

VILNIAUS UNIVERSITETAS

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

Magistro darbas

**JUNGČIŲ PANAUDOJIMAS RIZIKUOJAMOSIOS VERTĖS
SKAIČIAVIME**

COMPUTING VALUE AT RISK USING COPULAS

Petrauskaitė Aurelija

VILNIUS 2007

Ekonometrinės analizės katedra

Darbo vadovas **prof. habil. dr. R. Leipus** _____
(parašas)

Darbas apgintas 2007 m. birželio mėn. 04 d.

Registravimo Nr. _____
2007-05-24 _____

Turinys

Santrauka.....	4
Įvadas	6
1. Rizikuojamoji vertė	7
1.1. Rizikuojamoji vertė ir jos vaidmuo finansų rinkoje.....	7
1.2 Rizikuojamosios vertės skaičiavimo būdai	9
2. VaR skaičiavimas jungčių pagalba	12
2.1 Jungtys.....	12
2.1.1 Teorinis jungčių pagrindas	13
2.1.2 Sklar teorema	14
2.1.3 Jungčių pavyzdžiai.....	14
2.1.4. Archimedo jungčių šeima.....	17
2.2. Jungčių parinkimo ir parametrų vertinimo algoritmai	18
2.2.1 Neparimetrinis vertinimo būdas.....	19
2.2.2. Pusiau parametrinis vertinimo būdas.....	21
2.3 VaR skaičiavimo būdai naudojant jungtis.....	23
2.4. VaR tikrinimas	24
3. Praktinė dalis.....	26
3.1. Duomenys	26
3.2. Skaičiavimai	28
3.3. Jungčių parinkimas.....	30
3.4. Rizikuojamosios vertės skaičiavimas jungčių pagalba.....	34
Išvados.....	38
Literatūra.....	39
Priedai	41

„Jungčių panaudojimas rizikuojamosios vertės skaičiavime“

Santrauka

Pastaruoju metu, investavimui tampant vis populiariesniu, atsiranda poreikis skaičiuoti portfelių rizikuojamąją vertę (angl. Value at Risk, toliau tekste VaR). Pastaroji gali būti skaičiuojama portfeliams sudarytiems iš skirtingų finansinių instrumentų. Tačiau iškyla problemų, kai finansiniai instrumentai yra tarpusavyje susiję (priklausomi). Šiai situacijai išspręsti naudojame VaR, kuris skaičiuojamas jungčių (angl. Copula) pagalba.

Darbo tikslas – nagrinėjamiems portfeliams parinkti jungtis, kurios geriausiai atspindėtų bendrą duomenų pasiskirstymą. Tada, turint jungtis, apskaičiuoti VaR.

Gavome, kad vertinant 1 portfelį ateinančiu laiko momentu mūsų didžiausias tikėtinas nuostolis yra intervale tarp 4.34 ir 4.70 litų. 2 portfelio nuostolis yra intervale (2.88, 3.42), 3 portfelio – (3.29, 5.28).

„Computing Value at Risk using copulas”

Abstract

Recently, investments acquire vogue and it's necessary to compute the Value at Risk of portfolio. VaR can be computed for portfolio which is made from different finance instruments. But the problem arise when these instruments are interdependent. In order to solve this problem, we compute VaR using copulas.

The aim of this work is to pick copulas for real data which is the best for the distribution of the data. At that point compute VaR using selected copulas.

The results are: in future time the biggest loss for first portfolio is in the interval 4.43 ant 4.7 Litas, for second portfolio the biggest loss – (2.88, 3.42) ant for third portfolio – (3.29, 5.28).

Ivadas

Pastaruoju metu, investavimui tampant vis populiareniu, atsiranda poreikis skaičiuoti portfelių rizikuojamąją vertę (angl. Value at Risk, toliau tekste VaR). Pastaroji gali būti skaičiuojama portfeliams sudarytiems iš skirtingų finansinių instrumentų. Tačiau iškyla problemų, kai finansiniai instrumentai yra tarpusavyje susiję (priklausomi). Priklausomumui nusakyti dažniausiai yra naudojamas koreliacijos koeficientas, kuris geriausiai aprašo tiesinį dydžių priklausomumą. Tačiau, kai priklausomybė yra netiesinė, šis koeficientas nėra tinkamas priklausomumo matas. Šiais laikais tampa vis populiarenis VaR skaičiavimo būdas naudojant jungtis (angl. Copula).

Šio darbo tikslas - jungčių pagalba apskaičiuoti VaR realiam portfeliui, sudarytam iš investicinių fondų. Prieš apskaičiuojant VaR yra labai svarbu gerai pasirinkti jungtį, kuri geriausiai aprašytų turimus duomenis. Šiam tikslui pasiekti naudojami du algoritmai, kurių pagalba parenkama tinkamiausia jungtis. Kadangi abu algoritmai parenka skirtingas jungtis, todėl gauname skirtingas VaR reikšmes. Todėl svarbu patikrinti, ar gautos VaR reikšmės teisingos.

Pirmame skyriuje pateikiama rizikuojamosios vertės sąvoka ir standartiniai jos skaičiavimo būdai. Antroje dalyje pristatomas VaR skaičiavimas jungčių pagalba, supažindinama su jungties sąvoka ir pateikiami pavyzdžiai. Taip pat, aprašomi jungčių parinkimo algoritmai. Trečioje dalyje pristatomi praktiniai rizikuojamosios vertės, apskaičiuotos jungčių pagalba, rezultatai. Darbo pabaigoje pateikiamos išvados.

1. Rizikuojamoji vertė

1.1. Rizikuojamoji vertė ir jos vaidmuo finansų rinkoje

Pastaruoju metu vis daugiau žmonių nusprendžia savo turimas lėšas ne iš karto išleisti vartojimui, bet investuoti siekiant padidinti savo finansinį turtą. Dabartinėje finansų rinkoje yra gausus investavimo būdų pasirinkimas. Galima tiesiogiai dalyvauti akcijų biržoje perkant-parduodant pasirinktų įmonių akcijas. Tačiau šis būdas reikalauja gerų žinių apie finansų rinką, ekonominę ir politinę padėtį pasaulyje, bei pastovaus akcijų kurso stebėjimo. Kitas būdas – investiciniai fondai. Tai viena iš labiausiai paplitusių ir populiariausių investavimų formų, ypač populiari JAV ir Vakarų Europos valstybėse. Investicinis fondas – tai daugelio investuotojų sunešti pinigai, kurie investuojami į akcijas, obligacijas, pinigų rinkos priemones, kitus vertybinius popierius ar jų derinius. Kiekvienas investicinis fondas turi savo investavimo strategiją, pagal kurią pinigines lėšas yra investuojamos pagal: regionus (Artimieji Rytai, JAV, Rytų Europa ir pan.), ekonomikos sektorius (transportas, nafta, telekomunikacijos, kita). Pagrindiniai investavimo instrumentai skirstomi į: 1) akcijų fondus (šių fondų augimo galimybės yra didesnės, bet ir rizikos laipsnis yra didesnis); 2) obligacijų fondus (juos sudaro fiksuotų palūkanų vertybiniai popieriai) ir 3) mišrūs fondai, dar vadinami subalansuoti (kai lėšos investuojamos tiek į obligacijas, tiek į akcijas). Renkantis fondą svarbiausia pasirinkti laikotarpį, norimą uždirbti pelną ir nuspręsti, koks rizikos lygis yra priimtinas.

Dalis investuotojų net ir investuodami į fondus dar labiau diversifikuoja¹ riziką. Esant tokiai situacijai, atsiranda poreikis vertinti bendrą portfelio, sudaryto iš fondų, rizikuojamąją vertę. Rizikuojamoji vertė (angl. Value at Risk, toliau tekste VaR) - tai kiekybinis rizikos matas, kuris parodo didžiausią tikėtiną nuostolį pasirinktam laiko periodui ir su pasirinktu pasiklovimo lygmeniu.

Viena garsiausių finansinių institucijų, kuri pradėjo pirmoji naudoti VaR skaičiavimo sistemą – J.P. Morgan [26]. Pradėjus tirti rizikos valdymą, buvo sukurtas techninis dokumentas apie VaR skaičiavimą. Risk-Metrics techniniame dokumente pateikiami

¹ Diversifikavimas – investicijų rizikos mažinimas, kai vienu metu investuojama į skirtingą turtą – akcijas, obligacijas, nekilnojamą turtą, kurių vertės kritimas ar kilimas vienu metu mažai tikėtinas.

standartiniai (pagrindiniai) rizikuojamosios vertės skaičiavimo principai. VaR yra naudojamas kaip standartinis Risk-Metrics rizikos matas.

Rizikuojamąją vertę galima apskaičiuoti keliais būdais. Dažniausiai naudojami ir populiariausi yra :

- 1) dispersijos-kovariacijos būdas;
- 2) istorinio modeliavimo metodas;
- 3) Monte Karlo (angl. Monte Carlo) modeliavimo metodas.

Tačiau be šių metodų atsiranda ir naujų VaR vertinimo metodų: delta-gama metodas, sąlyginis VaR metodas, sudėtinis VaR skaičiavimas.

Matematinis VaR apibrėžimas:

$$P(\Delta V_t \leq VaR) = p \text{ - ilguoju laikotarpiu}$$

$$P(\Delta V_t \geq VaR) = p \text{ arba } P(\Delta V_t < VaR) = 1 - p \text{ - trumpuoju laikotarpiu}$$

Čia ΔV_t yra portfelio pokytis per laiko pokytį t . Jei šį pokytį apibrėžtume pasiskirstymo funkcija $F(\Delta V_t)$, tada VaR skaičiavimo išraišką galime išreikšti per atvirkštinę pasiskirstymo funkciją, priklausomą nuo pasiklovimo lygmens p :

$$VaR = F^{-1}(p)$$

Taigi, norėdami apskaičiuoti VaR, pirmiausiai:

- Apibrėžiame portfelio pelno/nuostolio pasiskirstymo funkciją;
- Pasiskirstymą sumuojame pagal pasirinktą statistiką (dažniausiai statistika būna pelno/nuostolio pasiklovimo intervalo viršutinis rėžis).

1.2 Rizikuojamosios vertės skaičiavimo būdai

VaR skaičiavimui naudojami trys baziniai skaičiavimo metodai. Skaičiavimai gali būti atliekami ir analitiškai, darant prielaidą apie pelno/nuostolio funkcijos pasiskirstymo funkciją, ir naudojant finansinių instrumentų dispersiją ir kovariaciją. VaR taip pat galima apskaičiuoti iš duomenų, kurie gaunami naudojant praeities stebėjimus arba modeliuojant Monte Karlo metodu. Šie metodai yra:

1. Dispersijos – kovariacijos metodas;
2. Istorinio modeliavimo metodas;
3. Monte Karlo modeliavimo metodas.

Toliau pateikiami trumpi kiekvieno iš šių skaičiavimo metodų aprašymai, šių metodų plusai ir minusai.

Dispersijos – kovariacijos metodas.

