KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR GAMTOS MOKSLŲ FAKULTETAS
MATEMATINIO MODELIAVIMO KATEDRA

Vytautas Lukėnas

Lietuvos Respublikos gyventojų dinamikos modeliai

Magistro darbas

Vadovas
prof. dr. E. Valakevičius

KAUNAS, 2014

KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS

MATEMATIKOS IR GAMTOS MOKSLŲ FAKULTETAS

MATEMATINIO MODELIAVIMO KATEDRA

TVIRTINU
Katedros vedėjas
prof.dr. E. Valakevičius
2014 06 04

Lietuvos Respublikos gyventojų dinamikos modeliai

Taikomosios matematikos magistro baigiamasis darbas

Vadovas
prof. dr. E. Valakevičius
2014 06 04

Recenzentas
doc. dr. Dalius Makackas
2014 06 04

Atliko
FMMM 2 gr. stud.
V. Lukėnas
2014 06 04

KAUNAS, 2014

KVALIFIKACINĖ KOMISIJA

Pirmininkas: Juozas Augutis, profesorius (VDU)

Sekretorius: Eimutis Valakevičius, profesorius (KTU)

Nariai: Jonas Valantinas, profesorius (KTU)

Vytautas Janilionis, docentas (KTU)

Kristina Šutienė, docentė (KTU)

Zenonas Navickas, profesorius (KTU)

Arūnas Barauskas, dr., direktoriaus pavaduotojas (UAB „Danet Baltic“)

Lukėnas V. Lithuanian population dinamic models / supervisor prof. dr. E. Valakevičius; Department of Mathematics Research In System, Faculty of Fundamental Sciences, Kaunas University of Technology. – Kaunas, 2013. – 96 p.

SUMMARY

This study reviews few mathematical models of population dynamics for human population modelling. The main purpose of this work is to make a prediction about size and structure of Lithuanian population over 35 years, using age and stage structured population dynamic models, namely deterministic and stochastic-matrix population structured by age and gender. The use of logistic model to study human population was received in 1920 by Pearl and Read. Developing theory that does account for differences among individuals (by age, gender, size etc.) within the same population on the basis of structured population models that do account for population structure, was firstly introduced by H. Leslie (1945), latter upgraded by L. P. Lefkovitch (1965), however it is still very much the cutting edge of contemporary of ecological research. Since 1990 Republic of Lithuania regain its independence suddenly changed economical, political and cultural paradigm, had a huge impact for the population and its demographical tendencies, due to dramatically decreased birth rate and increased mortality (demographic Russian cross) and also huge emigration. Nowadays because of worldwide financial turmoil Lithuania again suffers from increasing emigration and decreasing growth rates, so it is very important to model and predict what lies ahead for Lithuanian population dynamics. Also because of aging population tendencies it's useful to know not only about the size, but also about the structure of future population of Lithuania. In the first part of this work there is an overview of the basics of population modelling, discussing key issues and factors affecting the greatest impact on the population dynamics. In the theory section there is review of two main approaches to population modelling: stochastic and deterministic. Concentrating mostly on analysing two age structured models. We present few ways, and algorithms for solving formulated models, most thoroughly looking into methods to solve linear systems of differential equations. At the end of this paper you will find Lithuanian population size forecast for the near future, which looks much more pessimistic than those made by Lithuanian government or European commission, forecast of the structure of the population suggest further population aging .

SANTRAUKA

Šis darbas apžvelgia kelis matematinius modelius žmonių populiacijos dinamikai modeliuoti. Pagrindinis šio darbo tikslas yra atlikti kokybišką ir kuo patikimesnę prognozę ne tik apie Lietuvos populiacijos dydį, bet ir apie jos sandarą, pagal ažių (kiek žmonių bus atskirose amžiaus grupėse) ir lytį po 35 metų. Logistinio ir eksponentinio modelių naudojimas žmonių populiacijai studijuoti pradėtas jau 1920 m. Pearl‘o ir Read‘o . Tačiau jų modeliuose nebuvo atsižvelgiama į skirtumus tarp individų (pagal amžių, lytį, dydį ir pan.). Pirmieji, kurie atsižvelgė į populiacijos struktūrą modeliuodami, nors ir ne žmonių, tačiau gyvūnų ir augalų populiacijas, buvo H. Leslie (1945), ir jo mdelį patobulinęs L.P. Lefkovitch (1965), kad ir kaip būtų, struktūrizuoti populiacijos modeliai tebėra viena labiausiai besivystančių ir opiausių šiuolaikinės ekologinijos ir biologijos sričių. Nuo 1990 m., kai Lietuvos Respublika atgavo savo nepriklausomybę, staiga pasikeitusi politinė ir ekonominė situacija turėjo labai neigiamos įtakos Lietuvos Respublikos populiacijai, stipriai sumažėjęs gimstamumas, išaugusi emigracija ir aukštas mirtingumas yra pagrindiniai veiksniai, lemiantys tai, kad jau 25-erius metus Lietuvos populiacija stabiliai mažėja, 2013 metais nukritusi net žemiau 3 milijonų ribos. Dėl šių priežasčių yra svarbu modeliuoti ir prognozuoti kas laukia Lietuvos artimoje ateityje, kiek gyventojų liks Lietuvoje, ir kokia bus jų sudėtis pagal amžių ar lytį. Pirmuose šio darbo skyriuose apžvelgiami populiacijos modeliavimo pagrindai, aptariamos pagrindinės problemos ir veiksniai, darantys didžiausią įtaką populiacijos dinamikai. Teorinėje šio darbo dalyje apžvelgiami du pagrindiniai požiūriai į populiacijos dinamiką: stochastinis ir deterministinis. Taip pat apžvelgiami tradiciniai populiacijos modeliai, didžiausią dėmesį skiriant dviem struktūrizuotos populiacijos modeliams. Pateikiami keletas metodų ir algoritmų suformuluotų modelių sprendiniams rasti. Plačiausiai aptariami tiesinių diferencialinių lygčių sistemos su pastoviais koeficientais sprendimo metodai ir algoritmai. Pabaigoje pateikiamos Lietuvos gyventojų ir jų sudėties prognozės 2048-aisiais: pateikiama įvairaus smulkumo modelių prognozės bei gautų rezultatų palyginimas ir išvados. Pagal jas Lietuvos gyventojų skaičius per artimiausius 35 metus turėtų sumažėti gerokai daugiau, nei prognozuoja Lietuvos Respublikos Vyriausybė ar Europos komisija, o sudėties pagal amžių prognozės rodo aiškius populiacijos senėjimo procesus.

TURINYS

LENTELIŲ SĄRAŠAS

PRIEDAI

PAVEIKSLŲ SĄRAŠAS

ĮVADAS

Lietuvai 1990 tapus nepriklausomai iki tol nuolatos augusi šalies populiacija pradėjo smarkiai mažėti, tam įtakos turėjo mažėjantis gimstamumas, didėjantis mirtingumas (demografinis rusiškas kryžius) atsivėrus sienos. Nors Lietuvos žmonėms atsirado nemažai galimybių keliauti, studijuoti bei dirbti svetur, tai sukėlė ir didžiulę emigracijos bangą, kuri taip pat smarkiai prisideda prie gyventojų skaičiaus mažėjimo. Viešoje erdvėje netyla kalbos apie staigų mūsų šalies senėjimą ir nykimą, netgi apie lietuvių kaip tautos ir valstybės išnykimą, natūraliai kyla klausimas, kiek pagrįstos yra šios pesimistinės kalbos? Ir jei taip, kaip atrodys Lietuvos Respublikos gyventojų skaičius ir sudėtis artimiausioje ateityje.

Pagrindinė šio darbo užduotis – atlikti Lietuvos gyventojų skaičiaus ir sudėties pagal amžių bei lytį prognozę 35-iems metams. Pateikti išvadas, kaip atrodys demografinė situacija Lietuvoje netolimoje ateityje, kokios yra gyventojų skaičiaus kitimo tendencijos bei dinamika. Pagal visiems prieinamus Lietuvos statistikos departamento ir „Eurostat“ duomenis atlikti prognozavimą dviem skirtingomis metodikomis ir palyginti gautus rezultatus.

Nors Lietuvos Vyriausybė nuolat pabrėžia kovojanti su gyventojų mažėjimu ir netgi yra išsikėlusi užduotį, kad iki 2050 metų Lietuvoje gyvens bent 4 milijonai žmonių, dabartinės tendencijos rodo, kad ateitis gali būti daug niūresnė. Gyventojų skaičiaus prognozavimas gali būti labai naudingas įrankis, kuris gali įspėti ir paskatinti reikaligų ir neišvengiamų reformų įgyvendinimą (socialinių ar švietimo).

Darbe yra nagrinėjama ir dirbama su Lietuvos statistikos departamento bei „Eurostat“ turimais 1950-2013 metų duomenimis apie Lietuvos populiaciją, jos sudėtį bei svarbiausius demografinius rodiklius. Naudojantis šiais duomenimis yra atliekama Lietuvos gyventojų skaičiaus prognozė 2048 m. bei gyventojų sudėties pagal amžių ir lytį prognozė dviem metodais.

Darbą sudaro dvi pagrindinės dalys. Pirmojoje, teorinėje, darbo dalyje nagrinėjami populiacijų modeliavimo pagrindai, apžvelgiami klasikiniai struktūrizuoti (Caswell 2001; Getz and Haight 1989) ir nestruktūrizuoti, deterministiniai ir stochastiniai (Linda J. S. Allen 2003), augimo modeliai . Plačiau nagrinėjami modeliai žmonių populiacijai modeliuoti, tiriamas jų stabilumas ir jautrumas. Sudaromi deterministinis ir stochastinis struktūrizuotos populiacijos modeliai. Pateikiami šių modelių matematiniai sprendimo metodai bei algoritmai. Plačiausiai nagrinėjamas struktūrizuotos populiacijos modelis, jo sprendimo metodai: tiesinių diferencialinių lygčių sistemos su pastoviais kintamaisiais sprendimo metodai bei sprendiniai.

Artoje darbo dalyje pasitelkus MATLAB programinę kalbas yra realizuojamos Lietuvos Respublikos gyventojų populiacijos prognozės 2048 metams, jų grafinės vizualizacijos. Lyginami ir analizuojami gauti rezultatai. Darbo pabaigoje pateikiamos išvados.

