Vilniaus Universitetas
matematikos ir informatikos fakultetas

Magistrinis darbas

Optimalaus bloko ilgio parinkimas autonormuojančioms sumoms
······
How to choose the optimal block length for self-normalized sums

Aristidas Vilkaitis

VILNIUS 2009

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS
FAKULTETAS

MATEMATINĖS ANALIZĖS KATEDRA

Darbo vadovas

Prof. Hab. Dr. Vygantas Paulauskas	____________________ (parašas)

Darbas apgintas	2009 m. birželio 2 d.
Gynimo posėdžio protokolo Nr.	____________________
Darbas įvertintas	____________________

Registravimo Nr.	____________________
2009-06-02	____________________

Turinys

1 Santrauka

Šis darbas grindžiamas M. Juodžio ir A. Račkausko straipsniu [1] apie autonormuotas sumas priklausomiems atsitiktiniams dydžiams ir nagrinėjama įrodyta teorema apie autonormuotų sumų konvergavimą naudojant blokus. Pradžioje ištiriamas konvergavimo greitis kaip funkcija nuo bendro narių skaičiaus ir bloko ilgio, vėliau ieškomas šios funkcijos minimumas ir gaunamas optimalaus bloko ilgio ir konvergavimo greičio įvertis

This work is based on an article by M. Juodis and A. Račkauskas[1] concerning self-normalized sums. The object of this thesis is to further analyse a proven theorem about the convergance of self-normalized sums for dependant random variables using blocks. Firstly, we measure the rate of convergance as a function dependant on the total number of elements and the lenght of the blocks. Later, we find the extreme values of this function and give an estimate of the optimal block length for best convergance results. Finaly, we measure the rate of convergance using the method described in the article.

2 Įvadas

Šiame darbe nagrinėsime M. Juodžio ir A. Račkausko[1] straipsnyje įrodytą teoremą apie autonormuojančių sumų konvergavimą priklausomiems atsitiktiniams dydžiams naudojant blokus. Šio darbo tikslas – ištirti konvergavimą tuo atveju, kai dėmenų skaičius n yra fiksuotas ir parinkti optimalaus bloko ilgį, duodantį geriausią konvergavimą šioje ribinėje teoremoje.

Pradžioje apibrėžkime pagrindines sąvokas ir terminus, naudojamus darbe.

2.1 Pagrindinės sąvokos

Tarkime A yra kažkoks įvykis, o X – atsitiktinis dydis (a.d.). Tada $\mathbb{P}(A)$ žymės įvykio A tikimybę, $\mathbb{E}X$ – a.d. X vidurkį, $Var(X)$ arba $VarX$ – a.d. X dispersiją.

Jeigu a.d. X yra pasiskirstęs pagal normalųjį dėsnį su vidurkiu μ ir dispersija σ^2, tada žymėsime $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Normaliojo atsitiktinio dydžio $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ pasiskirstymo funkciją žymėsime

$$\Phi(x) = \mathbb{P}(X < x).$$

Jeigu a.d. X pasiskirstymas priklauso normaliojo dėsnio traukos sričiai, t.y. $\mathbb{E}X^2 < \infty$, tada žymėsime $X \in DAN$

Įprastinėmis raidėmis žymėsime skaičių aibes: $\mathbb{R}$ žymi realiųjų skaičių aibę, $\mathbb{N}$ - natūraliųjų, $\mathbb{Z}$ - sveikųjų. Papildomai pažymėsime $\bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{0\}$

Raide X_t žymėsime diskretaus laiko procesą, įgyjantį reikšmes $X_t \in \mathbb{R}$ laiko momentais $t \in \bar{\mathbb{N}}$. Nagrinėdami $AR(1)$ procesą, turėsime mintyje tokį diskretaus laiko procesą, kuris apibrėžiamas lygybe:

$$\begin{aligned} X_t &= \rho X_{t-1} + \varepsilon_t \qquad \varepsilon_i \in DAN, i \in \bar{\mathbb{N}} \quad \rho \in \mathbb{R}, |\rho| < 1, \\ X_0 &= 0, \end{aligned}$$

arba ekvivalenčia forma:

$$X_t = \sum_{i=0}^{t-1} \rho^i \varepsilon_{t-i} \qquad \varepsilon_i \in DAN, i \in \bar{\mathbb{N}} \quad \rho \in \mathbb{R}, |\rho| < 1. \tag{1}$$
$$X_0 = 0$$

Darbo rezultatus galima gauti ir stacionariam $AR(1)$ procesui (nereikalaujant, kad $X_0 = 0$), tačiau įrodymai yra paprastesni nagrinėjant nestacionarų atvejį.

2.2 Problema

Tirkime $AR(1)$ procesą. Tarkime, kad turime n šio proceso dėmenų $X_1, X_2, \ldots X_n$. Pažymėkime:

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n, \quad V_n^2 = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2.$$

M. Juodis ir A. Račkauskas[1] įrodė sekančią teoremą:

Teorema 1 *Jei* $(X_t, t \in \bar{\mathbb{N}})$ *yra apibrėžti* (1), *kur* $\varepsilon_1 \in DAN$, *tada*

$$S_n V_n^{-1} \xrightarrow[n \to \infty]{\mathcal{D}} \mathcal{N}\left(0, \frac{1+\rho}{1-\rho}\right).$$

Tai parodo, kad priklausomų a.d. autonormuojanti suma asimptotiškai artėja į normalųjį dėsnį, priklausantį nuo parametro ρ. Tačiau, norint šią teoremą taikyti praktikoje, reikalinga parametro reikšmė, kuri gali būti ir nežinoma. Straipsnio autoriai siulo išspręsti šią problemą naudojant blokus. Jeigu suskaidysime $(X_1, \dots, X_n)$ į N lygių grupių po m narių, taip kad $n = mN$, ir pažymėsime

$$\begin{aligned} S_n &:= \sum_{i=0}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} X_i, \\ Y_j &:= \sum_{i=(j-1)m+1}^{jm} X_i, \quad j = 1, 2, \dots, N, \\ U_n^2 &:= \sum_{i=1}^{N} Y_i^2, \end{aligned}$$

tada bus teisinga teorema:

Teorema 2 *Tarkime,* $(X_t, t \in \bar{\mathbb{N}})$ *yra* $AR(1)$ *procesas, apibrėžtas lygtimi* (1), *kur* $\varepsilon_1 \in DAN$. *Tada jei* $m \to \infty$ *ir* $m/n \to 0$ *kai* $n \to \infty$, *tai*

$$S_n U^{-1} \xrightarrow[n \to \infty]{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0; 1). \tag{2}$$

Matome, kad taikant tokį autonormavimą, gaunamas ribinis dėsnis, kuris jau nebepriklauso nuo ρ. Bet čia iškyla nauja problema, būtent kaip, turint fiksuotą dėmenų skaičių n, reiktų parinkti optimalų bloko ilgį m, kad konvergavimas būtų geriausias. Tai ir bandysime išsiaiškint šiame darbe.

2.3 Pažymėjimai

Praeitame skyrelyje jau įvedėme kelis skaičius:

- n – $AR(1)$ proceso dėmenų skaičius
- m – bloko ilgis
- N – blokų kiekis

Įsiveskime dar kelis pažymėjimus.

Tarkime, kad $j = 1 \dots N$ žymi mūsų blokus. Tada:

$$I_j = \{(j-1)m + 1, (j-1)m + 2, \dots, jm\},$$

$$\{X_1, \dots, X_n\} = \big\{\{X_i, i \in I_1\}, \{X_i, i \in I_2\}, \dots, \{X_i, i \in I_N\}\big\}.$$

Pažymėkime:

$$\sigma_j = \sum_{i \in I_j} \varepsilon_i, \qquad Y_j = \sum_{i \in I_j} X_i, \tag{3}$$

$$\eta_j = \rho(X_{(j-1)m}) - X_{jm}), \quad j = 1, \ldots, N. \tag{4}$$

Pagal rekursyvų $AR(1)$ proceso sąryšį (1) gauname, kad

$$\begin{aligned} Y_j &= \sum_{i \in I_j} X_i = \sum_{i \in I_j} (\rho X_{i-1} + \varepsilon_i) = \sum_{i \in I_j} \varepsilon_i + \rho \sum_{i \in I_j} X_{i-1} \\ &= \sigma_j + \rho Y_j - \rho X_{jm} + \rho X_{(j-1)m}, \end{aligned}$$

todėl:

$$\begin{aligned} Y_j - \rho Y_j &= \sigma_j + \eta_j \\ Y_j &= \frac{1}{1-\rho}(\sigma_j + \eta_j). \end{aligned}$$

Naudojant šiuos pažymėjimus:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{j=1}^{N} Y_j = \frac{1}{1-\rho} \sum_{j=1}^{N} (\sigma_j + \eta_j), \tag{5}$$

$$U_n^2 = \sum_{j=1}^{N} Y_j^2 = \frac{1}{(1-\rho)^2} \sum_{j=1}^{N} (\sigma_j + \eta_j)^2. \tag{6}$$

Papildomai, pažymėkime nykstančios geometrinės progresijos su parametru $|\rho| < 1$, sumą:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \rho^i = 1 + \frac{\rho}{1-\rho} := \theta. \tag{7}$$

2.4 Papildomi teiginiai

Šiame skyrelyje paminėsime kelias svarbesnes teoremas, reikalingas darbo rezultatams gauti.

