

VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

Magistro darbas

ELEKTROS KAINŲ MODELIAVIMAS
TIESIOGINĖJE RINKOJE

MODELLING ELECTRICITY PRICES IN THE SPOT MARKET

Andrej Bogdanov

VILNIUS 2007

Ekonometrinės analizės katedra

Darbo vadovas **prof. habil. dr. Remigijus Leipus** _____
(parašas)

Darbas apgintas 2007 m. birželio mėn. _____ d.

Registravimo Nr. _____
2007-05-24 _____

SANTRAUKA

Šiame darbe atliekami elektros energijos kainų analizė ir modeliavimas. Elektros kainų kitimui ir tokioms jų charakteringoms savybėms, kaip sezoniškumas, vidurkio reversija, darbo dienų, savaitgalio ir švenčių efektas, kintamumo klasterizacija, aprašyti taikomi SARIMA-TGARCH ir SARFIMA-TGARCH modeliai. Tyrimui naudojami kasvalandiniai Prancūzijos elektros energijos biržos kainų stebėjimai.

Darbą sudaro dvi dalys – bendroji (teorinė) ir tiriamoji dalys. Pirmoje dalyje apžvelgiama literatūra bei aptariami teoriniai modelių aspektai: aprašomi ilgos atminties modeliai. Antroje dalyje pristatomi modelių empiriniai rezultatai: SARIMA-TGARCH ir SARFIMA-TGARCH modelių taikymas ir adekvatumo tikrinimas.

Ekonometrinė analizė atliekama naudojant Eviews, R ir MS Excel programinę įrangą.

MODELLING ELECTRICITY PRICES IN THE SPOT MARKET

ABSTRACT

In this paper an econometric modelling and forecasting of electricity spot prices is presented. The aim of this work is to examine SARIMA-TGARCH and SARFIMA-TGARCH models for describing volatility of electricity spot prices and their characteristics such as season, mean reversion, volatility cauterization, and effects of workdays, weekends or holidays. The data of France electricity stock prices are used for analysis.

This paper contains two parts – theoretical and empirical. In the first part the short review of literature is presented. Moreover, the theoretical aspects of long memory models are discussed. In the following part the empirical results are presented: application and adequacy examination of SARIMA-TGARCH and SARFIMA-TGARCH models.

Econometric analysis is performed using Eviews, R and MS Excel software.

TURINYS

SANTRAUKA	3
ABSTRACT	4
ĮVADAS	6
1. BENDROJI DALIS	7
1.1. LITERATŪROS APŽVALGA.....	7
1.2. ILGOS ATMINTIES MODELIAI.....	11
1.3. ELEKTROS ENERGIJOS BIRŽA POWERNEXT.....	18
2. TIRIAMOJI DALIS	19
2.1. PRELIMINARI DUOMENŲ ANALIZĖ.....	19
2.2. MODELIŲ IDENTIFIKAVIMAS IR PATIKRINIMAS.....	25
IŠVADOS	36
LITERATŪRA	37
PRIEDAS	39

ĮVADAS

Visai neseniai viso pasaulio elektros energetika funkcionavo kaip centralizuotų ir valstybės prižiūrimų monopolijų visuma. Tačiau ilgainiui dėl konkurencijos nebuvimo tokių monopolijų efektyvumas mažėjo. Atsiradus naujoms energijos gamybos bei valdymo technologijoms ir modernėjant kompiuterinei technikai, susidarė palankios sąlygos vystyti konkurencijai. Įvairiose pasaulio šalyse energetikos sektoriaus reformos (liberalizavimas) yra vykdomos arba jau įvyko. Liberalizavus energetikos rinkas elektros energija tampa tokia pačia preke kaip ir visos kitos, kurioms taikomi rinkos dėsniai (Pažėraitė, (2001)). Tokiu būdu, elektros kaina tampa vienu iš pagrindinių faktorių, kurie sąlygoja (apibūdina) ekonominius santykius tarp elektros rinkos dalyvių. Elektros gamintojams bei vartotojams yra svarbi elektros kainų prognozė tiesioginėje rinkoje, kuri padeda apsispręsti kiek energijos gaminti bei pirkti. Todėl sudaromi modeliai, kurie yra skirti elektros kainų modeliavimui bei prognozei.

Šiame darbe atliekama elektros kainų empirinė analizė ir modeliavimas tiesioginėje rinkoje.

Darbo tikslas: Pasiūlyti modelius elektros kainų modeliavimui bei jų vertinimo metodus.

Uždaviniai:

- Išnagrinėti esamų modelių ypatumus bei naudojimo privalumus;
- Parinkti elektros kainų prognozavimo modelius;
- Atlikti modelių ekonometrinę analizę bei įvertinti adekvatumą.

1. BENDROJI DALIS

1.1 LITERATŪROS APŽVALGA

Elektros rinkų liberalizavimas paskatino tyrimus, susijusius su elektros kainų ekonometriniu modeliavimu ir prognozavimu tiesioginėje rinkoje. Escribano ir kt. (2002) darbe siūlomas bendras modelis, suteikiantis galimybę vienu metu nagrinėti kelis elektros kainoms būdingus faktorius – vidurkio reversiją, priklausantį nuo laiko kintamumą (GARCH), priklausančius nuo laiko šuolius bei sezoniškumą. Bierbrauer ir kt. (2004) darbe elektros kainų modeliavimui naudojami režimų kaitos modeliai (angl. regime switching model).

R. Weron, A. Misiorek (2005) elektros kainų prognozavimui taiko kalibruotą ARMA ir ARMAX modelį, kur egzogeninis kintamasis yra elektros sistemos apkrova. Modelis yra taikomas Kalifornijos energijos biržos elektros kainoms.

Žemiau šiek tiek detaliau apžvelgsime du straipsnius. Knitel ir Roberts (2005) straipsnyje yra aprašomas elektros kainų modeliavimas finansų rinkos statistinių modelių pagalba. Darbe yra nagrinėjamos kasvalandinės Kalifornijos energijos biržos elektros kainos. Atlikę preliminarią duomenų analizę autoriai išskyrė tokias elektros kainų savybes (stilizuotus faktus):

- vidurkio reversija
- sezoniškumo efektas
- darbo dienų/savaitgalio efektas
- valandos efektas
- kintamumo klasterizacija
- išsiskiriantys stebėjimai (dideli kainų pokyčiai)

Panagrinėkime šiame straipsnyje siūlomus modelius, kurie taikomi elektros kainų modeliavimui ir atspindi išvardintas savybes.

1 Modelis: Vidurkio reversija

$$dp(t) = k[\mu - p(t)]dt + \sigma db(t), \quad p(0) = p_0, \quad (1.1.1)$$

kur $p(t)$ elektros kaina laiku t , k, μ, σ yra nežinomi parametrai, ir $\{b(t)\}$ standartinis Wienerio procesas. $[\mu - p(t)]$ yra kainos nukrypimo lygis nuo pusiausvyros, kuris yra koreguojamas koeficientu k ir priklauso nuo trikdžių (*angl.* perturbations), $\sigma db(t)$. $k > 0$ – būtina sąlyga, kad procesas būtų stacionarus. Pastebėsime, kad (1.1.1) yra pirmos eilės autoregresijos modelis tolydžiam laike, ir jo sprendinį galime užrašyti kaip:

$$p(t) = e^{-kt} p_0 + \mu(1 - e^{-kt}) + \int_0^t e^{k(s-t)} \sigma db(s). \quad (1.1.2)$$

Diskrečiame laike nagrinėjamas modelis atrodo taip:

$$p_t = \alpha_0 + \beta_1 p_{t-1} + \eta_t, \quad (1.1.3)$$

kur $\alpha_0 = \mu(1 - e^{-k})$, $\beta_1 = e^{-k}$, $\eta_t = \int_{t-1}^t e^{k(s-t)} \sigma db(s)$. $\eta_t \sim BT(0, \sigma^2(1 - e^{-k})/2)$ (BT – baltas triukšmas). Modelio (1.1.3) parametrai $(\alpha_0, \beta_1, \sigma_\eta^2)$ vertinami naudojant sąlyginį didžiausio tikėtimumo metodą. Logaritminė tikėtimumo funkcija atrodo taip:

$$\log L(\alpha_0, \beta_1, \sigma_\eta) = -\frac{T-1}{2} \log(2\pi) - \frac{T-1}{2} \log \sigma_\eta^2 - \frac{1}{2\sigma_\eta^2} \sum_{t=2}^T (p_t - \beta_1 p_{t-1})^2. \quad (1.1.4)$$

2 Modelis: nuo laiko priklausantis vidurkis (*angl.* time-varying mean)

Šis modelis skirtas sisteminiam kintamumui elektros kainose aptikti.

$$dp(t) = k[\mu(t) - p(t)]dt + \sigma db(t), \quad (1.1.5)$$

kur

$$\begin{aligned} \mu(t) = & \alpha_1 I(t \in \text{Pikas}) + \alpha_2 I(t \in \text{Nepikas}) + \alpha_3 I(t \in \text{Savaigalis}) + \alpha_4 I(t \in \text{Ruduo}) \\ & + \alpha_5 I(t \in \text{Ziema}) + \alpha_6 I(t \in \text{Pavasaris}) \end{aligned} \quad (1.1.6)$$

ir $I(\cdot)$ indikatorinė funkcija, pvz.,

$$I(t \in \text{Pikas}) = \begin{cases} 1, & \text{jei dienos valanda yra tarp 8 ir 21} \\ 0, & \text{kitais atvejais} \end{cases}$$

Suintegruokime (1.1.5):

$$\begin{aligned} p(t) &= e^{-kt} p_0 + \int_0^t e^{-k(t-s)} k \mu(s) ds + \int_0^t e^{-k(t-s)} \sigma db(s) \\ &= e^{-k} p(t-1) + \int_{t-1}^t e^{-k(t-s)} k \mu(s) ds + \int_{t-1}^t e^{-k(t-s)} \sigma db(s). \end{aligned} \quad (1.1.7)$$

Atsižvelgiant į tai, kad laiko momentas yra viena valanda, $\mu(t)$ intervale $[t-1, t)$ yra konstanta. Diskretaus laiko atveju lygtis (1.1.7):

$$p_t = \alpha_t + \beta_1 p_{t-1} + \eta_t, \quad (1.1.8)$$

kur $\alpha_t = \mu(t)(1 - e^{-k})$, $\beta_1 = e^{-k}$, $\eta_t = \int_{t-1}^t e^{-k(s-t)} \sigma db(s)$. Lygtį (1.1.8) galima perrašyti

kaip ARMAX(1,0) modelį su šešiais fiktyviais egzogeniniais kintamaisiais:

$$p_t = \alpha_1 Pिकास_t + \alpha_2 Nepikas_t + \alpha_3 Savaigalis_t + \alpha_4 Ruduo_t + \alpha_5 Ziema_t + \alpha_6 Pavasaris_t + \beta_1 p_{t-1} + \eta_t. \quad (1.1.9)$$

3 Modelis: Šuolinis-difuzinis procesas (angl. jump-difussion process)

Elektros kainų skirstinio sunkioms uodegoms, t.y. dideliams kainų pokyčiams, aprašyti taikomas standartinis difuzijos procesas: šuolinis-difuzinis procesas.

$$dp(t) = k(\mu(t) - p(t))dt + \sigma_b db(t) + zdq(t) \quad (1.1.10)$$

kur $q(t)$ yra Puasono procesas su intensyvumu λ , $z \sim N(\mu_z, \sigma_z)$. Jei didelio kainų pokyčio (šuolio) intensyvumas keičiasi bėgant laikui, tai jį galima užrašyti:

$$\lambda_t = \lambda_0 + \lambda_{pikas} Pिकास_t + \lambda_{savaigalis} Savaigalis_t + \lambda_{ruduo} Ruduo_t + \lambda_{ziema} Ziema_t + \lambda_{pavas} Pavasaris_t$$

Diskretaus laiko atveju modelis atrodys taip:

$$p_t = \alpha_t + \eta_t \quad t=1, \dots, T \quad (1.1.11)$$

$$\eta_t = \begin{cases} \phi_1 \eta_{t-1} + \varepsilon_{1t}, & \text{su tikimybe } (1 - \lambda_t) \\ \phi_1 \eta_{t-1} + \mu_z + \sigma_z \varepsilon_{2t}, & \text{su tikimybe } \lambda_t \end{cases} \quad (1.1.12)$$

α_t apibrėžiama taip pat kaip ir (1.1.8).