1. BENDROJI DALIS

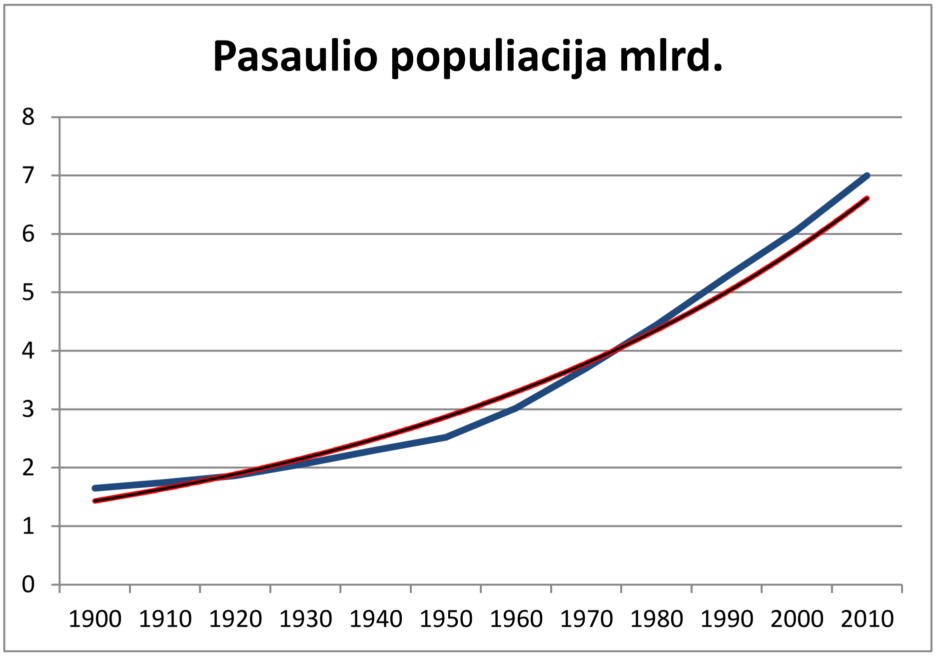
LITERATŪROS APŽVALGA

Nors žmonių populiacijos dinamika ir ją aprašantys modeliai jau beveik šimtą metų (Pearl; Read 1920) yra aktyviai tyrinėjami, tačiau Lietuvoje tai dar ganėtinai nauja sritis. Gal dėl to, kad nesusiduriame su plačiu rūšių nykimu ar tam tikros rūšies parazitiniu paplitimu, net ir kitų gyvūnų bei organizmų dinamika bei jos modeliavimas, atvirkščiai nei likusiame pasaulyje, Lietuvoje nėra labai populiari sritis. Kaip bebūtų sparčiai nykstanti populiacija, gręsiantis visuomenės senėjimas ir Lietuvos tyrėjus verčia prognozuoti populiacijos tendencijas artimoje ateityje. 2007 metais ūkio ministerijos užsakytoje Socialinio ir ekonominio plėtros fondo parengtoje studijoje „Lietuvos ūkio (ekonomikos) raidos įžvalga pagal regionines ir pasaulio tendencijas“ pateikiamos net kelios Lietuvos gyventojų skaičiaus ir sudėties pagal amžių prognozės (pesimistiniu atveju Lietuvoje 2050 tegyvens 2 mln., optimistiniu – 2.5 mln žmonių, taip pat prognozuojamas ryškus populiacijos senėjimas), reminatis JTO tyrimais, tačiau neatskleidžiami ir nedetalizuojami jokie prognozavimo modeliai ar metodika. Studija laisvai pasiekiama internete adresu: http://www.ukmin.lt/uploads/documents/Valstybes%20ilgalaikes%20strategijos/Moksliniai%20darbai/IZVALGA%20FINAL%202007%2007%2013.pdf. Pagal „Eurostat“ 2004 metais išleistą studiją „Population projections 2004-2050“ 2050 metais Lietuvoje turėtų gyventi beveik 2,9 mln. gyventojų (dabar tokia prognozė atrodo visiškai nereali), be to turėtų nežymiai padidėti pagyvenusių žmonių dalis. Tačiau ir šioje ataskaitoje nepateikiami prognozavimo modeliai ir metodika. Studija laisvai pasiekema adresu: file:///C:/Users/Vartotojas/Downloads/STAT-05-48_EN.pdf. Taipogi, galime rasti Marija Mamolo ir Sergei Scherbov 2007 metų straipsnį: „Population Projections for Forty-Four European Countries: The Ongoing Population Ageing“, kuriame autoriai nedetalizuodami savo prognozavimo metodikos pateikia 40 Europos šalių gyventojų skaičiaus ir sudėties prognozes. Pagal jas Lietuvoje 2050 metais pagyvenę žmonės (65 metų ir vyresni) turėtų sudaryti 25,4% visos populiacijos, ir netgi pateikiamas prognozuojamos populiacijos demografinis medis. Studija laisvai pasiekiama internete adresu: http://www.oeaw.ac.at/vid/download/edrp_2_09.pdf. Kadangi minėtuose šaltiniuose niekur nedetalizuojami prognozavimo modeliai bei metodikos, toliau apžvelgsiu užsienio autorius tyrinėjančius žmonių ar kitų gyvūnų populiacijos modelius. Pirmiausia reiktų paminėti autorių A.M. de Roos ir jo darbą „Modeling Population Dynamics“, kur puikiai aprašomi populiacijos modeliavimo pagrindai, apžvelgiami daugelis deterministinių nestruktūrizuotų modelių žmonių ir gyvūnų populiacijai modeliuoti, tačiau visiškai ignoruojami struktūrizuoti modeliai. Ogbeide E. M. ir Ikpotokin O. 2010 metų savo straipsnyje taipogi modeliuoja žmonių, o tiksliau, Nigerijos, populiaciją naudodami klasikinį logistinį modelį, ir laikydami, kad populiacijos augimui didžiausią įtaką turi švaraus vandens stygius. Be abejo Lietuvai tokios prielaidos visiškai netinkamos. Perrin S. Meyer, Jesse H. Ausubel savo straipsnyje: „Human population dynamics revisited with the logistic model: how much can be modeled and predicted?“ plačiai aptaria deterministinio logistinio modelio privalumus ir trūkumus žmonių populiacijai prognozuoti. Kadangi mano darbo tikslai susiję su struktūrizuotos populiacijos modeliavimu, turiu paminėti Patrick H. Leslie (1945), sukūrusį pirmąjį struktūrizuotos populiacijos modelį, plačiai tebenaudojamą nuo miškų iki žuvų populiacijos modeliavimo (Caswell 2001; Getz and Haight 1989). H. Reşit Akçakaya savo straipsnyje „Population viability analyses with demographically and spatially structured models“ plačiai aptaria Leslie ir L.P. Lefkovitch (1965) patobulintą Leslie modelius, kaip tik pastarąjį aš ir naudoju, kaip vieną iš savo prognozavimo modelių. Kalbant apie stochastinį požiūrį į populiacijos modeliavimą negalima nepaminėti Linda J. S. Allen, kuri ne viename savo (tiksliau žiūrėti literatūros sąrašą) straipsnių tyrinėja Markovo grandinių populiacinius modelius, populiacijų išnykimo tikimybes ir kitas modelių savybes. Smalsiam skaitytojui negaliu nepaminėti didžiųjų pasaulio valstybių (Indija, Kinija, Jav ir t.t.) populiacijų prognozavimo prieigos internete (čia rasite ne tik galimybę pamodeliuoti, kaip keistųsi didžiųjų valstybių sudėtis priklausomai nuo gimstamumo ir kitų veiksnių, tačiau ir daug naudingos informacijos apie pasaulio populiaciją): http://www.learner.org/courses/envsci/interactives/demographics/demo_transition_1.php

1.1 POPULIACIJOS MODELIAVIMO PAGRINDAI

Populiacijos modeliai nagrinėja populiacijos (tam tikrų individų, ar rūšies) kitimą laike, skaičiumi, arba išsidėstymu erdvėje. Dažnai nagrinėjamos populiacijos susideda iš didžiulio skaičiaus rūšių. Tokie modeliai atsižvelgia ir tarprūšines sąveikas, pvz. konkurencija, grobimas (plėšrūnai). Studijos, kuriose tyrinėjami besivystantys matematiniai modeliai populiacijų dinamikos apibūdinimui, dažnai atidžiai tyrinėja daugiau nei vieną rūšį. Dėl dėmesio ne vienarūšėms bendruomenėms galima susidaryti įspūdį, kad vienos rūšies dinamikos modeliavimas nėra svarbus ar įdomus. Arba galima susidaryti nuomonę, kad neįmanoma daug ko atrasti pavienės populiacijos modelyje. Tačiau yra atvejų, kuriuose santykinai paprasti populiacijos augimo procesai yra fundamentaliai svarbūs, tiek mokslo, tiek taikomuoju požiūriu. Šiuo atžvilgiu, pvz., galima pagalvoti apie tokius atvejus, kai pavienės populiacijos augimas yra vyraujantis procesas:

- Eksponentinis žmonių populiacijos augimas



1.1 pav. Eksponentinis žmonių populiacijos augimas (paveiksle mėlyna kreivė reprezentuoja realią žmonių kaitą, raudona – eksponentinė funkcija)

- Egzotinių arba genetiškai modifikuotų organizmų invazija į natūralią aplinką
- Užkrečiamų ligų epidemijos ir jų prevencijų strategijos.

Bet kokios populiacijos dinamikos modelio formavimas yra tolygus populiacijos pokyčių veikimo būdo apibrėžimui. Iš esmės, populiacijos dinamikos modelis atsako klausimą, kaip populiacija žada pasikeisti (netolimoje) ateityje, atsižvelgiant į dabartinio statuso ir aplinkos sąlygas, kurios veikia populiaciją. Šie populiacijos pokyčiai gali reikšti visų individų skaičiaus, t.y. populiacijos narių skaičiaus, pokyčius, bet taip pat gali būti susiję su populiacijos sudėties pokyčiais. Pvz., populiacijos modelis gali aprašyti mažų ir didelių individų kaitą, kintant gyvenimo sąlygoms arba senų ir jaunų individų kaitą populiacijoje. Pastaruoju metu ne tik domėtasi žmonijos skaičiaus pokyčiais pasaulyje (1.1 pav.), kaip jis iš esmės eksponentiškai auga į nestabilų perteklių, bet taip pat domėtasi populiacijos amžiaus struktūra, amžiaus pasiskirstymu, kuris veda prie šių posakių – „baby boomer‘iai“, „senstanti populiacija“. Dvi populiacijos savybės svarbiausios jos ateities dinamikai yra (1) bendras individų skaičius populiacijoje ir (2) populiacijos sudėtis (senas/ jaunas, mažas/ didelis ar nepilnametis/ suaugęs) individų atžvilgiu.