V. Bentkus ir F. Götze[3] įrodė, kad:

Teorema 3 *Tarkime $\xi_i, i \in \mathbb{Z}$ yra nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę a.d., tokie, kad $\mathbb{E}\xi_1 = 0$, $Var(\xi_1) = \sigma^2$ ir $\mathbb{E}|\xi_1|^3 < \infty$. Tada egzistuoja konstanta $c > 0$, tokia, kad:*

$$\sup_x \left| \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \xi_i^2}} < x \right) - \Phi(x) \right| < \frac{c\mathbb{E}|\xi_1|^3}{\sigma^3 \sqrt{n}}.$$

E. Giné, F. Götze ir D.M. Mason [2] išvedė sekančias dvi lemas:

Lema 1 *Tegu $r, k, n, m_1, \ldots, m_r$ yra teigiami sveikieji skaičiai, tokie, kad $1 \leq r \leq k \leq n, m_i \geq 1 \quad \forall i$ ir $m_1 + \ldots + m_r = k$. Pažymėkime $n_r = [n/r]$ ir $s =$*

$\#\{i \le r : m_i = 1\}(\#\{\emptyset\} = 0)$. *Tada nelygybė galioja visiems nepriklausomiems ir vienodai pasiskirsčiusiems a.d.* $\xi_i, i \le n$

$$n_r^r \begin{pmatrix} k \\ m_1, \ldots, m_r \end{pmatrix}^{1/2} \left| \mathbb{E} \frac{\xi_1^{m_1} \cdots \xi_r^{m_r}}{\left(\sum_{1\le i\le n} \xi_i^2\right)^{k/2}} \right| \le \left(\mathbb{E} \left| \frac{\sum_{1\le i\le n_r} \xi_i}{\left(\sum_{1\le i\le n} \xi_i^2\right)^{1/2}} \right| \right)^s .$$

Lema 2 *Tarkime, kad* $(\xi_j, j \in \mathbb{Z})$ *yra seka nepriklausomų ir vienodai pasiskrisčiusių a.d., tokių, kad* $\mathbb{E}\xi_1 = 0$ *ir* $\xi_1 \in DAN$. *Tada seka* $\left(\left(\sum_{1\le i\le n} \xi_i^2\right)^{-1/2} \sum_{1\le i\le n} \xi_i\right)$ *yra stochastiskai aprėžta ir*

$$\sup_n \mathbb{E} \left| \frac{\sum_{1\le i\le n} \xi_i}{\left(\sum_{1\le i\le n} \xi_i^2\right)^{1/2}} \right| < \infty.$$

Taip pat, naudosime šiuos Hölderio teoremos taikymus:

Teiginys 1 *Tarkime* $(a_i, i \in \mathbb{Z})$ *ir* $(b_i, i \in \mathbb{Z})$ *yra dvi realiųjų skaičių sekos. Tada* $\forall n \in \mathbb{N}$ *teisinga:*

$$\sum_{i=1}^n |a_i b_i| \le \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)^{1/2} .$$

Teiginys 2 *Tarkime* X, Y *yra tokie a.d., kad* $\mathbb{E}X^2 \le \infty$ *ir* $\mathbb{E}Y^2 \le \infty$. *Tada:*

$$\mathbb{E}XY \le (\mathbb{E}X^2)^{1/2} (\mathbb{E}Y^2)^{1/2}.$$

Papildomai mums bus reikalinga Markovo nelygybė:

Teiginys 3 *Bet kokiam atsitiktiniam dydžiui galioja nelygybė:*

$$P(|X| \ge \varepsilon) \le \frac{E|X|}{\varepsilon}.$$

3 Konvergavimo greitis

Pradžioje suformuluosime šio darbo rezultatą:

Teorema 4 *Tarkime, kad galioja 2 teoremoje suformuluotos sąlygos, o* C_1 *ir* C_2 *yra teigiamos konstantos. Tada blokais autonormuota n dėmenų suma konverguoja į* $\mathcal{N}(0;1)$ *greičiu, ne didesniu nei*

$$\sup_x |P(S_n U_n^{-1} < x) - \Phi(x)| \le C_1 \sqrt[8]{n},$$

o optimalus bloko ilgis, minimizuojantis konvergavimo greitį, yra

$$m = C_2 \sqrt{n}.$$

Teoremą įrodysime tirdami funkciją:

$$f(n,m) = \sup_x \left| \mathbb{P}(S_n U_n^{-1} < x) - \Phi(x) \right|.$$

Pagal teoremą Nr. 2 funkcija $f(n,m)$ artėja į 0, kai $n \to \infty, m \to \infty, m/n \to 0$. Fiksavę tiriamų narių skaičių n, gausime konvergavimo greičio priklausomybę nuo bloko dydžio m ir šią funkciją galėsime minimizuoti. Perrašykime $S_n U_n^{-1}$ pasinaudodami (5) ir (6):

$$\begin{aligned} \frac{S_n}{U_n} &= \frac{\sum_{j=1}^N (\sigma_j + \eta_j)}{(\sum_{j=1}^N (\sigma_j + \eta_j)^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\overbrace{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i}^{Z_n}}{\chi_n} \cdot \tau_{n,m} + \frac{\overbrace{\rho(X_0 - X_n)}^{A_n}}{\chi_n} \cdot \tau_{n,m} \\ &= \tau_{n,m}(Z_n + A_n). \end{aligned}$$

Čia:

$$\tau_{n,m}^2 = \frac{\chi_n^2}{\sum_{j=1}^N (\sigma_j + \eta_j)^2}, \quad \chi_n^2 = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2.$$

M. Juodžio ir A. Račkausko[1] straipsnyje parodyta, kad:

$$\tau_{n,m} \xrightarrow[n \to \infty]{\mathbb{P}} 1, \qquad A_n \xrightarrow[n \to \infty]{\mathbb{P}} 0.$$

Be to, pagal teoremą nr. 3, Z_n konverguoja į $\mathcal{N}(0;1)$ greičiu

$$b_n := \sup_x |\mathbb{P}(Z_n < x) - \Phi(x)| < \frac{c\mathbb{E}|\varepsilon_i|^3}{\sigma^3 \sqrt{n}}.$$

Papildomai pažymėję įvykį $A = \{\tau_{n,m}(Z_n + A_n) < x\}$ galime uždavinį perrašyti taip:

$$f(n,m) = \sup_x |\mathbb{P}(\tau_{n,m}(Z_n + A_n) < x) - \Phi(x)| = \sup_x |\mathbb{P}(A) - \Phi(x)|.$$

Toliau pasižymėkime dvi aibes:

$$I_1 = \{x \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(A) > \Phi(x)\} \quad \text{ir} \quad I_2 = \{x \in R : \mathbb{P}(A) \le \Phi(x)\}.$$

Tada

$$\begin{aligned} f(n,m) &= \max_{i=1,2} \left(\sup_{x \in I_i} |\mathbb{P}(A) - \Phi(x)| \right) = \\ &= \max \left(\sup_{x \in I_1} (P(A) - \Phi(x)), \sup_{x \in I_2} (\Phi(x) - \mathbb{P}(A)) \right). \end{aligned}$$

