VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
TIKIMYBIŲ TEORIJOS IR SKAIČIŲ TEORIJOS KATEDRA

Kęstutis Janulis

Viena jungtinė universalumo teorema

Magistro baigiamasis darbas

Leidžiu ginti ....

Darbo vadovas **prof., habil.dr. Antanas Laurinčikas**

Vilnius 2011

Turinys

1. Įvadas

Tegul $s = \sigma + it$ yra kompleksinis kintamasis. Rymano dzeta funkcija $\zeta(s)$ pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra apibrėžiama Dirichlė eilute

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s}$$

ir yra analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą, išskyrus tašką $s = 1$, kuris yra paprastasis polius su reziduumu 1. 1975 m. S.M. Voroninas atrado labai įdomią funkcijos $\zeta(s)$ savybę, kuri dabar vadinama universalumu. Jis įrodė, kad bet kuri analizinė funkcija tolygiai kompaktinėse aibėse norimu tikslumu yra aproksimuojama postūmiais $\zeta(s + i\tau), \tau \in \mathbb{R}$. Tikslus dabartinis Vorinino teoremos formulavimas yra toks $[7]$. Simboliu $meas\{A\}$ žymime mačios aibės $A \subset \mathbb{R}$ Lebego matą.

1 teorema. *Tarkime, kad K yra juostos* $D = \{ s \in \mathbb{C}: \frac{1}{2} < \sigma < 1\}$ *kompaktinė aibė, turinti jungųjį papildinį, o funkcija* $f(s)$ *yra tolydi ir nevirstanti nuliu aibėje K bei analizinė aibės K viduje. Tuomet su kiekvienu* $\varepsilon > 0$

$$\liminf_{T \to \infty} \frac{1}{T} \, meas\{ \tau \in [0, T]: \sup_{s \in K} |\zeta(s + i\tau) - f(s)| < \varepsilon \} > 0.$$

Ši teorema tvirtina, kad Rymano dzeta funkcijos postūmių $\zeta(s + i\tau)$, aproksimuojančių duotą analizinę funkciją, aibė yra gana plati, jos apatinis tankis yra griežtai teigiamas.

Hurvico dzeta funkcija yra Rymano dzeta funkcijos apibendrinimas. Tegul $\alpha, 0 < \alpha \leq 1$, yra fiksuotas parametras. Hurvino dzeta funkcija $\zeta(s, \alpha)$ pusplokštumėje $\sigma > 1$ apibrėžiama Dirichlė eilute

$$\zeta(s, \alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m + \alpha)^s}$$

ir yra analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą, išskyrus tašką $s = 1$, kuris yra paprastasis polius su reziduumu 1. Kai $\alpha = 1$, tai funkcija $\zeta(s, \alpha)$ virsta $\zeta(s)$.

Funkcija $\zeta(s, \alpha)$ priklauso nuo parametro α, todėl jos savybės priklauso nuo šio parametro aritmetinės prigimties. Paprasčiausias atvejis yra, kai parametras α yra transcendentusis skaičius, tai yra, jis nėra jokio polinomo su racionaliaisiais koeficientais šaknis, nes šiuo atveju skaičių aibė

$$\{ \log(m + \alpha): m \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} \}$$

yra tiesiškai nepriklausoma virš racionaliųjų skaičių kūno. S.M. Gonekas (Gonek) ir B. Bagčis (Bagchi) nepriklausomai vienas nuo kito įrodė $[5]$, $[1]$, kad funkcija $\zeta(s, \alpha)$ su transcendenčiuoju parametru α taip pat yra universali, tačiau šis universalumas yra šiek tiek kitoks negu funkcijų $\zeta(s)$. Teisinga yra tokia teorema.

2 teorema. *Tarkime, kad K yra juostos D kompaktinė aibė, turinti jungųjį papildinį, o funkcija $f(s)$ yra tolydi aibėje K ir analizinė aibės K viduje. Tuome su kiekvienu $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T}\, meas\{\tau \in [0,T]: \sup_{s\in K}|\zeta(s+i\tau,\alpha) - f(s)| < \varepsilon\} > 0.$$

Kaip matome, skirtingai nuo 1 teoremos, 2 teoremoje nereikalaujama, kad funkcija $f(s)$ neturėtų nulių aibėje K.

2007m. H. Mišu (Mishou) įrodė [11] įdomią teoremą apie jungtinį funkcijų $\zeta(s)$ ir $\zeta(s,\alpha)$ su transcendenčiuoju parametru α universalumą. Jungtinis universalumas reiškia, kad analizinių funkcijų rinkinys yra aproksimuojamas dzeta funkcijų postūmių rinkiniu. Mišu teorema formuluojama taip.

3 teorema. *Tarkime, kad α yra transcendentusis skaičius, K_1 ir K_2 yra kompaktinės juostos D aibės, turinčios jungiuosius papildinius. Funkcija $f_1(s)$ yra tolydi ir nevirstanti nuliu aibėje K_1, bei analizinė jos viduje, o $f_2(s)$ yra tolydi aibėje K_2 ir analizinė jos viduje. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T}\, meas\{\tau \in [0,T]: \sup_{s\in K_1}|\zeta(s+i\tau) - f_1(s)| < \varepsilon,$$
$$\sup_{s\in K_2}|\zeta(s+i\tau,\alpha) - f_2(s)| < \varepsilon\} > 0.$$

Magistro darbo tikslas yra įrodyti 3 teoremos analogą funkcijoms $L(s,\chi)$ ir $\zeta(s,\alpha)$ su transcendenčiuoju parametru α. Čia χ yra Dirichlė charakteris moduliu q, o $L(s,\chi)$ yra atitinkama Dirichlė L funkcija, kuri pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra apibrėžiama Dirichlė eilute

$$L(s,\chi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(m)}{m^s}$$

ir meromorfiškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą. Kai χ yra pagrindinis charakteris, tai taškas $s = 1$ yra funkcijos $L(s,\chi)$ paprastasis polius, o kai χ yra nepagrindinis charakteris, tai funkcija $L(s,\chi)$ yra sveikoji funkcija.

Pagrindinis magistro darbo rezultatas yra ši teorema.

4 teorema. *Tarkime, kad α yra transcendentusis skaičius, o aibės K_1 ir K_2 bei funkcijos $f_1(s)$ ir $f_2(s)$ tenkina* 3 *teoremos sąlygas. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T}\, meas\{\tau \in [0,T]: \sup_{s\in K_1}|L(s+i\tau,\chi) - f_1(s)| < \varepsilon,$$
$$\sup_{s\in K_2}|\zeta(s+i\tau,\alpha) - f_2(s)| < \varepsilon\} > 0.$$

2. Dirichlė L funkcijos

Šiame skyrelyje pateiksime Dirichlė L funkcijų savybes, reikalingas 4 teoremos įrodymui.

Primename, kad 1837 m. P.G. Dirichlė (Dirichlet), nagrinėdamas pirminių skaičių pasiskirstymą aritmetinėje progresijoje $m \equiv a(mod\ q)$ $(a,q)=1$, apibrėžė charakterius $\chi(m)$, $m \in \mathbb{N}$, moduliu q. Šiuolaikinės matematikos terminais charakteris yra apverčiamų likinių moduliu q grupės tolydus homomorfizmas multiplikatyvioje kompleksinių skaičių, moduliu lygių 1, grupėje. Paprasčiau Dirichlė charakterio sąvoka yra suprantana taip. Kiekviena visiškai multiplikatyvi funkcija $g(m)$ ($g(m,n)=g(m)g(n)$ su visais $m \in \mathbb{N}$), kuri yra periodinė su periodu q ($g(m+q)=g(m)$) ir tenkina sąlygas $g(m)=0$, kai $(m,q)>1$, ir $g(m)\neq 0$, kai $(m,g)=1$, sutampa su vienu iš Dirichlė charakterių moduliu q.

Charakteris $\chi\ (mod\ q)$ yra vadinamas pagrindiniu ir žymimas χ_0, jeigu $\chi_0(m)=1$ su visais $(m,q)=1$.