Šis metodas yra parametrinis ir pagrindinės jo prielaidos: 1) gražos turi normalųjį skirstinį ir 2) portfelio vertė yra tiesinė funkcija nuo pagrindinių parametru. Šie parametrai (vidurkis, standartinis nuokrypis ir koreliacija) apskaičiuojami iš istorinių duomenų [1].

Rizikuojamoji vertė (VaR) apskaičiuojama taip [2]:

$$VaR_p = \alpha * \sigma_p * P_0, \text{ čia}$$

P_0 - portfelio vertė (visų finansinių instrumentų verčių suma);

P_i - i -ojo finansinio instrumento vertė;

w_i - P_i / P_0 , svorio koeficientas, kuris parodo i -ojo finansinio instrumento dalį visame portfelyje;

w - svorių vektorius (stulpelis) $w = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$;

R - portfelio grąžų vektorius (stulpelis), kiekvienas finansinis instrumentas turi skirtingas grąžas;

Σ - kovariacijų matrica.

$$R_p = w^T R;$$

$\sigma_p = \sqrt{w^T \Sigma w}$, portfelio standartinis nuokrypis;

α - pasirinktas VaR patikimumo lygmuo.

Teigiami metodo aspektai:

- Jei kovariacijų matrica yra žinoma, apskaičiuoti VaR yra labai paprasta.
- Šis metodas yra labai greitas, nes jis paremtas analitiniu sprendimu, o ne modeliavimo principu.

Neigiami metodo aspektai:

- Portfelis yra sudarytas iš finansinių instrumentų, kurių pokyčiai yra tiesinė funkcija.
- Tariama, kad grąžos turi normalųjį skirstinį, bet realybėje dažniausiai taip nėra.

Istorinio modeliavimo metodas

Šiuo atveju yra tariama, kad pelno/nuostolio funkcijos pasiskirstymo funkcija yra tokia pati, kokia buvo praeityje (pelno/nuostolio funkcija elgiasi taip pat vienodai ir praeityje, taip pat ir ateityje). VaR randamas iš sumodeliuotos pelno/nuostolio funkcijos histogramos randant pasirinktą kvantilį (dažniausiai pasirenkami 99 % arba 95 % kvantiliai).

Teigiami metodo aspektai:

- Tai pats paprasčiausias VaR radimo būdas;
- Šis metodas yra neparametrinis, pavyzdžiui: nereikia prielaidos apie tai, kad grąžos turi turėti normalųjį skirstinį.

Neigiami metodo aspektai:

- Šiam metodui reikia daug istorinių duomenų (ilgos laiko eilutės), taip pat turi būti aukšta duomenų kokybė;
- Praeities duomenys gali neatspindėti realių ateities situacijų;
- Nėra tikslus, kai naudojamas 99% ir didesnis pasiklovimo lygmuo.

Monte Karlo modeliavimo metodas

VaR apskaičiuojamas panašiai kaip kituose dviejuose būduose. Pirmiausia, nustatome rizikos faktorius, nuo kurių priklauso finansiniai instrumentai, ir randame jų pokyčių (gražų) pasiskirstymo funkciją. Iš istorinių duomenų randame parametrus, kurių reikia pasirinktam skirstiniui. Generuojame ne mažiau kaip 1000 rinkinio gražų. Sudarome variacinę gautų gražų eilutę ir pasirenkame pasiklovimo lygmenį, tada VaR randamas: $VaR = V_t * Y_{1-\alpha}$, čia V_t - portfelio vertė laiko momentu t , $Y_{1-\alpha}$ - gražų variacinės eilutės $(1 - \alpha)$ eilės kvantilis.

Teigiami metodo aspektai:

- Generuojant duomenis Monte Karlo metodu, jie yra tinkami ekonominei duomenų analizei bei prognozei;
- Nebūtina žinoti duomenų praeities, užtenka turėti parametrų įverčius.

Neigiami metodo aspektai:

- Šis metodas imlus laikui;
- Reikalauja sudėtingo matematinio modeliavimo.

2. VaR skaičiavimas jungčių pagalba

Dean Fantazzini savo darbe [3] pateikia, kad VaR gali būti skaičiuojamas portfeliams, sudarytiems iš skirtingų finansinių instrumentų. Tačiau iškyla problemų, kai norima apskaičiuoti VaR, o finansiniai instrumentai yra tarpusavyje susiję (priklausomi). Priklausomumui nusakyti dažniausiai yra naudojamas koreliacijos koeficientas, kuris geriausiai aprašo tiesinį dydžių priklausomumą. Tačiau, kai priklausomybė yra netiesinė, šis koeficientas nėra tinkamas priklausomumo matas. Šiais laikais tampa vis populiariesnis VaR skaičiavimo būdas naudojant jungtis (angl. Copula).

Pasirinkdami VaR skaičiavimą jungčių pagalba (nagrinėjant daugiamačius modelius, kurių sudėtinės dalys yra priklausomos) galime išskirti šias teigiamas savybes:

- Daugiamačiai modeliai lankstesni, nei daugiamačiai normalieji modeliai;
- Koreliacija nėra pakankamas priklausomybės matas;
- Blogai parinkta priklausomumo struktūra sąlygoja nepakankamą portfelio rizikos įvertinimą.
- Konstruojant portfelio modelį yra labai svarbi atskirų (sudėtinių dalių) pasiskirstymo funkcijų ir jų priklausomybės analizė.

Pasirinkę VaR skaičiuoti jungčių pagalba nerizikuojame blogai įvertinti priklausomybę (koreliaciją) ir tai leidžia tiksliau įvertinti rizikuojamąją vertę.

Tačiau jungčių naudojimas yra ribotas, nes ši teorija dar iki galo neišvystyta. Pagrindė, naudojamos dvimatis jungtys, o realiai, jungtys taikomos ir n-mačiams portfeliams.

2.1 Jungtys

Jungtys naudojamos kaip įrankis kelių atsitiktinių dydžių priklausomumui modeliuoti [4]. Terminas jungtis (angl. copula) pirmą kartą paminėtas Sklar darbe [5] ir šis terminas yra

paimtas iš lotynų kalbos žodžio copulare, kas reiškia sujungti. Jungčių pagrindinė paskirtis yra aprašyti kelių atsitiktinių dydžių tarpusavio ryšį.

Jun Yan [6] aprašo kokiose srityse yra naudojamos jungtys. Jos yra naudojamos draudimo statistikos mokslo šakoje modeliuojant mirtingumą ir nuostolius (šios srities darbai yra aprašomi Frees, Valdez [7], Wang [8] darbuose). Jungtys taip pat naudojamos biomedicinoje, inžinerijoje. Finansuose jungtys naudojamos modeliuojant lėšų paskirstymą, kredito vertinime, įsipareigojimų nevykdymo (angl. default) rizikos modeliavime, išvestinių vertybinių popierių kainų sudarymui ir rizikos valdyme. Plačiau apie šiuos taikymus galima rasti Bouye [9], Embrechts [10] ir Cherubini [11] darbuose.

2.1.1 Teorinis jungčių pagrindas

D-matė jungtis $C: [0,1]^d \rightarrow [0,1]$ yra pasiskirstymo funkcija, sudaryta iš marginalinių pasiskirstymų. Jungčiai aprašyti naudosime tokius žymėjimus²:

$$(2.1) \quad C(u_1, u_2) = C(F(x_1), F(x_2)) = H(x_1, x_2)$$

Jungtis tenkina šias savybes :

1. Kiekvienam $u \in [0,1]$

$$C(0, \dots, 0, u_i, 0, \dots, 0) = 0;$$

2. Kiekvienam $u \in [0,1]$,

$$C(1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1) = u_i;$$

3. Pažymėkime $u_{j,1} = a_j$ ir $u_{j,2} = b_j$, kai $a_i \leq b_i$ tikimybė $P(U_1 \in [a_1, b_1], \dots, U_d \in [a_d, b_d])$ turi būti neneigiama, tai dar vadinama stačiakampio nelygybe

$$\sum_{i_1=1}^2 \dots \sum_{i_d=1}^2 (-1)^{i_1 + \dots + i_d} C(u_{1,i_1} \dots u_{d,i_d}) \geq 0 .$$

² Šie žymėjimai pateikti dvimačiu atveju, dvimatė jungtis.

Šių savybių įrodymai yra pateikti McNeil, Frey and Embrechts darbe [12].

2.1.2 Sklar teorema

Toliau pateikiama teorema, kuri pateikia beveik svarbiausią rezultatą apie jungtis, ir ji visada naudojama jungtims apibrėžti.

Teorema. Tariaime, kad $H \in R^d$ yra pasiskirstymo funkcija, kuri sudaryta iš vienmačių marginalinių pasiskirstymo funkcijų F_1, \dots, F_d , tada jungtis C yra išreiškiama taip:

$$\begin{aligned} H(x_1, \dots, x_d) &= P[F(X_1) \leq F(x_1), \dots, F(X_d) \leq F(x_d)] \\ &= C(F(x_1), \dots, F(x_d)) \end{aligned}$$

Jei $F(x_1), \dots, F(x_d)$ yra baigtinės, tai jungtis C yra vienintelė

$$C(u_1, \dots, u_d) = H(F^{-1}(u_1), \dots, F^{-1}(u_d))$$

čia $F_i^{-1}(u) = \inf\{x : F(x) \geq u\}$, $i = 1, \dots, d$, kai $u = (u_1, \dots, u_d) \in R^d$.

Priešingai, jei C yra jungtis, $F(x_1), \dots, F(x_d)$ - pasiskirstymo funkcijos, tada funkcija $H(x_1, \dots, x_d)$ yra jungtinė pasiskirstymo funkcija, sudaryta iš vienmačių marginalinių pasiskirstymo funkcijų F_1, \dots, F_d .

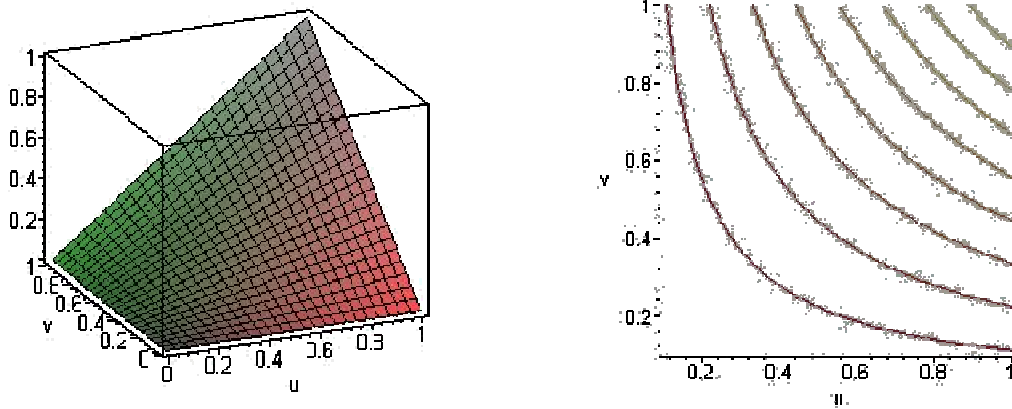
Šios teoremos įrodymą ir papildomą informaciją galima rasti Sklar darbe [5].