Kalbant formaliau, pirmasis šių dvejų aspektas yra dažnai minimas kaip *populiacijos dydis* ar *populiacijos perteklius-gausa,* o antrasis nurodo *populiacijos struktūrą*.

Individualus organizmas pats savaime yra fundamentalus subjektas populiacijos dinamikos atžvilgiu, nes populiacijos pokyčiai gali įvykti tik dėl individualių organizmo įvykių. Pvz., populiacijos pertekliaus pokyčiai yra individualaus organizmo tiesioginė gimimų, mirčių, imigracijos ir emigracijos pasekmė, o populiacijos amžiaus ar dydžio pasiskirstymas yra individualių organizmo kūno dydžio senėjimo ar augimo rezultatas.

Jeigu norime tyrinėti populiacijos amžiaus arba dydžio pasiskirstymą, yra būtina išskirti individualius populiacijos narius, jų amžiaus arba kūno dydžio pagrindu. Kita vertus, daugeliu atveju tikimybė, kad konkretus individas susilauks palikuonių arba greitai mirs, priklausys nuo jo amžiaus arba kūno dydžio. Pvz., išsivysčiusiose šalyse palikuonių susilaukia nuo 18 m. iki 45 m. individai (tai būdinga tik motinoms), o mirtis ištinka vėlesniame amžiuje.

Yra svarbios ir aplinkos sąlygos, kurios veikia populiacijos dinamika, nes ji dažniausiai nustato vystymosi ribas. Aplinkos sąlygos gali sietis su biotiniais ir abiotiniais veiksniais, pvz. temperatūra, drėgmė, maisto gausa ir plėšrūnų ar konkurentų skaičius aplink. Kadangi organizmas populiacijos dinamikoje yra fundamentalus subjektas, iš tiesų labiau reikėtų įvertinti aplinkos sąlygas, kurias veikia individualus populiacijos narys. Aplinka susideda ne tik iš supančios temperatūros ar maisto gausos, prie ko yra pratęs konkretus individualus organizmas, bet taip pat iš kitų populiacijos narių skaičiaus ir tipo. Šis aplinkos aspektas yra svarbus, jei individas dauginasi per seksualinę reprodukciją. Kitas pvz., jei rūšis potencialiai yra kanibalistiška, kiti populiacijos nariai gali daryti įtaką jaunų ir mažų individų mirties rizikai.

Taigi sudarant populiacijos modelius svarbu atsižvelgti į daugelį sąlygų darančių įtaką individų išgyvenimui, sklaidai ir dauginimuisi.

1.2 DETERMINISTINIAI POPULIACIJOS MODELIAI

1.2.1 POPULIACIJOS BALACO LYGTIS IR MODELIO KŪRIMAS

Jeigu mes traktuosime populiaciją kaip tam tikros rūšies individų būrį, kuris gyvena aiškiai apibrėžtoje srityje, tai bet kokie šios populiacijos individų skaičiaus pokyčiai vystosi per individualaus organizmo reprodukciją, mirtį ar migraciją. Formaliai, populiacijos dinamikos modelį galima išreikšti šia (pusiau) lygtimi:

Populiacijos kaita = Gimimai – Mirtys + Imigracija – Emigracija **(1.1)**

Ši lygtis atspindi *populiacijos balanso lygties* bendrą struktūrą. Frazė "*balanso lygtis"* nurodo faktą, kad populiacijos gausos (pertekliaus) pokyčiai yra balansas tarp procesų, kurie sumažina šią gausą (perteklių) (pvz. mirtis ir emigracija) ir procesus, kurie padidina gausą (perteklių) (pvz. reprodukcija ir imigracija).

Į individų imigracija, tiek emigracija gali būti nekreipiama dėmesio, jeigu sritis, kurioje įsikūrusi populiacija, yra uždara bet kokiems individų judėjimams per srities perimetrą (pvz., jei tirsime salos populiaciją ar uždaros šalies, tokios kaip DŠKR, gyventojų populiaciją). Taip pat, kai srities dydis yra labai didelis(pvz. tiriant viso žemyno ar didelio ežero populiaciją), imigracija ir emigracija irgi gali būti nelabai svarbios. Tais atvejais populiacijos dinamika yra tik balansas tarp individo mirties ir gimstamumo skaičiaus.

Pirmas žingsnis norint sukurti populiacijos modelį yra tiksliai apibūdinti populiaciją, kurią norime sumodeliuoti. Modelio kūrimas yra svarbus teorinės populiacijos biologijos aspektas, nes jis verčia modeliuotoją atidžiai susimąstyti apie sistemos, kurią jis nori apibūdinti, svarbius aspektus. Prieš pasirenkant tam tikrą populiacijos reprezentaciją, iškyla svarbios problemos, kurias reikia apsvarstyti, pvz.:

- Ar būtina atskirti individus vieną nuo kito, ir jeigu taip, tai, kokie kintamieji yra naudojami šiam tikslui pasiekti?
- Kokie individualūs bruožai daro įtaką reprodukcijai (dauginimuisi) ir mirtingumui?
- Ar aplinkoje esama išorinių ar vidinių veiksnių, kurie daro didelę įtaką individų gyvenimo istorijai?

Atsakyti į šiuos klausimus ne visada yra paprasta. Dažnai kyla noras teigti, kad modelis turėtų įtraukti daug, kiek įmanoma kuo įvairesnių kintamųjų, kad būtų įmanoma apibūdinti tam tikrą sistemą. Tačiau toks požiūris privestų prie matematinio realybės kopijavimo, kurio tikriausiai ištirti būtų neįmanoma.

Todėl kuriant populiacijos dinamikos modelį, reikia priimti protingus sprendimus apie sistemos aspektus kuriuos reikia būtinai įtraukti į modelį. Šie sprendimai turėtų būti priimti, remiantis įvairiais argumentais:

- Koks yra modelio tikslas? Pvz., jeigu jei modelis sukurtas studijuoti amžiaus pasiskirstymą žmonių populiacijoje, yra būtina išskirti individus iš populiacijos pagal jų amžių.

- Kokie yra svarbūs procesai, kurie daro įtaką populiacijos dinamikai? Pvz., ar modelis privalo atsiskaityti už imigraciją ir emigraciją ar yra tikslinga nagrinėti uždarą populiaciją?
- Kurie faktoriai daro įtaką individo gimimo ar mirties tikimybei? Pvz., ar yra plėšrūnų, greta kurių individai taptų grobiu?
- Kas techniškai yra įmanoma. Jeigu modelis įtraukia per daug detalių, juo tampa nebeįmanoma atlikti analizės, o esant per dideliam paprastumui, modelis praranda esmę.

1.2.2 ŽMONIŲ POPULIACIJOS MODELIAVIMAS

Nors žmonių populiacijoje individas – žmogus yra esminis subjektas, dauguma žmonių populiacijos dinamikos modelių iš vis neišskiria skirtingų individų. Daugiausia tai yra techninių apribojimų rezultatas: nes jei suskaidytume populiaciją iki pavienių individų, populiacijos balanso lygtis (1.1) taptų labai sudėtinga ,o jos analizė – taptų beveik neįmanomu išspręsti uždaviniu. Paprasčiausi sudaryti ir išspręsti yra nestruktūruoti populiacijos modeliai, t.y. modeliai, kurie ignoruoja dabartinę populiacijos struktūrą. Daug sudėtingesni yra struktūrizuoti populiacijos modeliai, kurie išskiria populiacijos struktūrą, pagal tam tikrus bruožus, žmonių populiacijoje tai dažniausiai yra amžius ir lytis, kartais gali būti rasė ar individo dydis.

Nestruktūriniai žmonių populiacijos modeliai yra pagrįsti prielaida, kad visi individai populiacijoje yra vienodi. Bendras populiacijos individų skaičius tam tikru laiko momentu t dažnai žymimas $N(t)$. Struktūrizuotuose populiacijos modeliuose populiacija $N(t)$ yra suskaidyta pagal tam tikrus požymius į n dalių. Pvz. žmonių populiaciją pagal lytį suskaidoma y dvi dalis $N_1(t)$ ir $N_2(t)$, o populiacija struktūrizuota pagal amžių į 10 metų amžiaus grupes gali būti suskaidyta į 9 ar 10 grupių $N_1(t), N_2(t), N_3(t) \dots N_{10}(t)$.

Sudarinėjant struktūrinį ar nestruktūrinį žmonių populiacijos modelį tarsime, kad žmonių populiaciją įtakoja tik gimstamumas, mirtingumas, emigracija ir imigracija, bei tam tikrais atvejais populiacijos tankis.