Tarkime, χ yra Dirichlė charakteris moduliu q, tuomet Dirichlė L funkcija $L(s,\chi)$ pusplokštumėje, $\sigma>1$ yra apibrėžiama Dirichlė eilute

$$L(s,\chi)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\chi(m)}{m^s}.$$

Iš charakterio χ periodiškumo gauname, kad srityje $\sigma>1$

$$L(s,\chi)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\chi(m)}{m^s}=\sum_{k=1}^{q-1}\chi(k)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(nq+k)^s}=$$
$$=\frac{1}{q^s}\sum_{k=1}^{q-1}\chi(k)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+\frac{k}{q})^s}=\frac{1}{q^s}\sum_{k=1}^{q-1}\chi(k)\zeta(s,\frac{k}{q}).$$

Kadangi Hurvico dzeta funkcija yra reguliari visur, išskyrus paprastą polių taške $s=1$ su reziduumu 1, tai iš čia išplaukia, kad ir funkcija $L(s,\chi)$ yra pratęsiama į visą s plokštumą, išskyrus tašką $s=1$, kuriame gali būti paprastasis polius su reziduumu

$$\frac{1}{q}\sum_{k=1}^{q-1}\chi(k).$$

Tačiau iš charakterių savybių turime, kad jei $\chi\neq\chi_0$, tai

$$\sum_{k=1}^{q-1}\chi(k)=0.$$

Todėl funkcijos $L(s,\chi)$ reziduumas taške 1 yra 0. Vadinasi funkcija $L(s,\chi)$, kai $\chi\neq\chi_0$ yra analizinė visoje baigtinėje s plokštumoje, tai yra, ji yra sveikoji funkcija.

Iš charakterio χ multiplikatyvumo savybės gauname, kad funkcija $L(s,\chi)$ pusplokštumėje $\sigma > 1$ gali būti užrašyta Oilerio sandauga pagal pirminius skaičius

$$L(s,\chi) = \prod_p (1 - \frac{\chi(p)}{p^s})^{-1}.$$

Pastaroji sandauga absoliučiai konverguoja pusplokštumėje $\sigma > 1$, ir jos visi daugikliai yra nelygūs 0. Todėl $L(s,\chi) \neq 0$ pusplokštumėje $\sigma > 1$.

Tarkime, kad $\chi = \chi_0 (mod\ q)$. Tuomet iš Oilerio sandaugos randame, kad srityje $\sigma > 1$

$$L(s,\chi_0) = \prod_p (1 - \frac{\chi_0(p)}{p^s})^{-1} = \prod_p (1 - \frac{1}{p^s})^{-1} \prod_{p|q} (1 - \frac{1}{p^s}).$$

Kadangi pusplokštumėje $\sigma > 1$

$$\zeta(s) = \prod_p (1 - \frac{1}{p^s})^{-1},$$

tai iš čia gauname, kad srityje $\sigma > 1$

$$L(s,\chi_0) = \zeta(s) \prod_{p|q} (1 - \frac{1}{p^s}).$$

Funkcija $\zeta(s)$ taške 1 turi paprastąjį polių su reziduumu 1, todėl pastaroji formulė rodo, kad funkcija $L(s,\chi_0)$ taške $s = 1$ taip pat turi paprastąjį polių su reziduumu

$$\prod_{p|q} (1 - \frac{1}{p^s}).$$

Šiuos ir kitus rezultatus apie Dirichlė L funkcijos teoriją galima rasti monografoje [13].

3. Jungtinė ribinė teorema

Pagrindinis magistro darbo teoremos apie funkcijų $L(s,\chi)$ ir $\zeta(s,\chi)$ jungtinį universalumą įrodymas remiasi jungtine ribine teorema silpnojo tikimybinių matų konvergavime prasme analizinių funkcijų erdvėje. Simboliu $\mathfrak{B}(S)$ žymėsime erdvės S Borelio aibių σ kūną. Tarkime, kad turime tikimybinius matus P_n, $n \in \mathbb{N}$, ir P erdvėje $(S, \mathfrak{B}(S))$. Primename, kad P_n, kai $n \to \infty$, siplnai konverguoja į matą P, jei su kiekviena realia, aprėžta, tolydžia funkcija f erdvėje S yra teisinga lygybė

$$\lim_{n\to\infty} \int_S f\, dP_n = \int_S f\, dP.$$

Tegul $D = \{ s \in \mathbb{C}: \frac{1}{2} < \sigma < 1 \}$, o $H(D)$ yra analizinių juostoje D funkcijų erdvė su tolygaus konvergavimo kompaktinėse aibėse topologija. Šiame skyrelyje nagrinėsime tikimybinį matą

$$P_T(A) = \frac{1}{T}\, meas\{ \tau \in [0,T]: \big(L(s+i\tau,\chi), \zeta(s+i\tau,\alpha)\big) \in A \}, A \in \mathfrak{B}(H^2(D)).$$

Čia $H^2(D) = H(D) \times H(D)$. Teoremos formulavimui yra reikalingi kai kurie apibrėžimai. Tegul $\gamma = \{ s \in \mathbb{C}: |s| = 1 \}$ yra vienetinis apskritimas kompleksinėje plokštumoje. Apibrėžiame

$$\Omega_1 = \prod_p \gamma_p, \Omega_2 = \prod_{m=0}^{\infty} \gamma_m.$$

Čia pirmoje sandaugoje $\gamma_p = \gamma$ su visais pirminiais p, o antrojoje sandaugoje $\gamma_m = \gamma$ su visais $m \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Kadangi vienetinis apskritimas yra kompaktinė aibė, pagal Tichonovo teoremą [12] begaliniamačiai torai Ω_1 ir Ω_2 su sandaugos topologija ir pataškinės daugybos operacija yra kompaktinės, topologinės Abelio grupės. Todėl erdvėje $\big(\Omega_j, \mathfrak{B}(\Omega_j)\big)$ galima apibrėžti [7] tikimybinį Haro (Haar) matą m_{jH}, $j = 1,2$. Gauname tikimybinę erdvę $(\Omega_j, \mathfrak{B}\big(\Omega_j\big), \mathrm{m}_{jH})$, $j = 1,2$. Tegul

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2.$$

Tuomet vėl pagal Tichonovo teoremą turime, kad Ω yra kompaktinė topologinė grupė ir tai duoda naują tikimybinė erdvę $(\Omega, \mathfrak{B}(\Omega), \mathrm{m}_H)$, čia m_H tikimybinis Haro matas erdvėje $(\Omega, \mathfrak{B}(\Omega))$. Pastebime, kad Haro matas m_H yra matų m_{1H} ir m_{2H} sandauga, tai yra, jei $A = A_1 \times A_2$, $A_1 \in \mathfrak{B}(\Omega_1)$, $A_2 \in \mathfrak{B}(\Omega_2)$, tai

$$\mathrm{m}_H(A) = \mathrm{m}_{1H}(A_1)\mathrm{m}_{2H}(A_2).$$

Tegul $\omega_1(p)$ yra elemento $\omega_1 \in \Omega_1$ projekcija į koordinatinę erdvę γ_p, o $\omega_2(m)$ yra elemento $\omega_2 \in \Omega_2$ projekcija į koordinatinę erdvę γ_m. Funkcija $\omega_1(p)$ pratęsiama į visą aibę $\mathbb{N}$ formulės

$$\omega_1(m) = \prod_{p^r || m} \omega_1^r(p), m \in \mathbb{N},$$

kurioje $p^r || m$ reiškia, kad $p^r | m$, tačiau $p^{r+1} \nmid m$, pagalba. Dabar apibrėžiame

$$L(s, \omega_1, \chi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(m)\omega_1(m)}{m^s}$$

ir

$$\zeta(s, \alpha, \omega_2) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\omega_2(m)}{(m+\alpha)^s}.$$

Tuomet yra žinoma [7], [14], kad $L(s,\omega_1,\chi)$ yra $H(D)$ - reikšmis atsitiktinis elementas, apibrėžtas tikimybinėje erdvėje $(\Omega_1, \mathfrak{B}(\Omega_1), \mathrm{m}_{1H})$, o $\zeta(s,\alpha,\omega_2)$ yra $H(D)$ – reikšmis atsitiktinis elementas, apibrėžtas tikimybinėje erdvėje $(\Omega_2, \mathfrak{B}(\Omega_2), \mathrm{m}_{2H})$. Be to, iš charakterio χ visiško multiplikatyvumo išplaukia, kad

$$L(s,\omega_1,\chi) = \prod_p (1 - \frac{\omega_1(p)\chi(p)}{p^s})^{-1}, s \in D,$$

su beveik visais $\omega_1 \in \Omega_1$ mato m_{1H} atžvilgiu.

Tegul $\omega = (\omega_1, \omega_2)$. Trumpumo dėlei apibrėžiame

$$Z(s) = Z(s,\alpha,\chi) = (L(s,\chi), \zeta(s,\alpha))$$

ir

$$Z(s,\omega) = Z(s,\omega,\alpha,\chi) = \big(L(s,\omega_1,\chi), \zeta(s,\omega_2,\alpha)\big).$$

Tuomet $Z(s,\omega)$ yra $H^2(D)$ - reikšmis atsitiktinis elementas, apibrėžtas tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathfrak{B}(\Omega), m_H)$. Tegul P_Z yra atsitiktinio elemento $Z(s,\omega)$ pasiskirstymas, tai yra, P_Z yra tikimybinis matas erdvėje $(H^2(D), \mathfrak{B}\big(H^2(D)\big))$, apibrėžtas formule

$$P_Z(A) = m_H(\omega \in \Omega: Z(s,\omega) \in A), \qquad A \in \mathfrak{B}\big(H^2(D)\big).$$

Trumpiau matą P_T galime užrašyti taip

$$P_T(A) = \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0,T]: Z(s+i\tau) \in A\},\ A \in \mathfrak{B}\big(H^2(D)\big).$$

Dabar formuluojame ribinę teoremą.

