

ŠIAULIŲ UNIVERSITETAS
INFORMATIKOS, MATEMATIKOS IR E. STUDIJŲ INSTITUTAS
MATEMATIKOS KATEDRA

LINA JAŠMONTAITĖ

Nehomogeninio Puasono proceso prognozavimas

Bakalauro darbas

Darbo vadovas:

Doc. Vaidotas Kaniškauskas

Šiauliai, 2014

TURINYS

ĮVADAS.....	3
1. TEORINĖ DALIS.....	4
1.1. ATSITIKTINIŲ PROCESŲ PROGNOZAVIMAS.....	4
2.2. PUASONO PROCESAI.....	5
2.2.1. PUASONO PROCESAS.....	5
2.2.2. NEHOMOGENINIS PUASONO PROCESAS	5
2.3. PAKANKAMA STATISTIKA.....	7
3. PAKANKAMA IR PILNA STATISTIKA	9
3.1. PAKANKAMOS STATISTIKOS RADIMAS	9
3.2. PILNOS STATISTIKOS RADIMAS	10
4. NEHOMOGENINIO PUASONO PROCESO PROGNOZAVIMAS	12
IŠVADOS	16
LITERATŪROS SĄRAŠAS.....	17

IVADAS

Bakalauro darbo tikslas:

Ištirti atsitiktinių procesų prognozavimo matematinius metodus.

Uždaviniai:

1. Nustatyti nehomogenio Puasono proceso prognozavimo algoritmą.
2. Nehomogeninio Puasono proceso algoritmą pritaikyti tokiems atvejams:
 - $h(\theta, s) = \theta$
 - $h(\theta, s) = s(\theta)$
 - $h(\theta, s) = s(\theta) \cdot \varphi_s$
 - $h(\theta, s) = s(\theta) + \varphi_s$

1. TEORINĖ DALIS

1.1. ATSITIKTINIŲ PROCESŲ PROGNOZAVIMAS

Turime įvykių erdvę Ω ir σ -algebras $\mathcal{F}_1$ ir $\mathcal{F}_2$, kur $\mathcal{F}_1$ yra generuota stebimų atsitiktinių dydžių, o $\mathcal{F}_2$ – generuota nestebimų atsitiktinių dydžių. Tarkime, kad mati erdvė $(\Omega, \mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2)$ aprūpinta tikimybinių matų šeima $P_\theta, \theta \in \Theta$.

1. Apibrėžimas[2]. Tarkime, kad Y yra $\mathcal{F}_1$ – mati. Statistika Y vadinama prognoziškai pakankama $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, P_\theta, \theta \in \Theta)$ atžvilgiu, jei :

- 1) Y yra pakankama $(\mathcal{F}_1, P_\theta, \theta \in \Theta)$ atžvilgiu;
- 2) kiekvienam P_θ , kai $\theta \in \Theta$, $\mathcal{F}_1$ ir $\mathcal{F}_2$ yra sąlyginai nepriklausomi esant duotam Y .

1. Teorema[2]. Tarkime, kad Y yra prognoziškai pakankama $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, P_\theta, \theta \in \Theta)$ atžvilgiu. Tarkime X yra $(\mathcal{F}_1 - \text{mati})$ prognozė dėl $\mathcal{F}_2$ – mataus dydžio W . Tada prognozė $\varphi(Y) = \mathbb{E}_p[X|Y] = \mathbb{E}[X|Y]$, nepriklauso nuo θ ir tenkina nelygybę:

$$\mathbb{E}_\theta[(\varphi(Y) - W)^2] \leq \mathbb{E}_\theta[(X - W)^2], \theta \in \Theta.$$

2. Teorema[2]. Tarkime, kad statistika Y yra prognoziškai pakankama $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, P_\theta, \theta \in \Theta)$ atžvilgiu ir pilna $P_\theta \in \Theta$ atžvilgiu. Taip pat tarkime, jog egzistuoja $\mathcal{F}_1$ - mati prognoziškai pakankama X dėl W . Tada prognozė $\varphi(Y) = \mathbb{E}[X|Y]$ tenkina nelygybę:

$$\mathbb{E}_\theta[(\varphi(Y) - W)^2] \leq \mathbb{E}_\theta[(Z - W)^2], \theta \in \Theta$$

kiekvienai $\mathcal{F}_1$ - mačiai nepaslinktai prognozei Z . Kartu prognozė $\varphi(Y)$ yra vienintelė $P_\theta, \theta \in \Theta$, beveik visur su ta savybe.