2.1.3 Jungčių pavyzdžiai

1 pavyzdys.

Nepriklausoma jungtis, ji žymima $\Pi(u) = \prod_{i=1}^d u_i$. Tiesiogiai iš Sklar teoremos matoma, kad atsitiktiniai dydžiai yra nepriklausomi tada ir tik tada, kai jų jungtis yra

nepriklausoma jungtis. 2.1 paveikslo kairėje pateiktas pasiskirstymo funkcijos grafikas, dešinėje - nepriklausomos jungties kontūrų grafikas³:

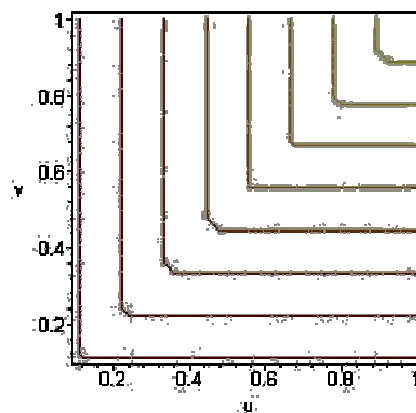
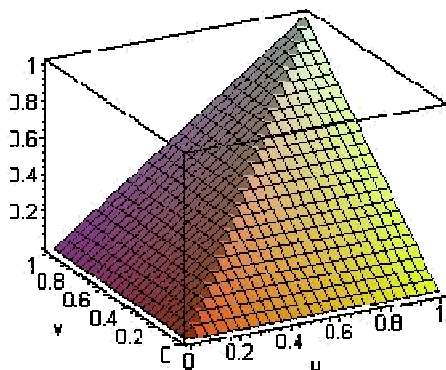


2.1 pav. Nepriklausomos jungties pasiskirstymo funkcija ir kontūrų grafikas. [Šaltinis žiūr. ³ komentaras]

2 pavyzdys:

Viršutinė Frechet-Hoeffding riba, dar vadinama komonotonine (angl. comonotonicity) jungtimi. Žymima $M(u) = \min(u_1, \dots, u_d)$, čia M yra jungtis, $u_i \in [0, 1]$, kur $i = 1, \dots, d$. Ši jungtis parodo visišką teigiamą priklausomybę, turima omenyje, kad $X_i = T(X_1), \forall i = 2, \dots, d$, čia T_2, \dots, T_d - griežtai didėjančios funkcijos. 2.2. paveikslo kairėje pateiktas jungties pasiskirstymo funkcijos grafikas, dešinėje – komonotoninės jungties kontūrų grafikas:

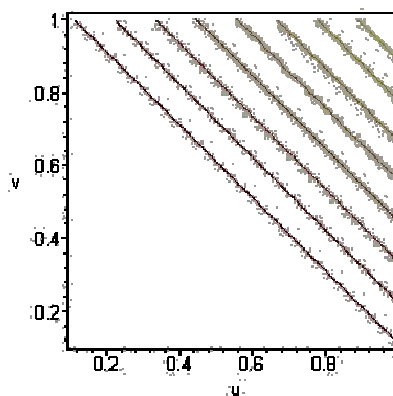
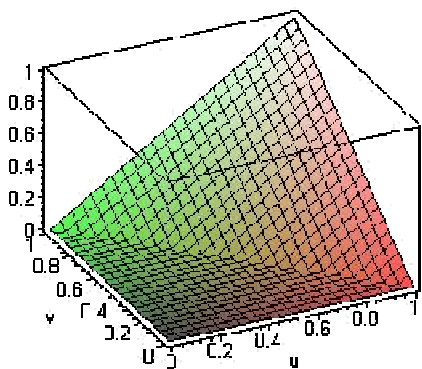
³ Visuose trijuose pavyzdžiuose esančių grafikų šaltinis: R. Balčiūnaitės prezentacija „Apie jungtis ir jų taikymą draudimo matematikoje“, 2007.



2.2. pav. Komonotoninės jungties pasiskirstymo funkcija ir kontūrų grafikas. [Šaltinis žiūr. ³ komentaras]

3 pavyzdys

Apatinė Frechet-Hoeffding riba, dar vadinama kauntermonotonine (angl. countermonotonicity) jungtimi. Ji žymima $W(u_1, u_2) = \max\{u_1 + u_2 - 1, 0\}$, W yra jungtis, $u_i \in [0, 1]$, kur $i = 1, 2$. Ši jungtis parodo visišką neigiamą priklausomybę, $X_2 = T(X_1)$, čia T yra griežtai mažėjanti funkcija. 2.3 paveikslo kairėje pateiktas jungties pasiskirstymo funkcijos grafikas, dešinėje – kauntermonotoninės jungties kontūrų grafikas:



2.3. pav. Kauntermonotoninės jungties pasiskirstymo funkcija ir kontūrų grafikas. [Šaltinis žiūr. ³ komentaras]

2.1.4. Archimedo jungčių šeima

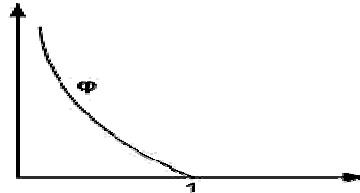
Nagrinėjant finansinius duomenis susiduriame su stilizuotais faktais. Ši jungčių šeima leidžia aprašyti duomenis, kuriems yra būdinga asimetrija. Taip pat ši šeima išsiskiria tuo, kad jungtis yra sudaroma generatorių pagalba.

Tariame, kad jungtis $C_\phi(u, v)$ yra iš Archimedo jungčių šeimos, jei galime ją išreikšti:

$$C_\phi(u, v) = \phi^{-1}[\phi(u) + \phi(v)], \quad 0 < u, v < 1,$$

čia $\phi(u)$ tenkina šias savybes:

1. $\phi(1) = 0$;
2. $\phi(u)$ - mažėjanti funkcija;
3. $\phi(u)$ - iškilta funkcija.



Šios savybės reikalingos, kad $C_\phi(u, v)$ būtų pasiskirstymo funkcijos. Archimedo jungčių šeimos motyvacija, savybės, įrodymai yra pateikti Genest ir MacKay [13], Genest ir Rivest [14] darbuose.

Populiariausios jungtys yra Gumbel, Clayton, Frank jungtys. Pateiksime trumpus jų aprašymus.

Gumbel jungtis ir generatorius yra:

$$C_\theta^G = e^{-[(-\log(u))^\theta + (-\log(v))^\theta]^{\frac{1}{\theta}}}, \quad \phi_\theta(t) = (-\log(t))^\theta, \quad \theta \in [1, \infty)$$

Ši jungtis geriausiai aprašo duomenis, kurie turi sunkesnę dešinę uodegą. Pavyzdžiui, Gumbel ir Mustafi [15] naudojo Gumbel jungtį „Fox“ upės potvynių dydžiams dviejuose taškuose aprašyti. Kitas panaudojimas finansų rinkoje nagrinėjant dviejų rinkų grąžas, kai rinkoje kyla akcijų kursas (dar vadinama „buliaus“ rinka).

Clayton jungtis ir generatorius:

$$C_{\theta}^C = \max([u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1]^{\frac{1}{\theta}}, 0), \quad \phi_{\theta}(t) = \frac{1}{\theta}(t^{-\theta} - 1), \quad \theta \in [-1, \infty) \setminus 0$$

Šią jungtį geriausia naudoti, kai duomenys turi kairę sunkią uodegą arba esant mažoms imtims. Šios jungties taikymus ir praktinius panaudojimus aprašo savo darbuose Hutchinson [16], Shih ir Thomas [17]. Finansų srityje Clayton jungtis naudojama, kai rinkoje krinta akcijų kursas (dar vadinama „meškų“ rinka).

Frank jungtis ir generatorius:

$$C_{\theta}^F(u, v) = -\frac{1}{\theta} \log \left(1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right), \quad \phi_{\theta}(t) = \log \left(\frac{1 - e^{-\theta t}}{1 - e^{-\theta}} \right), \quad \theta \in (-\infty, \infty) \setminus 0$$

Kai $\theta > 0$, tada jungtis parodo teigiamą priklausomybę, kai $\theta \rightarrow 0$, tai reiškia, kad turime nepriklausomus dydžius ir kai $\theta < 0$, mūsų stebėjimai turi neigiamą priklausomybę. Šią jungtį savo darbuose naudojo Genest ir Rives [14], Shih ir Thomas [17]. Frank jungtis atspindi simetrinę priklausomybę ir finansų srityje ji naudojama, kai atsakas tarp teigiamų ir neigiamų grąžų yra vienodas.

Platesnė informacija, savybės ir daugiau jungčių pavyzdžių yra pateikta Hutchinson ir Lai [18] arba Nelson [19] darbuose.

2.2. Jungčių parinkimo ir parametrų vertinimo algoritmai

Jungčių pagalba siekiama kaip įmanoma geriau aprašyti turimus duomenis, kad gauta bendra pasiskirstymo funkcija leistų kaip įmanoma geriau atspindėti duomenyse esamą informaciją. Pirmas žingsnis, norint naudoti jungtis, tai parinkti tokią jungtį, kuri geriausiai aprašytų duomenis. Jungties funkcija priklauso nuo vieno ar kelių parametrų. Taigi yra svarbu rasti šių parametrų įverčius. Šiame skyriuje pateikiami du skirtingi algoritmai, kurių pagalba randami parametrų įverčiai ir atrenkama jungtis:

1. Neparimetrinis būdas;
2. Pusiau parametrinis.

2.2.1 Neparametrinis vertinimo būdas

Pirmą kartą neparametrinis vertinimo būdas buvo aprašytas Genest ir Rivest darbe [14]. Šis algoritmas, šiek tiek supaprastintas ir modifikuotas, yra naudojamas ir kitų autorių. Toliau pateiktą algoritmą naudoja savo darbuose Guedan ir Ladoucette [20] ir Tomáš Bacigal [21].

Paprastumo dėlei nagrinėjama 2-matė jungtis. Tariaama, kad turimi 2 investiciniai fondai, kurie yra priklausomi (pavyzdžiui, priklausomumą gali sukelti tai, kad persidengia investavimo regionai ar/ir ekonominės sritys, todėl tos pačios akcijos su skirtingais svoriais patenka į vieną ir kitą fondą). X ir Y yra šių fondų gražų vektoriai.

1. Žingsnis

Naudojant neparametrinį vertinimą, randamas Kendalo⁴ koeficientas, pagal tokią formulę:

$$(2.2) \quad \tau_n = \binom{n}{2}^{-1} \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} \text{Sign}[(X_i, X_j)(Y_i, Y_j)]$$

2. Žingsnis

Turimi duomenys sujungiami į vienmatį dydį. Tai padaroma konstruojant pseudo stebėjimus⁵ $Z_i = H(X_i, Y_i)$. Tuomet apskaičiuojama empirinė pasiskirstymo funkcija, ji žymima ir skaičiuojama:

$$(2.3) \quad K_n(z) = P(Z_i < z) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{Z_i < z\}} \cdot$$

⁴ Angl. Kendall's tau, Kendalo koeficientas naudojamas ranginių kintamųjų ryšio stiprumui įvertinti [22].