3. 1 teorema. *Tarkime, kad α yra transcendentusis skaičius. Tuomet tikimybinis matas P_T, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į P_Z.*

3.1 teoremos įrodymą pradėsime ribine teorema tikimybiniams matams erdvėje $(\Omega, \mathfrak{B}(\Omega))$. Tegul $\mathbb{P}$ yra visų pirminių skaičių aibė. Apibrėžiame

$$Q_T(A) = \frac{1}{T} meas\left\{\tau \in [0,T]: \Big(\big(p^{-i\tau}: p \in \mathbb{P}\big), \big((m+\alpha)^{-i\tau}: m \in \mathbb{N}_0\big)\Big) \in A\right\}, A \in \mathfrak{B}(\Omega).$$

3. 2 lema. *Tarkime, kad α yra transcendentusis skaičius. Tuomet tikimybinis matas Q_T, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į Haro matą m_H.*

Įrodymas. Yra žinoma, kad toro Ω dualioji arba charakterių grupė yra izomorfinė grupei

$$G \stackrel{\text{def}}{=} (\bigoplus_{p \in \mathbb{P}} \mathbb{Z}_p) \bigoplus (\bigoplus_{m \in \mathbb{N}_0} \mathbb{Z}_m);$$

čia $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}$ su visais $p \in \mathbb{P}$ ir $\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}$ su visais $m \in \mathbb{N}_0$. Grupės G elementas $(\underline{k}, \underline{l}) = (k_p: p \in \mathbb{P}, l_m: m \in \mathbb{N}_0)$, kuriame tik tai baigtinis skaičius sveikųjų skaičių k_p ir l_m yra nelygus 0, veikia grupėje G pagal taisyklę

$$\left(\underline{x}, \underline{y}\right) \to \left(\underline{x}^{\underline{k}}, \underline{y}^{\underline{l}}\right) = \prod_{p\in\mathbb{P}} x_p^{k_p} \prod_{m\in\mathbb{N}_0} y_m^{l_m};$$

Čia $\underline{x} = (\, x_p\colon p \in \mathbb{P}\,) \in \Omega_1$, $\underline{y} = (\, y_m\colon m \in \mathbb{N}_0) \in \Omega_2$. Iš šių pastabų išplaukia, kad mato Q_T Furjė transformacija $g_T\left(\underline{k}, \underline{l}\right)$ turi pavidalą

$$g_T\left(\underline{k}, \underline{l}\right) = \int_\Omega (\prod_{p\in\mathbb{P}} x_p^{k_p} \prod_{m\in\mathbb{N}_0} y_m^{l_m})\, dQ_T =$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T (\prod_{p\in\mathbb{P}} p^{-i\tau k_p} \prod_{m\in\mathbb{N}_0} (m+\alpha)^{i\tau l_m})\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T \exp\{-i\tau(\sum_{p\in\mathbb{P}} k_p \log p + \sum_{m\in\mathbb{N}_0} l_m \log(m+\alpha))\}\, d\tau\,; \tag{3.1}$$

čia, kaip ir anksčiau tik baigtinis skaičius sveikųjų skaičių k_p ir l_m yra nelygūs 0. Gerai žinoma, kad aibė skaičių $\{\log p\colon\, p \in \mathbb{P}\}$ yra tiesiškai nepriklausoma virš racionaliųjų skaičių kūno $\mathbb{Q}$. Tai išplaukia iš pagrindinės aritmetikos teoremos. Kadangi α yra transcendentusis skaičius, tai aibė $\{\log(m+\alpha)\colon\, m \in \mathbb{N}_0\}$ taip pat yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$. Tarkime priešingai, kad ta aibė nėra nepriklausoma virš kūno $\mathbb{Q}$. Tuomet egzistuoja tokie sveikieji nelygus 0 skaičiai $a_1, \dots, a_l$ ir $m_1, \dots, m_l \in \mathbb{N}_0$, kad

$$a_1 \log(m_1+\alpha) + \cdots + a_l \log(m_l+\alpha) = 0.$$

Iš čia randame, kad

$$(m_1+\alpha)^{a_1} \cdot \dots \cdot (m_l+\alpha)^{a_l} = 1 \tag{3.2}$$

Tegul apibrėžtumo dėlei $a_1, \dots, a_r > 0$, $a_{r+1}, \dots, a_l < 0$. Tada iš (3.2) gauname, kad

$$(m_1+\alpha)^{a_1} \cdot \dots \cdot (m_r+\alpha)^{a_r} = (m_{r+1}+\alpha)^{a_{r+1}} \cdot \dots \cdot (m_l+\alpha)^{a_l}.$$

Tai reiškia, kad α yra polinomo su sveikaisiais koeficientais

$$(m_1+\alpha)^{a_1} \cdot \dots \cdot (m_r+\alpha)^{a_r} - (m_{r+1}+\alpha)^{a_{r+1}} \cdot \dots \cdot (m_l+\alpha)^{a_l}$$

šaknis, kas prieštarauja jo transcendentiškumui. Iš šių pastabų išplaukia, kad ir aibė $\{\log p\colon\, p \in \mathbb{P}\} \cup \{\log(m+\alpha)\colon\, m \in \mathbb{N}_0\}$ taip pat yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$. Tikrai, jeigu egzistuotų tokie nelygūs 0 sveikieji skaičiai $a_1, \dots, a_k$ ir $b_1, \dots, b_l$, kad

$$a_1 \log p_1 + \cdots + a_k \log p_k + b_1 \log(m_1+\alpha) + \cdots + b_l \log(m_l+\alpha) = 0,$$

tai iš čia gautume, kad

$$p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k} (m_1+\alpha)^{b_1} \dots (m_l+\alpha)^{b_l} = 1.$$

Pastaroji lygybė taip pat prieštarauja skaičiaus α transcendentiškumui.

Nesunku matyti, kad

$$I \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{T}\int_0^T \exp\{-i\tau(\sum_{p\in\mathbb{P}} k_p \log p + \sum_{m\in\mathbb{N}_0} l_m \log(m+\alpha))\}\, d\tau = 1,$$

kai visi k_p ir l_m yra nuliai. Kai šie skaičiai nevisi nuliai, tai tuomet

$$I = -\frac{1}{T}\exp\{-i\tau(\sum_{p\in\mathbb{P}} k_p \log p + \sum_{m\in\mathbb{N}_0} l_m \log(m+\alpha))\}\cdot$$
$$\cdot(-i(\sum_{p\in\mathbb{P}} k_p \log p + \sum_{m\in\mathbb{N}_0} l_m \log(m+\alpha)))^{-1}\Big|_0^T =$$
$$= \frac{1-\exp\{-iT(\sum_{p\in\mathbb{P}} k_p \log p + \sum_{m\in\mathbb{N}_0} l_m \log(m+\alpha))\}}{iT(\sum_{p\in\mathbb{P}} k_p \log p + \sum_{m\in\mathbb{N}_0} l_m \log(m+\alpha))}.$$

Taigi iš (3.1) formulės gauname, kad

$$g_T(\underline{k},\underline{l}) = \begin{cases} 1, & kai\ (\underline{k},\underline{l}) = (\underline{0},\underline{0}), \\ \dfrac{1-\exp\{-iT(\sum_{p\in\mathbb{P}} k_p \log p + \sum_{m\in\mathbb{N}_0} l_m \log(m+\alpha))\}}{iT(\sum_{p\in\mathbb{P}} k_p \log p + \sum_{m\in\mathbb{N}_0} l_m \log(m+\alpha))}, & kai\ (\underline{k},\underline{l}) \neq (\underline{0},\underline{0}). \end{cases}$$

Todėl

$$\lim_{T\to\infty} g_T(\underline{k},\underline{l}) = \begin{cases} 1, & kai\ (\underline{k},\underline{l}) = (\underline{0},\underline{0}), \\ 0, & kai\ (\underline{k},\underline{l}) \neq (\underline{0},\underline{0}). \end{cases}$$

Kadangi Furjė transformacijos $g_T(\underline{k},\underline{l})$ riba atitinka Haro mato m_H Furjė transformaciją, tai iš bendrų tolydumo teoremų kompaktinėms grupėms (1.4.2 teorema iš [6]) gauname, kad matas Q_T, kai $T\to\infty$, silpnai konverguoja į Haro matą m_H.