2. Apibrėžimas[2]. Prognozė X vadinama nepaslinkta dėl W , jei

$$\mathbb{E}_\theta X = \mathbb{E}_\theta W, \theta \in \Theta.$$

3. Apibrėžimas[2]. Sakysime, kad nepaslinkta prognozė X dėl W yra TMDNP (tolygiai mažiausios dispersijos nepaslinkta prognozė), jei:

$$\mathbb{E}_\theta[(X - W)^2] \leq \mathbb{E}_\theta[(Z - W)^2], \forall \theta \in \Theta,$$

su kiekviena kita nepaslinkta prognoze Z .

4. Apibrėžimas[2]. Statistika Y vadinama pilna $P_\theta, \theta \in \Theta$, jei:

$$\mathbb{E}_\theta[g(Y_t)] = 0, \theta \in \Theta,$$

tai reiškia

$$g(Y_t) = 0.$$

2.2.PUASONO PROCESAI

2.2.1.PUASONO PROCESAS

5. Apibrėžimas[5]. Atsitiktinis procesas $X(t)$ vadinamas Puasono procesu, jei tenkinamos sąlygos:

1. $X(t)$ yra procesas su nepriklausomais pokyčiais;
2. $\forall t_1 < t_2$ pokyčiai $X(t_2) - X(t_1)$ ir $X(t_2 + s) - X(t_1 + s)$ turi tą patį skirstinį su $\forall s \neq 0$;
3. $X(0) = 0$;
4. kai $h \rightarrow 0$,

$$P(X(h) = 0) = 1 - \lambda \cdot h + o(h)$$

$$P(X(h) = 1) = \lambda h + o(h)$$

$$P(X(h) \geq 0) = o(h)$$

Čia $\lambda > 0$ vadinamas Puasono proceso parametru.

Jei $X(t)$ yra Puasono procesas, tai atlikdami tiesioginius skaičiavimus galime įsitikinti, kad

$$P(x(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda t}, k = 0, 1, 2, \dots$$

Mes nagrinėsime sudėtingesnės struktūros Puasono procesus, tai yra vadinamus nehomogeninius Puasono procesus.

2.2.2.NEHOMOGENINIS PUASONO PROCESAS

6. Apibrėžimas[5]. Atsitiktinis procesas $N(t)$ vadinamas nehomogeniniu Puasono procesu su intensyvumu $h(\theta, s)$, $\theta \in \Theta$, jei

$$P(N(t) = n) = \frac{\left(\int_0^t h(\theta, s) ds\right)^n}{n!} \cdot e^{-\int_0^t h(\theta, s) ds}, n = 0, 1, 2, \dots$$

kur $h(\theta, s)$ tokia, kad

$$H(\theta, t) = \int_0^t h(\theta, s) ds \rightarrow \infty, t \rightarrow \infty.$$

$$H(\theta, t) < \infty, \text{ kai } t \in R_+$$

Tuomet

$$P(N(t) = n) = \frac{(H_\theta(t))^n}{n!} \cdot e^{-H_\theta(t)}, n = 0, 1, 2, \dots$$

Nehomogeninio Puasono proceso pavyzdžiai:

Nehomogeninis Puasono procesas taikomas įvairiose fizikos srityse:

1. Nehomogeninis Puasono procesas N_t yra naudojamas lazerinėje fizikoje parametro θ perdavimui su tokia intensyvumo funkcija:

$$h(\theta, t) = \lambda(\theta, t) + \lambda, 0 \leq t \leq T,$$

čia λ – foninis spinduliavimo intensyvumas, $\lambda(\theta, t)$ – lazerio moduliacijos intensyvumas.

2. Nehomogeninis Puasono procesas N_t yra naudojamas optinėje fizikoje su intensyvumo funkcija tokio pavidalo:

$$h(\theta, t) = \frac{1}{2} a(1 + \cos(\omega t + \psi)) + \lambda,$$

kur $\theta = (a, \omega, \Psi, \lambda)$, a – amplitudė, ω – dažnis, ψ – intensyvumo fazė, $\lambda > 0$.