⁵ Pseudo stebėjimai apskaičiuojami pagal formulę $Z_i = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n 1_{\{X_j < x_i, Y_j < y_i\}} \cdot$

3 žingsnis

Randamas θ parametras išsprendžiant šią lygtį:

$$(2.4) \quad \tau_n = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\phi(t)}{\phi'(t)} dt$$

Čia $\phi(t)$ - Archimedo jungčių generatorius, τ_n - aprašytas 1 žingsnyje.

Radus θ parametras, tikrinama, ar jis patenka į nagrinėjamos jungties parametro θ nurodytą reikšmių sritį. Jei patenka, tęsiama procedūra toliau, jei ne, atmetama nagrinėjama jungtis kaip netinkama esamiems duomenims aprašyti.

Konstruojama parametrinė K_ϕ funkcija, tai atliekama šios formulės pagalba:

$$(2.5) \quad K_\phi(z) = z - \frac{\phi(z)}{\phi'(z)},$$

čia z - pseudo stebėjimai, kurie aprašyti 2 žingsnyje.

4 žingsnis

Šiame etape tikrinama, kuri jungtis geriausiai aprašo mūsų duomenis. Pirmas būdas yra skaitinis, antras grafinis metodas.

Pirmas būdas: Taikomas mažiausių kvadratų metodas. Apskaičiuojama išraiška:

$$(2.6) \quad D_C^{NP} = \sum_{i=1}^n \left| K_\phi(z_i) - K_n(z_i) \right|^2$$

⁶ Bendras Kendal apibrėžimas buvo pateiktas anksčiau. Nelsen [19] savo darbe apibrėžė Kendalo koeficientą jungčių atveju $\tau_C = 4 \iint C(u, v) dC(u, v) - 1$. Genest ir MacKay [13] apibrėžė šį koeficientą Archimedo jungtims, išreiškiant jį per generatorių ir jo išvestinę: $\tau_C = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\phi(t)}{\phi'(t)} dt$ }

Kuriai jungčiai D_c yra mažiausias, ta jungtis ir yra parenkama.

Antras būdas: Braižomas kvantilių – kvantilių grafikas⁷ (toliau tekste QQ grafikas). Braižomas K_ϕ ir K_n funkcijų kvantilių grafikas. Su kiekviena jungtimi braižomi grafikai, ir kurios atveju grafikas yra arčiau 45 laipsnių įstrižainės, ta jungtis ir yra parenkama, kaip geriausiai aprašanti duomenis. Jei grafikas yra tiksliai ant įstrižainės, tada sakoma, kad K_ϕ ir K_n turi tą patį pasiskirstymą, t.y. pasirinkta jungtis idealiai aprašo duomenis.

Bet būna atvejų, kai grafinis metodas nesutampa su skaitiniu metodu. Norint tiksliausiai parinkti jungtį, reikia atsižvelgti į abiejų būdų rezultatus. Parenkama ta jungtis, kurios rezultatai tikrinant abiem būdais buvo geriausi.

2.2.2. Pusiau parametrinis vertinimo būdas

Pusiau parametrinis būdas yra aprašomas Genest, Ghoudi ir Rivest darbe [23]. Taip pat šiame darbe yra pateikiami įrodymai, savybės. Ling Hu [24] darbe yra pateikiamos šio metodo variacijos ir taikymai. Išsamų šio būdo algoritmą aprašo savo Tomáš Bacigal [21].

Šiam vertinimo būdui naudojame tą pačią situaciją, kuri aprašyta 2.2.1. dalyje.

1 žingsnis

Šio žingsnio tikslas – didžiausio tikėtimumo metodu rasti parametro θ įvertį. Užrašome didžiausio tikėtimumo funkciją:

$$(2.7) \quad L(\theta) = \sum_{i=1}^n \log(c_\theta[F_n(x_i), G_n(y_i)]),$$

⁷ QQ grafikas braižomas: x ašyje yra empirinis duomenų pasiskirstymas, y ašyje – realus duomenų pasiskirstymas. Sakoma, kad pasirinkta pasiskirstymo funkcija labai gerai aprašo turimus duomenis, jie QQ grafikas yra tiksliai įstrižainė (nuo 0 iki 1).

čia $F_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n I_f[X_i \leq x, 1, 0]$ ir $G_n(y) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n I_f[Y_i \leq y, 1, 0]$ yra empirinės

pasiskirstymo funkcijos; $c_\theta[F_n(x_i), G_n(y_i)]$ - jungties tankio funkcija, kuri apskaičiuojama:

$c_\theta(u, v) = \frac{\partial^2 C_\theta(u, v)}{\partial u \partial v}$. Gautas įvertis $\hat{\theta}$ tikrinamas, ar jis patenka į nagrinėjamos jungties

parametro θ reikšmių sritį. Jei patenka, tada tęsiama procedūra, jei ne, atmetama jungtis,

kaip netinkama nagrinėjamiems duomenims aprašyti. Parametro gerumui tikrinti

skaičiuojamas modifikuotas Akaike informacinis kriterijus ($AIC = -2L(\hat{\theta}) + 2k$, $k = 1$,

standartinė (klasikinė) AIC skaičiuojama, kai $k = 2$). Viena iš prielaidų, lemiančių jungties

pasirinkimą – atsižvelgti, kurios jungties parametro $\hat{\theta}$ AIC yra mažiausia.

2 žingsnis

Šiame etape tikrinsime, kuri jungtis geriausiai aprašo nagrinėjamus duomenis. Kaip ir neparimetrinio vertinimo atveju yra skaitinis ir grafinis metodai jungties tinkamumui patikrinti.

Pirmas būdas. Apskaičiuojamas parinktos jungties nuokrypis nuo empirinio duomenų pasiskirstymo. Formulė yra beveik analogiška pirmajam vertinimo būdai neparimetriniu atveju, tačiau šiuo atveju atstumą skaičiuojame jungtims, o ne generatoriams:

$$(2.8) \quad D_C^{PP} = \sum_{i=1}^n \left| C_\phi(F(x_i), G(y_i)) - \hat{H}(x_i, y_i) \right|^2,$$

čia $C_\phi(F(x_i), G(y_i))$ - jungtis, kurią apskaičiuojame naudodami įvertintą $\hat{\theta}$, $F(x_i)$ ir $G(y_i)$

yra nagrinėjamų duomenų marginalinės pasiskirstymo funkcijos, $\hat{H}(x_i, y_i)$ - dvimatė

empirinė pasiskirstymo funkcija. Kuriai jungčiai D_C yra mažiausias, ta jungtis ir yra

parenkama.

Antras būdas: identiškas pateiktam neparimetrinio vertinimo metodui. Tik šiuo

atveju, vietoje K_ϕ ir K_n braižomas $C_\phi(F(x_i), G(y_i))$ ir $\hat{H}(x_i, y_i)$ kvantilių grafikas.

2.3 VaR skaičiavimo būdai naudojant jungtis

Ling Hu savo darbe [24] pateikia du VaR skaičiavimo pavyzdžius: 1) VaR skaičiavimas naudojant daugiamatį normalųjį skirstinį, 2) VaR skaičiavimas jungčių pagalba.

1) Taria, kad X ir Y – tai akcijų rinkos indeksai. Bendras šių dviejų dydžių portfelis yra $Z = X + Y$. Empirinė šių dydžių koreliacija yra 0,4165. Daroma prielaida, kad X ir Y pasiskirstę pagal standartinį normalųjį dėsnį, imama normaliojo skirstinio jungtis (naudojant normaliąsias marginalines funkcijas ir normaliąją jungtį gauname daugiamatį normalųjį pasiskirstymą). Tuomet, Z turi normalųjį skirstinį su vidurkiu 0 ir standartiniu nuokrypiu 1,6832. Pasirenkamas pasiklovimo lygmuo $p = 0.01$, tada skaičiuojama VaR:

$$VaR_{Gaussian} = \Phi^{-1}(0.01) * 1.6832 = -3.9156.$$

2) Jei VaR skaičiavimui naudojama jungtis, tuomet reikia išspręsti tokį matematinį uždavinį: turima $P(Z < z) = 0.01$ ir reikia rasti z (tai ir bus ieškoma rizikuojamoji vertė). z randamas iš šios lygties:

$$(2.9) \quad F_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} c(F_X(x), F_Y(z-x)) f_X(x) f_Y(z-x) dx = 0.01.$$

Ling Hu pateiktame pavyzdyje VaR apskaičiuotas šio integralo pagalba yra $z = -4.3578$. Autorius pastebi, kad pažvelgus į duomenis, matosi, kad tikroji VaR reikšmė yra -4,26. Taigi, jungčių pagalba gauta VaR yra labiau tikėtina ir arčiau tikrosios reikšmės.

Kevin Dowd ir Paul Fackler [25] savo darbe pateikia VaR radimo algoritmą ir formulę, kurios pagalba yra paprasčiau (skaitine prasme) apskaičiuoti VaR nei Ling Hu pateikta formulė.

Tariame, kad turime portfelio, sudaryto iš X ir Y finansinių instrumentų, pelno/nuostolio funkciją. Tikslas - apskaičiuoti VaR su pasirinktu pasiklovimo lygmeniu p . Portfelio pelno/nuostolio funkcija yra $X + Y$. Bendru atveju VaR išraiška atrodo:

$$(2.10) \quad 1 - p = P(X + Y < -VaR) \Rightarrow p = 1 - P(X + Y < -VaR)$$

Tuomet autoriai pateikia formulę, kurios pagalba apskaičiuojama VaR. Ji išreiškiama per jungtis:

$$(2.11) \quad P(X + Y < -VaR) = \int_0^1 \partial_1 C(u, F_2(VaR - F_1^{-1}(u))) du$$

Pointegralinė funkcija yra jungties dalinė išvestinė pagal pirmojo stebėjimo pasiskirstymo funkciją. Autoriai pateikia darbų eiliškumą VaR radimui:

1. Pasirenkama jungtis;
2. Įvertinami jungties parametrai;
3. Kai randama jungtis, tada lengvai aproksimuojame (2.11) formulės kairę pusę, dešinėje esančiu integralu;
4. Formulę (2.11) įsistačius į (2.10) formulę apskaičiuojama VaR su pasirinktu pasiklovimo lygmeniu.

2.4. VaR tikrinimas

Dean Fantazzini [3] savo darbe aprašo procedūrą, kurios pagalba galima patikrinti, ar pasirinktu būdu apskaičiuota VaR yra „gera“.