Tarkime, kad $\sigma_1 > \frac{1}{2}$ yra fiksuotas skaičius. Apibrėžiame

$$v_1(m,n) = \exp\left\{-\left(\frac{m}{n}\right)^{\sigma_1}\right\}, m,n\in\mathbb{N},$$

ir

$$v_2(m,n) = v_2(m,n,\alpha) = \exp\left\{-\left(\frac{m+\alpha}{n+\alpha}\right)^{\sigma_1}\right\}, n\in\mathbb{N}, m\in\mathbb{N}_0.$$

Be to, tegul

$$L_n(s) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\chi(m)v_1(m,n)}{m^s},$$

$$\zeta_n(s,\alpha) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{v_2(m,n)}{(m+\alpha)^s}$$

ir

$$L_n(s,\omega_1,\chi)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\chi(m)\omega_1(m)v_1(m,n)}{m^s},$$

$$\zeta_n(s,\omega_2,\alpha)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\omega_2(m)v_2(m,n)}{(m+\alpha)^s}.$$

Yra žinoma [7], [9], kad eilutės

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\chi(m)v_1(m,n)}{m^s}$$

ir

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{v_2(m,n)}{(m+\alpha)^s}$$

konverguoja absoliučiai pusplokštumėje $\sigma>\frac{1}{2}$. Trumpumo dėlei tegul

$$Z_n(s)=Z_n(s,\alpha,\chi)=(L_n(s,\chi),\zeta_n(s,\alpha))$$

ir

$$Z_n(s,\omega)=Z_n(s,\omega,\alpha,\chi)=(L_n(s,\omega_1,\chi),\zeta_n(s,\omega_2,\alpha)).$$

Įrodysime ribinę teoremą tikimybiniam matui

$$P_{T,n}(A)\overset{\text{def}}{=}\frac{1}{T}meas\{\,\tau\in[0,T]\colon Z_n(s+i\tau)\in A\,\},A\in\mathfrak{B}\big(H^2(D)\big).$$

Apibrėžiame dar vieną tikimybinį matą. Tegul $\hat{\omega}\in\Omega$ ir

$$\hat{P}_{T,n}(A)\overset{\text{def}}{=}\frac{1}{T}meas\{\tau\in[0,T]\colon Z_n(s+i\tau,\hat{\omega})\in A\,\},A\in\mathfrak{B}\big(H^2(D)\big).$$

3.3 lema. *Erdvėje $(H^2(D),\mathfrak{B}\big(H^2(D)\big))$ egzituoja toks tikimybinis matas P_n į kurį, kai $T\to\infty$, siplnai konverguoja abu matai $P_{T,n}$ ir $\hat{P}_{T,n}$.*

Įrodymas. Remsimės viena silpnojo tikimybinio mato konvergavimo savybe. Tarkime, kad P yra tikimybinis matas erdvėje $(S,\mathfrak{B}(S))$, o $h\colon S\to S_1$ yra mati funkcija. Tai reiškia, kad

$$h^{-1}\mathfrak{B}(S_1)\subset\mathfrak{B}(S).$$

Tuomet matas P erdvėje $(S_1,\mathfrak{B}(S_1))$ apibrėžia [2] vienintelį matą Ph^{-1} formule

$$Ph^{-1}(A)=P(h^{-1}A),\qquad A\in\mathfrak{B}(S_1).$$

Be to yra teisingas toks tvirtinimas [2]. Jei P_n, kai $n\to\infty$, silpnai konverguoja į matą P, ir funkcija h yra tolydi, tai tuomet P_nh^{-1}, kai $n\to\infty$, taip pat silpnai konverguoją į Ph^{-1}.

Apibrėžiame funkciją $h_n: \Omega \to H^2(D)$ formule

$$h_n(\omega) = h_n(\omega_1, \omega_2) = \Big(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(m)\omega_1(m)v_1(m,n)}{m^s},$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\omega_2(m)v_2(m,n)}{(m+\alpha)^s}\Big).$$

Kadangi pastarosios eilutės konverguoja absoliučiai pusplokštumėje $\sigma > \frac{1}{2}$, tai funkcija h_n yra tolydi, be to,

$$\begin{aligned}
&h_n\Big(\big(p^{-i\tau}: p \in \mathbb{P}\big), \big((m+\alpha)^{-i\tau}: m \in \mathbb{N}_0\big) \Big) = \\
&= \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(m)m^{-i\tau}v_1(m,n)}{m^s}, \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+\alpha)^{-i\tau}v_2(m,n)}{(m+\alpha)^s} \right) = \\
&= \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(m)v_1(m,n)}{m^{s+i\tau}}, \sum_{m=0}^{\infty} \frac{v_2(m,n)}{(m+\alpha)^{s+i\tau}} \right) = \\
&= \big(L_n(s+i\tau,\chi), \zeta_n(s+i\tau,\alpha)\big) = Z_n(s+i\tau).
\end{aligned}$$

Iš čia turime, kad su visomis aibės $A \in \mathfrak{B}(H^2(D))$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{Q}_T h_n^{-1}(A) = \\
&= \frac{1}{T} meas\Big\{ \tau \in [0,T]: \Big(\big(p^{-i\tau}: p \in \mathbb{P}\big), \big((m+\alpha)^{-i\tau}: m \in \mathbb{N}_0\big) \Big) \in h_n^{-1}A \Big\} = \\
&= \frac{1}{T} meas\Big\{ \tau \in [0,T]: \Big(\big(p^{-i\tau}: p \in \mathbb{P}\big), \big((m+\alpha)^{-i\tau}: m \in \mathbb{N}_0\big) \Big) \in A \Big\} = \\
&= \frac{1}{T} meas\{ \tau \in [0,T]: Z_n(s+i\tau) \in A \} = P_{T,n}(A).
\end{aligned}$$

Iš šių pastabų ir 3.2 lemos išplaukia, kad matas $P_{T,n}$, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja į matą $P_n = m_H h_n^{-1}$.

Lieka įrodyti, kad matas $\widehat{P}_{T,n}$, kai $T \to \infty$, taip pat silpnai konverguoja į matą $m_H h_n^{-1}$. Imame funkciją $h: \Omega \to \Omega$, duotą formule

$$h(\omega) = \omega \cdot \widehat{\omega}, \qquad \omega \in \Omega.$$

Tuomet gauname, kad

$$\begin{aligned}
&h_n\Big(h\Big(\big(p^{-i\tau}: p \in \mathbb{P}\big), \big((m+\alpha)^{-i\tau}: m \in \mathbb{N}_0\big) \Big)\Big) = \\
&= h_n\Big(\big(p^{-i\tau}\widehat{\omega}_1(p): p \in \mathbb{P}\big), \big((m+\alpha)^{-i\tau}\widehat{\omega}_2(m): m \in \mathbb{N}_0\big) \Big) = \\
&= \big(L_n(s+i\tau,\widehat{\omega}_1,\chi), \zeta_n(s+i\tau,\widehat{\omega}_2,\alpha)\big) = Z_n(s+i\tau,\widehat{\omega}).
\end{aligned}$$

Todėl, pakartoję samprotavimus, panaudotus mato $P_{T,n}$ atveju gauname, kad matas $\hat{P}_{T,n}$, kai kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į matą $m_H(h_n h)^{-1}$. Žinome, kad Haro matas m_H yra invariantiškas postūmių taškais iš Ω atžvilgiu, todėl $m_H h^{-1}(A) = m_H(h^{-1}A) = m_H(A)$, nes $h(\omega) = \omega\widehat{\omega}$. Iš čia randame, kad $m_H(h_n h)^{-1} = (m_H h^{-1}) {h_n}^{-1} = m_H {h_n}^{-1}$. Lema įrodyta.

Dabar apibrėžiame metriką erdvėje $H^2(D)$. Yra žinoma [3], kad egzistuoja tokia juostos D kompaktinių poaibių seka $\{ K_l : l \in \mathbb{N}\}$, kuri tenkina sąlygas:

1^0 $K_l \subset K_{l+1}, \qquad l \in \mathbb{N}$;

2^0 $D = \bigcup_{l=1}^{\infty} K_l$;

3^0 Jeigu $K \subset D$ yra kompaktinis poaibis, tuomet $K \subseteq K_l$ su kuriuo nors l. Tegul $f, g \in H(D)$. Apibrėžiame

$$\varrho_l(f, g) = \sup_{s \in K_l} |f(s) - g(s)|$$

ir

$$\varrho(f, g) = \sum_{l=1}^{\infty} 2^{-1} \frac{\varrho_l(f, g)}{1 + \varrho_l(f, g)}.$$

Tuomet $\varrho(f, g)$ yra erdvės $H(D)$ metrika, indukuojanti jos tolygaus konvergavimo kompaktuose topologiją. Kai $\underline{f} = (f_1, f_2)$, $\underline{g} = (g_1, g_2) \in H^2(D)$, tai gauname, kad

$$\varrho\left(\underline{f}, \underline{g}\right) = \max_{j=1,2} (f_j, g_j)$$

yra metrika erdvėje $H^2(D)$. Šią metriką panaudosime vektorių $Z(s)$ ir $Z(s, \omega)$ aproksimavimui atitinkamai vektoriais $Z_n(s)$ ir $Z_n(s, \omega)$.