3.1 $\mathbb{P}(A)$ vertinimas iš viršaus

Nagrinėkime įvykį $A = \{\tau_{n,m}(Z_n + A_n) < x\}$. Pasirinkime $\gamma_{n,m} > 0$ ir $\delta_n > 0$ ir pažymėkime naujus įvykius:

$$\begin{aligned} B &:= \{\tau_{n,m} > 1 - \gamma_{n,m}\}, \\ C &:= \{A_n > -\delta_n\}. \end{aligned}$$

Akivaizdu, kad

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap (B \cap C)^c).$$

Atskirai vertiname pirmąjį sumos narį:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \\
&= \mathbb{P}(\{\tau_{n,m}(Z_n + A_n) < x\} \cap \{\tau_{n,m} > 1 - \gamma_{n,m}\} \cap \{A_n > -\delta_n\}) \\
&\leq \mathbb{P}(\{(1-\gamma_{n,m})(Z_n - \delta_n) < x\} \cap B \cap C) \\
&\leq \mathbb{P}((1-\gamma_{n,m})(Z_n - \delta_n) < x) \\
&= \mathbb{P}\left(Z_n < \frac{x + (1-\gamma_{n,m})\delta_n}{1-\gamma_{n,m}}\right) = \mathbb{P}\left(Z_n < \frac{x}{1-\gamma_{n,m}} + \delta_n\right).
\end{aligned}$$

Tada antrasis narys:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \cap (B \cap C)^c) &\leq \mathbb{P}((B \cap C)^c) \leq \mathbb{P}(B^c) + \mathbb{P}(C^c) \\
&\leq \mathbb{P}(\tau_{n,m} < 1 - \gamma_{n,m}) + \mathbb{P}(A_n < -\delta_n) := \Delta_n.
\end{aligned}$$

Pastarasis dydis yra „mažas“, kadangi $\tau_{n,m} \to 1$ ir $A_n \to 0$. Toliau, pastebėkime, kad:

$$\begin{aligned}
\sup_{x \in I_1} &= \sup_{x \in I_1} \left(\mathbb{P}(A \cap B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap (B \cap C)^c) - \Phi(x)\right) \\
&\leq \sup_{x \in I_1} \left[\mathbb{P}\left(Z_n < \frac{x}{1-\gamma_{n,m}} + \delta_n\right) + \mathbb{P}\left(A \cap (B \cap C)^c\right) - \Phi(x)\right. \\
&\quad + \left.\Phi\left(\frac{x}{1-\gamma_{n,m}} + \delta_n\right) - \Phi\left(\frac{x}{1-\gamma_{n,m}} + \delta_n\right)\right] \\
&\leq \sup_{x \in I_1} \left(b_n + \Delta_n + \Phi\left(\frac{x}{1-\gamma_{n,m}} + \delta_n\right) - \Phi(x)\right) \\
&\leq b_n + \Delta_n + \sup_{x \in I_1} \left|\Phi\left(\frac{x}{1-\gamma_{n,m}} + \delta_n\right) - \Phi(x)\right|.
\end{aligned}$$

Papildomai įvedę $c_n = \sup_{x \in I_1} |\Phi(x/(1-\gamma_{n,m}) + \delta_n) - \Phi(x)|$ gauname įvertį:

$$\sup_{x \in I_1} \leq b_n + \Delta_n + c_n.$$

3.2 $\mathbb{P}(A)$ įvertis iš apačios

Pasižymėkime kitokius įvykius:

$$\begin{aligned}
B' &:= \{\tau_{n,m} < 1 + \gamma_{n,m}\}, \\
C' &:= \{A_n < \delta_n\}.
\end{aligned}$$

Kaip ir anksčiau, pažymėtų įvykių sankirtos papildinys, $\mathbb{P}((B\cap C)^c)$, yra artimas nuliui. Be to:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A\cap B'\cap C') + \mathbb{P}(A\cap (B'\cap C')^c) \geq \mathbb{P}(A\cap B'\cap C') \\
&= \mathbb{P}(\{\tau_{n,m}(Z_n + A_n) < x\} \cap \{\tau_{n,m} < \gamma_{n,m} + 1\} \cap \{A_n < \delta_n\}) \\
&\geq \mathbb{P}(\overbrace{\{(1+\gamma_{n,m})(Z_n + \delta_n) < x\}}^{A'} \cap B' \cap C') \\
&= \mathbb{P}(A'\cap B'\cap C') = \mathbb{P}(A') - \mathbb{P}(A'\cap (B'\cap C')^c) \\
&\geq \mathbb{P}(A') - \mathbb{P}((B'\cap C')^c) \geq \mathbb{P}(A') - \mathbb{P}(B'^c) - \mathbb{P}(C'^c) \\
&= \mathbb{P}((1+\gamma_{n,m})(Z_n+\delta_n) < x) - \Delta'_n \\
&= \mathbb{P}\left(Z_n < \frac{x-(1+\gamma_{n,m})\delta_n}{(1+\gamma_{n,m})}\right) - \Delta'_n \\
&= \mathbb{P}\left(Z_n < \frac{x}{1+\gamma_{n,m}} - \delta_n\right) - \Delta'_n.
\end{aligned}$$

Čia $\Delta'_n = \mathbb{P}(\tau_{n,m} > 1+\gamma_{n,m}) + \mathbb{P}(A_n > \delta)$, vėlgi, yra „mažas“ dydis. Analogiškai ankstesniam skyreliui, pastebime, kad:

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in I_2}(\Phi(x) - \mathbb{P}(A)) &\leq \sup_{x\in I_2}\left[\Phi(x) - \mathbb{P}\left(Z_n < \frac{x}{1+\gamma_{n,m}} - \delta_n\right) + \Delta'_n\right] \\
&= \sup_{x\in I_2}\left[\Phi(x) - \mathbb{P}\left(Z_n < \frac{x}{1+\gamma_{n,m}} - \delta_n\right) + \Delta'_n\right. \\
&\quad + \left.\Phi\left(\frac{x}{1+\gamma_{n,m}} - \delta_n\right) - \Phi\left(\frac{x}{1+\gamma_{n,m}} - \delta_n\right)\right] \\
&\leq \sup_{x\in I_2}\left[b_n + \Delta'_n - \Phi\left(\frac{x}{1+\gamma_{n,m}} - \delta_n\right) + \Phi(x)\right] \\
&\leq b_n + \Delta'_n + \sup_{x\in I_2}\left|\Phi(x) - \Phi\left(\frac{x}{1+\gamma_{n,m}} - \delta_n\right)\right|.
\end{aligned}$$

Velgi, pažymėję $c'_n = \sup_{x\in I_2}|\Phi\left(x/(1+\gamma_{n,m}) - \delta_n\right) - \Phi(x)|$ gauname rezultatą:

$$\sup_{x\in I_2} \leq b_n + \Delta'_n + c'_n.$$

3.3 $f(n,m)$ vertinimas

Turėdami supremumo įverčius aibėse I_1 ir I_2 galime įvertinti $f(n,m)$:

$$\begin{aligned}
f(n,m) &\leq \max\left(b_n + \Delta_n + c_n, b_n + \Delta'_n + c'_n\right) \\
&\leq b_n + \max(\Delta_n, \Delta'_n) + \max(c, c'_n).
\end{aligned}$$

Toliau tirsime atskirus paskutinės sumos narius.

4 Atskirų narių tyrimas

Parodėme, kad mūsų tiriamoji funkcija gali būti vertinama kaip 3 neneigiamų dydžių suma:

$$f(n,m) \leq b_n + \max(\Delta_n, \Delta'_n) + \max(c, c'_n).$$

Narys b_n yra žinomas, be to, jis nepriklauso nuo bloko dydžio m. Likę du nariai priklauso nuo m, o mūsų tikslas - minimizuoti jų sumą.