4 Modelis: ARMAX

$$p_t = \alpha_t + \beta_1 p_{t-1} + \beta_2 p_{t-24} + \beta_3 p_{t-25} + \delta_1 \varepsilon_{t-1} + \delta_2 \varepsilon_{t-24} + \delta_3 \varepsilon_{t-25}, \quad t=1, \dots, T,$$

kur α_t apibrėžiama taip pat kaip ir (1.1.8).

5 Modelis: EGARCH

Šis modelis skirtas aprašyti elektros kainų kintamumo klasterizaciją. Buvo pastebėta, kad elektros duomenims būdingas asimetrijos efektas.

$$p_t = \alpha_t + \eta_t \quad t=1, \dots, T \quad (1.1.13)$$

$$\eta_t = \sqrt{\sigma_t} \varepsilon_t \quad (1.1.14)$$

$$\ln(\sigma_t) = \theta + \sum_{i \in \{1, 24, 25\}} k_i g(z_{t-i}) + \gamma_1 \ln(\sigma_{t-1}), \quad (1.1.15)$$

kur $g(z) = \{\psi z + |z| - E(|z|)\}$, $z = \eta_t / \sqrt{\sigma_t}$, ε_t yra nepriklausomi, vienodai pasiskirstę $N(0,1)$ atsitiktiniai dydžiai, α_t apibrėžiama kaip ir anksčiau.. Koeficientas ψ kontroliuoja asimetrijos mastą. Jei $\psi=0$, tai reiškia, kad asimetrijos efekto nėra. Jei $-1 < \psi < 0$, teigiami šokai padidina kintamumo dispersiją mažiau nei neigiami. Jei $\psi < 1$, tai teigiami šokai sumažina dispersiją tuo tarpu neigiami padidina.

Dabar panagrinėkime siūlomus modelius Koopman ir kt. (2005) straipsnyje. Šiame darbe pateikta keturių Europos energijos biržų kasdieninių elektros kainų logaritminių grąžų empirinė analizė taikant periodinio sezoniškumo Reg-ARFIMA-GARCH modelį (ang. The periodic seasonal regression ARFIMA model with heteroskedasticity and GARCH disturbances). Elektros kainoms yra būdingas sezoniškumas. Trumpu laikotarpiu sezoniškumo modeliavimui naudojami egzogeniniai kintamieji su pavėlinimu (lagais), kurie „pagauna“ švenčių, savaitgalio, darbo dienos efektą. Ilgu laikotarpiu šiai dinamikai aprašyti taikomi sezoniniai ARFIMA modeliai. Taip pat trumpu laikotarpiu elektros kainų kitimui gali įtakoti ir kiti veiksniai, pvz., Norvegijos energijos birža Nord Pool prekiauja elektra, kuri yra pagaminta hidroelektrinėse, tai reiškia, kad kainų kitimui įtakoja ir vandens lygis rezervuaruose.

Modelio specifikacija

Tarkime p_t - logaritminės elektros kainos, $t=1, \dots, T$, ir s reiškia sezoną, pvz., straipsnyje $s = 7$, kadangi nagrinėjamos visos savaitės kasdieninės elektros kainos. Periodas j aprašomas kaip $j=j(t)=1+t \bmod s$, tai suteikia galimybę nagrinėti septynis atskirus modelius kiekvienai savaitės dienai. Periodinis sezoninis Reg-ARFIMA-GARCH modelis atrodo taip:

$$\Phi_j(L^s)(1-L^s)^{D_j}(p_t - \mu_t) = \Theta_j(L^s)\varepsilon_t, \quad \varepsilon_t | F_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2), \quad t = 1, \dots, T, \quad (1.1.16)$$

$\mu_t = E(p_t | F_{t-1})$ ir $\sigma_t^2 = E(p_t^2 | F_{t-1})$, L - skirtuminis operatorius, apibrėžtas lygybe $L^k p_t = p_{t-k}$. D_j apibrėžia sezoninio trupmeninio integravimo laipsnį, kuriam išpildytos stacionarumo ir apgręžiamumo sąlygos, t.y. $|D_j| < 0.5$ periodui $j=1, \dots, s$.

$$(1-L^s)^{D_j} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\Gamma(i-D_j)}{\Gamma(-D_j)\Gamma(i+1)} L^{is}, \quad (1.1.17)$$

kur $\Gamma(\cdot)$ - gama funkcija.

Sąlyginis vidurkis apibrėžiamas:

$$\mu_t = \phi_1 p_{t-1} + \dots + \phi_p p_{t-p} + \sum_{k=1}^K (\delta_{k0j} x_{kt} + \dots + \delta_{krj} x_{t-r}), \quad (1.1.18)$$

$t = \max(p,r)+1, \dots, T$; ϕ_{ij} $i=1, \dots, p$, δ_{kij} $k=1, \dots, K$ ir $i=0, 1, \dots, r$ yra periodinės regresijos koeficientai.

Sąlyginė dispersija:

$$\sigma_t^2 = \exp(\lambda_j) h_t, \quad h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1} + \sum_{k=1}^K \gamma_k z_{kt}, \quad t = \max(p,r)+1, \dots, T \quad (1.1.9)$$

kur $j=j(t)$, $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ - sezoniniai faktoriai.

Modelio parametrai vertinami aproksimuotu didžiausio tikėtimumo metodu.

1.2. ILGOS ATMINTIES MODELIAI

Šios skyriaus teoremos įrodomos Brockwell (1986) knygos 12.5 skyriuje.

ARMA procesas $\{X_t\}$ dažniausiai minimas, kai šnekama apie trumpos atminties procesus, nes kovariacija arba priklausomybė tarp X_1 ir X_{1+k} greitai mažėja, kai $k \rightarrow \infty$.

Tiksliau, gerai žinoma, kad autokoreliacinė funkcija gęsta eksponentiniu greičiu, t.y.:

$$|\rho(k)| \leq Cr^{-k}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

kur $C > 0$ ir $0 < r < 1$. Ilgos atminties procesai yra stacionarūs ir jiems galioja:

$$\rho(k) \sim Ck^{2d-1} \quad \text{kai } k \rightarrow \infty, \quad (1.2.1)$$

kur $C > 0$ ir $d < 0.5$.

Pastebėta, kad ilgos atminties procesai atsiranda tokiose skirtingose srityse, kaip hidrologija bei ekonomika. Šiame skyrelyje mes praplėsime ARMA procesų klasę kaip tai padarė Hosking (1981) bei Granger ir Joyeux (1980), norėdami įtraukti procesus, kurių autokoreliacinės funkcijos asimptotiškai elgiasi kaip (1.2.1). Nors ilgos atminties

procesą visada galime aproksimuoti ARMA(p, q) procesu, gauti pakankamai gerą aproksimaciją yra sunku, nes eilės parametrai p ir q gali būti labai dideli.

Bet kokiam realiam skaičiui $d > -1$, skirtuminių operatorių $\nabla^d = (1-B)^d$ apibrėškime taip:

$$\nabla^d = (1-B)^d = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j B^j,$$

kur

$$\pi_j = \frac{\Gamma(j-d)}{\Gamma(j+1)\Gamma(-d)} = \prod_{0 < k \leq j} \frac{k-1-d}{k}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.2.2)$$

ir $\Gamma(\cdot)$ yra gama funkcija:

$$\Gamma(x) := \begin{cases} \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt & , x > 0 \\ \infty & , x = 0 \\ x^{-1} \Gamma(1+x) & , x < 0 \end{cases}$$

1.2.1 Apibrėžimas. Procesas $\{X_t, t = 0, \pm 1, \dots\}$ yra ARIMA $(0, d, 0)$ su $d \in (-0.5; 0.5)$ jeigu $\{X_t\}$ yra stacionarus skirtuminės lygties

$$\nabla^d X_t = Z_t, \quad \text{kur } \{Z_t\} \sim BT(0, \sigma^2) \quad (1.2.3)$$

sprendinys. Remiantis (1.2.5) $\{X_t\}$ dažnai vadinamas *trupmeniškai diferencijuotu triukšmu*.

Pastabos:

i) Šiame skyrelyje atsitiktinių kintamųjų sekų konvergavimas reiškia konvergavimą kvadratų prasme.

ii) Remiantis apibrėžimu 1.2.1 laikoma, kad $\nabla^d X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j X_{t-j}$, kur $\{\pi_j\}$ apibrėžta

(1.2.2), konverguoja vidutinių kvadratų prasme. Jeigu X_t turi spektrinę

išraišką $X_t = \int_{(-\pi, \pi]} e^{it\lambda} dZ_x(\lambda)$, tada

$$\nabla^d X_t = \int_{(-\pi, \pi]} e^{it\lambda} (1 - e^{-i\lambda})^d dZ_x(\lambda). \quad (1.2.4)$$

iii) Remiantis (1.2.3), laikysime, kad $\{X_t\}$ yra apgręžiamas, net jeigu koeficientai $\{\pi_j\}$ nėra absoliučiai sumuojami. Sakoma, kad $\{X_t\}$ yra kauzalus, jei X_t gali būti išreikštas kaip $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j Z_{t-j}$, kur $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$. Stacionaraus kauzalaus sprendinio egzistavimas ir sprendinio kovariacinės savybės pateikiamos teoremoje žemiau.

1.2.1 teorema. Tegul $d \in (-0.5; 0.5)$. Tuomet egzistuoja vienintelis stacionarus (1.2.3) lygties sprendinys $\{X_t\}$, kuris apibrėžiamas taip:

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j Z_{t-j} = \nabla^{-d} Z_t, \quad (1.2.5)$$

kur

$$\psi_j = \frac{\Gamma(j+d)}{\Gamma(j+1)\Gamma(d)} = \prod_{0 < k \leq j} \frac{k-1+d}{k}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.2.6)$$

Iveskime pažymėjimus $f(\cdot)$, $\gamma(\cdot)$, $\rho(\cdot)$ ir $\alpha(\cdot)$, kurie yra atitinkamai $\{X_t\}$ spektrinis tankis, autokovariacinė funkcija, autokoreliacinė funkcija ir dalinė autokoreliacinė funkcija. Turime:

$$f(\lambda) = |1 - e^{-i\lambda}|^{-2d} \frac{\sigma^2}{(2\pi)} = (2 \sin(\frac{\lambda}{2}))^{-2d} \frac{\sigma^2}{(2\pi)}, \quad -\pi \leq \lambda \leq \pi \quad (1.2.7)$$

$$\gamma(0) = \sigma^2 \frac{\Gamma(1-2d)}{\Gamma^2(1-d)}, \quad (1.2.8)$$

$$\rho(h) = \frac{\Gamma(h+d)\Gamma(1-d)}{\Gamma(h-d+1)\Gamma(d)} = \prod_{0 < k \leq h} \frac{k-1+d}{k-d}, \quad h = 1, 2, \dots \quad (1.2.9)$$

ir

$$\alpha(h) = \frac{d}{h-d}, \quad h = 1, 2, \dots \quad (1.2.10)$$

Pastaba: Taikant Stirling'o formulę, $\Gamma(x) \sim \sqrt{2\pi} e^{-x+1} (x-1)^{x-\frac{1}{2}}$ kai $x \rightarrow \infty$, iš (1.2.2), (1.2.6) ir (1.2.9) formulių gauname tokias asimptotines išraiškas:

$$\pi_j \sim j^{-d-1}/\Gamma(-d) \quad \text{kai } j \rightarrow \infty \quad (1.2.11)$$

$$\psi_j \sim j^{d-1}/\Gamma(d) \quad \text{kai } j \rightarrow \infty \quad (1.2.12)$$

ir

$$\rho(h) \sim h^{2d-1}\Gamma(1-d)/\Gamma(d) \quad \text{kai } h \rightarrow \infty. \quad (1.2.13)$$

Trupmeniškai diferencijuotas triukšmas kai $d \neq 0$ yra ilgos atminties procesas 1.2.1 apibrėžimo prasme.