Tarkim duotos populiacijos dydis laiko momentu t yra aprašomas $N(t)$, o po tam tikro laiko momento $N(t+\Delta t)$, čia Δt nykstamai mažas laiko tarpas, tokiu atveju (1.1) lygtį galime perrašyti taip:

$$N(t+\Delta t) - N(t) = \textit{Prieaugis per } \Delta t - \textit{Netektys per } \Delta t \quad \textbf{(1.2)}$$

Padalinę abi (1.2) lygties puses iš Δt gausime tolydaus laiko *populiacijos balanso lygtį*.

$$\frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t} = \frac{Prieaugis\ per\ \Delta t}{\Delta t} - \frac{Netektys\ per\ \Delta t}{\Delta t} \quad \textbf{(1.3)}$$

Toliau ir nagrinėsime tiktai tolydžiojo laiko populiacijos modelius. Taigi kai $\Delta t \to 0$ (1.3) lygtį galime perrašyti taip:

$$\frac{dN}{dt} = g(N) - m(N) \qquad \textbf{(1.4)}$$

Čia *g(n)* populiacijos augimo tempas (gimimai + imigracija), *m(n)* populiacijos mažėjimo tempas (mirtys + emigracija). Jei populiacijos didėjimo tempą vienam nariui aprašysime taip:

$$\alpha(N) = \frac{\mathrm{g}(N)}{N}$$

Mažėjimo tempą vienam nariui taip:

$$\beta(N) = \frac{\mathrm{m}(N)}{N}$$

(1.4) balanso lygtis gali būti perrašoma taip:

$$\frac{dN}{dt} = \alpha(N)N - \beta(N)N \qquad \textbf{(1.5)}$$

Tai pagrindinė *populiacijos balanso lygtis,* kuri yra pagrindas daugumai žmonių populiacijos dinamikos modelių tolydžiuoju laiku. Reikėtų pažymėti, kad lygtis (1.5) yra specifinė modeliui, kuriame populiacija apibūdinta, remiantis tik jos gausa N. Jeigu mes pasirenkame šiek tiek sudėtingesnę populiacijos reprezentaciją, atitinkama balanso lygtis bus analogiška kiekvienai nagrinėjamai grupei. Pavyzdžiui, jeigu pasirinktumėme stebėti dvi populiacijos individų grupes – vyrus ir moteris arba vaikus ir suaugusiuosius, abiejų lyčių ar amžiaus grupių lygčių balansas turėtų tokią pat išraišką, tačiau turėtume bendrą populiaciją N tiksliai padalinti pagal lytį ar amžių į N_1, N_2 dalis bei žinoti $\alpha_1(N)$ir $\beta_1(N)$ bei $\alpha_2(N)$ir $\beta_2(N)$.

Paskutinis modelio formavimo žingsnis apima koeficientų, ar rodiklio funkcijų žymėjimą, kuris atsiranda populiacijos balanso lygtyse, apskaičiuojant jų tikrąją formą, priklausomą nuo populiacijos gausos N (pvz. kaip populiacijos tankis veikia jos augimą). Šį žingsnį plačiau aptarsime nagrinėdami pasirinktus modelius.

1.2.3 EKSPONENTINIS (MALTUZO) MODELIS

Tarkime, kad turime populiaciją, kurios kitimą laike veikia tiktai populiacijos prieaugis per tam tikrą laiką. Ir visiškai neveikia nei populiacijos tankis, nei išorinės sąlygos. Tuomet tokią populiaciją galime aprašyti (1.5) lygtimi:

$$\frac{dN}{dt} = (\alpha(N) - \beta(N))N$$

Pažymėkime $\alpha(N) - \beta(N) = \varepsilon$ tuomet (1.5) lygtį galime perrašyti taip

$$\frac{dN}{dt} = \varepsilon N \qquad \textbf{(1.6)}$$

Atskyrę kintamuosius ir suintegravę abi (2.1) lygties puses gausim:

$$\int \frac{\partial N}{N} = \int \varepsilon \partial t$$

$\ln N(t) + \ln 1/C = \varepsilon t$ kai $N(0)= N_0$ gausime šios lygties atskirąjį sprendinį:

$$N(t)=N_0 e^{\varepsilon t} \qquad \textbf{(1.6)}$$

Šis modelis yra turbūt seniausias ir paprasčiausias modelis skirtas žmonių populiacijai prognozuoti, tačiau aišku, kad pagal (2.2) formulę negalima toli prognozuoti populiacijos dydžio, nes žmonių populiacijos augimui didelę įtaką daro aplinkos ir vidiniai veiksniai (resursų stygius, technologiniai pasiekimai, tarša, geriamo vandens ištekliai ir t.t), taigi aišku, kad populiacija negali amžinai augti eksponentiniu dėsniu. Nors pasaulio populiacija paskutinius 100 metų būtent ir auga eksponentiškai (1.1 pav.) ir Maltuzo lygtis žiūrint istoriškai puikiai tiktų jai prognozuoti, kitais atvejais yra naudojami sudėtingesni modeliai.

1.2.4 LOGISTINIS MODELIS

1830 m. P.F.Ferchiulsas pasiūlė (2.2) lygtį papildyti $1-\frac{N}{k}$ daugikliu, $\frac{N}{k}$ parodo neigiamą populiacijos tankio įtaką populiacijos augimui. O koeficientas k yra maksimalus skaičius populiacijos narių, kuriuos gali išlaikyti aplinka. Taigi įrašius duotąjį narį į (2.2) lygtį ji atrodo taip:

$$\frac{dN}{dt} = \varepsilon\left(1-\frac{N}{k}\right)N \qquad \textbf{(1.7)}$$

Čia *N(t)* yra populiacijos dydis laiko momentu *t* tam tikroje aplinkoje. ε aprašo santykinį populiacijos augimą vienam nariui, kuris tiesiškai mažėja didėjant populiacijos tankumui. ε yra populiacijos augimo greitis priklausantis nuo gimusių, mirusių, imigravusių ir emigravusių narių skaičiaus per tam tikrą laiką, jis nepriklauso nuo k, kol populiacijos tankis yra mažas, o *k/N* parodo, kaip augimą veikia populiacijos tankis, natūralu, kad bet kokiai populiacijai pasiekus tam tikra tankį kova dėl resursų, gyvenamosios vietos ir t.t. stabdo jos augimo tempus, ar netgi pradeda juos veikti neigiamai, t.y. populiacija pradeda nykti. Puikus to pavyzdys Velykų salos ramiajame vandenyne, kur žmonių populiacija išnyko dėl resursų stygiaus, ir gamtos nustekenimo.

Analogiškai Maltuzo galime išspręsti ir logistinę diferencialinę lygtį. Atskyrę kintamuosius ir suintegravę abi (2.3) lygybės puses gausime:

$$\int \frac{dN}{N(1-\frac{N}{k})} = \int \varepsilon dt$$

Dešinę lygties pusę jau galime suintegruoti, o kairiąją dar reikia pertvarkyti:

$\int \left(\frac{A}{N} + \frac{B}{\left(1-\frac{N}{k}\right)}\right) dN = \int \varepsilon dt$ Raskime koficientus A ir B:

$A\left(1 - \frac{N}{k}\right) + BN = 1$ Nesunku pastebėti, kad A=1,o B=1/k tada:

$\int \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{(k-N)}\right) dN = \int \varepsilon dt$ Dabar suintegravę abi puses gausime:

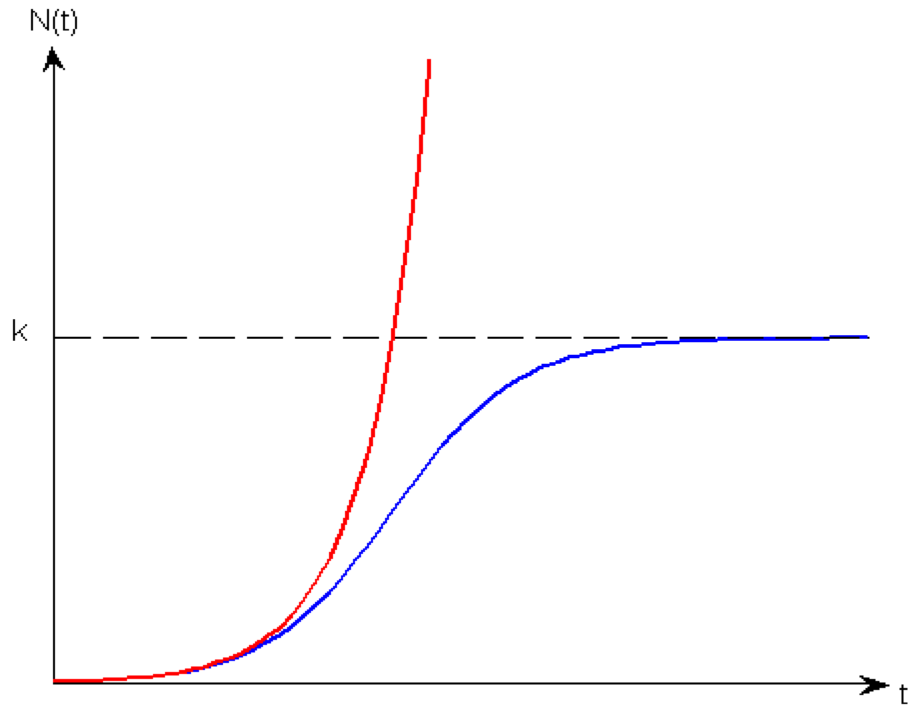
$\ln(N) - \ln(k - N) = \varepsilon t + C$ Kai $N(0)=N_0$, o $C = \ln(N_0) - \ln(k - N_0)$

Įrašę į gautąją lygtį C reikšmę ir išlogoritmavę abi lygybės puses gausim:

$\frac{N(t)(k-N_0)}{N_0(k-N(t))} = e^{\varepsilon t}$ Taigi Logistinės lygties sprendinys bus:

$$N(t) = \frac{kN_0e^{\varepsilon t}}{k+N_0(e^{\varepsilon t}-1)} \tag{1.8}$$

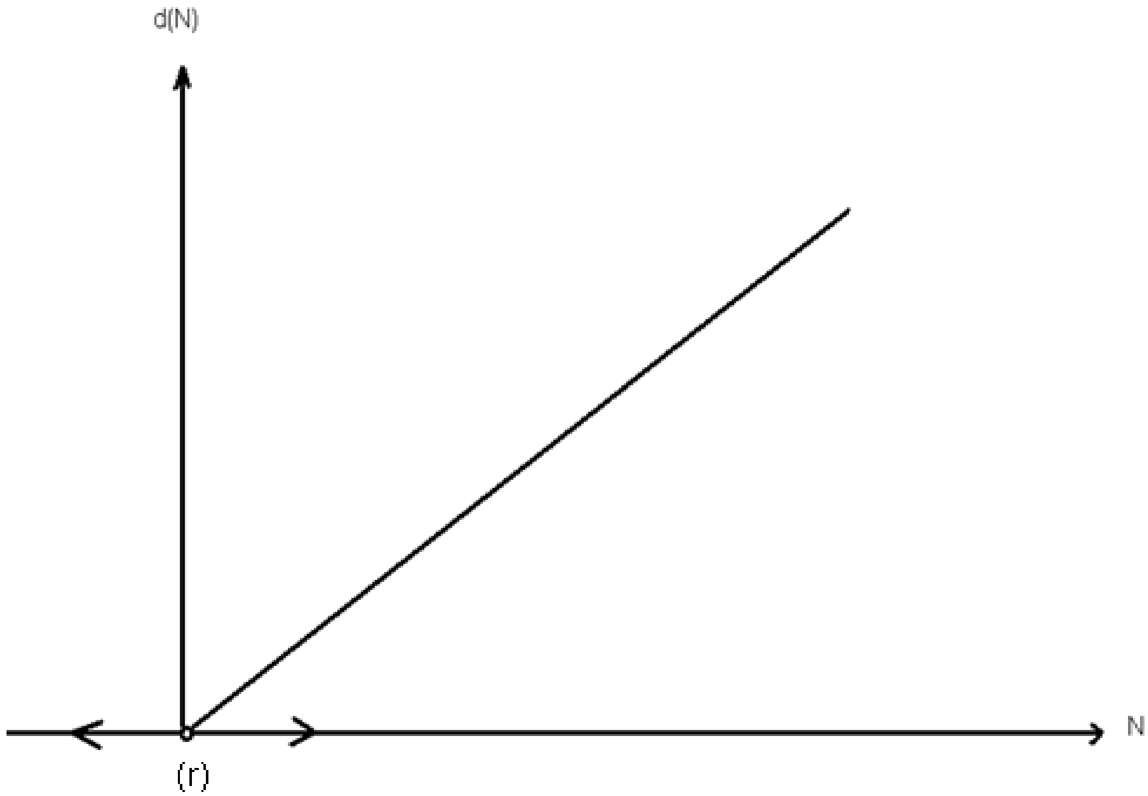
Akivaizdu, kad žmonių populiacija, nors kol kas ir auganti eksponentiškai, dėl resursų stygiaus ateityje taip pat pasieks savo k reikšmę ir stabilizuosis, arba netgi pradės mažėti. Taigi logistinis modelis realiau atspindi populiacijų kitimo tendencijas žiūrint ilgalaikėje perspektyvoje, net jei Maltuzo modelis yra paprastesnis ir gali puikiai prognozuoti populiaciją jos tam tikrose fazėse.



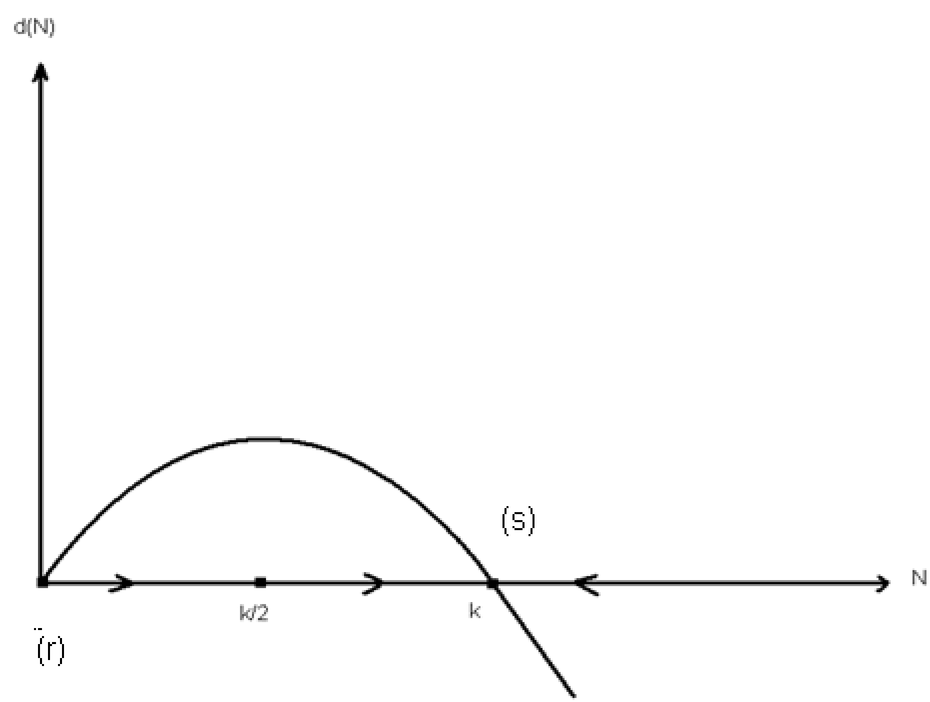
1.2 pav. Maltuzo ir logistinės lygčių sprendiniai: (paveiksle mėlyna kreivė reprezentuoja logistinį, raudona eksponentinį modelius)

2.2.1.1 LOGISTINIO IR EKSPONENTINIO MODELIŲ TYRIMAS

Pirmiausiai pasinaudosime grafiniu metodu. Kadangi 1.6 ir 1.7 lygtys abi yra autonomines – stacionarios, galime nesunkiai pavaizduoti lygčių fazines ašis bei rasti ypatinguosius taškus (kuriuose dN= 0). Eksponentinis modelis turi vieninteli ypatingąjį tašką $N = 0$, kuris yra repeleris, t.y. nestabilus. Tuo tarpu logistinė lygtis turi du ypatingus taškus $N = 0$ ir $N = k$, kurių pirmasis irgi yra repeleris, tačiau antrasis yra šuntas. Pavaizduodami vektorių lauką nupiešime dN priklausomybės nuo N grafiką. 1.2 ir 1.3 paveiksle matome, kad tai yra tiesė (eksponentinio modelio atveju) ir parabolė, kurios viršūnė yra taške $N = k/2$ (logistinio modelio atveju).

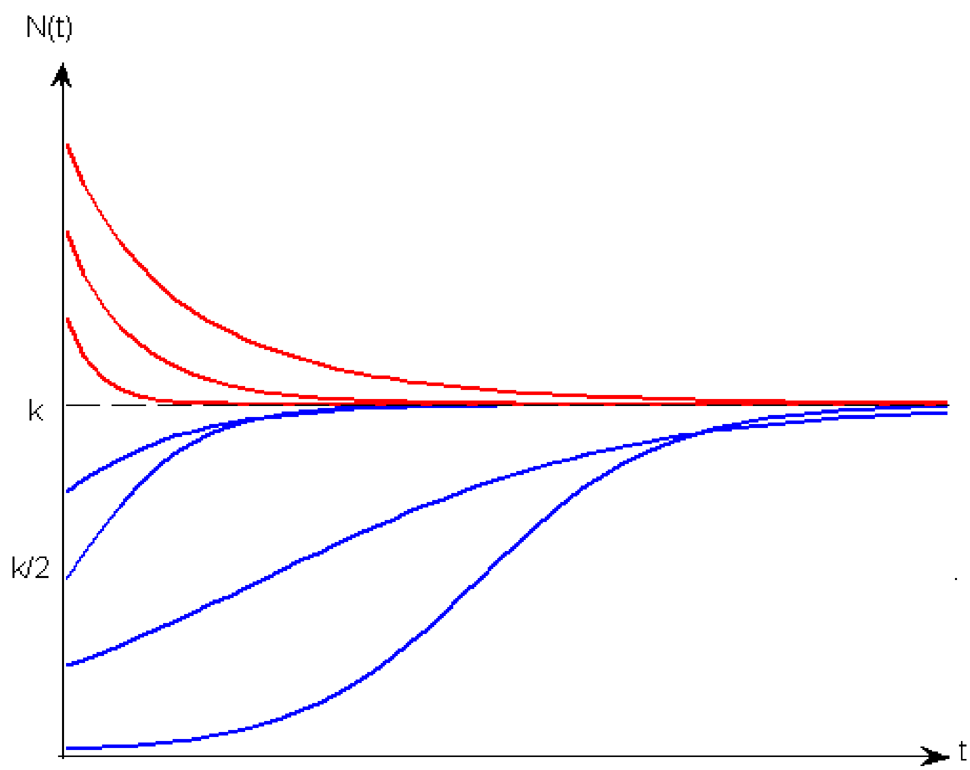


1.3 pav. Eksponentinės lygties vektorinis laukas ir stabilūs taškai



1.4 pav. Logistinės lygties vektorinis laukas bei stabilūs taškai

Kalbant apie logistinį ir eksponentinį modelį svarbu paminėti, kad eksponentinis modelis turi tik vieną N=0, o logistinis turi dvi stabilias arba pusiausvyros būsenas, kai N=0 ir n=k ir $\frac{dN}{dt} = 0$.Stabilumo taškas N=0 yra nestabilus, kadangi tada $\frac{dN}{dt} \approx \varepsilon n$, todėt populiacija augs eksponentiškai, su bet kokia N reikšme. Kitas pusiausvyros taškas N=k yra stabilus, nes $\frac{d(N-k)}{dt} \approx -\varepsilon(N-k)$, taigi, $N \to k$, kai $t \to \infty$. (2.3) lygtis didėja monotoniškai iki k, jei $N_0<k$, $N(t)$.Tačiau yra kiekybinis skirtumas priklausomai ar $N_0<k/2$,*ar* $N_0>k/2$. Kai $N_0<k/2$ kreivė yra Sigmoidinė. Jei $N_0>k/2$, $N(t)$ monotoniškai mažėja, tai reiškia, kad populiacijos augimo tempas yra neigiamas, t.y. populiacija praranda daugiau narių, nei įgyja naujų. Keoficientas k parodo koks populiacijos dydis yra stabilus t.y. gali išsilaikyti duotoje teritorijoje



1.5 pav. Logistinio modelio populiacijos kaita (paveiksle mėlynos kreivės vaizduoja logistinės lygties sprendinius, kai $N_0<k$, raudonos, kai $N_0>k$)

Logistinio modelio parametro k žymėjimas kilęs nuo anglų kalbos žodžių Carrying capacity (vertimas išlaikymo galimybė). Pvz., fizikas J.Fremlinas nustatė, kad Žemė galėtų ramiai išlaikyti 60 mln. milijardų žmonių, tačiau jis atsižvelgė tik į žmonių išskiriamą šilumos kiekį, o neatsižvelgė į turimus resursus ar jų trūkumą. Todėl, bent jau šiandieninėmis sąlygomis sunku būtų ginčytis, kad žemės k yra gerokai mažesnis ir yra apie 10-50 mlrd., ateityje, be abejo, jis galėtų keistis priklausomai nuo technologinio išsivystymo, atsinaujinančių resursų panaudojimo ir t.t. Norint Logistiniu modeliu tyrinėti tam tikrą aplinką būtina žinoti jos k. Pvz., Lietuvoje nėra atlikta jokių tyrimų, kiek gyventojų galėtų gyventi mūsų šalyje, nors akivaizdu, kad pagal geriamojo vandens atsargas, dirbamos žemės plotus ir gana palankaus gyventi klimato, teoriškai Lietuvos k turėtų būti gerokai didesnis už 3 ar 4 mln. Jei nėra atlikta jokių tyrimų apie aplinkos galimą išlaikyti individų skaičių, k reikšmę visada galima rasti iš istorinių duomenų. Pasirinkę praeities datą, ir žinodami ε, N_0 rodiklius galime eksperimentiškai nustatyti ir k reikšmę. Plačiau šią temą gvildensime 3.3 skyriuje.