4.1 Δ_n ir Δ'_n vertinimas

Prisiminkime, ką žymi nariai Δ_n ir Δ'_n.

$$\begin{aligned}
\Delta_n &= \mathbb{P}(\tau_{n,m} < 1 - \gamma_{n,m}) + \mathbb{P}(A_n < -\delta_n), \\
\Delta'_n &= \mathbb{P}(\tau_{n,m} > 1 + \gamma_{n,m}) + \mathbb{P}(A_n > \delta_n).
\end{aligned}$$

Pastebėkime, kad

$$\mathbb{P}(A_n < -\delta_n) + \mathbb{P}(A_n > \delta_n) = \mathbb{P}(|A_n| > \delta_n),$$

Todėl:

$$\max(\Delta_n, \Delta'_n) \leq \mathbb{P}(|A_n| > \delta_n) + \max\left(\mathbb{P}(\tau_{n,m} < 1 - \gamma_{n,m}), \mathbb{P}(\tau_{n,m} > 1 + \gamma_{n,m})\right).$$

Toliau:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\tau_{n,m} - 1 > \gamma_{n,m}) &= \mathbb{P}(\tau_{n,m} > 1 + \gamma_{n,m}) \leq \mathbb{P}\left(\frac{1}{\tau^2_{n,m}} < \overbrace{\frac{1}{(1+\gamma_{n,m})^2}}^{C_\gamma}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{j=1}^N (\sigma_j + \eta_j)^2}{\chi^2_n} < C_\gamma\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{j=1}^N \sigma_j^2 + 2\sum_{j=1}^N \sigma_j\eta_j + \sum_{j=1}^N \eta_j^2}{\chi^2_n} < C_\gamma\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\underbrace{\frac{\sum_{j=1}^N \sigma_j^2}{\chi^2_n}}_{\psi} + \underbrace{\frac{2\sum_{j=1}^N \sigma_j\eta_j + \sum_{j=1}^N \eta_j^2}{\chi^2_n}}_{\omega} < C_\gamma\right) \\
&= \mathbb{P}(\psi + \omega < C_\gamma).
\end{aligned}$$

Laisvai pasirinkime $\alpha_{n,m} > 0$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\psi + \omega < C_\gamma) &= \mathbb{P}\left((\psi + \omega < C_\gamma) \cap (\omega \geq -\alpha_{n,m})\right) \\
&+ \mathbb{P}\left((\psi + \omega < C_\gamma) \cap (\omega < -\alpha_{n,m})\right) \\
&\leq \mathbb{P}\left((\psi - \alpha_{n,m} < C_\gamma) \cap (\omega \geq \alpha_{n,m})\right) + \mathbb{P}(\omega < -\alpha_{n,m}) \\
&\leq \mathbb{P}(\psi < C_\gamma + \alpha_{n,m}) + \mathbb{P}(|\omega| > \alpha_{n,m}).
\end{aligned}$$

Iš kitos pusės:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\tau_{n,m}-1<-\gamma_{n,m}) &= \mathbb{P}(\tau_{n,m}<1-\gamma_{n,m}) \le \mathbb{P}\left(\frac{1}{\tau_{n,m}^2} > \overbrace{\frac{1}{(1-\gamma_{n,m})^2}}^{C'_\gamma}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{j=1}^N(\sigma_j+\eta_j)^2}{\chi_n^2} > C'_\gamma\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{j=1}^N\sigma_j^2 + 2\sum_{j=1}^N\sigma_j\eta_j + \sum_{j=1}^N\eta_j^2}{\chi_n^2} > C'_\gamma\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\underbrace{\frac{\sum_{j=1}^N\sigma_j^2}{\chi_n^2}}_{\psi} + \underbrace{\frac{2\sum_{j=1}^N\sigma_j\eta_j + \sum_{j=1}^N\eta_j^2}{\chi_n^2}}_{\omega} > C'_\gamma\right) \\
&= \mathbb{P}(\psi+\omega > C'_\gamma)
\end{aligned}$$

Ir

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\psi+\omega>C'_\gamma) &= \mathbb{P}\big((\psi+\omega>C'_\gamma)\cap(\omega\le\alpha_{n,m})\big) \\
&+ \mathbb{P}\big((\psi+\omega>C'_\gamma)\cap(\omega>\alpha_{n,m})\big) \\
&\le \mathbb{P}\big((\psi+\alpha_{n,m}>C'_\gamma)\cap(\omega\le\alpha_{n,m})\big) + \mathbb{P}(\omega>\alpha_{n,m}) \\
&\le \mathbb{P}(\psi+\alpha_{n,m}>C'_\gamma) + \mathbb{P}(|\omega|>\alpha_{n,m}).
\end{aligned}$$

Todėl galime supaprastinti tiriamąjį maksimumą taip:

$$\begin{aligned}
\max(\Delta_n,\Delta'_n) &\le \max\left[\mathbb{P}(\psi<C_\gamma+\alpha_{n,m})+\mathbb{P}(|\omega|>\alpha_{n,m}),\right. \\
&\quad \left.\mathbb{P}(\psi>C'_\gamma-\alpha_{n,m})+\mathbb{P}(|\omega|>\alpha_{n,m})\right] \\
&= \mathbb{P}(|\omega|>\alpha_{n,m}) \\
&\quad + \max\left[\mathbb{P}(\psi<C_\gamma+\alpha_{n,m}),\mathbb{P}(\psi>C'_\gamma-\alpha_{n,m})\right].
\end{aligned}$$

Pastebėkime, kad:

$$\sum_{j=1}^N \sigma_j^2 = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 + \sum_{j=1}^N \zeta_j,$$

kur $\zeta_j = \sum_{k,l\in I_j,k\neq j}\varepsilon_k\varepsilon_l, \quad j=1\ldots N$. Tada a.d. ψ persirašo taip:

$$\psi = \left\{\frac{\sum_{i=1}^n\varepsilon_i^2+\sum_{j=1}^N\zeta_j}{\chi_n^2}\right\} = 1+\left\{\frac{\sum_{j=1}^N\zeta_j}{\chi_n^2}\right\} = 1+\psi',$$

o iš čia:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\psi<C_\gamma+\alpha_{n,m}) = \mathbb{P}(\psi'<C_\gamma+\alpha_{n,m}-1) \le \mathbb{P}(|\psi'|>1-\alpha_{n,m}-C_\gamma), \\
\mathbb{P}(\psi>C'_\gamma-\alpha_{n,m}) = \mathbb{P}(\psi'>C'_\gamma-\alpha_{n,m}-1) \le \mathbb{P}(|\psi'|>C'_\gamma-\alpha_{n,m}-1).
\end{aligned}$$

Trumpai paskaičiavę, gauname, kad:

$$1-C_\gamma-C'_\gamma+1 \le 2\left(1-\frac{1}{(1-\gamma_n^2)^2}\right) < 0, \quad \gamma_n<1,$$

todėl:

$$\max(1-C_\gamma, C'_\gamma-1) = C'_\gamma - 1 = \frac{2\gamma_{n,m}-\gamma_{n,m}^2}{(1-\gamma_{n,m})^2}.$$

Pasinaudoję tuo galime teigti, kad:

$$\begin{aligned}
&\max\left(\mathbb{P}(|\psi'| > 1-\alpha_{n,m}-C_\gamma), \mathbb{P}(|\psi'| > C'_\gamma-\alpha_{n,m}-1)\right) \\
&= \mathbb{P}\left(|\psi'| > \max(1-\alpha_{n,m}-C_\gamma, C'_\gamma-\alpha_{n,m}-1)\right) \\
&= \mathbb{P}\left(|\psi'| > -\alpha_{n,m}+\max(1-C_\gamma, C'_\gamma-1)\right) \\
&= \mathbb{P}\left(|\psi'| > -\alpha_{n,m}+\frac{2\gamma_{n,m}-\gamma_{n,m}^2}{(1-\gamma_{n,m})^2}\right).
\end{aligned}$$

Patogumo delei pažymėkime konstantą $\beta_{n,m} = -\alpha_{n,m} + \frac{2\gamma_{n,m}-\gamma_{n,m}^2}{(1-\gamma_{n,m})^2}$. Papildomai, pareikalaukime, kad $\beta_{n,m} > 0$, t.y.:

$$\alpha_{n,m} < 2\gamma_{n,m} \le \frac{2\gamma_{n,m}-\gamma_{n,m}^2}{(1-\gamma_{n,m})^2}.$$

Dabar galime įvertinti tiriamąjį maksimumą kaip sumą:

$$\max(\Delta_n, \Delta'_n) \le \mathbb{P}(|A_n| > \delta_n) + \mathbb{P}(|\omega| > \alpha_{n,m}) + \mathbb{P}(|\psi'| > \beta_{n,m}).$$

Toliau lieka apskaičiuoti šias tris tikimybes.