3. Tegul funkcija $f(t)$ yra dukart integruojama bet kuriame baigtiniame intervale ir $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$, $\theta \in (a, b)$, $0 < a < b < \infty$. Tada nehomogeninio Puasono proceso N_t intensyvumo funkcija yra tokio pavidalo:

$$h(\theta, t) = \theta f(t) + \lambda, \lambda > 0,$$

kur $\int_0^\infty f(t)^2 dt = 0$, dažnai naudojama asimptotinių įverčių teorijoje.

Tikėtumo funkcija:

Kadangi $H(\theta, s) < \infty$, kai $t \in R_+$ fiksuotas ir $\theta \in \Theta$, tai galioja sąlyga:

$$\int_0^t \left(1 - \sqrt{\frac{h(\theta, s)}{h(\theta_0, s)}} \right) h(\theta_0, s) ds < \infty,$$

kai $t \in R_+$, $\theta, \theta_0 \in \Theta$ ir pagal [7] $P_\theta \ll P_{\theta_0}$ ir tikimybinio mato P_θ^t atžvilgiu $P_{\theta_0}^t$ (kur P_θ^t yra mato P_θ susiaurinimas $\mathcal{F}_t^N$ atžvilgiu, $\mathcal{F}_t^N = \sigma\{N_s, 0 \leq s < t\}$) lokalaus tankio procesas turi pavidalą:

$$\frac{dP_\theta^t}{dP_{\theta_0}^t}(\cdot) = \exp \left\{ \int_0^t \ln \frac{h(\theta, s)}{h(\theta_0, s)} dN_s - \int_0^t (h(\theta, s) - h(\theta_0, s)) ds \right\} \quad (1)$$

2.3.PAKANKAMA STATISTIKA

Tarkime, kad $(\Omega, \mathcal{F}, P_\theta, \theta \in \Theta)$ yra tikimybinė erdvė, $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ - mati erdvė, X – matus atvaizdis iš $(\Omega, \mathcal{F})$ į $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$, p^X – atsitiktinio elemento X tikimybiniis skirstinys, t.y. $P_\theta^X(A) = P_\theta\{\omega: X(\omega) \in A\}, A \in \mathcal{B}$.

Atsitiktinis elementas X vadinamas stebėjimais, $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ - imčių erdvė, o apie elemento X skirstinį P_θ^X žinome tik tiek, kad jis priklauso skirstinių klasei $\{P_\theta^X, \theta \in \Theta\}$, sudarytai nors iš dviejų elementų.

7. Apibrėžimas[1]. Trejetas $\mathcal{E} = (\mathcal{X}, \mathcal{B}, P_\theta^X, \theta \in \Theta)$ vadinamas stebėjimų X indukuotu statistiniu eksperimentu.

Akivaizdu, kad tikimybinių erdvių šeima $(\Omega, \mathcal{F}, P_\theta)$ yra pagalbinis objektas ir gali būti apibrėžta įvairiais būdais. Natūralu už Ω imti $\mathcal{X}$, už $\mathcal{F}$ – algebrą $\mathcal{B}$ ir tarti, kad $P_\theta(A) = P_\theta^X(A)$, kai $A \in \mathcal{B}$ ir apibrėžti $X(x) = x$, kai $x \in \mathcal{X}$.

Pagrindinis parametrinės statistikos uždavinys yra daryti išvadas apie X tikimybinių skirstinį P_θ^X , remiantis stebėjimais X , iš anksto nežinant, kokia tikroji parametro θ reikšmė, tik žinant, kad ji priklauso tam tikrai atvirai ir iškilai abei $\theta \in R^k, k \geq 1$.

Šis uždavinys sprendžiamas, panaudojant įverčių teoriją. Susipažinsime su pagrindiniais jos teiginiais.

8. Apibrėžimas[1]. Tarkime, kad $(\mathcal{U}, \mathcal{A})$ – kita mati erdvė. Statistika vadinamas kiekvienas matus atvaizdis $T = T(X)$ iš $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ į $(\mathcal{U}, \mathcal{A})$.

Tuo atveju, kada $\mathcal{U} = \Theta$, o $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\Theta)$ ($\mathcal{B}(\Theta)$ – Θ poaibių σ – algebra), statistika atvaizdis $T = T(X)$ vadinama parametro θ įverčiu ir dažnai žymima $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X)$.