Tariama, kad turimi dviejų fondų kainų vektoriai. Portfelio vertė laiko momentu t yra $\sum_{i=1}^2 P_{i,t} = \dots \$$, čia $P_{i,t}$ - i -ojo fondo vertė laiko momentu t . Apskaičiuojama portfelio reikšmė $t+1$ laiko periodui: $P_{j,t+1} = \sum_{i=1}^2 P_{i,t} \cdot e^{r_{i,j}}$, $j=1\dots k$. Gražos $r_{i,j}$ generuojamos k kartų Monte

Karlo metodu, jungčių pagalba. Apskaičiuojamas nuostolis kiekvienam k apskaičiuotų portfelių pagal šią formulę:

$$(2.12) \quad Loss_j = P_t - P_{j,t+1} = \sum_{i=1}^2 P_{i,t} [1 - e^{r_i,j}], \quad j = \overline{1, k}$$

Iš gautų reikšmių sudaroma variacinė eilutė. Turint variacinę nuostolių eilutę, galima rasti rizikuojamąją vertę su pasirinktu pasiklovimo lygmeniu. Pavyzdžiui, $k = 10000$, tada variacinės eilutės 100-oji reikšmė atitiks VaR su 0,01 pasiklovimo lygmeniu.

Grįžtame prie VaR skaičiavimo, aprašyto 2.3. skyrelyje. Tikriname hipotezę, jog VaR, gauta iš realių duomenų, neviršija VaR^{MK} (pavadiname jį kritine reikšme), tada tariame, kad VaR^{PP} ir VaR^{NP} yra „geri“.

3. Praktinė dalis

Šiame skyriuje pateiksime praktinį rizikuojamosios vertės skaičiavimą jungčių pagalba. Taikydami 2.2.1. ir 2.2.2 skyreliuose aprašytus algoritmus, parinksime jungtis, kurios geriausiai aprašo realius duomenis. Tikrindami, kuriuo būdu apskaičiuotas VaR yra geresnis, atliksime Monte Karlo simuliaciją. Gautus rezultatus su realiais duomenimis lyginsime su Monte Karlo metodu gautu VaR.

3.1. Duomenys

Šiame darbe yra naudojami įmonės „Finasta“⁸ valdomų investicinių fondų duomenys (duomenų intervalas: 2006.02.24 – 2007.02.26, duomenys yra kiekvienos darbo dienos).

y1 – žymėsime Finasta Rusijos Fondas (toliau tekste RF) grąžas;

y2 – žymėsime Finasta Centrinės ir Rytų Europos Fondas (toliau tekste CREF) grąžas;

y3 – žymėsime Finasta Naujosios Europos Fondas (toliau tekste NEF) grąžas.

Toliau pateikiami trumpi fondu sandaros aprašymai⁹.

Rusijos fondas

Fondo strategija – investuoti į vidutinės ir mažesnės kapitalizacijos Rusijos bendroves, kurių fundamentalūs rodikliai rodo didelę vertybinių popierių vertės augimo perspektyvą. RF pagal ekonominės veiklos klasifikaciją daugiau orientuojasi į vidaus vartojimo, mažmeninės prekybos, finansinių paslaugų, statybų, lengvosios pramonės, transporto, inžinerijos, farmacijos sektorius. Į metalurgijos, naftos, dujų bei kitų sektorių

⁸ „Finasta“ - tai finansų maklerio įmonė įsteigta 1994 metais, kai Lietuvoje dar tik kūrėsi kapitalo rinkos. Šiandien tai – didžiausia nebankinė maklerių įmonė Lietuvoje ir viena iš dviejų, kuriai Vertybinių popierių komisija suteikė A kategorijos maklerio licenciją.

⁹ Aprašant fondus ir jų sandaras remiamasi UAB „Finasta investicijų valdymas“ parengtomis apžvalgomis. [26]

bendrovių vertybinius popierius taip pat gali būti investuojama, bet daugiausia dėl portfelio subalansavimo ir trumpalaikio fondo portfelio likvidumo užtikrinimo.

Centrinės ir rytų Europos fondas

Fondas investuoja į akcijas Centrinės ir Rytų Europos šalių¹⁰ vertybinių popierių rinkose ir keičia portfelio sudėtį atsižvelgdamas į didžiausio prieaugio galimybę. Šiame regione veikiančių bendrovių akcijos nėra pakankamai įvertintos, lyginant su Vakarų Europos bendrovėmis, o tai leidžia tikėtis didesnės investicinės grąžos.

- CRE ekonomikos augimas pastaruosius 3 metus vienas didžiausių pasaulyje;
- Politiškai stabilios rinkos, sutvarkyta teisinė bazė;
- Dalis šalių jau yra Europos Sąjungos (ES) narės;
- Naujai įstojusių į ES šalių, ekonominis išsivystymas pakankamai žemas, lyginant su ES senbuvių vidurkiu, taigi vystymosi potencialas nuteikia optimistiškai.

Šio fondo investicijos pagal sektorius yra: finansai, sveikatos priežiūra, komunalinės paslaugos, medžiagos, pramonės įmonės, energetika, informacinės technologijos, telekomunikacijų paslaugos, pasirenkamojo vartojimo prekės ir paslaugos.

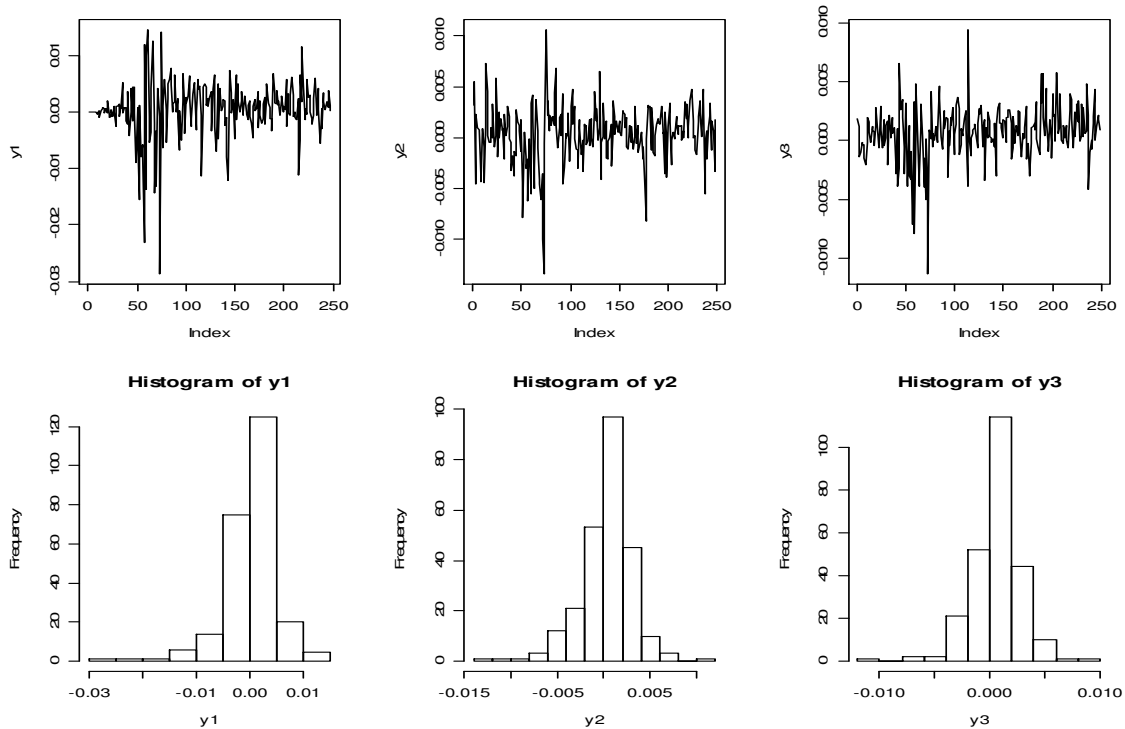
Naujosios Europos fondas

Fondas investuoja į Naujosios Europos šalių bendrovių vertybinius popierius ir keičia portfelio sudėtį atsižvelgdamas į didžiausio prieaugio galimybę. Tai aktyvaus investavimo fondas. Strategija – investuoti į vidutinės ir mažesnės kapitalizacijos Naujosios Europos šalių bendroves, kurių fundamentalūs rodikliai rodo didelę vertybinių popierių vertės augimo perspektyvą. Šis fondas orientuotas į vidaus vartojimo, mažmeninės prekybos, finansinių paslaugų, statybų, lengvosios pramonės, transporto, inžinerijos, farmacijos sektorius. Gali būti investuojama ir į metalurgijos, naftos, dujų ir kitų sektorių bendrovių vertybinius popierius, bet daugiausia siekiant subalansuoti portfelį ir užtikrinti trumpalaikio fondo portfelio likvidumą.

¹⁰ Centrinės ir Rytų Europos šalys – Baltijos šalys (Lietuva, Latvija, Estija), Lenkija, Čekijos Respublika, Vengrija, Slovėnija, Slovakija, Kroatija, Bulgarija ir Rumunija.

Kaip matome, į visus fondus patenka vienodos šalys, vienodos investavimo ekonominės sritys, tai sąlygoja fondų priklausomumą.

Skaičiuodami rizikuojamąją vertę mums reikia investicinių fondų gražų. 3.1. paveiksle pateikiu fondų gražų grafikus ir histogramas.



3.1 pav. Pateikta investicinių fondų gražų grafikai ir histogramos

Kaip matome iš grafikų, šios gražos turi sunkesnes dešines uodegas. Darome prielaidą, kad šie duomenys neturi normaliojo skirstinio. Taikysime skirstinius, kurie gerai aprašo duomenis su stilizuotais faktais.

3.2. Skaičiavimai

Dauguma autorių savo darbuose daro prielaidą, kad gražos turi normalųjį pasiskirstymą, tačiau realybėje finansinių instrumentų gražos turi pasiskirstymus su sunkesnėmis uodegomis. Šiame darbe naudojamiems duomenims pritaikome logistinį pasiskirstymą (platesnė informacija apie logistinį pasiskirstymą pateikta priede Nr. 1.).

Duomenų statistinė analizė

L.3.1 lentelėje pateikiami statistiniai rodikliai, pasiskirstymo funkcijos, sklaidos diagramos (3.2. pav.).

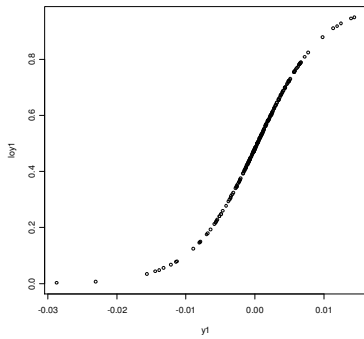
	Vidurkis	Dispersija	Skalė	Minimumas	Maksimumas
y1	0.000412	2.3795e-05	0.00477	-0.02873	0.014502
y2	0.000378	7.8586e-06	0.00274	-0.01343	0.010619
y3	0.000672	5.2527e-06	0.00224	-0.01138	0.009434

Poros	Koreliacija	Kendalo koeficientas
(y1, y2)	0.5369527	0.26
(y1, y3)	0.6516221	0.395
(y2, y3)	0.6756416	0.469

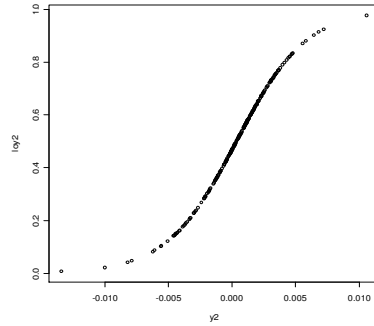
L.3.1. lentelė. Pateikta statistiniai rodikliai

Iš L.3.1. lentelės matome, kad šie duomenys yra priklausomi, todėl nėra gerai spręsti vien iš koreliacijos koeficiento. Kadangi neaiškus priklausomumo tipas (tiesinis ar netiesinis) nėra gerai vertinti tarpusavio sąryšį koreliacijos pagalba. Todėl skaičiuojame Kendalo koeficientą, kuris įvertina ranginių kintamųjų ryšio stiprumą. Teigiamas Kendalo koeficientas parodo, kad duomenys turi tiesioginę priklausomybę.