3. 4 lema. *Teisinga lygybė*

$$\mathop{lim}_{n \to \infty} \mathop{limsup}_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varrho\big(Z(s + i\tau), Z_n(s + i\tau)\big) d\tau = 0.$$

Įrodymas. Tarkime, kad $K \subset D$ yra kompaktinis poaibis. Tuomet iš [8] straipsnio 2 lemos išplaukia (mūsų atveju $a_m = \chi(m)$), kad

$$\lim_{n \to \infty} \limsup_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sup_{s \in K} |L(s + i\tau, \chi) - L_n(s + i\tau, \chi)| \, d\tau = 0.$$

Be to, Hurvico dzeta funkcijai [9] yra teisinga nelygybė

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sup_{s\in K} |\zeta(s+i\tau,\alpha) - \zeta_n(s+i\tau,\alpha)|\, d\tau = 0.$$

Iš čia ir metrikų $\varrho(f,g)$ ir $\varrho(\underline{f},\underline{g})$ apibrėžimų gauname lemos tvirtinimą.

3.5 lema. *Su beveik visais $\omega \in \Omega$ yra teisinga lygybė*

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varrho\big(Z(s+i\tau,\omega), Z_n(s+i\tau,\omega)\big) d\tau = 0.$$

Įrodymas. Įrodymas yra analogiškas 3.4 lemos įrodymui. Iš [8] išplaukia, kad su bet kuria juostos D kompaktine aibe K beveik visiems $\omega_1 \in \Omega_1$, yra teisinga lygybė

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sup_{s\in K} |L(s+i\tau,\omega_1,\chi) - L_n(s+i\tau,\omega_1,\chi)|\, d\tau = 0\,, \qquad (3.2)$$

o iš [9] turime, kad beveik visiems $\omega_2 \in \Omega_2$ yra teisinga lygybe

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sup_{s\in K} |\zeta(s+i\tau,\omega_2,\alpha) - \zeta_n(s+i\tau,\omega_2,\alpha)|\, d\tau = 0. \qquad (3.3)$$

Tegul (3.2) lygybė galioja aibei $\Omega_1^0 \subset \Omega_1$, o (3.3) lygybe – aibei $\Omega_2^0 \subset \Omega_2$. Tuomet turime, kad $\mathrm{m}_{1\mathrm{H}}(\Omega_1^0) = 1$ ir $\mathrm{m}_{2\mathrm{H}}(\Omega_2^0) = 1$. Iš (3.2), (3.3) ir metrikų $\varrho(f,g)$ ir $\varrho(\underline{f},\underline{g})$ apibrėžimų gauname, kad lemos lygybė galioja aibei $\Omega_1^0 \times \Omega_2^0$. Kadangi matas m_H yra matų $\mathrm{m}_{1\mathrm{H}}$ ir $\mathrm{m}_{2\mathrm{H}}$ sandauga, tai

$$\mathrm{m}_\mathrm{H}(\Omega_1^0 \times \Omega_2^0) = \mathrm{m}_{1\mathrm{H}}(\Omega_1^0)\mathrm{m}_{2\mathrm{H}}(\Omega_2^0) = 1 \cdot 1 = 1.$$

Taigi lemos lygybė yra teisinga su beveik visais $\omega \in \Omega$.

Erdvėje $(H^2(D), \mathfrak{B}(H^2(D)))$ apibrėžiame dar vieną tikimybinį matą

$$\hat{P}_T(A) = \frac{1}{T}\, meas\{\ \tau \in [0,T]: Z(s+i\tau,\omega) \in A\ \}.$$

3.6 lema. *Erdvėje $(H^2(D), \mathfrak{B}(H^2(D)))$ egzistuoja toks tikimybinis matas P , į kurį, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja abu matai P_T ir $\hat{P}_T$.*

Lemos įrodymas remiasi 4.2 teorema iš [2]. Patogumo dėlei ją formuluojame. Tegul metrinė erdvė (S,ϱ) yra separabili, o S - reikšmiai atsitiktiniai elementai $Y_n, X_{1n}, X_{2n}, \ldots$ yra apibrėžti toje pačioje tikimybinėje erdvėje $(\hat{\Omega}, \mathcal{A}, \mu)$. Simboliu $\xrightarrow{D}$ žymėsime konvergavimą pagal pasiskirstymą. Primename, kad X_n, kai $n \to \infty$, konverguoja X pagal pasiskirstymą, jeigu atsitiktinio elemento X_n pasiskirstymas, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja į atsitiktinio elemento X pasiskirstymą. Dabar formuluojame minėtą lemą.

3.7 lema. *Tarkime, kad su kiekvienu $k \in \mathbb{N}$*

$$X_{kn} \xrightarrow{D} X_k$$

ir

$$X_k \underset{k\to\infty}{\overset{D}{\to}} X.$$

Jeigu su kiekvienu $\varepsilon > 0$

$$\lim_{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \mu(\varrho(X_{kn}, Y_n) \geq \varepsilon) = 0,$$

tai

$$Y_n \underset{n\to\infty}{\overset{D}{\to}} X.$$

Mums dar bus reikalingos tikimybinių matų šeimos suspaustumo ir reliatyvaus kompaktiškumo sąvokos.

Tarkime, kad $\{P\}$ yra tikimybinių matų šeima erdvėje $\big(S, \mathfrak{B}(S)\big)$.

Sakome, kad ši šeima yra suspausta, jeigu kiekvienam $\varepsilon > 0$ egzistuoja tokia kompaktiška aibė $K = K(\varepsilon) \subset S$, kad su visais $P \in \{P\}$ yra teisinga nelygybė

$$P(K) > 1 - \varepsilon.$$

Šeima $\{P\}$ yra vadinama reliatyviai kompaktiška, jeigu kiekviena jos seka turi silpnai konverguojantį posekį į kurį nors matą erdvėje $\big(S, \mathfrak{B}(S)\big)$.

Tiesioginė Prochorovo teorema [2] tvirtina, kad kiekviena suspausta tikimybinių matų šeima yra reliatyviai kompaktiška.

3.6 lemos įrodymas. Tegul θ yra atsitiktinis dydis, apibrėžtas kurioje nors tikimybinėje erdvėje $(\widehat{\Omega}, \mathfrak{B}(\widehat{\Omega}), \mu)$ ir tolygiai pasiskirstęs intervale $[0,1]$. Šioje tikimybinėje erdvėje apibrėžiame $H^2(D)$ reikšmį atsitiktinį elementą

$$\underline{X}_{T,n} = \underline{X}_{T,n}(s) = \Big(X_{T,n,1}(s), X_{T,n,2}(s)\Big) = Z_n(s + iT\theta).$$

Kadangi pagal 3.3 lemą matas $P_{T,n}$ silpnai konverguoja į matą P_n, tai turime, kad

$$\underline{X}_{T,n} \underset{T\to\infty}{\overset{D}{\to}} \underline{X}_n; \tag{3.4}$$

Čia $\underline{X}_n = X_n(s) = (X_{n,1}(s), X_{n,2}(s))$ yra $H^2(D)$ reikšmis atsitiktinis elementas, turintis pasiskirstymą P_n.