Pastaba: Kadangi $\sin \lambda \sim \lambda$ kai $\lambda \rightarrow 0$, iš (1.2.7) matome, kad

$$f(\lambda) \sim \lambda^{-2d} \sigma^2 / 2\pi \quad \text{kai } \lambda \rightarrow \infty. \quad (1.2.14)$$

Taigi, $f(0)$ yra baigtinis tada ir tik tada, kai $d \leq 0$. Asimptotinis $f(\lambda)$ iš (1.2.14) elgesys kai $\lambda \rightarrow 0$ leidžia naudoti kitokią ilgos atminties proceso apibrėžimą, kuris galėtų būti vartojamas vietoj (1.2.1).

Trupmeniškai diferencijuoto triukšmo procesai yra labai nelankstūs modeliuojant ilgos atminties duomenis, kadangi du parametrai d ir σ^2 labai apriboja tinkamų naudojimui autokovariacinių funkcijų klasę. Tačiau jie gali būti panaudoti kaip pamatiniai instrumentai generuojant daug platesnę ilgos atminties procesų klasę, kurių kovariacijos, esant mažiems lagams, įgyja labai daug skirtingų formų. Šiuos procesus aprašė Granger ir Joyeux (1980) bei Hosking (1981).

1.2.2 apibrėžimas. Procesas $\{X_t, t = 0, \pm 1, \dots\}$ yra ARIMA(p, d, q) su $d \in (-0.5; 0.5)$ jeigu $\{X_t\}$ yra stacionarus ir tenkina skirtumines lygtis:

$$\phi(B)\nabla^d X_t = \theta(B)Z_t, \quad (1.2.15)$$

kur $\{Z_t\}$ yra baltas triukšmas ir ϕ , θ yra atitinkamai p , q eilės polinomai.

Aišku, kad $\{X_t\}$ yra ARIMA(p, d, q) procesas su $d \in (-0.5; 0.5)$ tada ir tik tada, kai $\nabla^d X_t$ yra ARMA(p, q) procesas. Jeigu $\theta(z) \neq 0$, kai $|z| \leq 1$ tada lygtis $Y_t = \phi(B)\theta^{-1}(B)X_t$ tenkina

$$\nabla^d Y = Z_t$$

ir

$$\phi(B)X_t = \theta(B)Y_t,$$

taigi $\{X_t\}$ gali būti traktuojamas kaip ARMA(p, q) procesas, išvestas iš trupmeniškai diferencijuojamo triukšmo.

1.2.2 teorema (stacionaraus sprendinio egzistencija ir vienatis)

Tarkim, kad $d \in (-0.5; 0.5)$ bei $\phi(\cdot)$ ir $\theta(\cdot)$ neturi bendrų nulių.

a) Jeigu $\phi(z) \neq 0$ kai $|z| = 1$ tuomet egzistuoja vienintelis stacionarus (1.2.15)

$$\text{lygties sprendinys: } X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \nabla^{-d} Z_{t-j}, \text{ kur } \psi(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j z^j = \theta(z)/\phi(z).$$

b) Sprendinys $\{X_t\}$ yra kauzalus tada ir tik tada, kai $\phi(z) \neq 0$ kai $|z| \leq 1$.

c) Sprendinys $\{X_t\}$ yra apgręžiamas, tada ir tik tada, kai $\theta(z) \neq 0$ kai $|z| \leq 1$.

d) Jeigu sprendinys $\{X_t\}$ yra kauzalus ir apgręžiamas, tai jo autokoreliacinė funkcija $\rho(\cdot)$ ir spektrinis tankis $f(\cdot)$ tenkina:

$$\rho(h) \sim Ch^{2d-1} \text{ kai } h \rightarrow \infty \quad (1.2.16)$$

kur $C > 0$, ir

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{|\theta(e^{-i\lambda})|^2}{|\phi(e^{-i\lambda})|^2} |1 - e^{-i\lambda}|^{-2d} \sim \frac{\sigma^2}{2\pi} [\theta(1)/\phi(1)]^2 \lambda^{-2d} \quad (1.2.17)$$

kai $\lambda \rightarrow 0$.

Trupmeninio parametro d vertinimas regresijos būdu.

Ši metodą pasiūlė Geweke ir Porter-Hudak (1983). Šis vertinimo metodas remiasi spektrinio tankio forma:

$$f(\lambda) = |1 - e^{-i\lambda}|^{-2d} f_U(\lambda), \quad (1.2.18)$$

kur

$$f_U(\lambda) = \frac{\sigma^2 |\theta(e^{-i\lambda})|^2}{2\pi |\phi(e^{-i\lambda})|^2} \quad (1.2.19)$$

yra ARMA(p, q) proceso spektrinis tankis, o

$$U_t = \nabla^d X_t. \quad (1.2.20)$$

Logaritmuojame (1.2.18):

$$\ln f(\lambda) = \ln f_U(0) - d \ln |1 - e^{-i\lambda}|^2 + \ln [f_U(\lambda)/f_U(0)]. \quad (1.2.21)$$

Įsistatome Furjė dažnio išraišką $\omega_j = 2\pi j/n \in (0, \pi)$ į (1.2.21) vietoje λ ir iš abiejų pusių pridėdami $\ln I_n(\omega_j)$:

$$\begin{aligned} \ln I_n(\omega_j) &= \ln f_U(0) - d \ln |1 - e^{-i\omega_j}|^2 + \ln (I_n(\omega_j)/f_U(\omega_j)) + \\ &+ \ln (f_U(\omega_j)/f_U(0)) \end{aligned} \quad (1.2.22)$$

Dabar, jei ω_j yra netoli nulio, tariame, kad $\omega_j \leq \omega_m$, kur ω_m yra mažas, tuomet paskutinė išraiška nežymiai palyginama su dešine lygties puse, kad galėtumėm perrašyti (1.2.22) kaip paprastą tiesinę regresiją:

$$Y_j = a + bx_j + \varepsilon_j \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (1.2.23)$$

kur

$$\begin{aligned} Y_j &= \ln I_n(\omega_j), x_j = \ln |1 - e^{-i\omega_j}|^2, \varepsilon_j = \ln (I_n(\omega_j)/f_U(\omega_j)), \\ a &= \ln f_U(0) \quad \text{ir} \quad b = -d. \end{aligned}$$

Jeigu $d \in (-0.5; 0.5)$, seka $\{\varepsilon_j\}$ asimptotiškai nepriklausoma. Todėl galime įvertinti d mažiausių kvadratų priklausomybe Y_1, \dots, Y_m nuo x_1, \dots, x_m , kur m – funkcija priklausanti nuo n , taip, kad

$m/n \rightarrow 0$ kai $n \rightarrow \infty$. Taigi gauname:

$$\hat{d} = -\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})(Y_i - \bar{Y}) / \sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2 . \quad (1.2.24)$$

Geweke ir Porter-Hudak (1983) įrodė, kad egzistuoja tokia seka m , kad $\ln(n)^2/m \rightarrow 0$ kai $n \rightarrow \infty$ ir

$$\hat{d} \text{ yra } AN\left(d, \pi^2 / \left[6 \sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2\right]\right) \text{ kai } n \rightarrow \infty \quad (1.2.25)$$

Reikia pabrėžti, jog $\pi^2/6$ yra ε_t asimptotinio pasiskirstymo dispersija..

Kai įvertiname d , turime įvertinti ARMA(p, q) parametrus ϕ ir θ . Kadangi, $X_t = \nabla^{-d} U_t$, kur $\{U_t\}$ yra ARMA(p, q) procesas, tai pakeisdami Z vietoje U gauname:

$$J_X(\lambda) = (1 - e^{-i\lambda})^{-d} J_U(\lambda) + Y_n(\lambda), \quad (1.2.26)$$

kur $J_X(\cdot)$ ir $J_U(\cdot)$ yra atitinkamai $\{X_1, \dots, X_n\}$ ir $\{U_1, \dots, U_n\}$ Furjė transformacijos. Ignoruojant paklaidas $Y_n(\lambda)$ (jos vis tiek artėja į nulį, kai n pakankamai didelis) ir pakeičiant d į \hat{d} gauname apytikslių ryšių:

$$J_U(\lambda) = (1 - e^{-i\lambda})^{\hat{d}} J_X(\lambda) \quad (1.2.27)$$

Jeigu pritaikysime universalią Furjė transformaciją kiekvienai lygties pusei, gausime U_t įverčius:

$$\tilde{U}_t = n^{-1/2} \sum_j e^{i\omega_j t} (1 - e^{-i\omega_j})^{\hat{d}} J_X(\omega_j), \quad t = 1, \dots, n, \quad (1.2.28)$$

kur sumuojami visi Furjė dažniai $\omega_j \in (-\pi, \pi)$. Šio metodo privalumas yra tas, kad jis leidžia įvertinti d kai nieko nežinome apie p ir q . Įvertinus $\{U_t\}$ galima preliminariai identifikuoti p ir q naudojant žinomus ARMA procesų vertinimo metodus.

1.3. ELEKTROS ENERGIJOS BIRŽA POWERNEXT

Trumpai supažindinsime su Prancūzijos elektros energijos birža. 1996m. Europos direktyva, pritaikyta vasario 10 d. 2000 m. Prancūzijos įstatymui, įgalino realiai iširti Prancūzijos sukurtą elektros rinką. To ėmėsi BNP-Paribas, ELIA (Belgijos skirstomosios sistemos operatorius), EDF, Electrabel, RTE (Prancūzijos skirstomosios sistemos operatorius), Societe Generale ir TotalFinaElf vadovaujant Euronext. To pasekoje, po metų (30/07/01) įkurtas susivienijimas Powernext SA.

Powernext pateikia keturias vienas kitą papildančias, atviras ir anonimiškas rinkas. Kurios pasižymi lengvu priėjimu, tiesioginiu dalyvavimu ir patikima elektronine programa.

Powernext® Day-Ahead – tai trumpo laikotarpio rinkos etalonas, suteikiantis rinkos dalyviams apsidrausti nuo rizikos kas valandą, 365 dienas per metus.

Powernext® Future – suteikia elektros energijos kainos rizikos hedžingo ir arbitražo strategijas vidutiniu laikotarpiu ir biržos likvidumą, kuris siekia tris metus.

Powernext® Carbon – numato norimą rizikos valdymo mechanizmą Europos kompanijoms, kurios pasišventusios sumažinti šiltnamio efektą sukeliančių dujų išskyrimo procesą. Ir kurios yra priverstos mažinti išskiriamą CO2 kiekį, norėdamos pasiekti leistinas CO2 išskyrimo normas atsižvelgiant į Europos Direktyvą.