4.1.1 $\mathbb{P}(|A_n| > \delta_n)$

$\{\varepsilon_i, i \in \mathcal{N}\}$ yra nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę. Be to, pasinaudoję lemomis 1 ir 2 gauname, kad egzistuoja tokia konstanta $Q_1 > 0$, kad:

$$\left|\mathbb{E}\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\chi_n^2}\right| \le \frac{Q_1}{n^2} \qquad \text{ir} \qquad \mathbb{E}\frac{\varepsilon_1^2}{\chi_n^2} = \frac{1}{n}.$$

Iš čia matosi, kad

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(A_n)^2 &= \mathbb{E}\left(\rho^2\frac{X_n^2}{\chi_n^2}\right) = \rho^2\mathbb{E}\left(\frac{\left(\sum_{i=0}^{n-1}\rho^i\varepsilon_{n-i}\right)^2}{\chi_n^2}\right) \\
&= \rho^2\mathbb{E}\left(\frac{\sum_{i=0}^{n-1}\rho^{2i}\varepsilon_{n-i}^2}{\chi_n^2}\right) + \rho^2\mathbb{E}\left(\frac{\sum_{j,k=0;j\neq k}^{n-1}\rho^{j+k}\varepsilon_{n-j}\varepsilon_{n-k}}{\chi_n^2}\right) \\
&= \rho^2\mathbb{E}\left(\frac{\varepsilon_1^2}{\chi_n}\right)\sum_{i=0}^{n-1}\rho^{2i} + \rho^2\mathbb{E}\left(\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\chi_n^2}\right)\sum_{j,k=0;j\neq k}^{n-1}\rho^{j+k} \\
&\le \rho^2\frac{\theta}{n} + \rho^2\frac{Q_1 n\theta}{n^2} = \frac{\rho^2\theta}{n}(1+Q_1),
\end{aligned}$$

kur θ yra nykstamos geometrinės progresijos suma, apibrėžta (7) lygybe. Toliau, pasižymėkime

$$K_1^2 := \rho^2\theta(1+Q_1),$$

Taip, kad $\mathbb{E}A_n^2 \le K_1^2 n^{-1}$. Galiausia, pasinaudoję Markovo nelygybe(teiginys 3), gauname tikimybės įvertį:

$$\mathbb{P}(|A_n| > \delta_n) < \frac{\mathbb{E}|A_n|}{\delta_n} \le \frac{\sqrt{\mathbb{E}(A_n)^2}}{\delta_n} \le \frac{K_1}{\delta_n\sqrt{n}}.$$

4.1.2 $\mathbb{P}(|\psi'| > \beta_{n,m})$

M. Juodžio ir A. Račkausko[1] straipsnyje apskaičiuota, kad

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\psi')^2 &= \mathbb{E}\left(\frac{\sum_{j=1}^N \zeta_j}{\chi_n^2}\right)^2 = \sum_{j=1}^N \mathbb{E}\frac{\zeta_j^2}{\chi_n^4} + \sum_{j\neq k; j,k=1}^N \frac{\zeta_k\zeta_j}{\chi_n^4} \\
&\leq \frac{Q_2 N m^2}{n^2} + \frac{Q_3 N m^3}{n^3} + \frac{Q_4 N m^4}{n^4} + \frac{Q_4 N^2 m^4}{n^4} \\
&= \frac{1}{N}\left(Q_2 + \frac{Q_3 + Q_4}{N} + \frac{Q_4}{N^2}\right),
\end{aligned}$$

kur $Q_i, i = 2\ldots 4$ išsireiškia iš įverčių, gaunamų, pasinaudojus lemois 1 ir 2:

$$\left|\mathbb{E}\frac{\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2}{\chi_n^4}\right| \leq \frac{Q_2}{n^2}, \quad \left|\mathbb{E}\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3^2}{\chi_n^4}\right| \leq \frac{Q_3}{n^3}, \quad \left|\mathbb{E}\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4}{\chi_n^4}\right| \leq \frac{Q_4}{n^4}.$$

Pasižymėkime:

$$Q_2 + \frac{Q_3 + Q_4}{N} + \frac{Q_4}{N^2} \leq Q_2 + Q_3 + 2Q_4 =: K_2^2.$$

Tada, pasinaudojus Markovo nelygybe (teiginys 3), galime teigti, kad

$$\mathbb{P}(\mathbb{E}|\psi'| > \beta_{n,m}) < \frac{\mathbb{E}|\psi'|}{\beta_{n,m}} \leq \frac{\sqrt{\mathbb{E}(\psi')^2}}{\beta_{n,m}} \leq \frac{K_2}{\beta_{n,m}\sqrt{N}}.$$

4.1.3 $\mathbb{P}(|\omega| > \alpha_{n,m})$

Vertinant šią tikimybę, reiktų paskaičiuoti $\mathbb{E}|\omega|$:

$$\mathbb{E}|\omega| = \mathbb{E}\left|\frac{2\sum_{j=1}^N \sigma_j\eta_j + \sum_{j=1}^N \eta_j^2}{\chi_n^2}\right| \leq 2\mathbb{E}\left|\frac{\sum_{j=1}^N \sigma_j\eta_j}{\chi_n^2}\right| + \mathbb{E}\frac{\sum_{j=1}^N \eta_j^2}{\chi_n^2}.$$

Pasinaudojus Hiolderio nelygybėmis(teiginiai 1 ir 2), pirmąjį vidurkį galime išskaidyti į sandaugą:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left|\frac{\sum_{j=1}^N \sigma_j\eta_j}{\chi_n^2}\right| &\leq \mathbb{E}\left(\frac{\sum_{j=1}^N \sigma_j^2}{\chi_n^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\sum_{j=1}^N \eta_j^2}{\chi_n^2}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\mathbb{E}\frac{\sum_{j=1}^N \sigma_j^2}{\chi_n^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\mathbb{E}\frac{\sum_{j=1}^N \eta_j^2}{\chi_n^2}\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Pastebėkime, kad:

$$\mathbb{E}\frac{\sum_{j=1}^N \sigma_j^2}{\chi_n^2} = \mathbb{E}(1+\psi') \leq 1 + \sqrt{\mathbb{E}(\psi')^2} \leq \frac{Q_5^2}{4},$$

todėl uždavinys persirašo taip:

$$\mathbb{E}|\omega| \leq Q_5\mathbb{E}\left(\frac{\sum_{j=1}^N \eta_j^2}{\chi_n^2}\right)^{\frac{1}{2}} + \mathbb{E}\frac{\sum_{j=1}^N \eta_j^2}{\chi_n^2}.$$

Kadangi

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{N}\eta_j^2 &= \rho\sum_{j=1}^{N}(X_{(j-1)m}-X_{jm})^2=\sum_{j=1}^{N}\rho(X_{(j-1)m}^2+X_{jm}^2-2X_{(j-1)m}X_{jm})\\ &\le 2\sum_{j=1}^{N}X_{jm}^2-2\sum_{j=1}^{N}X_{jm}X_{(j-1)m},\end{aligned}$$

o

$$X_{(j-1)m}X_{jm}=\rho^m X_{(j-1)m}^2+\sum_{k=1}^{m}X_{(j-1)m}\rho^{m-k}\varepsilon_{(j-1)m+k},$$

todėl:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{N}\eta_j^2 &\le (2-\rho^m)\sum_{j=1}^{N}X_{jm}^2-2\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{m}X_{(j-1)m}\rho^{m-k}\varepsilon_{(j-1)m+k}\\ &\le 2\sum_{j=1}^{N}X_{jm}^2-2\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{m}X_{(j-1)m}\rho^{m-k}\varepsilon_{(j-1)m+k}.\end{aligned}$$

Pasinaudojus tuo, galima teigti, kad:

$$\mathbb{E}\frac{\sum_{j=1}^N\eta_j^2}{\chi_n^2}\le 2\mathbb{E}\frac{\sum_{j=1}^N X_{jm}^2}{\chi_n^2}+2\left|\mathbb{E}\frac{\sum_{j=1}^N\sum_{k=1}^m X_{(j-1)m}\rho^{m-k}\varepsilon_{(j-1)m+k}}{\chi_n^2}\right|.$$

M. Juodžio ir A. Račkausko[1] straipsnyje parodyta, kad:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\frac{\sum_{j=1}^N X_{jm}^2}{\chi_n^2} &\le \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{jm}\rho^{2jm-2i}+\frac{Q_1}{n^2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{i\neq k}\rho^{2jm-i-k}\\ &\le \frac{N\theta}{n}+\frac{Q_1 nN\theta}{n^2}=\frac{\theta+Q_1\theta}{m}.\end{aligned}$$