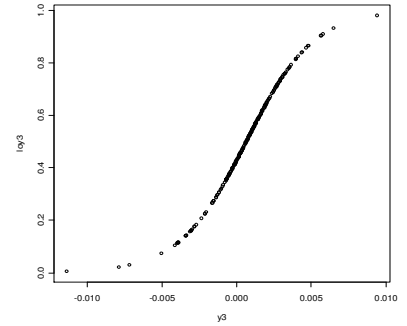
y1 pasiskirstymo funkcija



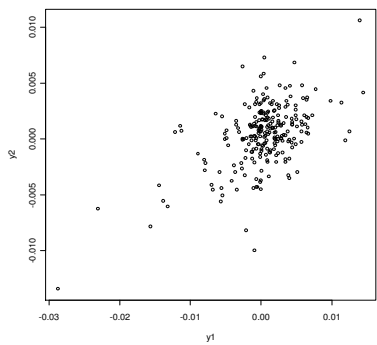
y2 pasiskirstymo funkcija



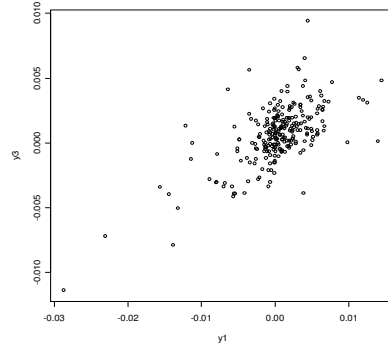
y3 pasiskirstymo funkcija



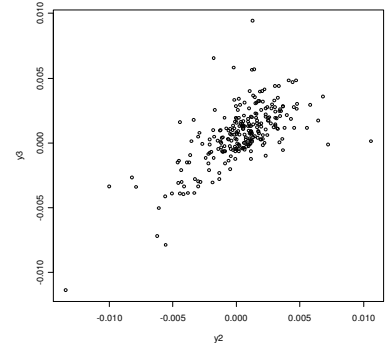
y1 ir y2 sklaidos diagrama



y1 ir y3 sklaidos diagrama



y2 ir y3 sklaidos diagrama



Pav. 3.2 pateikti realių duomenų logistinės pasiskirstymo funkcijos ir sklaidos diagramos

3.3. Jungčių parinkimas

Jungčių parinkimas atliekamas pagal 2.2.1 ir 2.2.2 skyreliuose pateiktus algoritmus. Naudojamos tik vienparametrinės jungtys. Taip pat nagrinėjamas dvimatis atvejis.

Pateiksime kelių jungčių išraiškas (žr. L.3.2. lentelę), kurios bus naudojamos tolesniuose skaičiavimuose. Kitų jungčių pavyzdžiai pateikiami priede Nr. 2.

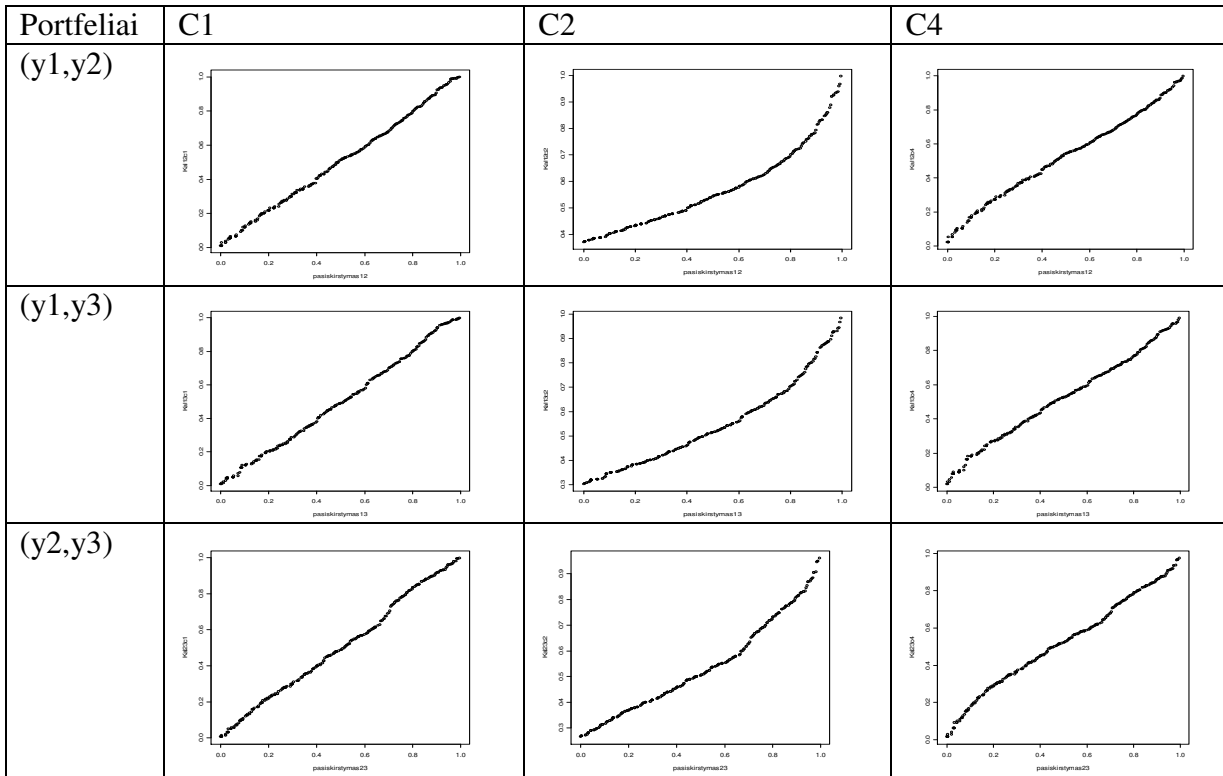
Jungties Nr.	C_θ Jungtis	$\phi_\theta(t)$ generatorius	θ reikšmių sritis
C1	$\max([u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1]^{\frac{1}{\theta}}, 0)$	$\frac{1}{\theta}(t^{-\theta} - 1)$	$\theta \in [-1, \infty) \setminus 0$
C2	$\max(1 - [(1-u)^\theta + (1-v)^\theta]^{\frac{1}{\theta}}, 0)$	$(1-t)^\theta$	$\theta \in [1, \infty)$
C4	$\exp(-[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta]^{\frac{1}{\theta}})$	$(-\ln t)^\theta$	$\theta \in [1, \infty)$
C8	$\max\left(\frac{\theta^2 uv - (1-u)(1-v)}{\theta^2 - (\theta-1)^2(1-u)(1-v)}, 0\right)$	$\frac{1-t}{1+(\theta-1)t}$	$\theta \in [1, \infty)$

L.3.2. lentelė. Jungtys, jų generatoriai, ir parametro θ reikšmių sritis.

Šios jungtys yra naudojamos tolesnei analizei, nes šių jungčių įvertinti parametrai (taikant realius duomenis) pateko į teorinių jungčių nustatytas parametru reikšmių sritis.

Neparametrinis metodas

Iš turimų duomenų pagal (2.2) formulę apskaičiuojamas teorinis Kendalo koeficientas. Konstruojame pseudo stebėjimus ir pagal (2.3) formulę apskaičiuojame jų empirinę pasiskirstymo funkciją. Iš (2.4) formulės randamas θ parametras. Patikriname, ar gauti θ parametrai patenka į nagrinėjamų jungčių parametru reikšmių sritis. L.3.2. lentelėje pateikiami tik jungčių, kurių parametrai patenka į režius, rezultatai. Toliau tikriname, kuri jungtis geriausiai aprašo duomenis. Bendroje L.3.2. lentelėje pateikiami ir mažiausiu kvadratų metodu gauti skirtumai (atstumai). 3.3 Paveiksle pateikiami kvantilių-kvantilių grafikai.



3.3. pav. Šiame paveiksle pateikiami QQ grafikai, kiekvienam portfeliui atskirai

Pažiūrėję į 3.3. paveikslą matome, kad C2 jungties atveju yra didžiausias nuokrypis (išlinkimas) nuo įstrižainės. Taigi ši jungtis atkrenta. Liko C1 ir C4 jungtys. Kadangi vien pagal QQ grafikus sunku nuspręsti, skaičiuojame nuokrypius nuo įstrižainės.

Portfeliai	C1		C2		C4	
	θ	D_C^{NP}	θ	D_C^{NP}	θ	D_C^{NP}
(y1,y2)	0,7027	0.03284519	2,7027	7.023154	1,3514	0.4183691
(y1,y3)	1,3058	0.05822693	3,3058	4.51721	1,6529	0.3691651
(y2,y3)	1,7664	0.06649158	3,7664	3.702562	1,8832	0.5654068

L.3.3. lentelė Pateikiami atstumai, apskaičiuoti MKM.

Matome, kad iš C1 ir C4 jungčių atrenkame C1, nes jos nuokrypis yra mažiausias. Pastebėjome, kad visiems portfeliams parenkama ta pati jungtis.

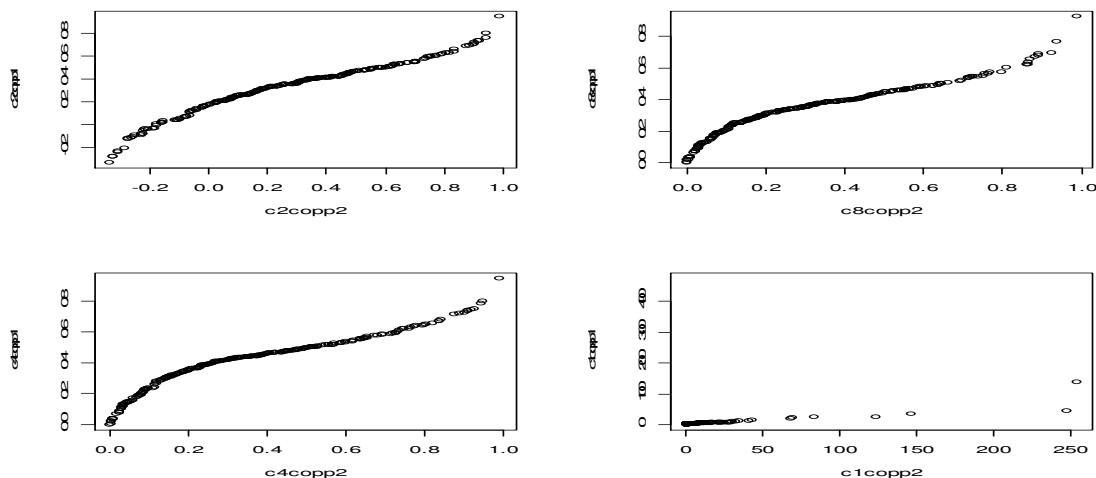
Pusiau parametrisinis vertinimo būdas

Apskaičiuojame jungčių tankius. Suskaičiuojame empirines duomenų pasiskirstymo funkcijas. Maksimizuodami didžiausio tikėtimumo funkciją įvertiname θ parametą. Vėl patikriname, ar gauti įverčiai patenka į jungčių parametrų reikšmių sritis. Toliau dirbame, tik su jungtimis, kurių parametrai patenka į reikšmių sritis. Taip pat apskaičiuojame modifikuotas AIC reikšmes. Kurios jungties parametro θ AIC yra mažiausia, ta jungtis yra kandidatė į geriausiai duomenis aprašančias jungtis (rezultatai pateikiami L3.4 lentelėje).