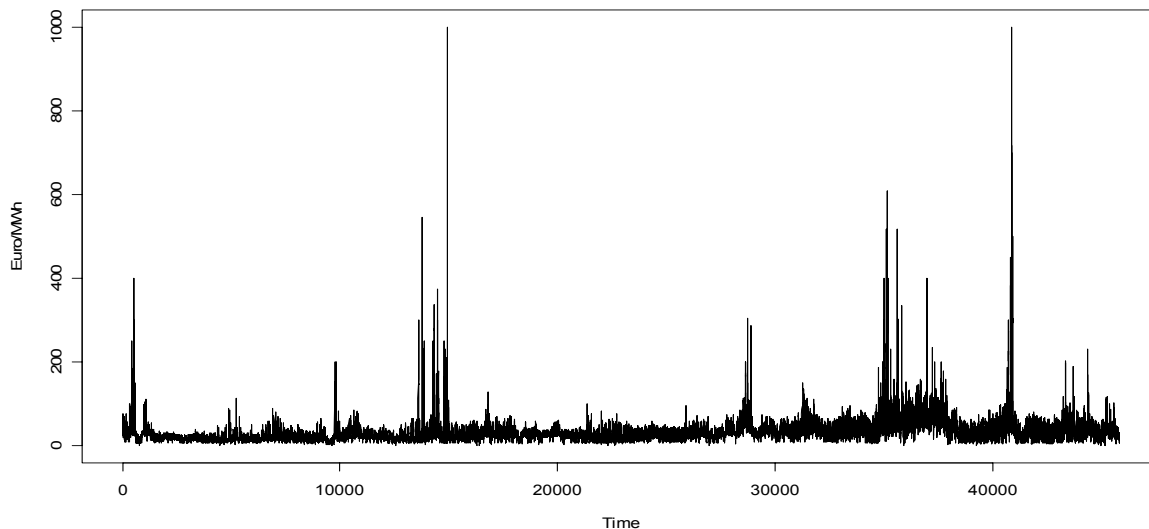
Powernext® Balancing GRTgaz – tai glaudaus bendradarbiavimo su GRTgaz rezultatas. Šis susijungimas leidžia Skirstomosios sistemos operatoriui GRTgaz progresyviai padengti savo kasdieninius balanso poreikius naudojantis rinka paremtu mechanizmu. Sandorių kainos bus laipsniškai panaudotos nustatant dieninius pusiausvyros svyravimus tarp keturių, GRTgaz valdomų, zonų.

Prekiaujant elektros energijos biržoje, kainos tesioginėje rinkoje (Powernext® Day-Ahead) formuojamos skaidriai ir nustatomos vienpusiame aukcione kiekvienai ateinančios paros valandai, atsižvelgiant į šios dienos pirkėjo ir pardavėjo pateiktus kainos-kiekio pasiūlymus (Bobinaitė ir kt (2006)).

2. TIRIAMOJI DALIS

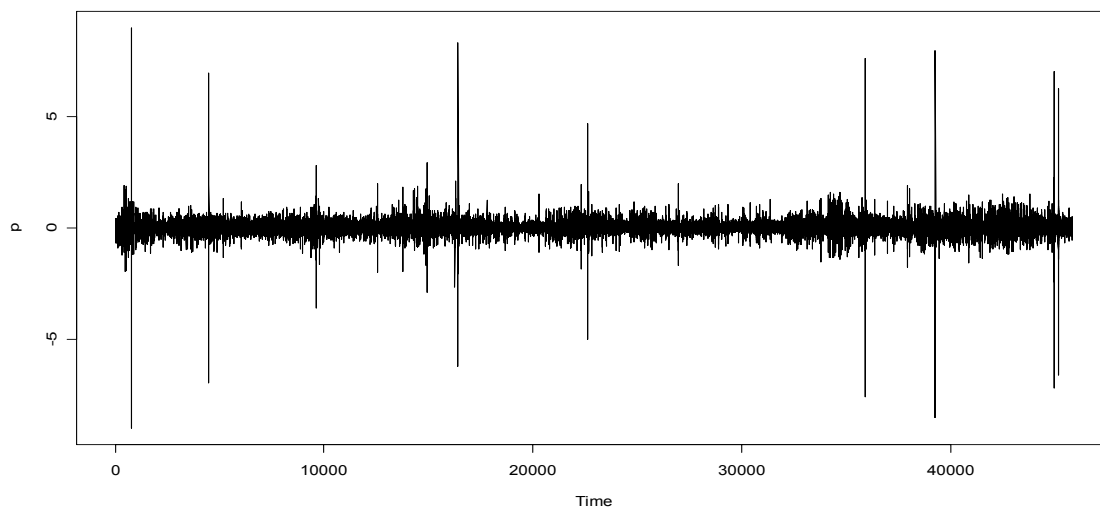
2.1. PRELIMINARI DUOMENŲ ANALIZĖ

Šiame darbe yra naudojami Prancūzijos energijos biržos POWERNEXT duomenys - kasvalandinės elektros energijos kainos (Euro/MWh) nuo 2001.11.27 01:00 iki 2007.02.18 24:00, 45 840 stebėjimų. 1 paveiksle pavaizduoti nagrinėjamo laikotarpio duomenys.

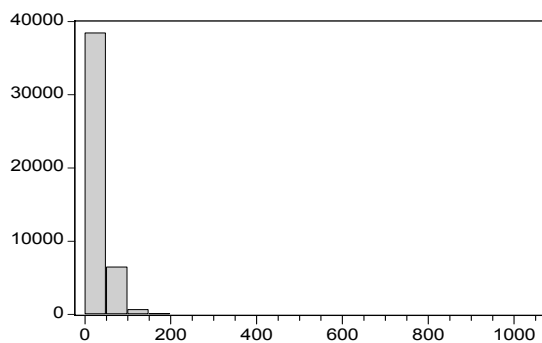


1 pav. Kasvalandinės elektros kainos nuo 2001.11.27 01:00 iki 2007.02.18 24:00.

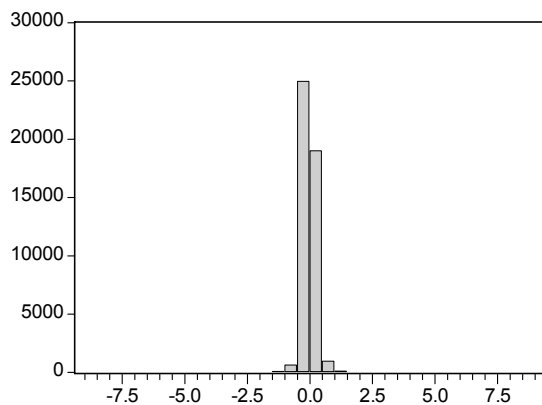
2 paveiksle pavaizduotos kasvalandinių elektros kanų logaritminės grąžos $p_t = \ln(P_t / P_{t-1})$, kur P_t – elektros kaina ir $t=1, \dots, T$.



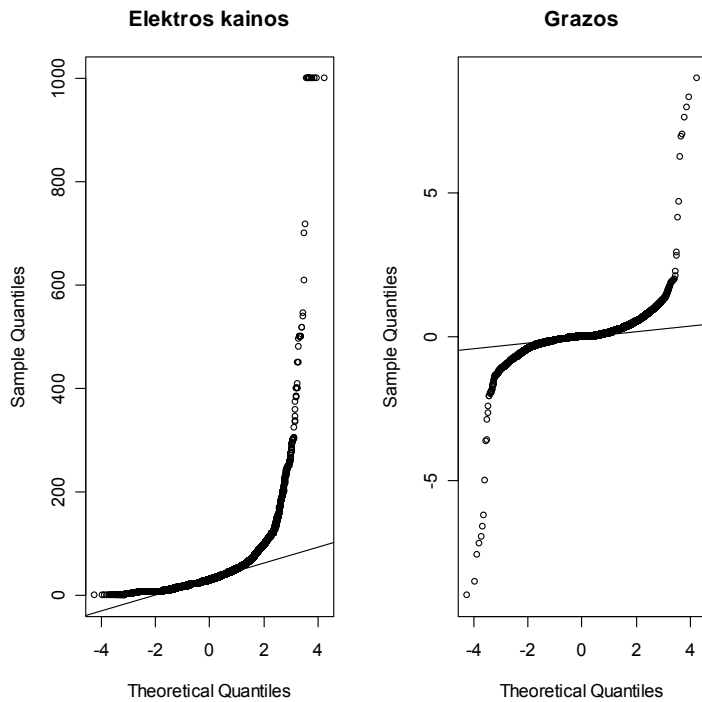
2 pav. Elektros kainų logaritminės gražos.



Series: P	
Sample 1 45840	
Observations 45840	
Mean	34.94242
Median	29.61350
Maximum	1000.067
Minimum	0.001000
Std. Dev.	28.76744
Skewness	10.69179
Kurtosis	273.1895
Jarque-Bera	1.40e+08
Probability	0.000000



Series: DL	
Sample 1 45840	
Observations 45839	
Mean	6.28e-06
Median	-0.001781
Maximum	8.977146
Minimum	-8.977020
Std. Dev.	0.255880
Skewness	0.438365
Kurtosis	261.7199
Jarque-Bera	1.28e+08
Probability	0.000000



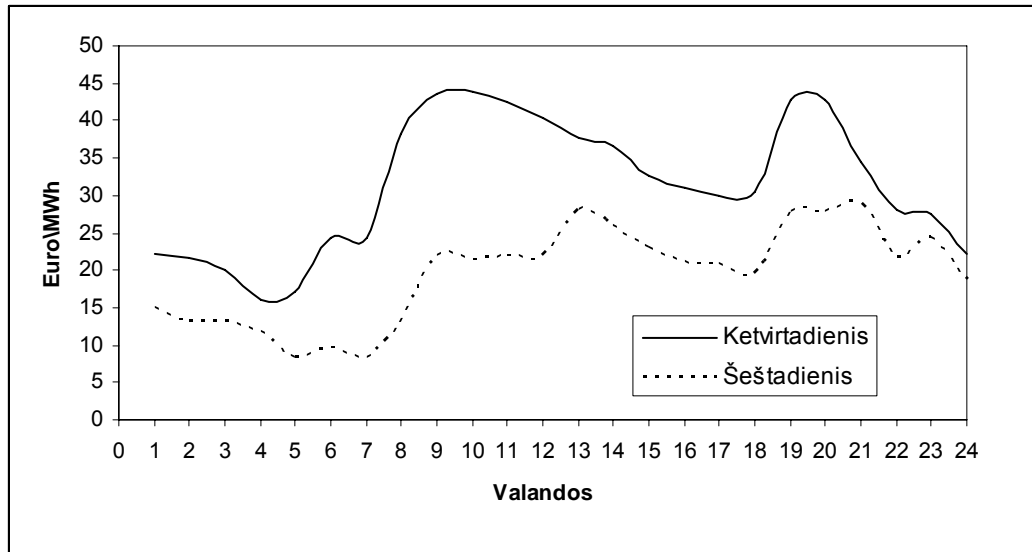
3 pav. Elektros kainų (p) ir jų gražų (DL) empirinės histogramos bei QQ-plot grafikai.

Iš 3 paveikslo matome, kad kaip elektros kainų taip ir jų gražų pasiskirstymas nėra panašus į normalųjį. Palyginus su normaliojo skirstinio asimetrijos ir eksceso koeficientais elektros kainų atitinkami koeficientai yra didesni – 10,69 ir 273,19, o gražų atveju – 0,44 ir 261,72. Iš 2 ir 3 paveikslų išplaukia, kad kaip ir finansų duomenų elektros kainų logaritminėms gražoms būdingi tokie stilizuoti faktai:

- asimetrijos efektas
- skirstinio sunkios uodegos
- kintamumo klasterizacija.

