \mathcal{S}$ in yhe space of meromorphic functions.