Portfeliai	C1			C2			C4			C8		
	θ	AIC	D_C^{PP}	θ	AIC	D_C^{PP}	θ	AIC	D_C^{PP}	θ	AIC	D_C^{PP}
(y1,y2)	0.70	-52.9	∞	2.387	301.6	4.10	2.17	1422	3.2	3388.88	-59.9	2.66
(y1,y3)	1,2	-112	∞	2.62	226.4	4.45	2.4	1291	3.17	3061.17	-122	2.91
(y2,y3)	1.63	-164	∞	2.69	212,1	3.77	2.52	1236	2.63	2703.47	-159	2.58

L.3.4. lentelė Pateikiami atstumai, apskaičiuoti MKM, parametras θ , AIC .

Toliau mažiausių kvadratų metodu skaičiuojame atstumus ir braižome QQ grafikus. Paveiksle pateikti grafikai yra (y1,y3) portfelio. Kitų portfelių QQ grafikai pateikta priede Nr. 3.



3.4. pav. Šiame paveiksle pateikiami QQ grafikai, (y1,y3) portfeliui. Kairėje pusėje viršuje pateikiama C2 jungties QQ grafikas, kairėje apačioje – C4, dešinėje viršuje – C8, dešinėje apačioje – C1

Iš QQ grafikų matome, kad C1 grafikas yra visiškai nutolęs nuo įstrižainės, atstumas (nuokrypis) prilyginamas ∞ . Taigi ši jungtis tiek pagal QQ grafiką, tiek pagal atstumą yra atmetama kaip visiškai netinkama šiems duomenims aprašyti. Nors, kaip pastebėjome, pagal AIC ši jungtis buvo viena iš kandidačių į jungtis, kurios geriausiai aprašo mūsų duomenis. Taigi, matome, kad jungčiai atrinkti nepakanka vieno kriterijaus. Visos kitos jungtys grafiškai atrodo panašiai, todėl remsimės atstumų (nuokrypių) pagalba.

Pagal visus kriterijus pasirenkame C8 jungtį, kuri geriausiai aprašo duomenis. Vėlgi, pastebime, kad visiems trims portfeliams parenkama ta pati jungtis.

3.4. Rizikuojamosios vertės skaičiavimas jungčių pagalba

3.3. dalyje atrinkome jungtis. Toliau dirbsime tik su C1 ir C8 jungtimis.

Neparametriniu atveju

Naudojame (2.11) formulę. Šiuo atveju, gauname tokį integralą:

$$P(X + Y < -VaR) = \int_0^1 \partial_1 C1(u, F_2(VaR - F_1^{-1}(u))) du = v$$

Čia $v = \frac{1}{1 + e^{\frac{z - y1 - vid2}{sc2}}}$, z – ieškoma portfelio rizikuojamoji vertė, $y1$ – stebėjimas, $vid2$ – $y2$

stebėjimų vidurkis, $sc2$ – $y2$ stebėjimų skalė.

Tuomet gautą išraišką įsistatome į (2.10) formulę, pasirenkame patikimumo lygmenį (mūsų atveju $p = 0.01$). Ir iš gautos lygties išskaičiuojame VaR. Tai ir yra mūsų ieškomas dydis. Rezultatai pateikiami L.3.5 lentelėje.

Portfelis	VaR
(y1,y2)	- 0.01200186
(y1,y3)	- 0.00940616
(y2,y3)	- 0.00791316

L.3.5. Lentelėje pateikiamos VaR reikšmės apskaičiuotos pusiau parametrinio vertinimo atveju.

VaR yra su minuso ženklu, nes taip apskaičiuojame nuostolį.

Pusiau parametrinis atvejis

Naudojame (2.11) formulę. Pusiau parametrinio vertinimo atveju, gauname tokį integralą:

$$P(X + Y < -VaR) = \int_0^1 \partial_1 C1(u, F_2(VaR - F_1^{-1}(u))) du = \frac{-2v + \theta^2 v^2 + 2\theta v - 2\theta v^2 + v^2 + 1}{\theta^2 v + 2\theta - 2\theta v - 1 + v}$$

Čia $v = \frac{1}{1 + e^{\frac{z - y1 - vid2}{sc2}}}$, z – ieškoma portfelio rizikuojamoji vertė, $y1$ – stebėjimas, $vid2$ – $y2$

stebėjimų vidurkis, $sc2$ – $y2$ stebėjimų skalė, θ - parametro įvertis, kuris gautas maksimizuojant didžiausio tikėtinumo funkciją.

Analogiškai neparimetriniam atvejui, iš gautos lygties išsprendžiame VaR. Rezultatai pateikiami L.3.6.lentelėje.

Portfelis	VaR
(y1,y2)	- 0,0130228
(y1,y3)	- 0.0111991
(y2,y3)	- 0,012692

L.3.6. Lentelėje pateikiamos VaR reikšmės apskaičiuotos pusiau parametrinio vertinimo atveju.

Gavome VaR dviem būdais. Kyla natūralus noras patikrinti, ar gautos VaR reikšmės yra „geros“.

Šiai problemai spręsti naudojame tokia procedūrą:

1. Panaudojant jungtis, Monte Karlo metodu modeliuojame 1000 gražų. Tada, pagal (2.12) formulę apskaičiuojame nuostolius, juos paverčiame į gražas ir išdėstome variacine eilute. Ir pavyzdžiui, jei norėtume rasti VaR^{MK} iš šios eilutės, tai jei turime 10000 reikšmių, tai 100-oji reikšmė bus VaR su 0,01 patikimumo lygmeniu.
2. Tikriname, ar gautos realios reikšmės neviršija VaR^{MK} , gauto 1 dalyje.

Gavome tokius rezultatus:

Portfelis	Neparametrinis VaR^{NP}	Pusiau parametrinis VaR^{PP}	Monte Karlo VaR^{MK}
(y1,y2)	- 0.01200186	- 0,0130228	-0,00081
(y1,y3)	- 0.00940616	- 0.0111991	-0,00076
(y2,y3)	- 0.00791316	- 0,012692	-0,00036

L.3.7. Lentelėje pateikiamos VaR reikšmės .

Kaip matome iš L.3.7. lentelės, abiem būdais skaičiuojant VaR gavosi geri įvertinimai.

Turint apskaičiuotas VaR reikšmes, mes galime apskaičiuoti, koks didžiausias galimas nuostolis gali nutikti vienu laiko momentu į priekį (žr. L.3.8. lentelę).

Portfelis	Portfelio kaina t laiko momentu	nuostolis t+1 laiko momentu VaR^{NP}	nuostolis t+1 laiko momentu VaR^{PP}	nuostolis t+1 laiko momentu VaR^{MK}
(y1,y2)	364.03	4.34	4.70	0.29
(y1,y3)	307.31	2.88	3.42	0.23
(y2,y3)	418.47	3.29	5.28	0.15

L.3.8. lentelė Šioje lentelėje, pateikiama prognozė, kuri parodo, kokį didžiausią nuostolį galime patirti t+1 laiko momentu.

Kadangi abu vertinimo būdai duoda „gerą“ VaR reikšmę, todėl šią lentelę galime interpretuoti taip: pirmojo portfelio didžiausias tikėtinas nuostolis ateinančiu periodu yra intervale tarp 4.34 ir 4.70 litų, antrojo portfelio nuostolis bus (2.88, 3.42), trečiajam – (3.29, 5.28).

Išvados

Darbe siekėme nagrinėjamiems portfeliams parinkti jungtis, kurios geriausiai atspindėtų bendrą duomenų pasiskirstymą. Tada, turint jungtis, apskaičiuoti VaR.

- Pirmu etapu ieškojome tinkamos jungties nagrinėjamiems duomenims. Nagrinėjome tris portfelius (pirmasis portfelis sudarytas iš RF ir CREF fondų, antrasis - RF ir NEF fondų, trečiasis - CREF ir NEF) ir kiekvieno algoritmo atveju visiems portfeliams parinktos tos pačios jungtys.
- Apskaičiavus rizikuojamąsias vertes tikrinome, ar jos neviršija kritinio VaR (kuris gaunamas modeliuojant Monte Karlo metodu). Pagal rezultatus priimame hipotezę, kad šiais metodais apskaičiuotos VaR reikšmės yra „geros“.

Nagrinėjant 1 portfelį gavome, kad ateinančiu laiko momentu mūsų didžiausias tikėtinas nuostolis yra intervale tarp 4.34 ir 4.70 litų. 2 portfelio nuostolis yra intervale (2.88, 3.42), 3 portfelio – (3.29, 5.28).

Reziumuojant galime pasakyti, kad: kadangi visais jungčių parinkimo atvejais parinkome tas pačias jungtis skirtingiems portfeliams, galime daryti prielaidą, kad iš fondų sudarytiems portfeliams (dvimačiu atveju) reiktų rinktis šiame darbe atrinktas jungtis.

Darbo perspektyva. Šis darbas atliktas dvimačiams portfeliams (daugumos autorių darbai irgi apsiriboja tik dvimate erdve), taigi sekantis žingsnis – šia analizę perkelti į daugiamatę erdvę ir patikrinti, ar gautume analogiškus rezultatus ir ar duomenims aprašyti atrinktume tokias pačias jungtis.