Iš 1, 2 ir 3 paveikslų, kad duomenuose yra išsiskiriančiųjų stebėjimų. Be to kintamumas turi tendenciją grįžti prie kažkokio vidurkio pasiekus maksimumą, t.y. vidurkio reversija.

4 paveiksle pavaizduotas elektros kainų kitimas darbo dienomis ir savaitgalio metu.



4 pav. Elektros kainų kitimas darbo ir savaitgalio metu

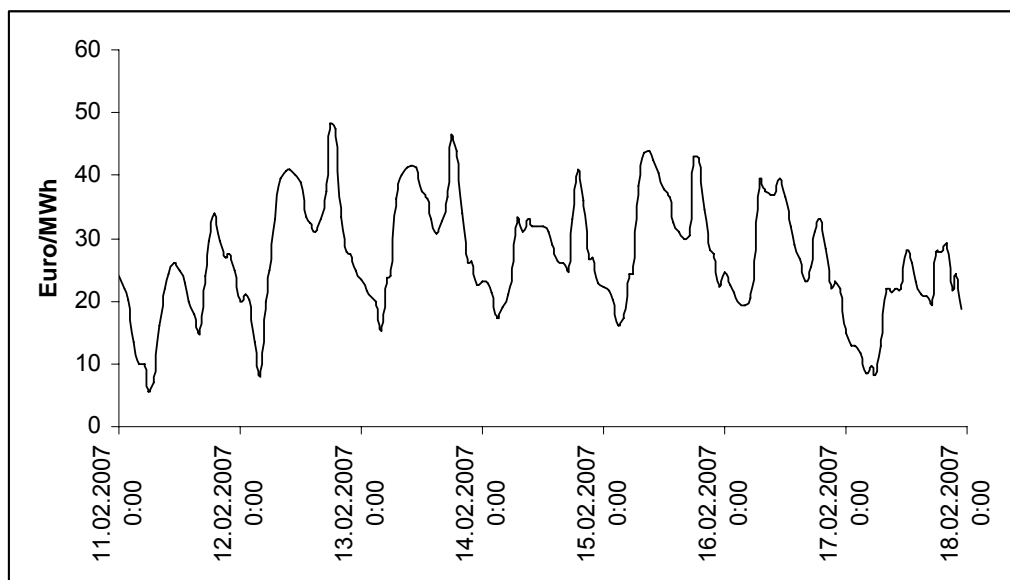
Matome, kad elektros kainos savaitgalio metu yra žemesnės nei darbo dienomis ir tai yra natūralu, nes savaitgalio metu elektros energijos vartojimas mažėja. Elektros kainos taip pat svyruoja valandomis (4 pav.): apie 5 val. ryto kainos pradeda augti, t.y. atsibunda gyventojai ir išauga elektros energijos vartojimas, po 11 val. ryto mažėja ir nuo 19 val. iki 20 val. vakaro vėl išauga. Tai reiškia, kad kuo didesnė elektros energijos paklausa, tuo didesne yra jos kaina. Elektros kainos yra mažesnės ne tik savaitgalio metu, bet ir švenčių dienomis. Prancūzijoje yra 8 nacionalinės šventės su fiksuota ir 3 su kilnojama data:

Šventės pavadinimas	Data
Naujieji metai	Sausio 1
Darbo diena	Gegužės 1
Pergalės diena	Gegužės 8
Bastilijos paėmimo diena	Liepos 14
Žolinė	Rugpjūčio 15
Visų šventųjų diena	Lapkričio 1
Paliaubų diena	Lapkričio 11
Šventų Kalėdų pirmoji diena	Gruodžio 25
Šventų Kalėdų antroji diena	Gruodžio 26

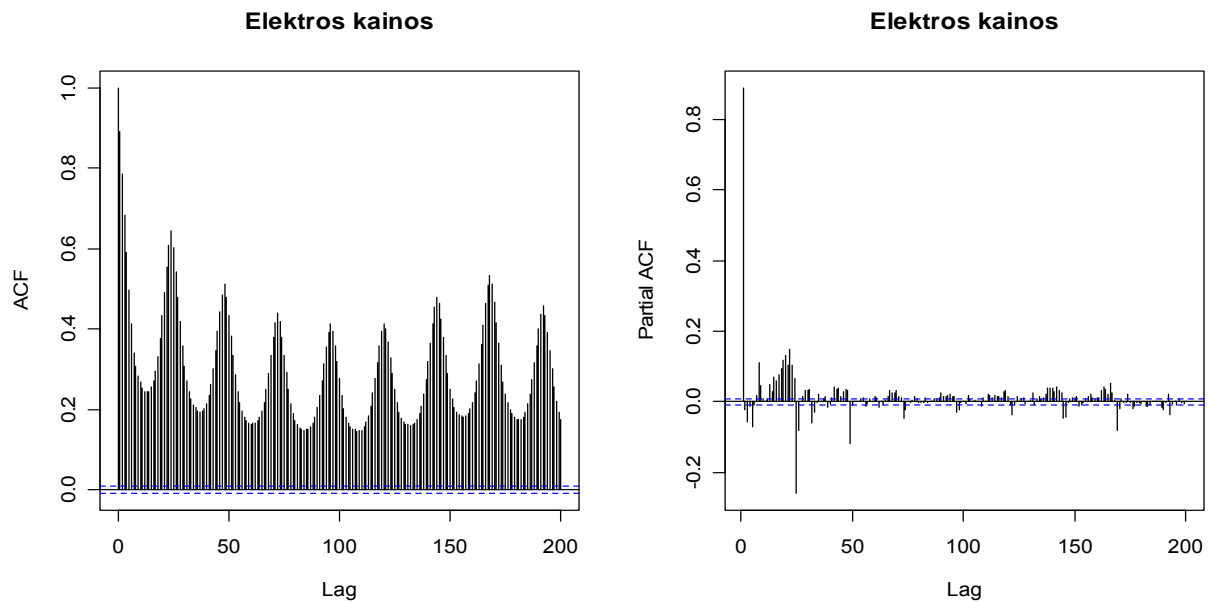
Šventos Velykos	2 dienų šventė
Šeštinės (angl. Ascension)	
Sekminės	2 dienų šventė

Elektros kainų padidėjimas ir kritimas gali priklausyti ir nuo metų laikų. Pavyzdžiui, elektros kaina gali pakilti karštą vasarą, nes elektros energija yra naudojama (vartojama) patalpų vėsinimui. Tuo atveju, jei elektros energija naudoja namų šildymui, tai elektros kainos žiemą gali būti didesnės nei kitais metų laikais, žinoma, jei žiema nėra labai šilta.

Elektros kainos svyruoja ne tik valandomis, bet ir paromis (5 pav.), t.y. dienos sezoniškumas.



5 pav. Elektros kainų kitimas nuo 2007.02.11 iki 2007.02.17



6 pav. Elektros kainų autokoreliacinės (acf) ir dalinės autokoreliacinės funkcijos (pacf)

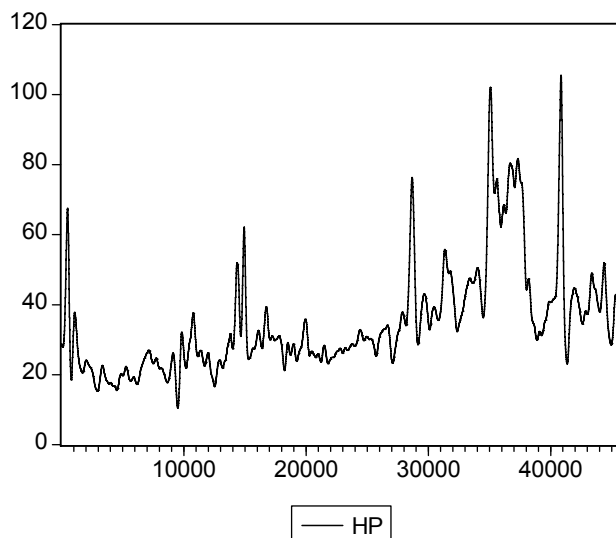
Autokoreliacinė funkcija parodo ne tik ryškų elektros kainų dienos sezoniškumą, bet ir savaitinį sezoniškumą.

Po preliminarios duomenų analizės galima įvardinti elektros kainų ir jų logaritminių gražų stilizuotus faktus: vidurkio reversija; valandos efektas; darbo dienų, savaitgalio bei švenčių efektas, kintamumo klasterizacija, skirstinio sunkios uodegos.

2.2. MODELIŲ IDENTIFIKAVIMAS IR PATIKRINIMAS

Iš pradžių elektros kainų modeliavimui pritaikysiu SARIMA modelį $(1-B)^d(1-B^s)^D\phi(B)\Phi(B^s)(P_t - \mu_t) = \theta(B)\Theta(B^s)u_t$, kur μ_t - stochastinis trendas.

Duomenų (1 pav.) trendo įvertinimui naudojamas Hodrick-Prescott filtras su $\lambda = 2822400 = 100 \cdot 168^2$, remiantis kuriuo gauname savaitinį suglodinimą.



7 pav. Įvertintas trendas Hodrick-Prescott filtru

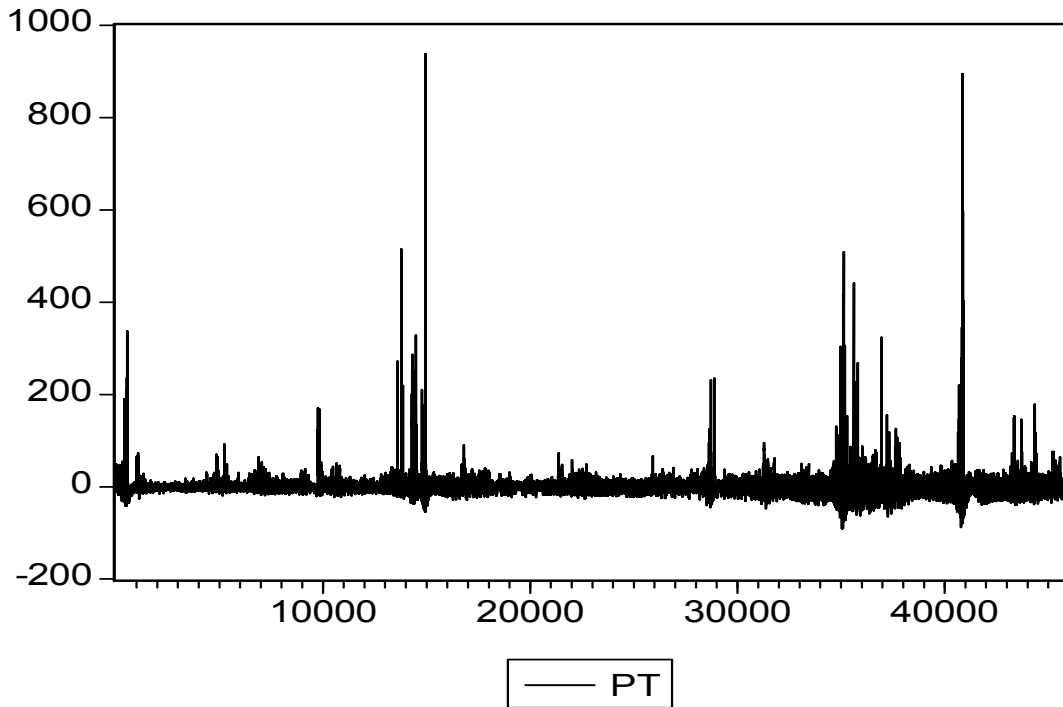
Dabar įvertintą trendą (7 pav.) reikia atimti iš duomenų. Nagrinėjami duomenys be trendo (PT) pavaizduoti 8 paveiksle (apačioje). Iš preliminarios empirinės duomenų žinome, kad elektros kaina priklauso nuo paros valandų, savaitgalių, švenčių, metų laikų, juos į regresiją įtrauksime kaip fiktyvius egzogeninius kintamuosius. Paros valandas padalinsime į dvi dalis: nuo 9 val. ryto iki 20 val. vakaro – pikas, o kitomis valandomis ne pikas.

$$Pikas = \begin{cases} 1, & \text{jei dienos valanda yra tarp 9 ir 20} \\ 0, & \text{kitaip.} \end{cases}$$

Savaitgalius ir šventes apjungsime į vieną kintamąjį – išėiginės. Pavyzdžiui, regresija tik su fiktyviaisiais kintamaisiais atrodys taip (p_t - elektros kainų duomenys be trendo)

$$p_t = \alpha_1 Pikas_t + \alpha_2 Nepikas_t + \alpha_3 Iseiginės_t + \alpha_4 Ruduo_t + \alpha_5 Ziema_t + \alpha_6 Pavasaris_t + \eta_t.$$

Regresijos koeficientų įverčiai parodyti 1 lentelėje. Matome, kad regresijos statistiškai reikšmingi su 5% pasikliautinumo lygmeniu yra tik *Nepikas*, *Pikas* ir *Išeiginės* kintamieji. Įvertinti koeficientai pasako, kad piko metu elektros kainos auga, nepiko sumažėja ir per išeigines irgi mažės.