9. Apibrėžimas[1]. Statistika $T = T(X)$ vadinama nepaslinktu parametro $\theta \in \Theta$ įverčiu, jei:

$$\mathbb{E}_\theta T(X) = \theta, \theta \in \Theta$$

čia $\mathbb{E}_\theta$ – žymi matematinį vidurkį atžvilgiu P_θ^X .

10. Apibrėžimas[1]. Statistinis eksperimentas $\mathcal{E} = (\mathcal{X}, \mathcal{B}, P_\theta^X, \theta \in \Theta)$ vadinamas dominuojamu (mato Q^X), jei egzistuoja σ – baigtinis matas Q^X toks, kad $P_\theta^X \ll Q^X$ su visais $\theta \in \Theta$.

Tarkime, kad statistinis eksperimentas $\mathcal{E} = (\mathcal{X}, \mathcal{B}, P_\theta^X, \theta \in \Theta)$, $\theta \in R^k$, $k \geq 1$ dominuojamas mato Q^X . Pažymėkime

$$f(\theta, x) = \frac{dP_\theta^X}{dQ^X}(x), x \in \mathcal{B}.$$

11. Apibrėžimas[1]. Statistika $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X)$ vadinama parametro θ maksimalaus tikėtinumo įverčiu, jei

$$f(\hat{\theta}, X) = \sup_{\theta \in \bar{\Theta}} f(\theta, X)$$

čia $\bar{\Theta}$ – aibės Θ uždarinys.

4. Teorema[6].(FaktORIZACIJOS TEOREMA) Mačioje erdvėje $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ turime tikimybinių matų šeimą $\mathcal{P} = \{P_\theta, \theta \in \Theta\}$ su dominuojančiu matu μ . Pažymėkime $f(x, \theta) = \frac{dP_\theta}{d\mu}(x)$ – tikimybių tankį. Tegul $T=T(x)$ yra statistika, atvaizduojanti $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ į mačią erdvę $(\mathcal{Y}, \mathcal{S})$. Tam, kad statistika T būtų pakankama šeimos $\mathcal{P}$ atžvilgiu būtina ir pakankama, kad tankis $f(x, \theta)$ užrašytu pavidalu:

$$f(x, \theta) = g(T(x); \theta)r(x) \quad (\mu - \text{b.v.}), \forall \theta \in \Theta,$$

kur $g(x, \theta)$ neneigiama, S – mati funkcija su kiekvienu $\theta \in \Theta$, o $r(x)$ yra neneigiama $\mathcal{B}$ mati funkcija.

3. PAKANKAMA IR PILNA STATISTIKA

3.1. PAKANKAMOS STATISTIKOS RADIMAS

Sakykime, kad turime nehomogeninį Puasono procesą N_t su intensyvumo funkcija $h(\theta, t)$, kai $\theta \in \Theta$, kurį stebime laikotarpiu $t \in [0, s]$. Mūsų tikslas surasti pakankamos statistikos priklausomai nuo $h(\theta, x)$ pavidalą.

1. $h(\theta, t) = \theta$

Turime standartinį Puasono procesą N_t su

$$P(N_t = k) = \frac{\theta^k}{k!} e^{-\theta}.$$

Tada proceso N_t kompensatorius yra $A_t = \theta t$ ir tikėtinumo funkcija pagal (1) formulę yra pavidalo:

$$L(\theta) = \frac{dP_{\theta}^t}{dP_{\theta_0}^t}(\cdot) = \exp \left\{ \int_0^t \ln \frac{\theta}{\theta_0} dN_s - \int_0^t (\theta - \theta_0) ds \right\} = \exp \left\{ N_t \ln \frac{\theta}{\theta_0} - \theta t + \theta_0 t \right\}$$

Pagal faktorizacijos teoremą matome, kad N_t yra pakankama statistika šeimai $\theta \in \Theta$, kai $t \in [0, s]$.

2. $h(\theta, t) = s(\theta)$

Tada kompensatorius yra $A_t = s(\theta)t$ ir tikėtinumo funkcija pagal (1) formulę yra pavidalo:

$$\begin{aligned} L(\theta) &= \frac{dP_{\theta}^t}{dP_{\theta_0}^t}(\cdot) = \exp \left\{ \int_0^t \ln \frac{s(\theta)}{s(\theta_0)} dN_s - \int_0^t (s(\theta) - s(\theta_0)) ds \right\} = \\ &= \exp \left\{ N_t \ln \frac{s(\theta)}{s(\theta_0)} - s(\theta)t + s(\theta_0)t \right\} \end{aligned}$$

Pagal faktorizacijos teoremą matome, kad N_t yra pakankama statistika šeimai $\theta \in \Theta$, kai $t \in [0, s]$.