1.2.5 STRŪKTURIZUOTOS POPULIACIJOS MODELIS

Nors minėti populiacijos prognozavimo modeliai gali puikiai prognozuoti populiacijos kaip visumos kaitos dinamiką, dažnai gyvenime to neužtenka. Žinoti, kad tam tikra populiacija didės ar mažės ir kiek yra naudinga, tačiau dažnai svarbu ir dar naudingiau žinoti kaip keisis ir populiacijos kokybiniai parametrai, t.y. ar populiacija senės ar jaunės (pvz., Europos populiacijai sparčiai senstant yra labai naudinga prognozuoti ir modeliuoti tolimesnę populiacijos sandarą), ar išsilaikys balansas tarp priešingos lyties populiacijos narių (pvz., Kinijoje įsigalėjus vieno vaiko politikai, šeimos labai nenoriai laukiasi mergaičių, taip iškreipdamos vyrų ir moterų balansą, kuris ateityje gali labai neigiamai atsiliepti visai Kinijos visuomenei) ir t.t.

Taigi sudarykime deterministį populiacijos dinamikos modelį. Tarkime, kad turimą populiaciją suskaidome į n (pvz. į amžiaus grupes po 5 metus)lygių dalių. Tada kiekvienai amžiaus grupei sudarykime jos balanso lygtį, čia reikia pažymėti, kad be jau minėtu populiacijos augimo rodiklių (gimstamumo, mirtingumo, emigracijos ir imigracijos), turime įvesti ir papildomą rodiklį – vidinę migraciją. Kadangi bėgant laikui individai migruos į vis senesnę amžiaus grupę. Pabandykime su aptartomis sąlygomis pamodeliuoti kiekvieną amžiaus grupę logistinio modelio pagalba.

Tarkime, kad yra žinomi visų n grupių pradiniai duomenys:

$N(0) = N_{01}(0)+N_{02}(0)+N_{02}(0)+......+N_{0n}(0)$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, ..., \varepsilon_n$

Čia $\varepsilon_1, \varepsilon_n$ yra, augimo tempai atskirose amžiaus grupėse. Kur

ε_n = prieaugis (n-tojoje grupėje) – netektys (n-tojoje grupėje)

Atskirai reiktų aptartį pirmą ir visas likusias amžiaus grupes, nes pirmos grupės prieaugis susidės iš visų gimusių populiacijoje narių (nes niekas negimsta n metų amžiaus) + imigravusių iš šalies, o netektys susidės iš visų mirusių tiktai toje grupėje žmonių – emigravusių iš populiacijos ir emigravusių į vyresnę amžiaus grupę individų. Tuo tarpu visų likusių amžiaus grupių prieaugis susidarys tiktai iš imigravusių iš jaunesnės amžiaus grupės, arba iš kitos aplinkos individų, o netektys bus sudarytos analogiškai kaip ir pirmoje grupėje. Tarkime, kad kiekvienoje grupėje k bus lygus, tada $k_1 = k_2 = k_3 = \ldots = k_n = k/n$. Su šiomis sąlygomis galime kiekvienai amžiaus grupę atskirai aprašyti logistine lygtimi:

$$\begin{cases} \frac{dN_1(t)}{dt} = \varepsilon_1\left(1 - \frac{N_1}{k_1}\right)N_1 \\ \frac{dN_2(t)}{dt} = \varepsilon_1\left(1 - \frac{N_2}{k_2}\right)N_2 \\ \frac{dN_3(t)}{dt} = \varepsilon_1\left(1 - \frac{N_3}{k_3}\right)N_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. \\ \frac{dN_n(t)}{dt} = \varepsilon_1\left(1 - \frac{N_n}{k_n}\right)N_n \end{cases} \tag{1.9}$$

Analogiškai (2.3) lygčiai išsprendę (2.5) lygčių sistemą gausime sistemos atskirąjį sprendinį.

$$\begin{cases} N_1(t) = \frac{k_1 N_{01} e^{\varepsilon_1 t}}{k_1 + N_{01}(e^{\varepsilon_1 t} - 1)} \\ N_2(t) = \frac{k_2 N_{02} e^{\varepsilon_2 t}}{k_2 + N_{02}(e^{\varepsilon_2 t} - 1)} \\ \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.\,.\ldots \\ \\ N_n(t) = \frac{k_n N_{0n} e^{\varepsilon_n t}}{k_n + N_{0n}(e^{\varepsilon_n t} - 1)} \end{cases} \tag{1.10}$$

Tada $N(t) = \sum_1^n N_n(t)$ Tačiau, nors tokia sistema ir prognozuos visos populiacijos skaičių teisingai, tačiau atskirų grupių rezultatai gali būti stipriai iškreipti, kadangi, pvz., pirmoje grupėje prieaugis gali būti teigiamas, t.y. gimusiųjų skaičius viršys mirusių ir emigravusių į kitą grupę bei svetur, tačiau likusių grupių kitimas gali būti neigiamas, tokiu būdu pirmoji grupė nuolatos augs iki *k/n* kai likusios grupės mažės, tai yra nerealu, nes akivaizdu, kad mažėjant gimdančiųjų žmonių grupėms turi mažėti ir gimstančiųjų skaičius, taip mažindamas ir pirmąją grupę. (3.3) skyriuje pateiksiu eksperimentų rezultatus rodančius šio modelio neadekvatumą.

Priėjome išvados, kad norint sudaryti, gerą diferencijuotos pagal amžių ar lytį populiacijos modelį turime atkreipti dėmesį ne tik į atskirų grupių augimo ar mažėjimo rodiklius, bet ir sąveiką tarp grupių. Pvz. jei reproduktyviosios grupes nyksta, akivaizdu, kad jos ateityje mažins ir gimstamumą, ir atvirkščiai jei jos auga (dėl išorinės ar vidinės imigracijos) tai teigiamai turi paveikti ateities gimstamumą.

Sudarykime naują modelį įvertindami šias savybes. Tarkim nagrinėjamą populiaciją suskirstome į n lygių amžiaus grupių, kurių dydžiai laiko momentu t yra $N_1(t)$, $N_2(t)$, $N_3(t)$, ... $N_p(t)$, kur p yra ikireproduktyvinio amžiaus grupių skaičius, q yra reproduktyvinio amžiaus grupių skaičius $N_{p+1}(t)$, $N_{p+2}(t)$, $N_{p+3}(t)$, ... $N_{p+q}(t)$, r yra po reproduktyvinio amžiaus grupių skaičius

$N_{q+p+1}(t)$, $N_{q+p+2}(t)$, $N_{q+p+3}(t)$, ... $N_{p+r}(t)$, n=p+q+r. Tarkim, $\alpha_{p+1}, \alpha_{p+2}, \alpha_{p+3}......$ α_{p+q} yra prieaugio intensyvumas (gimimų skaičius) atitinkamoje reproduktyvinėje amžiaus grupėje. β_i yra augimo - mažėjimo (išorinė imigracija minus mirtys plius išorinė emigracija) intensyvumas i-tojoje grupėje. $i = \overline{1, p+q+r}$, m_i yra migracijos intensyvumas iš j-tosios grupės į (j+1) grupę. $j = \overline{1, p+q+r-1}$. Tada populiacijos dinamiką skirtingose amžiaus grupėse galime aprašyti tokia lygčių sistema:

$$\begin{cases} \frac{dN_1(t)}{dt} = N_{p+1}\alpha_{p+1} + N_{p+2}\alpha_{p+2} + N_{p+3}\alpha_{p+3} + \cdots + N_{p+q}\alpha_{p+q} - N_1(\beta_1 + m_1) \\ \frac{dN_2(t)}{dt} = N_1 m_1 - (m_2 + \beta_2)N_2 \\ \frac{dN_3(t)}{dt} = N_2 m_2 - (m_3 + \beta_3)N_3 \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dN_n(t)}{dt} = N_{n-1}m_{n-1} - \beta_n N_n \end{cases} \qquad \textbf{(1.11)}$$

(2.7) yra tiesinė homogeninė diferencialinių lygčių sistema su pastoviais koeficientais, ją galime išspręsti Oilerio, Matricų, neapibrėžtų koeficientų ir skaitiniais metodais.