Iš čia galime paskaičiuoti:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\frac{\sum_{j=1}^N\eta_j^2}{\chi_n^2} &\le \mathbb{E}\frac{2\sum_{j=1}^N X_{jm}^2}{\chi_n^2}+2\mathbb{E}\frac{\sum_{j=1}^N\sum_{k=1}^m X_{(j-1)m}\rho^{m-k}\varepsilon_{(j-1)m+k}}{\chi_n^2}\\ &\le \frac{\theta+Q_1\theta}{m}+2\mathbb{E}\frac{\sum_{j=1}^N\sum_{k=1}^m\sum_{i=0}^{(j-1)m-1}\rho^{i+m-k}\varepsilon_{(j-1)m-i}\varepsilon_{(j-1)m+k}}{\chi_n^2}\\ &= \frac{\theta+Q_1\theta}{m}+2\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=0}^{(j-1)m-1}\rho^{i+m-k}\mathbb{E}\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\chi_n^2}\\ &\le \frac{\theta+Q_1\theta}{m}+2\frac{Q_1Nm\theta}{n^2}=\frac{\theta+Q_1\theta}{m}+\frac{2Q_1\theta}{n}.\end{aligned}$$

Dabar galime įvertinti $E|\omega|$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|\omega| &\le Q_5E\left(\frac{\sum_{j=1}^N\eta_j^2}{\chi_n^2}\right)^{\frac{1}{2}}+\mathbb{E}\frac{\sum_{j=1}^N\eta_j^2}{\chi_n^2}\\ &\le Q_5\sqrt{\frac{\theta+Q_1\theta}{m}+\frac{2Q_1\theta}{n}}+\frac{\theta+Q_1\theta}{m}+\frac{2Q_1\theta}{n}.\end{aligned}$$

Pasižymėkime:

$$Q_5\sqrt{\theta+Q_1\theta+\frac{2Q_1\theta}{N}}+\frac{\theta+Q_1\theta}{\sqrt{m}}+\frac{2Q_1\theta}{N\sqrt{m}}\le Q_5\sqrt{\theta+3Q_1\theta}+\theta+3Q_1\theta:=K_3,$$

taip, kad $\mathbb{E}|\omega|\le K_3m^{-1/2}$. Vėl pasinaudojame Markovo nelygybe(teiginys 3) ir gauname tikimybės įvertį:

$$\mathbb{P}(|\omega|>\alpha_{n,m})\le\frac{\mathbb{E}|\omega|}{\alpha_{n,m}}=\frac{K_3}{\alpha_{n,m}\sqrt{m}}.$$

4.1.4 Galutinis maksimumo įvertis

Įvertinę atskirus narius, galime įvertinti tiriamąji maksimumą.

$$\begin{aligned}\max(\Delta_n,\Delta_n') &\le \mathbb{P}(|A_n|>\delta_n)+\mathbb{P}(|B|>\alpha_{n,m})+\mathbb{P}(|A'|>\beta_{n,m})\\ &\le \frac{K_1}{\delta_n\sqrt{n}}+\frac{K_2}{\beta_{n,m}\sqrt{N}}+\frac{K_3}{\alpha_{n,m}\sqrt{m}}.\end{aligned}$$

4.2 c_n ir c_n' vertinimas

Trečiame skyriuje įvedėme du dydžius:

$$\begin{aligned}c_n&=\sup_{x\in I_1}\left|\Phi\left(\frac{x}{1-\gamma_{n,m}}+\delta_n\right)-\Phi(x)\right|\quad\text{ir}\\ c_n'&=\sup_{x\in I_2}\left|\Phi\left(\frac{x}{1+\gamma_{n,m}}-\delta_n\right)-\Phi(x)\right|.\end{aligned}$$

Akivaizdu, kad bet kokiai aprėžtai funkcijai $f(x)$ ir bet kokiam intervalui $I\subset\mathbb{R}$ galioja nelygybė:

$$\sup_{x\in I}|f(x)|\le\sup_x|f(x)|,$$

todėl nagrinėdami šiuos du narius, tirsime juos visoje realiųjų skaičių tiesėje, atsisakydami anksčiau įvestų intervalų I_1 ir I_2.

4.2.1 Narys c_n

Pasinaudojame vidurinės reikšmės teorema:

$$\begin{aligned}c_n &\le \sup_x\left|\Phi\left(\frac{x}{1-\gamma_{n,m}}+\delta_n\right)-\Phi(x)\right|\\ &= \sup_x\left|\Phi'(c_x)|\frac{x}{1-\gamma_{n,m}}+\delta_n-x|\right|\\ &\le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sup_x\left|\exp\{-c_x^2/2\}|\frac{x\gamma_{n,m}}{1-\gamma_{n,m}}+\delta_n|\right|,\end{aligned}$$

kur c_x yra kažkoks intervalo $I=[x;x(1-\gamma_{n,m})^{-1}+\delta_n]$ taškas. Suskaidykime $\mathbb{R}$ į tris intervalus:

$$\begin{aligned}I_1&=[0;\infty),\\ I_2&=[-\delta_n(1-\gamma_{n,m})/\gamma_{n,m};0),\\ I_3&=(-\infty;-\delta_n(1-\gamma_{n,m})/\gamma_{n,m}).\end{aligned}$$

Atvejis, kai $x \in I_1$:

Prie šios sąlygos $I = [x; x(1-\gamma_{n,m})^{-1} + \delta_n]$, nes $x < x(1-\gamma_{n,m})^{-1} + \delta_n$. Tada

$$\exp\{-c_x^2/2\} \leq \exp\{-x^2/2\}, \quad \forall c_x \in I.$$

Pasinaudoję tuo, kad $x\exp\{-x^2/2\} < C \quad \forall x \in \mathbb{R}$, gauname:

$$\begin{aligned}
&\sup_{x \in I_1} \left| \exp\{-c_x^2/2\} | \frac{x\gamma_{n,m}}{1-\gamma_{n,m}} + \delta_n | \right| \\
&\leq \sup_{x \in I_1} \left(\exp\{-x^2/2\} x\gamma_{n,m} \cdot \frac{1}{1-\gamma_{n,m}} + \exp\{-x^2/2\}\delta_n \right) \\
&\leq C\gamma_n + \delta_n \qquad \forall c_x \in I.
\end{aligned}$$

Atvejis, kai $x \in I_2$

Prie šios sąlygos užtenka pastebėti, kad $\Phi'(c_x) \leq 1, \quad \forall c_x \in \mathbb{R}$. Tada:

$$\sup_{x \in I_2} \left| \exp\{-c_x^2/2\} | \frac{x\gamma_{n,m}}{1-\gamma_{n,m}} + \delta_n | \right| \leq \sup_{x \in I_2} \left| \frac{x\gamma_{n,m}}{1-\gamma_{n,m}} + \delta_n \right| = \delta_n.$$

Atvejis, kai $x \in I_3$

Prie šios sąlygos intervalas $I = [x(1-\gamma_{n,m})^{-1} + \delta_n; x]$. Tačiau kadangi argumento reikšmė yra neigiama, gauname, kad $|x| < |x(1-\gamma_{n,m})^{-1} + \delta_n|$. Todėl turime, kaip ir I_1 turime:

$$\exp\{-c_x^2/2\} \leq \exp\{-x^2/2\}, \quad \forall c_x \in I,$$

ir:

$$\begin{aligned}
&\sup_{x \in I_1} \left| \exp\{-c_x^2/2\} | \frac{x\gamma_{n,m}}{1-\gamma_{n,m}} + \delta_n | \right| \\
&\leq \sup_{x \in I_1} \left(\exp\{-x^2/2\} x\gamma_{n,m} \cdot \frac{1}{1-\gamma_{n,m}} + \exp\{-x^2/2\}\delta_n \right) \\
&\leq C\gamma_n + \delta_n \qquad \forall c_x \in I.
\end{aligned}$$

Bendras atvejis

Pagal tris ištirtus atvejus matome, kad:

$$\sup_{x} \left| \exp\{-c_x^2/2\} | \frac{x\gamma_{n,m}}{1-\gamma_{n,m}} + \delta_n | \right| \leq \max(C\gamma_{n,m} + \delta_n, \delta_n) = C\gamma_{n,m} + \delta_n.$$