3. $h(\theta, t) = s(\theta)\varphi_t$, kur φ_t toks, kad

$$\int_0^t \varphi_s ds \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow \infty.$$

Tada tikėtinumo funkcija pagal (1) formulę yra pavidalo:

$$L(\theta) = \frac{dP_{\theta}^t}{dP_{\theta_0}^t}(\cdot) = \exp \left\{ \int_0^t \ln \left(\frac{s(\theta)\varphi_s}{s(\theta_0)\varphi_s} \right) dN_s - \int_0^t (s(\theta)\varphi_s - s(\theta_0)\varphi_s) ds \right\} =$$

$$= \exp \left\{ N_t \ln \frac{s(\theta)}{s(\theta_0)} - s(\theta) \int_0^t \varphi_s ds + s(\theta_0) \int_0^t \varphi_s ds \right\}$$

Pagal faktorizacijos teoremą matome, kad N_t yra pakankama statistika šeimai $\theta \in \Theta$, kai $t \in [0, s]$.

$$4. \quad h(\theta, t) = s(\theta) + \varphi_t$$

Tada tikėtinumo funkcija pagal (1) formulę yra pavidalo:

$$L(\theta) = \frac{dP_{\theta}^t}{dP_{\theta_0}^t}(\cdot) = \exp \left\{ \int_0^t \ln \left(\frac{s(\theta) + \varphi_s}{s(\theta_0) + \varphi_s} \right) dN_s - \int_0^t (s(\theta) + \varphi_s - s(\theta_0) + \varphi_s) ds \right\} =$$

$$= \exp \left\{ \int_0^t \ln (s(\theta) + \varphi_s) dN_s - \int_0^t (s(\theta)_0 + \varphi_s) dN_s - s(\theta)t + s(\theta_0)t \right\}$$

Matome, kad pakankamos statistikos neturime, t.y. reikalingi visi stebėjimai $N_t, t \in [0, s]$.

3.2. PILNOS STATISTIKOS RADIMAS

Kaip žinome statistika N_t yra pilna jei iš

$$\mathbb{E}_{\theta} g(N_t) = 0, \quad \theta \in \Theta$$

išplaukia, kad

$$g(N_t) = 0.$$

Kadangi N_t yra nehomogeninis Puasono procesas su intensyvumu $h(\theta, t)$, tai

$$P(N_t = k) = \frac{\left(\int_0^t h(\theta, s) ds \right)^k}{k!} e^{-\int_0^t h(\theta, s) ds}$$

kai $k = 0, 1, 2, \dots$

Vadinasi

$$\mathbb{E}_{\theta} g(N_t) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k) P(N_t = k) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k) \frac{\left(\int_0^t h(\theta, s) ds \right)^k}{k!} e^{-\int_0^t h(\theta, s) ds} \quad (2)$$

Dabar nagrinėsime mūsų atvejus:

$$1. \quad h(\theta, t) = \theta$$

Tada (2) turi pavidalą:

$$\mathbb{E}_{\theta} g(N_t) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k) \frac{\left(\int_0^t \theta ds\right)^k}{k!} e^{-\int_0^t \theta ds} = \sum_{k=0}^{\infty} g(k) \frac{(\theta t)^k}{k!} e^{-\theta t}.$$

Iš čia matome, kad tai lygu 0, kai

$$g(N_t) = 0,$$

tai reiškia, kad N_t yra pilna statistika.

$$2. \quad h(\theta, t) = s(\theta)$$

Tada (2) turi pavidalą:

$$\mathbb{E}_{\theta} g(N_t) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k) \frac{\left(\int_0^t s(\theta) ds\right)^k}{k!} e^{-\int_0^t s(\theta) ds} = \sum_{k=0}^{\infty} g(k) \frac{(s(\theta)t)^k}{k!} e^{-s(\theta)t}$$

Iš čia matome, kad tai lygu 0, kai

$$g(N_t) = 0,$$

tai reiškia, kad N_t yra pilna statistika.