1.2.5.1 STRŪKTURIZUOTOS POPULIACIJOS MODELIO TYRIMAS

(1.11) yra tiesinė homogeninė diferencialinių lygčių sistema su pastoviais koeficientais, tačiau galime į ją žvelgti ir kaip į matricinę lygtį. Pažymėkime:

$$A = \begin{pmatrix} -(\beta_1 + m_1) & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-1} & \alpha_n \\ m_1 & -(m_2 + \beta_2) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & -(m_3 + \beta_3) & \dots & 0 & 0 \\ \dots \quad \dots \quad \dots & & & \dots & \dots. & \dots \\ 0 \quad 0 & 0 & & \dots & \dots. & 0 \\ 0 \quad 0 & 0 & & \dots & m_{n-1} & -\beta_n \end{pmatrix}$$

$$N(t) = \begin{pmatrix} N_1(t) \\ N_2(t) \\ \dots.. \\ ..\dots \\ N_n(t) \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \dots.. \\ ..\dots \\ N_n \end{pmatrix}$$

Tada (1.12) lygčių sistemą galėsime perrašyti taip:

$$\frac{d\vec{N}}{dt} = A * \vec{N} \qquad \textbf{(1.13)}$$

Gautoji diferencialinė lygtis yra ne kas kita kaip eksponentinio modelio matricinė išraiška. Suintegravę (1.11) lygtį gausime:

$$N(t) = N_0 e^{At} \qquad \textbf{(1.14)}$$

Čia N_0 yra populiacijos skaičius atskiroje grupėje pradiniu laiko momentu.

$$N_0 = \begin{pmatrix} N_{01} \\ N_{02} \\ \dots.. \\ ..\dots \\ N_{0n} \end{pmatrix}$$

Akivaizdu, kad 1.11 yra autonominė sistema ir ji apibrėžia nusistovėjusį greičių lauką, kurio fazinės trajektorijos neturi bendrų taškų. Raskime sistemos ypatinguosius taškus kuriose $A * \vec{N} = 0$. Norint rasti ypatingąjį tašką reikia išspręsti tiesinių homogeninių lygčių sistemą:

$$\begin{pmatrix} -(\beta_1+m_1) & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-1} & \alpha_n \\ m_1 & -(m_2+\beta_2) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & -(m_3+\beta_3) & \dots & 0 & 0 \\ \dots\ \dots\ \dots & & & \dots & \dots . & \dots \\ 0\quad 0 & & 0 & \dots & \dots . & 0 \\ 0\quad 0 & & 0 & \dots & m_{n-1} & -\beta_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \dots .. \\ \\ \dots . \\ N_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots .. \\ \\ \dots . \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tarkime, kad bendru atveju $\beta_i, m_i > 0\ \forall i = \overline{1,n}$,o $\alpha_i \neq 0,$ vaisingose amžiaus grupėse. Tuomet gausime, kad $\det(A)\ \neq 0$ ir lygčių sistema turės vienintėlį sprendinį $\vec{N} = 0$. Taigi sistema turės vienintėlį įpatingą tašką $M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots . \\ 0 \end{pmatrix}$. Kaip ir eksponentinio modelio atvėju gauname kad ir matricinė šio modelio forma turės vienintelį ypatingą tašką $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots . \\ 0 \end{pmatrix}$, apie šio taško stabilumą galime spręsti pagal sekamčią teoremą, kurią pateiksiu be įrodymo:

Teorema. Tiesinės homogeninės sistemos $d\vec{N} = A \cdot \vec{N}$ nulinis sprendinys yra

- asimptomiškai stabilus tada ir tik tada, kai visų λ Re $\lambda < 0,$
- stabilus tada ir tik tada, kai Re $\lambda \leq 0$, ir tos šaknys λ, kurių Re $\lambda = 0$, nėra kartotinės,
- nestabilus tada ir tik tada, kai $\exists\lambda$, kurios Re $\lambda > 0$, arba $\exists\lambda$, kurios Re $\lambda = 0$, o kartotinumo eilė $m > 1$.

1.2.5.2 TIESINIŲ DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ SISTEMOS SU PASTOVIAIS KOFICIENTAIS SPRENDIMAS OILERIO METODU

Sekdami Oileriu ieškosime eksponentinės formos sprendinių $\vec{N}(t) = \vec{h}e^{\lambda t}$, $\vec{h}$ pastoviasias koordinates žymėsime h_1,.........,h_n. Įrašę $\vec{N}(t)$ į (1.13) lygtį gausime:

$\overrightarrow{h\lambda}e^{\lambda t} = A * \vec{h}e^{\lambda t}$padauginę abi lygybės puses iš vienetinės matricos E gausim:

$\vec{h}e^{\lambda t}(A - E\lambda)\vec{h} = \vec{0}$

$$(A - E\lambda)\vec{h} = 0 \qquad \textbf{(1.15)}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda_2 & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & \ldots & a_{nn}-\lambda_n \end{pmatrix} := 0$$

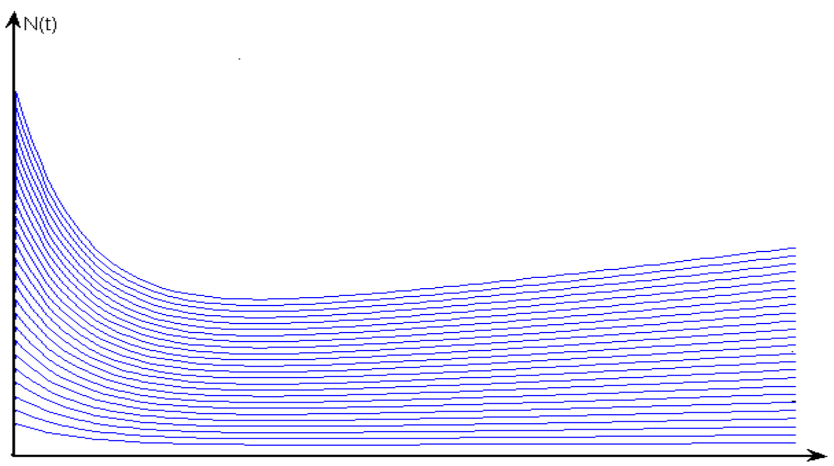
(1.15) lygtis – tai algebrinės tiesinės homogeninės sistemos vektorinė forma, kai $\det(A - E\lambda)=0$, tai egzistuoja šios sistemos nenulinis sprendinys – nenulinės $\vec{h}$ koordinatės $h_1,\ldots\ldots,h_n$. Lygtis $\det(A - E\lambda)=0$ yra vadinama (1.13) lygties charakteristine lygtimi. Ją išsprendus surandamos tikrinės matricos A reikšmės $\lambda_1, \ldots\ldots, \lambda_n$, ir jas atitinkantys tikriniai vektoriai $\vec{h}_1, \ldots\ldots, \vec{h}_n$.

Taigi išsprendę (1.15) lygtį gausime ir (1.11) sistemos sprendinius, tačiau (2.9) sistema gali turėti ne tik realias, tačiau ir kompleksines šaknų poras, taigi galimi trys (2.9) sistemos sprendinių variantai:

1. Visos šaknys realios ir skirtingos: $\lambda_k \in R$; $\lambda_k \neq \lambda_l$; *k,l=1,2,......,n*. Su kiekviena λ_k reikšme iš (2.9) sistemos apskaičiuojame atitinkamas tikrinio vektoriaus h_k koordinates ir gauname *N(t)* sprendinius:

   $\vec{N}_1(t) = \vec{h}_1 e^{\lambda_1 t}$;............; $\vec{N}_n(t) = \vec{h}_n e^{\lambda_n t}$, kurie yra tiesiškai nepriklausomi ir jais galime sudaryti fundamentalią sprendinių sistemą, kurios bendras sprendinys bus:

$$\vec{N}(t) = C_1 \vec{h}_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \vec{h}_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots \ldots\ldots + C_n \vec{h}_n e^{\lambda_n t} \qquad \textbf{(1.16)}$$



1.6 pav. Tiesinių diferencialinių lygčių sistemos sprendinių pvz., kai charakteristinės lygties šaknys realios

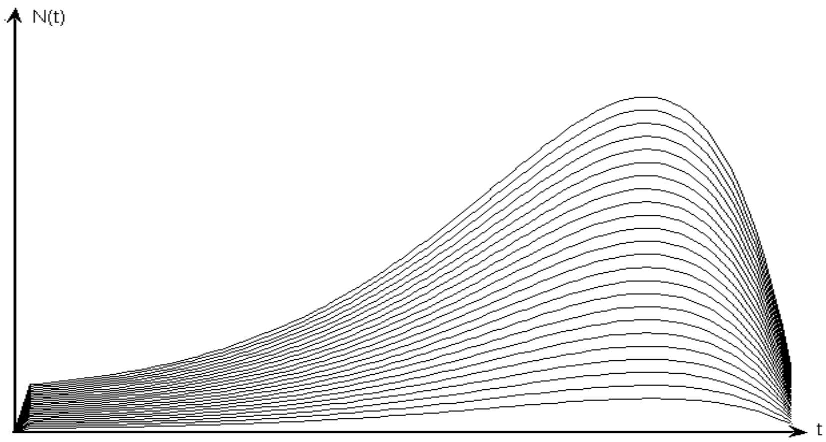
2. Yra kompleksinių šaknų porų, pvz. $\lambda_{1,2} = \alpha \mp i\beta$. Kadangi A yra realiųjų koeficientų matrica tai šias jungtinias kompleksines šaknis atitinka jungtiniai kompleksiniai vektoriai $\vec{h}_{1,2} = \sigma \mp i\tau$ tada sprendiniai bus:

   $\vec{N}_1(t) = \vec{h}_1 e^{\lambda_1 t} = (\sigma + i\tau)e^{(\alpha+i\beta)t} = \vec{p} + i\vec{q}$;

$\overrightarrow{N_2}(t) = \overrightarrow{h_2}e^{\lambda_2 t} = (\sigma - i\tau)e^{(\alpha - i\beta)t} = \vec{p} - i\vec{q};$

Tai yra kompleksiniai junginiai. Tačiau pakeitę $N_1(t)$ ir $N_2(t)$ kitais dviem sprendiniais, realiąja ir menamąja pirmų sprendinių dalimis $\vec{p}$ ir $\vec{q}$, vėl gausime tiesiškai nepriklausomų sprendinių sistemą $\vec{p}$,$\vec{q}$, $N_3(t,)$........,$N_n(t)$. Šiuo atveju bendrojo sprendinio forma bus:

$$\vec{N}(t) = C_1 Re\left(\overrightarrow{N_1}(t)\right) + C_2 Im\left(\overrightarrow{N_1}(t)\right) + C_3\overrightarrow{h_3}e^{\lambda_3 t} + \cdots \ldots \ldots . . + C_n\overrightarrow{h_n}e^{\lambda_n t} \tag{1.17}$$



1.7 pav. Tiesinių diferencialinių lygčių sistemos sprendinių, pvz., kai charakteristinė lygtis turi kompleksinių šaknų

3. Yra kartotinių realiųjų šaknų pvz. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \cdots \ldots = \lambda_m \in R;$

   Tokiu atveju pagal teoremą apie m tosios eilės kartotines šaknis gausime, kad kartotinę šaknį λ_m atitiks tokie tiesiškai nepriklausomi sprendiniai:

   $\overrightarrow{N_1}(t) = \overrightarrow{h_1}e^{\lambda_m t};$

   $\overrightarrow{N_2}(t) = (\overrightarrow{h_1}t + \overrightarrow{h_2})e^{\lambda_m t};$

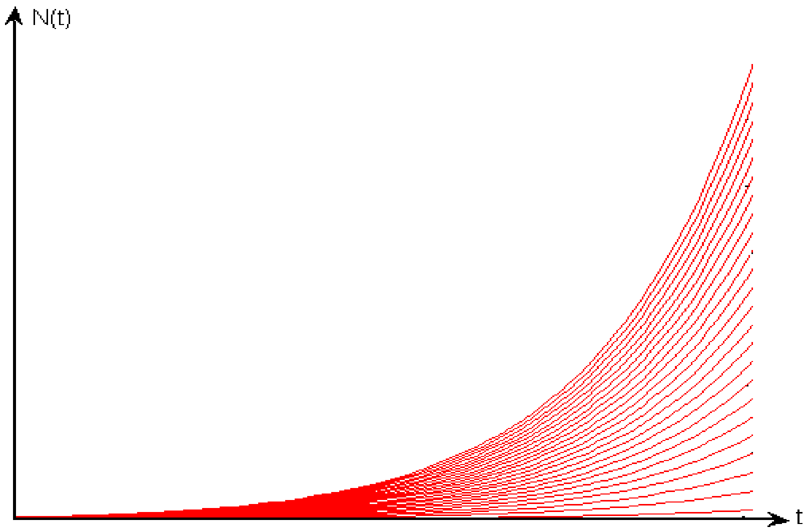
   ....