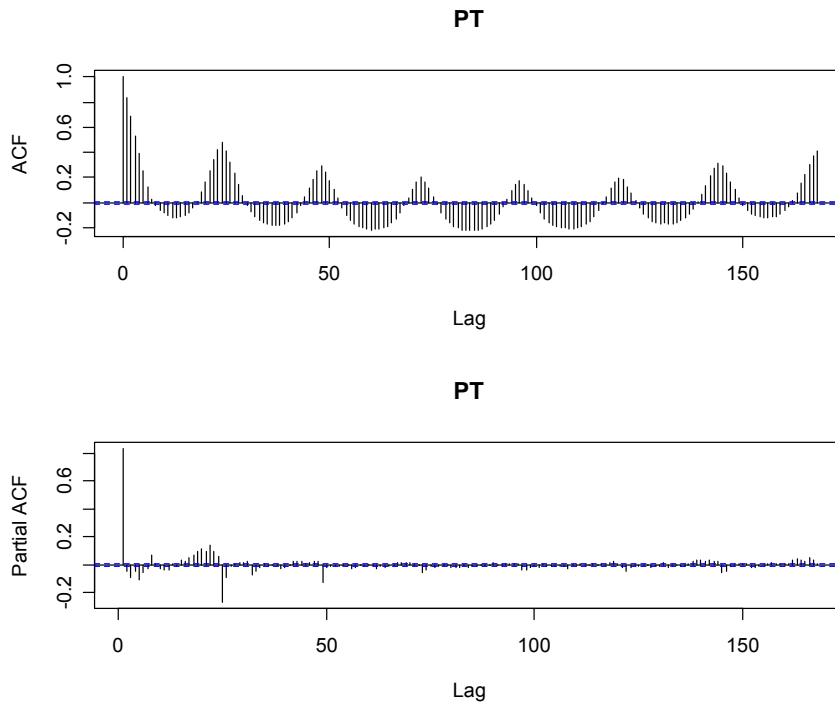


8 pav. Elektros kainos be trendo

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
PIKAS	12.40116	0.234868	52.80050	0.0000
NEPIKAS	-4.134041	0.234868	-17.60153	0.0000
ISEIGINES	-13.24508	0.214403	-61.77655	0.0000
ZIEMA	-0.273818	0.275854	-0.992621	0.3209
PAVASARIS	0.294178	0.286246	1.027711	0.3041
RUDUO	0.022921	0.286863	0.079902	0.9363
R-squared	0.189947	Mean dependent var		3.66E-09
Adjusted R-squared	0.189859	S.D. dependent var		23.62663
S.E. of regression	21.26582	Akaike info criterion		8.952210
Sum squared resid	20727737	Schwarz criterion		8.953353
Log likelihood	-205178.6	Durbin-Watson stat		0.428696

1 lentelė. Regresijos koeficientų įverčiai

Buvo įvertintas ir išskirtas iš duomenų tik trendas, bet lieka dar sezoninė dalis. Iš PT duomenų ACF (autokoreliacinė funkcija) ir PACF (10 pav.) matome, kad yra 24 valandų ir savaitės ($24 \cdot 7 = 168$) sezoniškumas. PT duomenims pritaikysime SARIMA modelį.



10 pav. Duomenų PT acf ir pacf grafikai

Gauname tokį modelį

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
PIKAS	4.762007	0.908836	5.239678	0.0000
NEPIKAS	-2.144943	0.908759	-2.360300	0.0183
ISEIGINES	-4.205383	0.410612	-10.24174	0.0000
AR(2)	0.667135	0.005718	116.6742	0.0000
SAR(24)	0.693597	0.007899	87.81017	0.0000
SAR(168)	0.117158	0.003883	30.16862	0.0000
MA(1)	0.765143	0.004699	162.8351	0.0000
MA(2)	-0.014465	0.006050	-2.390780	0.0168
SMA(24)	-0.437709	0.009999	-43.77612	0.0000

R-squared	0.758135	Mean dependent var	-0.000896
Adjusted R-squared	0.758093	S.D. dependent var	23.65899
S.E. of regression	11.63646	Akaike info criterion	7.746360
Sum squared resid	6182826.	Schwarz criterion	7.748080
Log likelihood	-176879.1	Durbin-Watson stat	2.000109

Modelio liekanų Ljung- Box statistika $Q(1) = 0,00016$, $Q(2) = 0,278$. Liekanų kvadratai yra koreliuoti (2 lent.), apie tai sako ir LM (Lagrange multiplier) testas (3 lent.). Liekanas aprašysime TGARCH (4 lent.)

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob
*	*	1 0.104	0.104	493.01	0.00
		2 0.064	0.054	682.94	0.00
		3 0.060	0.049	849.29	0.00
		4 0.053	0.040	977.89	0.00
		5 0.043	0.029	1062.2	0.00
		6 0.058	0.045	1217.9	0.00

2 lentelė. Liekanų kvadratų ac f ir pacf

ARCH Test:

F-statistic	498.3198	Probability	0.000000
Obs*R-squared	492.9624	Probability	0.000000

3 lentelė. Liekanų kvadratų ARCH LM testas

	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
NEPIKAS	-3.011744	1.138772	-2.644729	0.0082
PIKAS	8.053147	1.122379	7.175066	0.0000
ISEIGINES	-9.296419	0.851581	-10.91666	0.0000
AR(2)	0.188488	0.021654	8.704342	0.0000
SAR(24)	0.276532	0.013071	21.15670	0.0000
SAR(168)	0.305639	0.008002	38.19703	0.0000
MA(1)	0.312103	0.014029	22.24749	0.0000
MA(2)	0.196183	0.022671	8.653443	0.0000
SMA(24)	0.100023	0.012260	8.158282	0.0000

Variance Equation

C	325.1791	19.41710	16.74705	0.0000
RESID(-1)^2	0.119236	0.013776	8.655157	0.0000

RESID(-1)^2*(RESID(-1)<0)	-0.089853	0.014854	-6.049170	0.0000
RESID(-2)^2	0.040242	0.013182	3.052872	0.0023
GARCH(-1)	0.263039	0.060249	4.365849	0.0000
GARCH(-2)	-0.114711	0.015344	-7.476164	0.0000
<hr/>				
T-DIST. DOF	4.766550	0.144954	32.88313	0.0000
<hr/>				
R-squared	0.658818	Mean dependent var	-0.000896	
Adjusted R-squared	0.658706	S.D. dependent var	23.65899	
S.E. of regression	13.82166	Akaike info criterion	7.583298	
Sum squared resid	8721666.	Schwarz criterion	7.586356	
Log likelihood	-173148.6	Durbin-Watson stat	1.118979	

4 lentelė. Įvertintas SARIMA-TGARCH modelis

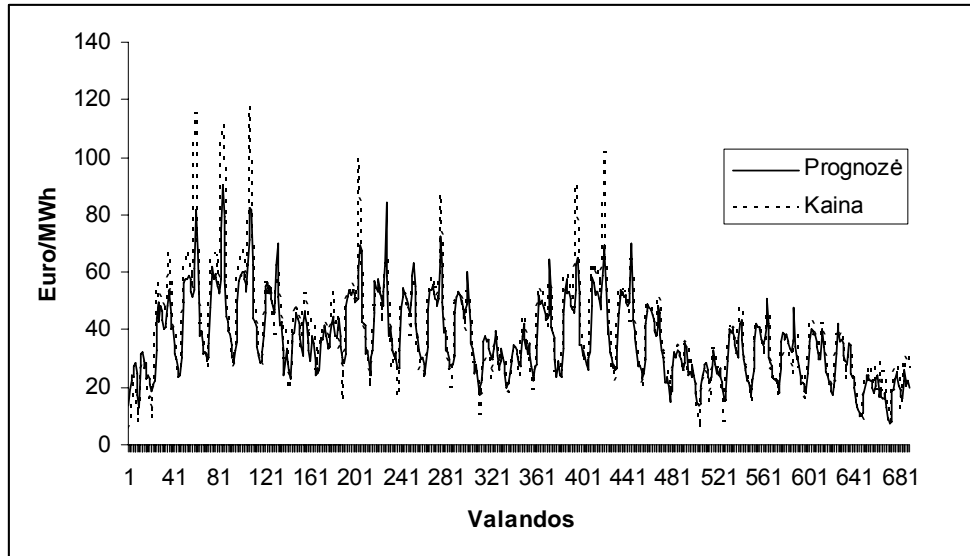
Įvertintas modelis atrodo taip:

$$P_t = \mu_t - 3,012Nepikas_t + 8.053Pikas_t - 9,30Iseigines_t + 0,188P_{t-2} + 0,277P_{t-24} + 0,306P_{t-168} + \eta_t + 0,312\eta_{t-1} + 0,196\eta_{t-2} + 0,10\eta_{t-24}$$

$$\eta_t = \sigma_t \varepsilon_t,$$

$$\sigma_t^2 = 325,180 + 0.263\sigma_{t-1}^2 - 0.115\sigma_{t-2}^2 + 0.119\eta_{t-1}^2 + 0,04\eta_{t-2}^2 - 0.09\eta_{t-1}^2 I(\eta_t < 0)$$

Patikrinkime šio modelio gautas liekanas $\hat{\varepsilon}_t = \hat{\eta}_t / \hat{\sigma}_t$. Liekanos yra autokoreliuotos: Ljung-Box statistika $Q(1) = 3725,3$, $Q(2) = 4400,3$, $Q(13) = 8585,4$, kai 5 % reikšmingumo lygmens atitinkamos kritinės reikšmės yra 3,841, 5,99 ir 22,362. Patikrinkime šio modelio prognozavimo tikslumą (11 pav.).