Dirichlė eilutės, apibrėžiančios funkcijas $L_n(s,\chi)$ ir $\zeta_n(s,\alpha)$ konverguoja apsoliučiai $\sigma > \frac{1}{2}$. Todėl iš gerai žinomų Dirichlė eilučių savybių [7] gauname, kad su visais $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T |L_n(\sigma+it,\chi)|^2\,dt = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{|\chi(m)|^2 v_1^2(m,n)}{m^{2\sigma}} \leq \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{2\sigma}} < \infty$$

ir

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T |\zeta_n(\sigma+it,\alpha)|^2\,dt = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{v_2^2(m,n)}{(m+\alpha)^{2\sigma}} \leq \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(m+\alpha)^{2\sigma}} < \infty.$$

Tegul K_l yra bet kuri aibė iš kompaktinių aibių sekos, apibrėžiančios erdvės $H(D)$ metriką. Tuomet iš čia, integralinės Koši teoremos bei Koši nelygybės išplaukia, kad su kuriais nors $\sigma_{1l} > \frac{1}{2}$ ir $\sigma_{2l} > \frac{1}{2}$

$$\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \sup_{s\in K_l}|L_n(s+i\tau,\chi)|\,d\tau \leq c_{1l}\limsup_{T\to\infty}\Big(\frac{1}{2T}\int_0^{2T} |L_n(\sigma_{1l}+it,\chi)|^2\,dt\Big)^{\frac{1}{2}} \leq$$
$$\leq\ c_{1l}R_{1l} < \infty \tag{3.5}$$

ir

$$\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \sup_{s\in K_l}|\zeta_n(s+i\tau,\alpha)|\,d\tau \leq c_{2l}\limsup_{T\to\infty}\Big(\frac{1}{2T}\int_0^{2T} |\zeta_n(\sigma_{2l}+it,\alpha)|^2\,dt\Big)^{\frac{1}{2}} \leq$$
$$\leq\ c_{2l}R_{2l} < \infty, \tag{3.6}$$

čia

$$R_{1l} = \Big(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{2\sigma_{1l}}}\Big)^{\frac{1}{2}}$$

ir

$$R_{2l} = \Big(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(m+\alpha)^{2\sigma_{2l}}}\Big)^{\frac{1}{2}},$$

o c_{1l} ir c_{2l} yra teigiamos konstantos. Dabar tegul ε yra bet koks teigiamas skaičius, o

$$M_{jl} = c_{jl}R_{jl}\,2^{l+1}/\varepsilon\,, \qquad j = 1,2,\, l \in \mathbb{N}.$$

Tuomet iš (3.5) ir (3.6) nelygbių randame, kad

$$\limsup_{T\to\infty} \mu \left(\sup_{s\in K_l} \left| X_{T,n,j}(s) \right| > M_{jl} \ bent\ su\ vienu\ j = 1,2 \right) \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{2} \limsup_{T\to\infty} \mu \left(\sup_{s\in K_l} \left| X_{T,n,j}(s) \right| > M_{jl} \right) =$$

$$= \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas \left\{ \tau \in [0,T] : \sup_{s\in K_l} |L_n(s+i\tau,\chi)| > \ M_{1l} \right\} +$$

$$+ \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas \left\{ \tau \in [0,T] : \sup_{s\in K_l} |\zeta_n(s+i\tau,\alpha)| > \ M_{2l} \right\} \leq$$

$$\leq \frac{1}{M_{1l}} \sup_{n\in\mathbb{N}} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sup_{s\in K_l} |L_n(s+i\tau,\chi)| \, d\tau +$$

$$+ \frac{1}{M_{2l}} \sup_{n\in\mathbb{N}} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sup_{s\in K_l} |\zeta_n(s+i\tau,\alpha)| \, d\tau \leq$$

$$\leq \frac{c_{1l}R_{1l}}{M_{1l}} + \frac{c_{2l}R_{2l}}{M_{2l}} = \frac{\varepsilon}{2^{l+1}} + \frac{\varepsilon}{2^{l+1}} = \frac{\varepsilon}{2^l}.$$

Iš čia, (3.4) ir mato tolydumo gauname, kad

$$\mu \left(\sup_{s\in K_l} \left| X_{n,j}(s) \right| > M_{jl} \ bent\ su\ vienu\ j = 1,2 \right) \leq \frac{\varepsilon}{2^l}. \tag{3.7}$$

Apibrėžiame aibę

$$H_\varepsilon^2 = \left\{ (f_1, f_2) \in H^2(D) : \sup_{s\in K_l} \left| f_j(s) \right| \leq M_{jl}, \qquad j = 1,2, \qquad l \in \mathbb{N} \right\}.$$

Kadangi ši aibė yra tolygiai aprėžta kompaktinėse aibėse tai pagal kompaktiškumo kriterijų [15] ji yra kompaktinė erdvės $H^2(D)$ aibė. Be to, iš (3.7) turime, kad su visais $n \in \mathbb{N}$

$$\mu\left(\underline{X}_n \in H_\varepsilon^2\right) \geq 1 - \varepsilon \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2^l} = 1 - \varepsilon \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \varepsilon.$$

Prisiminę atsitiktinio elemento $\underline{X}_n$ apibrėžimą, pastarąją nelygybę galime perrašyti taip: su visais $n \in \mathbb{N}$

$$P_n(H_\varepsilon^2) > 1 - \varepsilon.$$

Pagal apibrėžimą tai reiškia, kad tikimybinių matų šeima $\{P_n : n \in \mathbb{N}\}$ yra suspausta. Iš čia pagal Prochovo teoremą ji yra reliatyviai kompaktinė. Vadinasi, egzistuoja toks posekis $\{P_{nk}\} \subset \{P_n\}$, kad matas P_{nk}, kai $k \to \infty$, silpnai konverguoja į kurį nors matą P erdvėje $(H^2(D), \mathfrak{B}(H^2(D)))$. Šis tvirtinimas yra ekvivalentus sąryšiui

$$\underline{X}_{nk} \xrightarrow[k\to\infty]{D} P. \tag{3.8}$$

Tikimybinėje erdvėje $(\widehat{\Omega}, \mathfrak{B}(\widehat{\Omega}), \mu)$ apibrėžiame dar vieną $H^2(D)$ reikšmį atsitiktinį elementą

$$\underline{X}_T = \underline{X}_T(s) = (X_{T,1}(s), X_{T,2}(s)) = Z(s + iT\theta).$$

Tuomet iš 3.4 lemos išplaukia, kad su kiekvienu $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \mu(\varrho(\underline{X}_T(s), \underline{X}_{T,n}(s)) \geq \varepsilon) = \\ &= \lim_{n\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0,T]: (\varrho(Z(s+i\tau), Z_n(s+i\tau)) \geq \varepsilon\} \leq \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{\varepsilon T} \int_0^T \varrho(Z(s+i\tau), Z_n(s+i\tau))\, d\tau = 0.\end{aligned}$$

Ši lygybė, (3.4) ir (3.8) ir 3.7 lema leidžia tvirtinti, kad

$$\underline{X}_T \xrightarrow[T\to\infty]{D} P. \tag{3.9}$$

Pastarasis sąryšis yra ekvivalentus mato P_T silpnajam konvergavimui į matą P, kai $T \to \infty$. Be to (3.9) sąryšis rodo, kad matas P nepriklauso nuo sekos $\{P_{nk}\}$ parinkimo. Kadangi matų šeima $\{P_n\}$ yra reliatyviai kompaktiška, tai iš čia gauname, kad kiekvienas posekis silpnai konverguoja į matą P. Kitaip tariant,

$$\underline{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{D} P. \tag{3.10}$$

Lieka įrodyti, kad tikimybinis matas $\widehat{P}_T$, kai $T \to \infty$, taip pat silpnai konverguoja į matą P. Šiam tikslui apibrėžiame atsitiktinius elementus

$$\underline{\hat{X}}_{T,n} = \underline{\hat{X}}_{T,n}(s) = \left(\underline{\hat{X}}_{T,n,1}(s), \underline{\hat{X}}_{T,n,2}(s)\right) = Z_n(s + iT\theta, \widehat{\omega})$$

ir

$$\underline{\hat{X}}_T = \underline{\hat{X}}_T(s) = \left(\underline{\hat{X}}_{T,1}(s), \underline{\hat{X}}_{T,2}(s)\right) = Z(s + iT\theta, \widehat{\omega}).$$

Tuomet pakartoję samprotavimus, panaudotus mato P_T atveju, pritaikę 3.3 lemą, o vietoje 3.4 lemos – 3.5 lemą, bei (3.10) sąryšį, gauname, kad matas $\widehat{P}_T$ taip pat silpnai konverguoja į matą P. Lema įrodyta.

3.1 teoremos įrodymui mums bus reikalingi ergodinės teorijos elementai. Tegul

$$a_\tau = \left\{\left(p^{-i\tau}: p \in \mathbb{P}\right), \left((m+\alpha)^{-i\tau}: m \in \mathbb{N}_0\right)\right\}, \qquad \tau \in \mathbb{R}.$$

Apibrėžiame vienparametrinę toro Ω transformacijų šeimą $\{\Phi_\tau: \tau \in \mathbb{R}\}$ formule

$$\Phi_\tau(\omega) = a_\tau \omega, \qquad \omega \in \Omega.$$

Tuomet $\{\Phi_\tau: \tau \in \mathbb{R}\}$ yra vienparametrinė mačių, matą išlaikančių (nes yra naudojamas invariantiškas Haro matas) toro Ω transformacijų grupė. Primename, kad aibė $A \in \mathfrak{B}(\Omega)$ yra vadinama invariantine grupės $\{\Phi_\tau: \tau \in \mathbb{R}\}$ atžvilgiu, jei su bet kuriuo $\tau \in \mathbb{R}$ aibės A ir $\mathrm{A}_\tau = \Phi_\tau(A)$ gali skirtis viena nuo kitos nedaugiau negu nuliniu m_H matu. Visos invariantinės aibės sudaro σ kūną, kuris yra σ kūno $\mathfrak{B}(\Omega)$ pokūnis. Vienparametrinė grupė $\{\Phi_\tau: \tau \in \mathbb{R}\}$ yra vadinama ergodine, jeigu jos invariantinių aibių σ kūnas yra sudarytas tik iš aibių, kurių matas m_H lygus nuliui arba vienetui.