Dabar galime įvertinti narį c_n:

$$c_n \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sup_{x} \left| \exp\{-c_x^2/2\} | \frac{x\gamma_{n,m}}{1-\gamma_{n,m}} + \delta_n | \right| \leq C_1\gamma_{n,m} + C_2\delta_{n,m}.$$

4.2.2 Narys c_n'

Narys c_n yra analogiškas, todėl vėl pasinaudojame vidurinės reikšmės teorema:

$$c_n' \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sup_x \left| \exp\{-c_x^2/2\} | \frac{x\gamma_{n,m}}{1+\gamma_{n,m}} + \delta_n | \right|$$

Ir susikaidome $\mathbb{R}$ į tris dalis:

$$\begin{aligned} I_1 &= [\delta_n(1+\gamma_{n,m});\infty), \\ I_2 &= [-\delta_n(1+\gamma_{n,m})/\gamma_{n,m};\delta_n(1+\gamma_{n,m})), \\ I_3 &= (-\infty;-\delta_n(1+\gamma_{n,m})/\gamma_{n,m}). \end{aligned}$$

Vėl nagrinėjame tris atvejus:

Atvejis, kai $x \in I_1$:

Prie šių sąlygų intervalas $I = [x/(1+\gamma_{n,m}) - \delta_n; x]$, be to $x/(1+\gamma_{n,m}) - \delta_n > 0$, todėl:

$$\begin{aligned} \exp\{-c_x^2/2\} &\leq \exp\left\{-\frac{\left(\frac{x}{1-\gamma_{n,m}} - \delta_n\right)^2}{2}\right\} \\ &= \exp\{-\frac{x^2}{2(1-\gamma_{n,m})^2}\}\exp\{\frac{2\delta_n x}{2(1-\gamma_{n,m})}\}\exp\{-\frac{\delta_n^2}{2}\} \\ &\leq C\exp\{-x^2/2+x\} \\ &\leq C'e^{-x}, \quad \delta_n < 0.5, \quad \gamma_{n,m} < 0.5, \quad x > 0. \end{aligned}$$

Pasinaudojame tuo, kad $xe^{-x} < C$ ir gauname, kad:

$$\begin{aligned} \sup_{x\in I_1} \left| \exp\{-c_x^2/2\} | \frac{x\gamma_{n,m}}{1+\gamma_{n,m}} + \delta_n | \right| &\leq \sup_{x\in I_1} \left(C'e^{-x} \left(\frac{x\gamma_{n,m}}{1+\gamma_{n,m}} + \delta_n \right) \right) \\ &\leq C''\gamma_{n,m} + C'\delta_n. \end{aligned}$$

Atvejis, kai $x \in I_2$:

Prie šios sąlygos užtenka pastebėti, kad $\Phi'(c_x) \leq 1 \quad \forall c_x \in \mathbb{R}$. Tada:

$$\sup_{x\in I_2} \left| \exp\{-c_x^2/2\} | \frac{x\gamma_{n,m}}{1+\gamma_{n,m}} + \delta_n | \right| \leq \sup_{x\in I_2} \left| \frac{x\gamma_{n,m}}{1+\gamma_{n,m}} + \delta_n \right| \leq C\gamma_{n,m} + \delta_n.$$

Atvejis, kai $x \in I_3$:

Prie šių sąlygų intervalas $I = [x; x(1+\gamma_{n,m})^{-1} - \delta_n]$. Pastebime, kad $|x| < |x(1+\gamma_{n,m})^{-1} - \delta_n|$ ir analogiškai gauname, kad:

$$\begin{aligned} \exp\{-c_x^2/2\} &\leq \exp\left\{-\frac{\left(\frac{x}{1-\gamma_{n,m}} - \delta_n\right)^2}{2}\right\} \\ &= \exp\left\{-\frac{x^2}{2(1-\gamma_{n,m})^2}\right\}\exp\left\{\frac{2\delta_n x}{2(1-\gamma_{n,m})}\right\}\exp\left\{-\frac{\delta_n^2}{2}\right\} \\ &\leq C\exp\{-x^2/2+x\} \\ &\leq C\exp\{-x^2/2\}, \quad \delta_n < 0.5, \quad \gamma_{n,m} < 0.5, \quad x < 0. \end{aligned}$$

Belieka įvertinti:

$$\sup_{x\in I_3}\left|\exp\{-c_x^2/2\}|\frac{x\gamma_{n,m}}{1+\gamma_{n,m}}+\delta_n|\right| \le \sup_{x\in I_3}\left(C\exp\{-x^2/2\}\frac{|x|\gamma_{n,m}}{1+\gamma_{n,m}}+\delta_n\right)$$
$$\le C'''\gamma_{n,m}+C''''\delta_n.$$

Bendras atvejis

Pagal tris ištirtus atvejus matome, kad parinkę

$$C^* = \max(C''', C'', C) \quad \text{ir} \quad C^{**} = \max(C'''', C'', 1),$$

turime

$$\sup_x \left|\exp\{-c_x^2/2\}|\frac{x\gamma_{n,m}}{1+\gamma_{n,m}}-\delta_n|\right| \le C^*\gamma_{n,m}+C^{**}\delta_n,$$

todėl c_n' įvertis:

$$c_n' \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sup_x\left|\exp\{-c_x^2/2\}|\frac{x\gamma_{n,m}}{1+\gamma_{n,m}}-\delta_n|\right| \le C_3\gamma_{n,m}+C_4\delta_{n,m}.$$

4.2.3 Galutinis įvertis

Belieka susumuoti rezultatus. Kadangi:

$$\begin{aligned} c_n &\le C_1\gamma_{n,m}+C_2\delta_{n,m}, \\ c_n' &\le C_3\gamma_{n,m}+C_4\delta_{n,m}, \end{aligned}$$

tai pažymėję $K_4 = \max(C_1, C_3)$ ir $K_5 = \max(C_2, C_4)$ gauname:

$$\max(c_n, c_n') \le K_4\gamma_{n,m}+K_5\delta_n.$$

5 Optimalaus bloko ilgio parinkimas

Grįžkime prie funkcijos $f(n,m)$. Prisiminkime, kad pasirinkome tris „mažus" dydžius $\alpha_{n,m}, \gamma_{n,m}, \delta_n$. Galiausia galime įvertinti pačia funkciją per n, m ir N:

$$\begin{aligned} f(n,m) &\le b_n+\max(\Delta_n,\Delta_n')+\max(c_n,c_n') \\ &\le \frac{K_0}{\sqrt{n}}+\frac{K_1}{\delta_n\sqrt{n}}+\frac{K_2}{\beta_{n,m}\sqrt{N}}+\frac{K_3}{\alpha_{n,m}\sqrt{m}}+K_4\gamma_{n,m}+K_5\delta_n. \end{aligned}$$

$\beta_{n,m}$ išraiška gana sudėtinga, todėl ją papildomai vertinkime iš apačios:

$$\begin{aligned} \beta_{n,m} &= -\alpha_{n,m}+\frac{2\gamma_{n,m}-\gamma_{n,m}^2}{(1-\gamma_{n,m})^2} \ge -\alpha_{n,m}+\gamma_{n,m}\frac{2-2\gamma_{n,m}}{(1-\gamma_{n,m})^2} \\ &\ge 2\gamma_{n,m}-\alpha_{n,m}. \end{aligned}$$

Pasinaudoję tuo, galime teigti, kad:

$$f(n,m) \le \frac{K_0}{\sqrt{n}}+\frac{K_1}{\delta_n\sqrt{n}}+\frac{K_2\sqrt{m}}{(2\gamma_{n,m}-\alpha_{n,m})\sqrt{n}}+\frac{K_3}{\alpha_{n,m}\sqrt{m}}+K_4\gamma_{n,m}+K_5\delta_n.$$

Įveskime naujus kintamuosius $\kappa_i > 0, i = 0 \dots 5$. Pasirinkime:

$$\delta_n = n^{-\kappa_1}, \quad \gamma_{n,m} = n^{-\kappa_2} m^{-\kappa_3}, \quad \alpha_{n,m} = n^{-\kappa_4} m^{-\kappa_5},$$

bei tarkime, kad optimalus blokas yra formos $m = n^{\kappa_0}$. Tada:

$$\gamma_{n,m} = n^{-\kappa_2 - \kappa_0 \kappa_3}, \quad \alpha_{n,m} = n^{-\kappa_4 - \kappa_0 \kappa_5}.$$