11 pav. Elektros kainų prognozė

Vidurkio absoliutinė procentinė paklaida (*angl.* Mean Absolute Percentage Error)

$$MAPE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\hat{P}_i - P_i}{P_i} \right| = 0,13, \text{ kur } \hat{P} - \text{elektros kainos prognozė.}$$

SARFIMA –TGARCH

Tegul kainos aprašomos tokiu modeliu:

$$\phi(L)\Phi(L^s)(1-L^s)^D (p_t - \mu_t) = \theta(L)\Theta(L^s)\varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, T$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t v_t, \quad \sigma_t^2 = \varpi + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{k=1}^r \gamma_k \varepsilon_{t-k}^2 I(\varepsilon_t < 0)$$

$\mu_t = \alpha_0 + \alpha_1 \text{Pikas}_t + \alpha_2 \text{Iseigines}_t + \alpha_3 \text{Ruduo}_t + \alpha_4 \text{Ziema}_t + \alpha_5 \text{Pavasaris}_t$ tada gauname

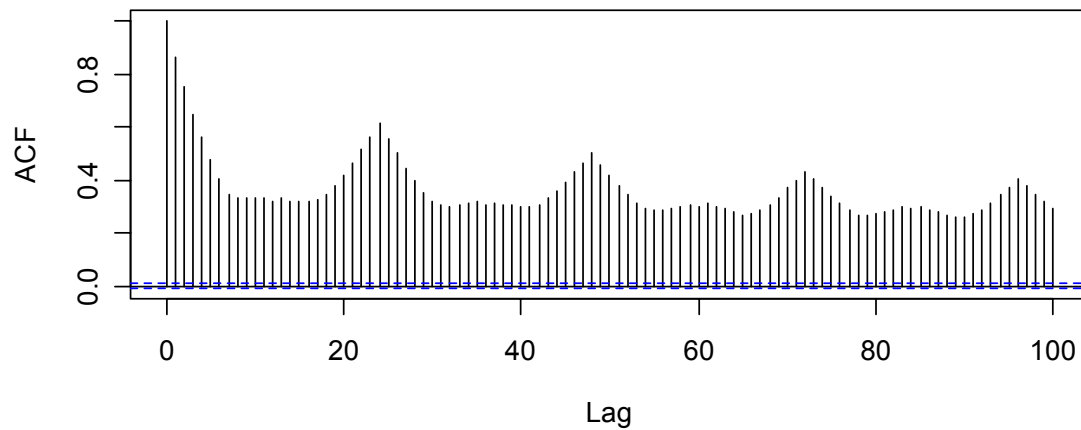
$$p_t = \alpha_0 + \alpha_1 \text{Pikas}_t + \alpha_2 \text{Iseigines}_t + \alpha_3 \text{Ruduo}_t + \alpha_4 \text{Ziema}_t + \alpha_5 \text{Pavasaris}_t + \eta_t.$$

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	31.72016	0.295546	107.3272	0.0000
ISEIGINES	-14.00034	0.268956	-52.05449	0.0000
ZIEMA	2.202133	0.347270	6.341267	0.0000
PAVASARIS	-4.010912	0.360282	-11.13271	0.0000
VASARA	-1.364518	0.359852	-3.791890	0.0001
PIKAS	16.53469	0.249195	66.35243	0.0000
R-squared	0.140168	Mean dependent var	34.94242	

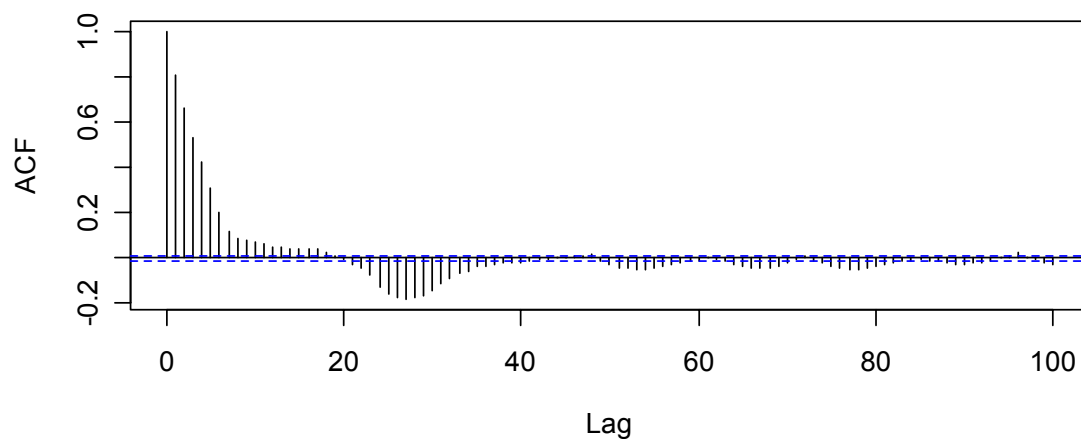
Adjusted R-squared	0.140074	S.D. dependent var	28.76744
S.E. of regression	26.67667	Akaike info criterion	9.405587
Sum squared resid	32617530	Schwarz criterion	9.406730
Log likelihood	-215570.1	F-statistic	1494.355
Durbin-Watson stat	0.272868	Prob(F-statistic)	0.000000

Trupmeninį parametą D įvertiname Geweke ir Porter-Hudak (GPH) metodu (žr. 1.2 skyrius ir priedas). $\hat{D} = 0.404$. Žinant \hat{D} galima apskaičiuoti $(1 - L^{24})^{0.404} (p_t - \mu_t) = z_t$ ir jau z_t taikyti SARIMA modelį. $(1 - L^{24})^{0.404} (*)$ galime laikyti filtru pro kurį „praleidžiame“ $p_t - \mu_t$.

pradiniai duomenys



Po filtro



12 pav. Duomenų prieš taikant filtrą (*) ir po acf grafikai

Matome (12 pav.), kad sezoniškumas jau netoks ryškus kaip buvo. Toliau taikysime SARIMA modelį. z_t aprašome kaip SARIMA, o šio modelio liekanas TGARCH modeliu (5 lent.)

	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
AR(1)	0.864366	0.001491	579.5762	0.0000
SAR(24)	0.294736	0.001547	190.4709	0.0000
SAR(168)	0.599977	0.000565	1062.824	0.0000
MA(1)	-0.084858	0.002352	-36.07597	0.0000
MA(7)	-0.012516	0.002776	-4.508058	0.0000
MA(24)	-0.410783	0.001645	-249.7701	0.0000
Variance Equation				
C	0.349803	0.004911	71.23355	0.0000
RESID(-1)^2	0.360122	0.000753	478.1462	0.0000
RESID(-1)^2*(RESID(-1)<0)	-0.064999	0.001067	-60.92138	0.0000
GARCH(-1)	0.805410	0.000233	3458.720	0.0000
R-squared	0.604804	Mean dependent var		0.040203
Adjusted R-squared	0.604726	S.D. dependent var		20.94092
S.E. of regression	13.16572	Akaike info criterion		6.065646

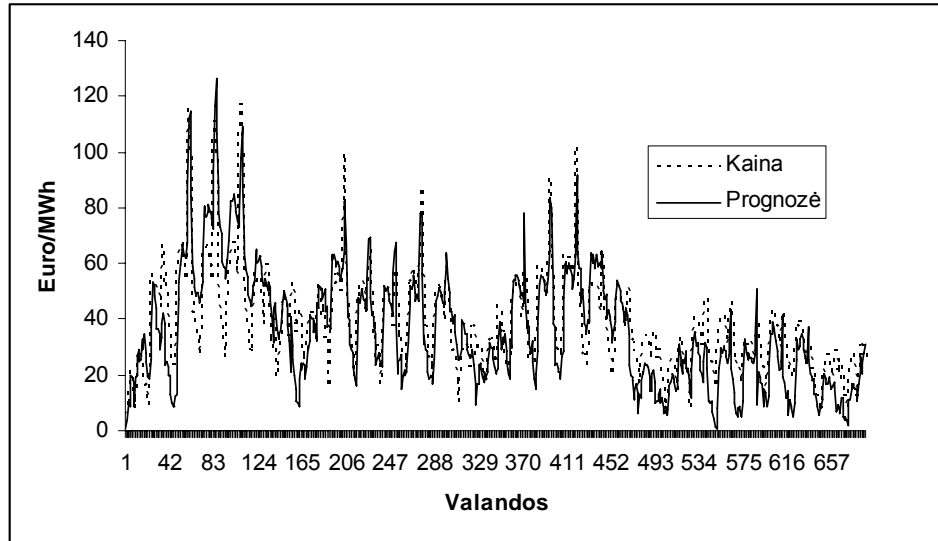
5 lentelė. z_t aprašantis modelis

Modelis atrodo taip

$$z_t = 0,86z_{t-1} + 0,295z_{t-24} + 0,60z_{t-168} + \varepsilon_t - 0,0852\varepsilon_{t-1} - 0,013\varepsilon_{t-7} - 0,411\varepsilon_{t-24}$$

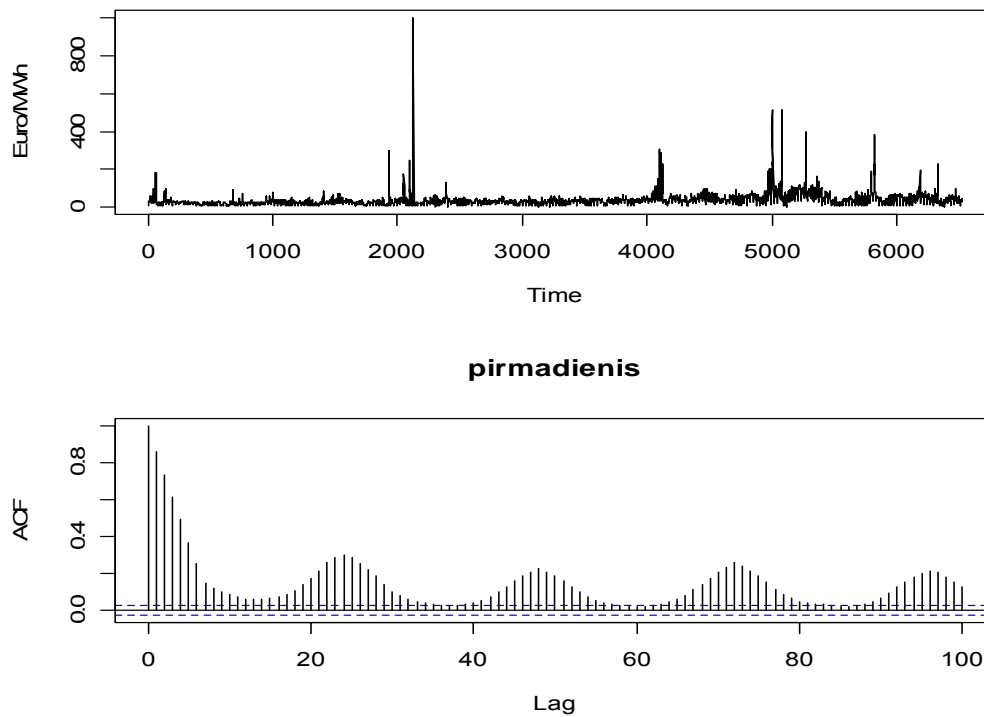
$$\varepsilon_t = \sigma_t \nu_t, \sigma_t^2 = 0,35 + 0,805\sigma_{t-1}^2 + 0,119\varepsilon_{t-1}^2 + 0,36\varepsilon_{t-2}^2 - 0,065\varepsilon_{t-1}^2 I(\varepsilon_t < 0)$$

Modelio prognozavimo tikslumas $MAPE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\hat{P}_i - P_i}{P_i} \right| = 0,28.$



13 pav. Progozavimas SARFIMA modeliu

Toliau yra nagrinėjamos kasvalandinės elektros kainos kiekvienai savaitės dienai atskirai, t.y. imami tik nagrinėjamos dienos kasvalandiniai duomenys. Dabar duomenyse jau nebus savaitinio sezoniškumo. Panagrinėkime pirmadienio duomenis (14 pav.).