Literatūra

- [1] Wiener Zvin, (1997). „Introduction to VaR (Value-at-Risk)“. Risk Management and Regulation in Banking, Jerusalem.
- [2] Munniksma Koen, (2006). “Credit Risk Measurement under Basel II”.
- [3] Fantazzini Dean, (2004). “Dynamic copula modelling for Value at Risk”.
- [4] Schmidt Thorsten, (2006). “Coping with Copulas”. Forthcoming in Risk Books “Copulas – From Theory to Applications in Finance”.
- [5] Sklar, A., (1959). „ Fonctions de repartition a n dimensionion et leurs marges“, Publ. Inst. Statist, 8: 229-231.
- [6] Yan Jun, (2006). “Enjoy the Joy of Copulas”. Preprint submitted to Elsevier Science.
- [7] Frees, E.W., Waldez, E.A., (1998) “Understanding relationships using copulas”. North American Actuarial Journal 2(1), 1-15.
- [8] Frees, E.W., Wang, P., (2005). “Credibility using copulas”. North American Actuarial Journal 9(2), 31-48.
- [9] Bouye, E., Durrleman, V., Bikeghbali, A., Riboulet, g., Rconcalli, T., (2000). “Copulas for finance – A reading guide and some applications” Working paper, Goupe de Recherche Operationnelle, Credit Lyonnais.
- [10] Embrechts, P., Linskog, F., McNeil, A., (2003) “Modelling dependence with copulas and applications to risk management”. In: Rachev, S. (Ed.), Hand-book fo Heavy Tailed Distribution in Finance. Elsevier, 329-384.
- [11] Cherubini, U., Luciano, E., Vecchiato, W., (2004). “Copula Methods in Finance”. John Wiley & Son Ltd.
- [12] McNeil, A., Frey, R., Embrechts, P., (2005) “Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques ant Tools”, Princeton University Press.
- [13] Genest, C., MacKay, R. J., (1986). “The jou of copulas: bivariate distribution with uniform marginals”. The American Statistician, 40:280-283.
- [14] Genest, C., Rivest, L., (1993) “Statistical inference procedures for bivariate Archimedean copulas”. Journal of the American Statistical Association, 88:1034-1043.

- [15] Gumbel, E.J., Mustafi, C.K., (1967). "Some Analitical Properties of Bivariate Extremal Distributions". Journal of the American Statistical Association, 62: 569-588.
- [16] Hutchinson, T.P., (1979) "A comment on replicated paired comporisons". Applied Statistics, 28: 163-169.
- [17] Shih, J.H, Thomas A.L., (1995) "Inference on the association parameter in copula models for bivariate survival data". Biometrics, 51: 1384-1399.
- [18] Hutchinson, T.P., Lai, C.D., (1990) "Continuous Bivariate Distributions, Emphasizing Applications Adelaide", Rumsby Scientific.
- [19] Nelsen R.B., (1999) „An Introduction to Copula“, Springer, New York.
- [20] Guegan, D., Ladoucette, S.A. „Dependence modelling of the joint extremes in a portfolio using Archimedean copulas: application to MSCI indices“.
- [21] Bacigal, T., (2005) „Modelling dependence in pint fluctuation with Archimedean copulas“ Bratislava.
- [22] Čekanavičius, V., Murauskas, G., (2004) "Statistika II ir jos taikymai". TEV, Vilnius.
- [23] Genest, C., Ghoudi, K., Rivest, L.P., (1995). „A semiparametric estimation procedure of dependence parameters in multivariate families of distributions“. Biometrika 82(3): 543-552.
- [24] Ling Hu, (2002). "Dependence Patterns across Financial Markets: Methods and Evidence".
- [25] Dowd Kevin, Fackler Paul. "Estimating VaR with Copulas". Financial Engineering News.

Kiti šaltiniai (internetiniai puslapiai):

[26] <http://www.jpmorgan.com>

[27] <http://www.finasta.lt>

[28] <http://www.wikipedia.org>

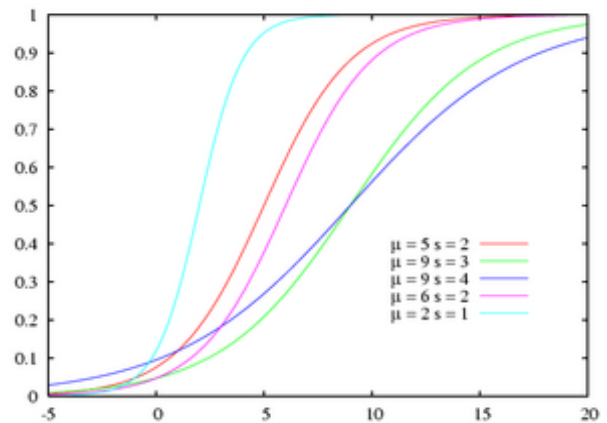
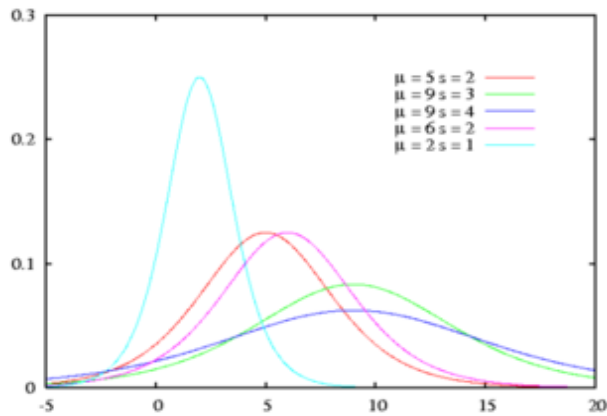
Priedai

Priedas Nr. 1 - Logistinis pasiskirstymas

$F(y) = \frac{1}{1 + e^{-\frac{y-\mu}{s}}}$, kur $y \in (-\infty, \infty)$ - stebėjimai, μ - stebėjimų y vidurkis, $s > 0$ - skalė (ji

apskaičiuojama pagal formulę - $\sigma^2 = \pi^2 \frac{s^2}{3}$, čia σ^2 - duomenų dispersija). Paveiksle Nr. 1 .

pateiktas: kairėje tikimybinė tankio funkcija, dešinėje – pasiskirstymo funkcija.



Pav. Nr. 1 Šaltinis www.wikipedia.org

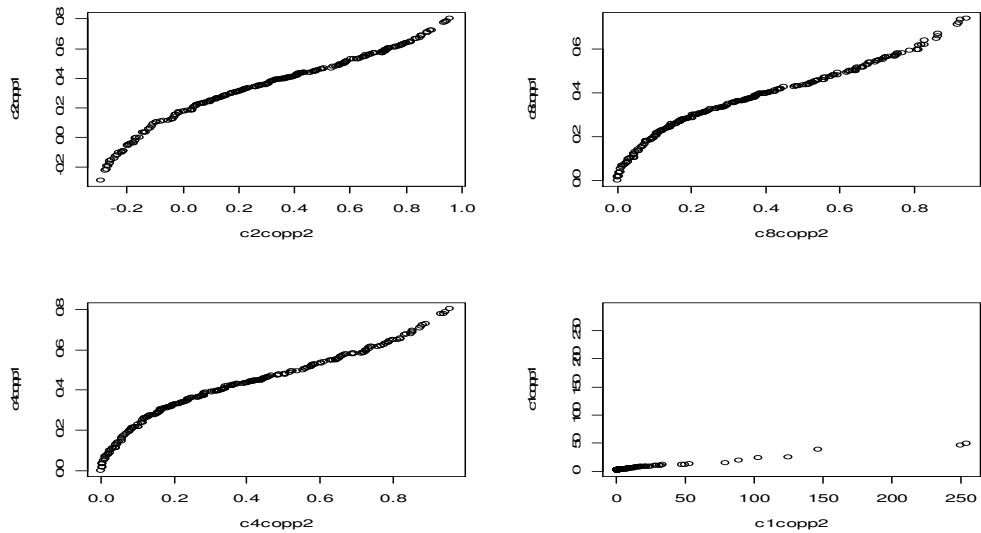
eil. Nr.	$C_\alpha(u, v)$	$\varphi_\alpha(t)$	$\alpha \in$	Ar griežtas
1	$\max([u^{-\alpha} + v^{-\alpha} - 1]^{1/\alpha}, 0)$	$\frac{1}{\alpha}(t^{-\alpha} - 1)$	$[-1, \infty) \setminus 0$	$\alpha \geq 0$
2	$\max(1 - [(1-u)^\alpha + (1-v)^\alpha]^{1/\alpha}, 0)$	$(1-t)^\alpha$	$[1, \infty)$	Ne
3	$\frac{uv}{1 - \alpha(1-u)(1-v)}$	$\ln \frac{1 - \alpha(1-t)}{t}$	$[-1, 1)$	Taip
4	$\exp(-[(-\ln u)^\alpha + (-\ln v)^\alpha]^{1/\alpha})$	$(-\ln t)^\alpha$	$[1, \infty)$	Taip
5	$-\frac{1}{\alpha} \ln\left(1 + \frac{(e^{-\alpha u} - 1)(e^{-\alpha v} - 1)}{e^{-\alpha} - 1}\right)$	$-\ln \frac{e^{-\alpha t} - 1}{e^{-\alpha} - 1}$	$(-\infty, \infty) \setminus 0$	Taip
6	$1 - [(1-u)^\alpha + (1-v)^\alpha - (1-u)^\alpha(1-v)^\alpha]^{1/\alpha}$	$-\ln[1 - (1-t)^\alpha]$	$[1, \infty)$	Taip
7	$\max(\alpha uv + (1-\alpha)(u+v-1), 0)$	$-\ln[\alpha t + (1-\alpha)]$	$(0, 1]$	Ne
8	$\max\left[\frac{\alpha^2 uv - (1-u)(1-v)}{\alpha^2 - (\alpha-1)^2(1-u)(1-v)}, 0\right]$	$\frac{1-t}{1+(\alpha-1)t}$	$[1, \infty)$	Ne
9	$uv \exp(-\alpha \ln u \ln v)$	$\ln(1 - \alpha \ln t)$	$(0, 1]$	Taip
10	$uv / [1 + (1-u)^\alpha(1-v)^\alpha]^{1/\alpha}$	$\ln(2t^\alpha - 1)$	$(0, 1]$	Taip
11	$\max([u^\alpha v^\alpha - 2(1-u)^\alpha(1-v)^\alpha]^{1/\alpha}, 0)$	$\ln(2 - t^\alpha)$	$(0, 1/2]$	Ne
12	$(1 + [(u^{-1} - 1)^\alpha + (v^{-1} - 1)^\alpha]^{1/\alpha})^{-1}$	$(\frac{1}{t} - 1)^\alpha$	$[1, \infty)$	Taip
13	$\exp(1 - [(1 - \ln u)^\alpha + (1 - \ln v)^\alpha - 1]^{1/\alpha})$	$(1 - \ln t)^\alpha - 1$	$(0, \infty)$	Taip
14	$(1 + [(u^{-1/\alpha} - 1)^\alpha + (v^{-1/\alpha} - 1)^\alpha]^{1/\alpha})^{-\alpha}$	$(t^{-1/\alpha} - 1)^\alpha$	$[1, \infty)$	Taip

Šioje lentelėje pateikiama dalis jungčių, kurios priklauso Archimedo jungčių šeimai. Šaltinis: R. Balčiūnaitės prezentacija „Apie jungtis ir jų taikymą draudimo matematikoje“, 2007.

Priedas Nr. 3 - QQ grafikai

Pateikiami pusiau parametrinio vertinimo būdu gauti QQ grafikai. Grafikų išsidėstymas pagal jungtis yra: kairėje pusėje viršuje pateikiama C2 jungties QQ grafikas, kairėje apačioje – C4, dešinėje viršuje – C8, dešinėje apačioje – C1.

Pateikiamas QQ grafikas portfeliui (y2, y3)



Pateikiamas QQ grafikas portfeliui (y1, y2)