$$3. \quad h(\theta, t) = s(\theta)\varphi_s$$

Tada (2) turi pavidalą:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\theta} g(N_t) &= \sum_{k=0}^{\infty} g(k) \frac{\left(\int_0^t s(\theta)\varphi_s ds\right)^k}{k!} e^{-\int_0^t s(\theta)\varphi_s ds} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} g(k) \frac{\left(s(\theta) \int_0^t \varphi_s dt\right)^k}{k!} e^{-s(\theta) \int_0^t \varphi_s dt} \end{aligned}$$

Iš čia matome, kad tai lygu 0, kai

$$g(N_t) = 0,$$

tai reiškia, kad N_t yra pilna statistika.

Išvada. Visais trimis atvejais N_t yra pilna ir pakankama statistika tikimybinių matų šeimos P_{θ} , $\theta \in \Theta$ atžvilgiu.

4. NEHOMOGENINIO PUASONO PROCESO PROGNOZAVIMAS

Radę Ω pažymėsime funkcijų erdvių sudarytą iš skaičiuojančio proceso trajektorijos, t.y. $\omega(t) \in \Omega$ yra didėjančios tolydžios iš dešinės funkcijos apibrėžtos intervale $[0, \infty)$ įgyjančios reikšmes iš aibės $\{0, 1, 2, \dots\}$ tokios, kad $\omega(0) = 0$ ir $\omega(t) = \omega(t-) = 0$ arba 1 , kai $t \in [0, \infty)$. Kanoninį skaičiuojantį procesą N apibrėšime formule $N_t = N_t(\omega) := \omega(t)$. Žymėsime $\mathcal{F}_{(s,t)}^N = \sigma(N_u, s < u \leq t)$.

Nagrinėsime taškinio proceso N stebėjimo situaciją. Tarkime, kad $P(\theta)$ žymi tikimybinį matą, kai N_t yra nehomogeninis Puasono procesas su intensyvumo funkcija $h(\theta, t)$ ir žymėsime $\mathcal{P} = \{P(\theta), \theta \in \Theta\}$.

Praktiškai stebime procesą N_s , kai $0 < s < t$ ir norime prognozuoti procesą N_t , kai $t > s$.

Mūsų nagrinėjamoje situacijoje N_s yra pakankama ir pilna statistika, kai $s \geq 0$ tikimybinių matų šeimai $\mathcal{P}$. Remiantis tuo, kad taškinis procesas N_t yra nehomogeninis Puasono procesas su intensyvumu $h(\theta, t)$, turime

$$\mathbb{E}_\theta N_s = \int_0^s h(\theta, t) dt$$

ir

$$\mathbb{E}_\theta N_t = \int_0^t h(\theta, x) dx$$

Kaip žinome geriausia N_t prognozė užsirašo kaip funkcija nuo pilnos ir pakankamos statistikos N_s , t.y. $f(N_s)$ ir ji turi tenkinti sąlygą:

$$\mathbb{E}_\theta f(N_s) = \mathbb{E}_\theta N_t, \quad \theta \in \Theta, \quad t > s.$$

Išskirsime du atvejus, kai parametras θ , $\theta \in \Theta$ nežinomas ir kai θ , $\theta \in \Theta$ žinomas.

I. Tarkime, kad parametras θ , $\theta \in \Theta$ nežinomas.

1.
$$h(\theta, t) = \theta, \theta \in \Theta = (0, \infty)$$

Tada funkciją (prognozę) f ieškosime pavidalo

$$f(N_s) = \alpha N_s \tag{3}$$

kur $\alpha = \text{const.}$ dar nežinoma.

Iš čia gauname, kad

$$\mathbb{E}_\theta f(N_s) = \mathbb{E}_\theta \alpha N_s = \alpha \mathbb{E} N_s = \alpha \theta s.$$

Kadangi įstatę vietoj $h(\theta, t)\theta$ į (3) gauname

$$\mathbb{E}_{\theta} N_t = \int_0^t \theta dx = \theta t$$

tai

$$\alpha \theta s = \theta t.$$

Iš čia

$$\alpha = \frac{t}{s}$$

Dabar tai įstatome į (3):

$$f(N_s) = \frac{t}{s} N_s = N_s + \frac{N_s}{s} (t - s)$$

tai pagal 1.1 gauname, kad

$$f(N_s) = N_s + \frac{N_s}{s} (t - s)$$

yra tolygiai mažiausios dispersijos nepaslinkta N_t prognozė.