14 pav. Pirmadienių elektros kainų ir jų acf grafikas

$$\phi(L)\Phi(L^s)(1-L^s)^D (p_t - \mu_t) = \theta(L)\Theta(L^s)\varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, T$$

$$\mu_t = \alpha_0 + \alpha_1 p_{t-1} + \alpha_2 \text{Pikas}_t + \alpha_3 \text{Iseignes}_t \text{ ir tada}$$

$$p_t = \alpha_0 + \alpha_1 p_{t-1} + \alpha_2 \text{Pikas}_t + \alpha_3 \text{Iseignes}_t + \eta_t.$$

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	34.50087	1.886051	18.29265	0.0000
ISEIGINES	-8.525380	3.497018	-2.437900	0.0148
PIKAS	7.628076	0.969131	7.871049	0.0000
AR(1)	0.851819	0.006497	131.1112	0.0000
R-squared	0.739321	Mean dependent var		37.70679
Adjusted R-squared	0.739201	S.D. dependent var		42.34506
S.E. of regression	21.62497	Akaike info criterion		8.986187
Sum squared resid	3050411.	Schwarz criterion		8.990344
Log likelihood	-29322.42	F-statistic		6166.711
Durbin-Watson stat	1.995040	Prob(F-statistic)		0.000000

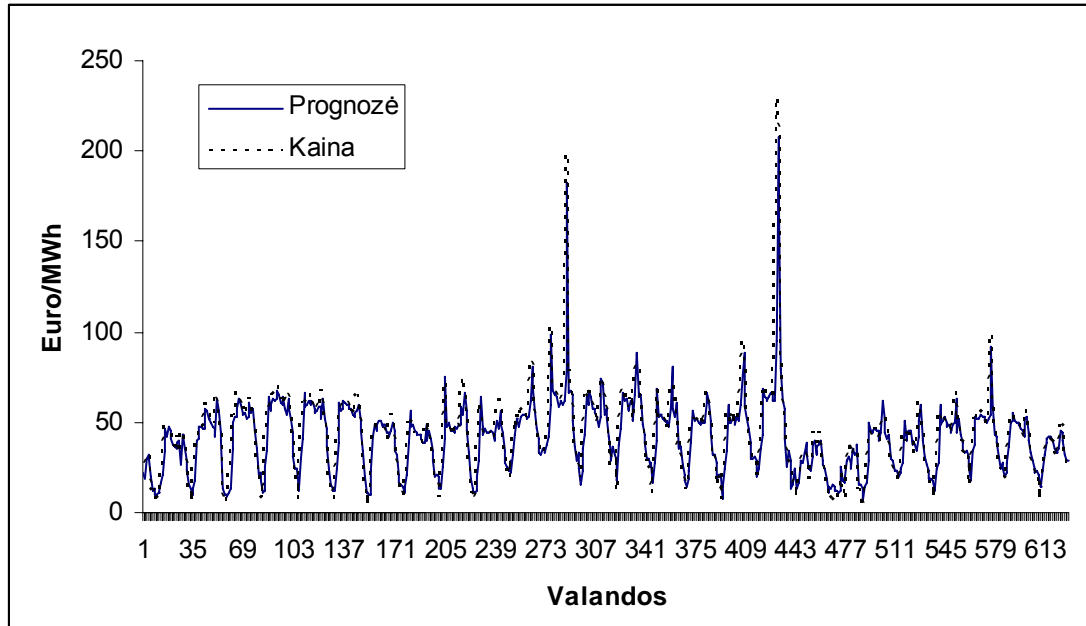
6 lentelė. Regresijos koeficientų įverčiai

Įvertiname $\hat{D}=0,14$, apskaičiuojame $(1-L^{24})^{0,14}(p_t - \mu_t)$ ir parinkame modelį, kuris aprašytų elektros kainų kitimą. Tai parinkome tokį modelį, kurio liekanos nėra autokoreliuotos: Ljung-Box statistika $Q(1) = 0,002$, $Q(7) = 6,20$, $Q(17) = 14,34$, kai kai 5 % reikšmingumo lygmens atitinkamos kritinės reikšmės yra 3,84, 14,07, 27,58. Modelio liekanų kvadratai yra autokoreliuoti ir jas aprašysime TAR(1) modeliu.

	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
AR(2)	-0.891147	0.001848	-482.1594	0.0000
SAR(48)	0.101217	0.001940	52.18254	0.0000
SAR(72)	0.110216	0.002037	54.09925	0.0000
MA(1)	0.032828	0.000889	36.92949	0.0000
MA(4)	0.036419	0.001731	21.04105	0.0000
MA(2)	0.898896	0.002069	434.4171	0.0000
Variance Equation				
C	25.20964	0.153353	164.3892	0.0000
RESID(-1)^2	3.107163	0.032546	95.47096	0.0000

RESID(-1)^2*(RESID(-1)<0)	-2.272621	0.034887	-65.14247	0.0000
R-squared	0.018624	Mean dependent var	0.007426	
Adjusted R-squared	0.017406	S.D. dependent var	21.36950	
S.E. of regression	21.18271	Akaike info criterion	6.842330	
Sum squared resid	2891468.	Schwarz criterion	6.851775	
Log likelihood	-22067.78	Durbin-Watson stat	2.097312	

Patikrinkime modelio prognozavimo tikslumą (15 pav)



15 pav. Pirmadienio elektros kainų prognozė

Vidurkio absoliutinė procentinė paklaida $MAPE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\hat{P}_i - P_i}{P_i} \right| = 0,17.$

IŠVADOS

Šiame darbe atliktas kasvalandinių elektros kainų modeliavimas tiesioginėje rinkoje. Elektros kainų kitimui ir tokioms jų charakteringoms savybėms, kaip sezoniškumas, vidurkio reversija, darbo dienų, savaitgalio ir švenčių efektas, kintamumo klasterizacija, sukurti SARIMA-TGARCH ir SARFIMA-TGARCH modeliai. Atliktas modelių vertinimas bei elektros kainų prognozavimas. Suprognuotos elektros kainų reikšmės buvo lyginamos su faktinėmis elektros kainomis ir skaičiuojama vidurkio absoliutinė procentinė paklaida. Darbo rezultatai rodo, kad SARIMA-TGARCH modelio kasvalandinių elektros kainų prognozės paklaidos, $MAPE = 0,13$, yra mažesnės už SARFIMA-TGARCH modelį, $MAPE = 0,28$. Pirmadienių kasvalandinių SARFIMA-TGARCH prognozės paklaida yra $MAPE = 0,17$. Šie modeliai pakankamai gerai aprašo ir prognozuoja elektros kainų kitimą.

LITERATŪRA

1. Baillie R.T. Long memory processes and fractional integration in econometrics, *Journal of Econometrics*, 73, p. 5-59 (1996).
2. Beran J. *Statistics for long-memory processes*, Chapman and Hall, New York (1994).
3. Bierbrauer M., Trück S., Weron R. Modeling electricity prices with regime switching models, *Lecture Notes in Computer Science*, 3039, p. 859-867 (2004).
4. Bobinaitė V., Juozapavičienė A., Snieska V., Correlation of Electricity Prices in European Wholesale Power Markets, *ISSN 1392-2785 ENGINEERING ECONOMICS*. No 4 (49) p., 7-14, Kaunas : KTU, (2006)
5. Brockwell P.J., Davis R.A. *Times series: Theory and Methods*, Springer-Verlag, New York (1986).
6. Bunn D., Karakatsani N. Forecasting Electricity Prices, *London Business School Working Paper* (2003).
7. Contreras J., Espínola R., Nogales F.J., A. J. Conejo A.J. ARIMA models to predict next-day electricity prices, *IEEE Trans. Power Systems*, Vol. 18, No. 3, p. 1014-1020 (2003).
8. Escribano A., Pena I., Villaplana P. Modelling electricity prices: International evidence, *Universidad Carlos III de Madrid, working paper* (2002).
9. Geweke J. and Porter-Hudak S. The estimation and application of long memory time series models, *Journal of Time Series Analysis*, 4, p.15-39 (1983).
10. Granger C. W. J. and R. Joyeux An introduction to long-memory time series models and fractional differencing, *Journal of Time Series Analysis*, 1, p. 15-39 (1980).
11. Hosking J. R. M. Fractional differencing, *Biometrika*, 68, p.165-176 (1981).
12. Knittel C. R., Roberts M.R. An empirical examination of restructured electricity prices, *Energy Economics* 27, p.791–817 (2005).
13. Koopman J.S., Ooms M., Carnero A.M. Periodic seasonal Reg-ARFIMA-GARCH models for daily electricity spot prices, *Discussion Paper TI 2005-091/4, Tinbergen Institute Amsterdam* (2005).

14. Misiorek A, Weron R. Forecasting spot electricity prices with time series models, *Proceedings of the European Electricity Market EEM-05 Conference Lodz*, p.133-141 (2005).
15. Pažėraitė A. *Lietuvos energetikos perspektyvos Europos Sąjungoje*, Europos komitetas prie LR Vyriausybės, Vilnius (2001).
16. Prancūzijos energijos birža. <<http://www.powernext.fr>>

PRIEDAS

1. $(1 - L^s)^D x_t = \varepsilon_t, t = 1, \dots, T$. Parametro D vertinimas SARFIMA modelyje naudojant Geweke ir Porter-Hudak metodą (žr. 1.2. skyrius). Funkcija parašyta R paketo `fracdiff` funkcijos `fdGPH` pagrindu atsižvelgiant į s sezoniškumą.

```
gph=function(x,s,bandw.exp=0.5)#x-duomenys; s- sezoninė komponentė
{
  n<-length(x)
  g<-trunc(n^bandw.exp)
  j<-1:g
  kk<-1:(n-1)
  w<-2*pi*j/(n*s)
  mx<-mean(x)
  var.x<-sum((x-mx)^2)/n
  cov.x<-numeric(n-1)
  for(k in kk) cov.x[k]<-sum((x[1:(n-k)]-mx)*(x[(1+k):n]-mx))/n
  periodogram<-numeric(g)
  for(i in 1:g) periodogram[i]<-var.x+2*sum(cov.x*cos(w[i]*kk))
  pos<-j[periodogram>0]
  y.reg<-log(periodogram[pos]/(2*pi))
  x.reg<-2*log(2*sin(w[pos]/2))
  fit<-lm(y.reg~x.reg)
  d.GPH<-coef(fit)[2]
  names(d.GPH)<-NULL
  x.r2<-sum((x.reg-mean(x.reg))^2)
  var.d<-pi^2/(6*x.r2)
  var.reg<-sum(resid(fit)^2)/((g-1)*x.r2)
  list(d=-d.GPH,sd.as=sqrt(var.d),sd.reg=sqrt(var.reg))
}
```

2. Funkcija skirta trupmeniškai diferencijuoto operatoriaus su sezoniškumu s $(1-L^s)^D y_t$ realizavimui, kai yra žinomas parametro D įvertis. Funkcija parašyta R paketo `fracdiff` funkcijos `diffseries` pagrindu atsižvelgiant į s sezoniškumą.

```
df=function (x, d,s)      #x- duomenys; s – sezoninė komponentė ;
{  n <- length(x)        #d – trupmeninis integravimo parametras
  x <- x
  DI <- numeric(n)
  DI[1] <- -d
  for (k in 2:n) {
    DI[k] <- DI[k - 1] * (k - 1 - d)/k
  }
  ydiff <- x
  for (i in (s+1):n) {
    ydiff[i] <- x[i] + sum(DI[1:(i - s)] * x[(i - s):1])
  }
  ydiff
}
```