Toliau, fiksuokime n kaip konstantą ir perrašykime lygtį taip, kad ji priklausytų tik nuo κ_i:

$$\begin{aligned}
f(n,m) &\leq F(\kappa_i, i = 0 \dots 5) := \underbrace{K_0 n^{-\frac{1}{2}}}_{C} + \underbrace{K_1 n^{\kappa_1 - 0.5} + K_5 n^{-\kappa_1}}_{g} \\
&+ \underbrace{\frac{K_2 n^{\frac{\kappa_0}{2} - 0.5}}{2n^{-\kappa 2 - \kappa_0 \kappa_3} - n^{-\kappa_4 - \kappa_0 \kappa_5}} + K_3 n^{\kappa_4 - \kappa_0 \kappa_5 - \frac{\kappa_0}{2}} + K_4 n^{-\kappa_2 - \kappa_0 \kappa_3}}_{h} \\
&= C + g(\kappa_1) + h(\kappa_0, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4, \kappa_5).
\end{aligned}$$

Pastebėkime, kad ši funkcija išsiskaido į 3 nepriklausomas dalis, todėl jas galime nagrinėti atskirai. Pirma ištiriame $g(\kappa_1)$:

$$\begin{aligned}
g'(\kappa_1) &= (K_1 n^{\kappa_1 - 0.5} + K_5 n^{-\kappa_1})' = \frac{\ln n}{n^{\kappa_1}} \left(K_1 n^{2\kappa_1 - 0.5} - K_5 \right) \\
g'(\kappa_1') &= 0 \quad \rightarrow \quad \kappa_1' = \frac{1}{4} + \log_n \left(\frac{K_5}{K_1} \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Akivaizdu, kad κ_1' yra minimumo taškas. Tada mūsų laisvai pasirinktas δ_n yra formos:

$$\delta_n = n^{-\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{K_1}{K_5}}.$$

Antrojo nario tyrimui pasinaudokime Maple programa:

```
readlib(extrema);
f := K2*sqrt(n^k0)/((2*n^(-k2)*n^(-k0*k3) - n^(-k4)*n^(-
    k5*k0))*sqrt(n)) + K3/(n^(-k4)*n^(-k0*k5)*sqrt(n^k0))
    + K4*n^(-k2)*n^(-k0*k3);
ex := extrema(f, {}, {k0, k2, k3, k4, k5}, 's');
s;
```

Pasirodo, kad nariai κ_3, κ_5 yra laisvi, o $\kappa_2 = \kappa_4$, arba ekstremumas pasiekiamas, kai pasirenkame $\alpha_{n,m} = \gamma_{n,m}$. Tokiu atveju sprendžiame paprastesnę lygtį:

$$h(\kappa_0, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4, \kappa_5) = h(\kappa_0, \kappa_2, \kappa_3)$$

ir pasinaudoję komanda:

```
h := K2*sqrt(n^(kappa0))/(n^(-kappa2)*n^(-kappa3*kappa0)*
    sqrt(n)) + K3/(n^(-kappa2)*n^(-kappa3*kappa0)*sqrt(n^(
    kappa0))) + K4*n^(-kappa2)*n^(-kappa3*kappa0);
ex := extrema(h, {}, {kappa2, kappa3, kappa0}, 's');
s;
```

Gauname, kad:

$$\begin{aligned}
\kappa_0 &= \log_n\left(\frac{K_3\sqrt{n}}{K_2}\right), \\
\kappa_2 &= \log_n\left(\frac{K_4}{2K_3}\right)^{1/2} + \log_n\left(\frac{K_3}{K_2}\right)^{1/4} + \frac{1}{8} - \kappa_3\log_n\left(\frac{K_3\sqrt{n}}{K_2}\right) \\
&= \kappa_2' - \kappa_3\kappa_0.
\end{aligned}$$

Maple gautą rezultatą, kad κ_3 narys yra laisvas, galima intuityviai paaiškinti. Kad ir kiek mes padidintume κ_3, mes atitinkamai sumažinsime κ_2 taip, kad galutinis $\gamma_{n,m}$ laipsnis išliks toks pats, nes:

$$\gamma_{n,m} = n^{-\kappa_2-\kappa_3\kappa_0} = n^{-\kappa_2'+\kappa_3\kappa_0-\kappa_3\kappa_0} = n^{-\kappa_2'}.$$

Taigi gauname, kad optimalus konvergavimas yra tada, kai pasirenkame:

$$\gamma_{n,m} = \alpha_{n,m} = n^{-\kappa_2'} = n^{-\frac{1}{8}}\left(\frac{2K_3}{K_4}\right)^{1/2}\left(\frac{K_2}{K_3}\right)^{1/4}.$$

Tuo tarpu optimalaus bloko ilgio išraiška:

$$m = n^{\kappa_0} = \frac{K_3}{K_2}\sqrt{n}.$$

Sustačius kintamuosius į $f(n,m)$ išraišką gauname konvergavimo greičio įvertį:

$$\begin{aligned}
f(n,m) &\le \frac{K_0}{\sqrt{n}} + \frac{K_1}{\sqrt{\frac{K_1}{K_5}n^{-1/4}n^{1/2}}} + \frac{K_2\sqrt{\frac{K_3}{K_2}\sqrt{n}}}{n^{-\frac{1}{8}}\left(\frac{2K_3}{K_4}\right)^{1/2}\left(\frac{K_2}{K_3}\right)^{1/4}\sqrt{n}} \\
&+ \frac{K_3}{n^{-\frac{1}{8}}\left(\frac{2K_3}{K_4}\right)^{1/2}\left(\frac{K_2}{K_3}\right)^{1/4}\sqrt{\frac{K_3}{K_2}\sqrt{n}}} + K_4 n^{-\frac{1}{8}}\left(\frac{2K_3}{K_4}\right)^{1/2}\left(\frac{K_2}{K_3}\right)^{1/4} + K_5\sqrt{\frac{K_1}{K_5}}n^{-1/4} \\
&= K_0 n^{-\frac{1}{2}} + (K_1K_5)^{\frac{1}{2}}n^{-\frac{1}{4}} + 2^{-\frac{1}{2}}K_2^{\frac{1}{4}}K_3^{\frac{1}{4}}K_4^{\frac{1}{2}}n^{-\frac{1}{8}} + 2^{-\frac{1}{2}}K_2^{\frac{1}{4}}K_3^{\frac{1}{4}}K_4^{\frac{1}{2}}n^{-\frac{1}{8}} \\
&+ 2^{\frac{1}{2}}K_2^{\frac{1}{4}}K_3^{\frac{1}{4}}K_4^{\frac{1}{2}}n^{-\frac{1}{8}} + (K_1K_5)^{\frac{1}{2}}n^{-\frac{1}{4}} \\
&= n^{-\frac{1}{2}}K_0 + n^{-\frac{1}{4}}\left(2K_1^{\frac{1}{2}}K_5^{\frac{1}{2}}\right) + n^{-\frac{1}{8}}\left(2\sqrt{2}K_2^{\frac{1}{4}}K_3^{\frac{1}{4}}K_4^{\frac{1}{2}}\right).
\end{aligned}$$

Tai pabaigia 4 teoremos įrodymą.

6 Išvados

Šiame darbe nagrinėjome M. Juodžio ir A. Račkausko [1] straipsnyje įrodytą teoremą apie autonormuotų sumų priklausomiems atsitiktiniams dydžiams konvergavimą naudojant blokus. Apsirašėme konvergavimo greitį kaip funkciją $f(n,m)$, priklausančia nuo dėmenų skaičiaus n ir bloko ilgio m ir ją įvertinome iš viršaus. Fiksavę dėmenų skaičių kaip konstantą ir suradę funkcijos minimumo tašką pagal m parodėme, kad optimalaus bloko ilgis yra $m = C_1\sqrt{n}$. Naudojant tokį bloko ilgį gavome ir konvergavimo greičio įvertį $f(n,m) \leq C_2\sqrt[8]{n}$.

Literatūra

[1] M. Juodis and A. Račkauskas, A Remark on self-normalization for dependent random variables, *Lith. Math. J.*, **45**, 142-151 (2005).

[2] E. Giné, F. Götze, and D.M. Mason, When is the student t-statistic asymptotically standard normal? *Ann. Probab.* **25** 1514-1531 (1997).

[3] V. Bentkus and F. Götze, The Berry-Esseen bound for Student's statistic, *Ann. Probab.*, **24**, 491–503 (1996)