3. 8 lema. *Tarkime, kad α yra transcendentusis skaičius. Tuomet vienparametrinė grupė $\{\Phi_\tau: \tau \in \mathbb{R}\}$ yra ergodinė.*

Lemos įrodymas yra duotas [8] straipsnyje.

3.1 teoremos įrodymas. Tegul A yra fiksuota ribinio mato P 3.6 lemoje tolydumo aibė, t.y. $P(\partial A) = 0$, čia ∂A yra aibės A kraštas. Tuomet iš 3.6 lemos ir silpnojo tikimybinių matų konvergavimo ekvivalento tolydumo aibių terminais (2.1 $teorema$ [2]), turime, kad

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0,T]: Z(s+i\tau,\omega) \in A\} = P(A). \tag{3.11}$$

Tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathfrak{B}(\Omega), m_H)$ apibrėžiame atsitiktinį dydį ξ formule

$$\xi(\omega) = \begin{cases} 1, & jeigu\ \ Z(s,\omega) \in A, \\ 0, & jeigu\ \ Z(s,\omega) \notin A. \end{cases}$$

Tegul $\mathbb{E}(\xi)$ yra atsitiktinio dydžio ξ vidurkis. Tuomet turime, kad

$$\mathbb{E}(\xi) = \int\limits_{\Omega} \xi\, dm_H = m_H(\omega \in \Omega: Z(s,\omega) \in A) = P_Z(A), \tag{3.12}$$

čia $P_Z(A)$ yra atsitiktinio elemento $Z(s,\omega)$ pasiskirstymas. Iš grupės $\{\Phi_\tau: \tau \in \mathbb{R}\}$ ergodiškumo išplaukia atsitiktinio proceso $\xi(\Phi_\tau)$ ergodiškumas. Primename, kad stacionarusis procesas vadinamas ergodiniu, jeigu jo invariantinių aibių σ kūnas susideda tik iš aibių, turinčių matą nulį arba vienetą. Ergodiniams procesams galioja Birkhofo – Chinčino teorema [4]: jeigu atsitiktinis procesas $X(\tau, \widetilde{\omega})$ yra ergodinis, $\mathbb{E}|X(\tau,\widetilde{\omega})| < \infty$, ir proceso trajektorijos yra beveik tikrai integruojamos Rymano prasme kiekviename baigtiniame intervale, tai tuomet beveik visiems $\widetilde{\omega}$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T X(\tau,\widetilde{\omega})\, d\tau = \mathbb{E}X(0,\widetilde{\omega}).$$

Mūsų atveju turime, kad beveik visiems $\omega \in \Omega$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T \xi(\Phi_\tau(\omega))\, d\tau = \mathbb{E}(\xi). \tag{3.13}$$

Iš ξ ir Φ_τ apibrėžimo gauname, kad

$$\frac{1}{T}\int_0^T \xi(\Phi_\tau(\omega))\,d\tau = \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0,T]: Z(s+i\tau,\omega) \in A\}.$$

Iš čia ir (3.12), (3.13) randame, kad beveik visiems $\omega \in \Omega$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T} meas\{\tau \in [0,T]: Z(s+i\tau,\omega) \in A\} = P_Z(A).$$

Iš čia ir (3.11) gauname, kad $P(A) = P_Z(A)$ su visomis mato P tolydumo aibėmis A. Kadangi tolydumo aibės sudaro apibrėžiančią klasę [2] , tai iš čia išplaukia, kad $P(A) = P_Z(A)$ su visomis aibėmis $A \in \mathfrak{B}(H^2(D))$. Teorema įrodyta.

4. Pagrindinė teorema.

Šiame skyrelyje įrodysime pagrindinę magistro darbo teoremą apie dvejeto $(L(s,\chi), \zeta(s,\alpha))$ jungtinį universalumą. Čia $L(s,\chi)$ yra Dirichlė L funkcija, o $\zeta(s,\alpha)$ yra Hurvico dzeta funkcija.

4. 1 teorema. *Tarkime, kad α yra transcendentusis skaičius, K_1 ir K_2 yra juostos D kompaktinės aibės, turinčios jungiuosius papildinius, funkcija $f_1(s)$ yra tolydi ir nevirstanti nuliui aibėje K_1 bei analizinė jos viduje, o $f_2(s)$ yra tolydi aibėje K_2 ir analizinė jos viduje. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{T\to\infty}\frac{1}{T} meas\{\tau \in [0,T]: \sup_{s\in K_1}|L(s+i\tau,\chi) - f_1(s)| < \varepsilon,$$
$$\sup_{s\in K_2}|\zeta(s+i\tau,\alpha) - f_2(s)| < \varepsilon\} > 0.$$

4.1 teoremos įrodymui naudosime 3.1 teoremą, tačiau mums dar bus reikalinga ribinio mato P_Z toje teoremoje atrama. Tegul S yra separabili metrinė erdvė, o Q yra tikimybinis matas erdvėje $(S, \mathfrak{B}(S))$. Primename, kad mato Q atrama yra vadinama tokia minimali uždara aibė S_Q , kad $Q(S_Q) = 1$. Aibė S_Q yra sudaryta iš tokių elementų $x \in S$, kurių bet kuriai atvirai aplinkai G yra teisinga nelygybė $Q(G) > 0$.

Tegul

$$S_1 = \{ f \in H(D): f(s) \neq 0 \ arba\ f(s) \equiv 0 \}$$

ir

$$S_2 = S_1 \times H(D).$$

4. 2 lema. *Mato P_Z atrama yra aibė S_2.*

Įrodymas. Yra gerai žinoma, kad erdvė $H(D)$ yra separabili. Todėl [2]

$$\mathfrak{B}(H^2(D)) = \mathfrak{B}(H(D)) \times \mathfrak{B}(H(D)).$$

Iš čia išplaukia, kad pakanka matą P_Z nagrinėti aibėse $A \in \mathfrak{B}(H^2(D))$, turinčiose pavidalą $A = A_1 \times A_2$, $A_j \in H(D)$, $j = 1,2$.

Haro matas m_H yra Haro matų m_{1H} ir m_{2H} sandauga. Todėl

$$
\begin{aligned}
&P_Z(A) = m_H(\omega \in \Omega\colon Z(s,\omega) \in \mathrm{A}) = \\
&= m_H(\omega \in \Omega\colon L(s,\omega_1,\chi) \in \mathrm{A}_1, \zeta(s,\omega_2,\alpha) \in \mathrm{A}_2) = \\
&= m_{1H}(\omega_1 \in \Omega_1\colon L(s,\omega_1,\chi) \in \mathrm{A}_1) \times m_{2H}(\omega_2 \in \Omega_2\colon \zeta(s,\omega_2,\alpha) \in \mathrm{A}_2). \quad (4.1)
\end{aligned}
$$

Yra žinoma [8], kad atsitiktinio elemento $L(\mathrm{s},\omega_1,\chi)$ atrama yra aibė S_1, o atsitiktinio elemento $\zeta(\mathrm{s},\omega_2,\alpha)$ atrama yra [9] visa erdvė $H(D)$. Iš (4.1) turime, kad

$$P_Z(A) = 1 \quad (4.2)$$

tada ir tik tada, kai

$$m_{1H}(\omega_1 \in \Omega_1\colon L(s,\omega_1,\chi) \in \mathrm{A}_1) = 1$$

ir

$$m_{2H}(\omega_2 \in \Omega_2\colon \zeta(\mathrm{s},\omega_2,\alpha) \in \mathrm{A}_2) = 1.$$

Iš čia ir ankstesnės pastabos išplaukia, kad minimali aibė A, tenkinanti (4.2) lygybę yra lygi $S_1 \times H(D)$.

Mums dar bus reikalinga Mergelyano teorema apie analizinių funkcijų aproksimavimą polinomais.

4. 3 lema. *Tarkime, kad $K \subset \mathbb{C}$ yra kompaktinė aibė, turinti jungųjį papildinį, o funkcija $f(s)$ yra tolydi aibėje K ir analizinė jos viduje. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$ egzistuoja toks polinomas $p(s)$, kad*

$$\sup_{s \in K} |f(s) - p(s)| < \varepsilon.$$

Lemos įrodymą galime rasti [16] monografijoje.