$$2. \quad h(\theta, t) = s(\theta) > 0, \theta \in \Theta$$

Šiuo atveju N_t vidurkis lygus

$$\mathbb{E}_{\theta} N_t = \int_0^t s(\theta) dx = s(\theta) t \quad (4)$$

N_t prognozė $f(N_s)$ ieškosime pavidalu

$$f(N_s) = \alpha N_s,$$

kur $\alpha = \text{const.}$ dar nežinoma. Kadangi

$$\mathbb{E}_{\theta} f(N_s) = \mathbb{E}_{\theta} \alpha N_s = \alpha \mathbb{E} N_s = \alpha s(\theta) s,$$

tai atsižvelgę į (4) gauname, kad

$$\alpha s(\theta) s = s(\theta) t$$

$\Rightarrow$

$$\alpha = \frac{t}{s}$$

Dabar tai įstatome į (3):

$$f(N_s) = \frac{t}{s} N_s = N_s + \frac{N_s}{s} (t - s)$$

tai pagal 1.1 gauname, kad

$$f(N_s) = N_s + \frac{N_s}{s} (t - s)$$

yra tolygiai mažiausios dispersijos nepaslinkta N_t prognozė.

$$3. \quad h(\theta, t) = s(\theta) \varphi_t$$

φ_t žinimas, $\theta \in \Theta$. Šiuo atveju N_t vidurkis lygus

$$\mathbb{E}_\theta N_t = \int_0^t s(\theta) \varphi_x dx = s(\theta) \int_0^t \varphi_x dx \quad (5)$$

N_t prognozę ieškosime pavidalu

$$f(N_s) = \alpha N_s,$$

kur $\alpha = \text{const.}$ dar nežinoma. Kadangi

$$\mathbb{E}_\theta f(N_s) = \mathbb{E}_\theta \alpha N_s = \alpha \mathbb{E} N_s = \alpha s(\theta) \int_0^s \varphi_x dx \quad (6)$$

Sulyginę (5) ir (6), gauname

$$\alpha s(\theta) \int_0^s \varphi_x dx = s(\theta) \int_0^t \varphi_x dx$$

Iš čia gauname, kad

$$\alpha = \frac{\int_0^t \varphi_x dx}{\int_0^s \varphi_x dx} N_s = N_s + \frac{N_s}{\int_0^t \varphi_x dx} \left(\int_0^t \varphi_x dx - \int_0^s \varphi_x dx \right) = N_s + \frac{N_s}{\int_0^t \varphi_x dx} \int_s^t \varphi_x dx$$

yra tolygiai mažiausia dispersija nepaslinktos N_t prognozė.

II. Tarkime, kad parametras θ , $\theta \in \Theta$ žinomas.

Pagal 1.1 teoriją geriausia N_t prognozė yra sąlyginis vidurkis.

$$\varphi(N_s) = \mathbb{E}_\theta(N_t | N_s)$$

Kadangi procesas N_s yra procesas su nepriklausomais pokyčiais, tai

$$\varphi(N_s) = \mathbb{E}_\theta(N_t | N_s) = \mathbb{E}_\theta(N_s + N_t - N_s | N_s) = N_s + s(\theta) \int_s^t \varphi_x dx$$

yra prognozė.

Tai turi sutapti su N_t vidurkiu

$$\mathbb{E} N_t = s(\theta) \int_0^t \varphi_x dx$$

Mūsų atveju prognozė yra

$$\varphi(N_s) = N_s + s(\theta) \int_s^t \varphi_x dx$$

sulyginame

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\theta N_t &= s(\theta) \int_0^t \varphi_x dx = \mathbb{E}_\theta \varphi(N_s) = \mathbb{E}_\theta \left(N_s + s(\theta) \int_s^t \varphi_x dx \right) = \mathbb{E} N_s + \\ &+ s(\theta) \int_s^t \varphi_x dx = s(\theta) \int_0^s \varphi_x dx + s(\theta) \int_s^t \varphi_x dx = s(\theta) \left(\int_0^s \varphi_x dx + \int_s^t \varphi_x dx \right) = \\ &= s(\theta) \int_0^t \varphi_x dx \end{aligned}$$

Vadinasi

$$f(N_s) = N_s + s(\theta) \int_s^t \varphi_x dx$$

yra tolygiai mažiausia dispersija nepaslinktos N_t prognozės mūsų visais turimais atvejais, tik pastebime, kad:

1. Kai $h(\theta, t) = \theta$, imame $s(\theta) = \theta$, o $\varphi_x \equiv 1$.
2. Kai $h(\theta, t) = s(\theta)$, imame $s(\theta) = s(\theta)$, o $\varphi_x \equiv 1$.
3. Kai $h(\theta, t) = s(\theta)\varphi_t$, sutampa su ką tik išnagrinėtu.

IŠVADOS

Buvo nagrinėtas nehomogeninis Puasono procesas:

$$P(N(t) = n) = \frac{\left(\int_0^t h(\theta, s) ds\right)^n}{n!} \cdot e^{-\int_0^t h(\theta, s) ds}, n = 0, 1, 2, \dots$$

kur $h(\theta, s)$ tokia, kad

$$H(\theta, t) = \int_0^t h(\theta, s) ds \rightarrow \infty, t \rightarrow \infty.$$

$$H(\theta, t) < \infty, \text{ kai } t \in R_+.$$

Tada sudarytas X_t prognozės $f(N_s)$ ieškojimo algoritmas:

- nustatome, kad X_s yra pilna ir pakankama statistika;
- Randomas $f(N_s)$ tikrasis pavidalas pasinaudojant tuo, kad

$$\mathbb{E}_\theta f(X_s) = \mathbb{E}_\theta X_t,$$

kai θ nežinomas ir tuo, kad

$$f(X_s) = \mathbb{E}_\theta(X_t | X_s),$$

kai θ žinomas.

Ieškant pilnos ir pakankamos statistikos gavome, jog pirmais trimis atvejais:

- $h(\theta, s) = \theta$
- $h(\theta, s) = s(\theta)$
- $h(\theta, s) = s(\theta) \cdot \varphi_s$

N_t yra pilna ir pakankama statistika tikimybinių matų šeimos P_θ , $\theta \in \Theta$ atžvilgiu, o ketvirtuoju atveju:

- $h(\theta, s) = s(\theta) + \varphi_s$

pastebėjome, jog pakankamos statistikos neturime, t.y. reikalingi visi stebėjimai N_t , $t \in [0, s]$.

Pasinaudojant gautais pilnos ir pakankamos statistikos rezultatais buvo rastas nehomogeninio Puasono proceso tolygiai mažiausios dispersijos nepaslinkta N_t prognozė trimis atvejais.

LITERATŪROS SĄRAŠAS

- [1] V.Kanišauskas, *Atsitiktinių procesų asimptotinis parametrų įvertinimas ir paprastų hipotezių atskyrimas: Daktaro disertacija*. Vilnius (1998)
- [2] B.Johansson, *Unbiased Prediction in the Poisson and Yule Processes*. Stockholm (1990).
- [3] J.Jacob, *Multivariate point processes: predictable projection, Randon – Nicodým derivatives representation of martingales*. Z. Wahr. verw. Geb.,**34** (1975), 235 – 253.
- [4] T.Björk, B. Johansson, *Adaptive prediction and reverse martingales*. Stochholm (1992)
- [5] Ю.А. Кутоянц, *Оценивание параметров случайных процессов*, Изд-во АН.Арм.ССР, Ереван, 1980.
- [6] Ю.Н Линков, *Асимптотические методы статистики случайных. процессов*. Наукова думка, Киев (1990)
- [7] Ю.Н Линков, *Лекции по математической статистике*. Часть 1: Учебное пособие для студентов и аспирантов. – Донецк: Истоки, 1999. – 252 с.

PREDICTION OF NON-HOMOGENOUS POISSON PROCESS

Summary

In the first part of this work is theory, which focuses on random processes of prediction. In the second part of a non-homogeneous Poisson process explored prediction. In order to obtain the non-homogeneous Poisson process, we have a complete and sufficient statistics in three cases, the fourth complex case such statistics didn't exist. Taking advantage of these results were obtained by a non-homogeneous Poisson process uniformly minimum dispersion unbiased prediction in three of the cases examined, when the corresponding parameter is known or unknown. Along submitted analytical predictions expression.