4.1 teoremos įrodymas. Pagal 4.3 lemą egzistuoja tokie du polinomai $p_1(s)$ ir $p_2(s)$, kad

$$\sup_{s \in K_1} |f_1(s) - p_1(s)| < \frac{\varepsilon}{4} \quad (4.3)$$

ir

$$\sup_{s \in K_2} |f_2(s) - p_2(s)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4.4)$$

Kadangi $f_1(s) \neq 0$ aibėje K_1, tai ir $p_1(s) \neq 0$ aibėje K_1, jeigu ε yra pakankamai mažas. Todėl aibėje K_1 galime apibrėžti tolydžią funkcijos $\log p_1(s)$ šaką, kuri bus analizinė aibėje K_1. Vėl pritaikę 4.3 lemą gauname, kad egzistuoja toks polinomas $q(s)$, kad

$$\sup_{s\in K_1}\left|p_1(s)-e^{q(s)}\right|<\frac{\varepsilon}{4}.$$

Iš čia ir (4.3) randame, kad

$$\sup_{s\in K_1}\left|f_1(s)-e^{q(s)}\right|\le\sup_{s\in K_1}|f_1(s)-p_1(s)|+\sup_{s\in K_1}\left|p_1(s)-e^{q(s)}\right|<$$
$$<\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}=\frac{\varepsilon}{2}. \qquad (4.5)$$

Kadangi $e^{q(s)}\neq 0$, tai turime, kad pagal 4.2 lemą $(e^{q(s)},p_2(s))$ yra mato P_Z atramos elementas. Apibrėžiame

$$G_2=\left\{(g_1,g_2)\in H^2(D):\sup_{s\in K_1}\left|g_1(s)-e^{q(s)}\right|<\frac{\varepsilon}{2},\sup_{s\in K_2}|g_2(s)-p_2(s)|<\frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

Tuomet G_2 yra elemento $(e^{q(s)},p_2(s))$ atviroji aplinka, todėl pagal turėtą pastabą ir mato atramos savybę gauname, kad $P_Z(G_2)>0$.

Dabar pasinaudosime 3.1 teorema ir silpnojo tikimybinių matų konvergavimo ekvivalentu atvirųjų aibių terminais. Tarkime, kad P_n, $n\in\mathbb{N}$, ir P yra tikimybiniai matai erdvėje $(S,\mathfrak{B}(S))$. Tuomet P_n, kai $n\to\infty$, silpnai konverguoja į matą P tada ir tik tada, kai su kiekviena atvirąja aibe $G_2\in\mathfrak{B}(S)$ yra teisinga nelygybė [2]

$$\liminf_{n\to\infty}P_n(G_2)\ge P(G_2).$$

Kadangi G_2 yra atvira aibė, tai iš čia ir 3.1 teoremos bei nelygybės $P_Z(G_2)>0$ gauname, kad

$$\liminf_{T\to\infty}\frac{1}{T}\,meas\{\tau\in[0,T]:Z(s+i\tau)\in G_2\}>P_Z(G_2)>0.$$

Pasinaudoję aibės G_2 apibrėžimu, iš čia turime, kad

$$\liminf_{T\to\infty}\frac{1}{T}\,meas\{\tau\in[0,T]:\sup_{s\in K_1}\left|L(s+i\tau,\chi)-e^{q(s)}\right|<\frac{\varepsilon}{2},$$
$$\sup_{s\in K_2}|\zeta(s+i\tau,\alpha)-p_2(s)|<\frac{\varepsilon}{2}\}>0. \qquad (4.6)$$

Aišku, kad iš (4.5) ir (4.6) išplaukia, kad tiems τ, kuriems galioja nelygybės $\sup_{s\in K_1}\left|L(s+i\tau,\chi)-e^{q(s)}\right|<\frac{\varepsilon}{2}$ ir $\sup_{s\in K_2}|\zeta(s+i\tau,\alpha)-p_2(s)|<\frac{\varepsilon}{2}$,

$$\sup_{s\in K_1}|L(s+i\tau,\chi)-f_1(s)|\le$$
$$\le\sup_{s\in K_1}\left|L(s+i\tau,\chi)-e^{q(s)}\right|+\sup_{s\in K_1}|L(s+i\tau,\chi)-f_1(s)|<$$
$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

ir

$$\sup_{s\in K_2}|\zeta(s+i\tau,\alpha)-f_2(s)| \le \sup_{s\in K_2}|\zeta(s+i\tau,\alpha)-p_2(s)| + \sup_{s\in K_2}|f_2(s)-p_2(s)| <$$
$$< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Todėl

$$\left\{\tau\in[0,T]:\ \sup_{s\in K_1}|L(s+i\tau,\chi)-f_1(s)|<\varepsilon, \sup_{s\in K_2}|\zeta(s+i\tau,\alpha)-f_2(s)|<\varepsilon\right\}\supset$$

$$\supset\left\{\tau\in[0,T]:\ \sup_{s\in K_1}\left|L(s+i\tau,\chi)-e^{q(s)}\right|<\frac{\varepsilon}{2}, \sup_{s\in K_2}|\zeta(s+i\tau,\alpha)-p_2(s)|<\frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

Iš čia ir (4.6) galutinai gauname, kad

$$\liminf_{T\to\infty}\frac{1}{T}\ meas\{\tau\in[0,T]:\ \sup_{s\in K_1}|L(s+i\tau,\chi)-f_1(s)|<\varepsilon,$$
$$\sup_{s\in K_2}|\zeta(s+i\tau,\alpha)-f_2(s)|<\varepsilon\ \}>0.$$

Teorema įrodyta.

One joint universality theorem

Kestutis Janulis

Summary

Let $L(s,\chi), s=\sigma+it$, denote the Dirichlet L – function, and $\zeta(s,\alpha)$ be the Hurwitz zeta-function with parameter $\alpha, 0<\alpha\leq 1$. We prove the following statment.

Suppose that the number α is transcendental, and K_1 and K_2 are compact subsets of strip $D=\{ s\in \mathbb{C}: \frac{1}{2}<\sigma<1\}$ with connected complements. Let $f_1(s)$ be a continuous non-vanishing function on K_1 which is analytic in the interior of K_1, and $f_2(s)$ be a continuous function on K_2, and analytic in the interior of K_2. Then, for every $\varepsilon>0$,

$$\liminf_{T\to\infty}\frac{1}{T}\, meas\{\tau\in[0;T]: \sup_{s\in K_1}|L(s+i\tau,\chi)-f_1(s)|<\varepsilon,$$

$$\sup_{s\in K_2}|\zeta(s+i\tau,\alpha)-f_2(s)|<\varepsilon\}>0.$$

There $meas\{A\}$ denotes the Lebesgue measure of a measurable set $A\subset\mathbb{R}$.

Literatūra.

1. B. Bagchi, The statistical behaviuor and universality properties of Riemann zeta-function and other allied Dirichlet series, Ph. D. Thesis, Indian Statistical Institute, Calcutta, 1981.

2. P. Billingsley, Convergence of Probability Measures, Wiley, New York, 1968.

3. J.B. Conway, Functions of One Complex Variable, Springer, Berlin, 1978.

4. H. Cramér, M. Leadbetter, Stationary and Related Stochastic Processes, Wiley, New York, 1967.

5. S.M. Gonek, Analytic properties of Zeta and L-functions, Ph. D. Thesis, University of Michigan, 1979.

6.H. Heyer, Probability Measures on Locally Compact Groups, Springer, Berlin, 1977.

7. A. Laurinčikas, Limit Theorms for the Riemann Zeta-Function, Kluwer, Dordrecht, 1996.

8. A. Laurinčikas, Joint universality of zeta-functions with periodic coefficients, Izv. Math. **74**(3) (2010), 515-539.

9. A. Laurinčikas, R. Garunkštis, The Lerch Zeta-Function, Kluwer, Dordrecht, 2002.

10. A. Laurinčikas, D. Šiaučiūnas, Remarks on the universality of the periodic zeta-function, Math. Notes, **80**(3-4)(2006), 532-538.

11. H. Mishou, The joint value – distribution of the Riemann zeta function and Hurwitz zeta functions, Lith. Math. J. **47**(2007), 32-47.

12. V. Paulauskas, A. Račkauskas, Funkcinė analizė, I knyga. Erdvės, Leidykla UAB „Vaistų žinios“, Vilnius, 2007.

13. К. Прахар, Распределение простых чисел, Мир, Москва, 1967.

14. J. Stending, Value-Distribution of *L*-Functions, Lecture Notes in Mathematics, 1877, Springer, Berlin, 2007.

15. Б. В. Шабат, Введение в комплексный анализ, Наука, Москва, 1969.

16. J.L. Walsh, Interpolation and Approximation by Rational Functions in the Complex Domain, Am. Math. Soc. Coll. Publ. **20**, 1960.