   $\overrightarrow{N_n}(t) = (\frac{\overrightarrow{h_1}t^{m-1}}{(m-1)!} + \frac{\overrightarrow{h_2}t^{m-2}}{(m-2)!} + \cdots . + \overrightarrow{h_{m-1}}t + \overrightarrow{h_m})e^{\lambda_m t};$

   Taigi kai$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \cdots \ldots = \lambda_m$ $(m<n)$ atveju bendrojo sprendinio forma bus:

$$\vec{N}(t) = (C_1\overrightarrow{h_1} + C_2(\overrightarrow{h_1}t + \overrightarrow{h_2}) + \ldots + C_m(\frac{\overrightarrow{h_1}t^{m-1}}{(m-1)!} + \frac{\overrightarrow{h_2}t^{m-2}}{(m-2)!} + \cdots + \overrightarrow{h_{m-1}}t +$$

$$+\overrightarrow{h_m}))e^{\lambda_m t} + C_{m+1}\overrightarrow{h_{m+1}}e^{\lambda_{m+1}t} + \cdots + C_n\overrightarrow{h_n}e^{\lambda_n t} \tag{1.18}$$



1.8 pav. Tiesinių diferencialinių lygčių sistemos sprendinių pvz., kai charakteristinė lygtis turi vienodų realių šaknų

Norint praktiškai išspręsti (1.11) lygčių sistemą pirmiausiai turime rasti kvadratinės $n\times n$ matricos A tikrines reikšmes λ_n ir jas atitinkančius tikrinius vektorius $\overrightarrow{h_n}$. Tai nesunku atlikti standartinėmis matematinių paketų funkcijomis, pvz., MATLAB pakete funkcija eig(A) grąžina matricos A n tikrinių reikšmių ir tikrinių vektorių matricą $n\times n$, kurios kiekvienas i - tasis stulpelis atitinka i - tąją tikrinę reikšmę (i=1,....,n; j=1,....,n). Antras žingsnis yra sudaryti sprendinių matricą S (ji irgi bus $n\times n$) kurios i - tosios eilutės j-tasis elementas būtų lygus tikrinės reikšmės λ_j ir ją atitinkačio tikrinio vektoriaus j – tąjį h_{ij} elementą atitinkantis sprendinys $N_{ij}(t)$. Kuris priklausomai nuo to kokia yra λ_i šaknis: reali vienetinė, kompleksinė, ar reali m kartų pasikartojanti, įgys tris galimas reikšmes:

$$\mathrm{N_{ij}}(\mathrm{t}) = h_{ij}\, e^{\lambda_j t}$$

$$\mathrm{N_{ij}}(\mathrm{t}) = \ Re(h_{ij} e^{\lambda_j t})$$

$$\mathrm{N_{ij}}(\mathrm{t}) = (\frac{h_{1j} t^{m-1}}{(m-1)!} + \frac{h_{2j} t^{m-2}}{(m-2)!} + \cdots . + h_{(m-1)j} t + h_{mj}) e^{\lambda_j t}$$

Pvz. matricos S išraiška, kai visos charakteristinės lygties šaknys λ_i yra realios ir skirtingos:

$$S := \begin{pmatrix} h_{11} e^{\lambda_1 t} & h_{12} e^{\lambda_2 t} & h_{13} e^{\lambda_3 t} & \ldots\ldots & h_{1n} e^{\lambda_n t} \\ h_{21} e^{\lambda_1 t} & h_{22} e^{\lambda_2 t} & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ .... & .... & .... & .... & .... \\ h_{n1} e^{\lambda_1 t} & h_{n2} e^{\lambda_2 t} & \ldots\ldots & \ldots\ldots & h_{nn} e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \quad C := \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ \ldots\ldots \\ C_n \end{pmatrix} \quad N(t) := \begin{pmatrix} N(t)_1 \\ N(t)_2 \\ N(t)_3 \\ \ldots\ldots\ldots \\ N(t)_n \end{pmatrix}$$

Raskime (1.11) sistemos atskirąjį sprendinį kai visos charakteristinės lygties šaknys λ_i yra realios ir skirtingos. Padauginę S matricą iš konstantų vektoriaus $\vec{C}$, gausime (1.11) sistemos bendrąjį sprendinį *N(t)* , kurio i-toji eilutė atitiks i-tosios amžiaus grupės bendrąjį sprendinį:

$$\mathrm{N_i(t)} = \mathrm{C_1} h_{i1}\, e^{\lambda_1 t} + \mathrm{C_2} h_{i2}\, e^{\lambda_2 t} + \cdots + \mathrm{C_n} h_{ni}\, e^{\lambda_n t}$$

Parinkę sąlygas, kai *t=0*, gausime kad S matrica taps lygi tikrinių vektorių matricai T, o *N(0)=N₀*, taip išsprendę lygtį: C=$T^{-1} \times N_0$ rasime konstantas.

$$\mathrm{N_0} := \begin{pmatrix} \mathrm{N_{01}} \\ \mathrm{N_{02}} \\ \mathrm{N_{03}} \\ \cdots\cdots \\ \mathrm{N_{0n}} \end{pmatrix} \quad \mathrm{T} := \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & .. & .... & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & .. & .. & h_{2n} \\ .... & .... & .... & .... & .... \\ .... & .... & .... & .... & .... \\ h_{n1} & h_{n2} & .. & .... & h_{nn} \end{pmatrix}$$

Čia N_0 yra mūsų pradinių metų duomenys, t.y. gyventojų skaičius kiekvienoje amžiaus grupėje pradiniais metais. Suradę konstantas C nesunkiai gausime ir atskirąjį sprendinį.

$$\mathrm{N(t)} = S \times C.$$

Analogiškai rasime atskirąjį (1.11) sistemos sprendinį, jei charakteristinė lygtis turės kompleksinių, pasikartojančių realių arba mišrių šaknų. Vienintelis skirtumas, kad tuomet kai *t=0,* S matrica nebus lygi T matricai. Tačiau likusi algoritmo dalis liks nepakitusi.

1.2.5.3 TIESINIŲ DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ SISTEMOS SU PASTOVIAIS KOFICIENTAIS SPRENDIMAS MATRICŲ METODU

Dabar apsibrėšime matricos eksponentę.

Apibrėžimas. Kai *A(t)* – kvadratinė *n*-tosios eilės matrica, jos eksponentė apibrėžiama šia lygybe:

$$e^{A(t)} = E + A(t) + \frac{1}{2!}A^2(t) + \cdots + \frac{1}{k!}A^k(t) + \cdots \qquad \textbf{(1.19)}$$

Iš apibrėžimo išplaukia tokios matricos eksponentės savybės:

1. $e^0 = E$; (čia 0 – nulinė, o E – vienetinė *n*-tosios eilės matrica).
2. $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$, jei matricų sandauga yra komutatyvi, t.y. jei $A \cdot B = B \cdot A$.
3. $e^{-A} = (e)^{A^{-1}}$.

Kai A – pastovioji matrica, o t_1 ir t_2 – kintamojo reikšmės, matricų $A \cdot t_1$ ir $A \cdot t_2$ sandauga yra komutatyvi, ir $e^{A \cdot t_1} \cdot e^{A \cdot t_2} = e^{A(t_1 + \cdot t_2)}$.

1. Kai A – diagonalė matrica, $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \dots & \cdots & \cdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$, iš matricos eksponentės apibrėžimo gaunama taip pat diagonalinė integralinės matricos forma:

$$e^{A(t)} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1(t)} & 0 & \dots. & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2(t)} & \dots^{\cdots} & \dots 0 \\ \dots & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n(t)} \end{pmatrix}.$$

2. Kai A yra normaliosios Žordano formos matrica

$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_n \end{pmatrix}$, o k-toji matricos A ląstelė – p-tosios eilės matrica $A_k = \lambda_k E + H$ $(H^p = H^{p+1} = \cdots = 0)$ arba

$$A_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & \lambda_k \end{pmatrix} \tag{1.20}$$

tai $\frac{d\vec{N}}{dt} = A * \vec{N}$ sistemos integralinė matrica $N(t)$ yra taip pat ląstelinė matrica

$$e^{A(t)} = \begin{pmatrix} e^{A_1(t)} & 0 & \dots. & 0 \\ 0 & e^{A_2(t)} & \dots^{\cdots} & \dots 0 \\ \dots & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & e^{A_n(t)} \end{pmatrix}.$$

Jos ląstelė

$$e^{A_k(t)} = e^{\lambda_k(t)} E e^{H(t)} = e^{\lambda_k(t)}(E + H(t) + \cdots + \frac{H^{p-1}(t)^{p-1}}{(p-1)!}) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & (t) & \frac{(t)^{p-2}}{2!} & \vdots & \frac{(t)^{p-2}}{(p-2)!} & \frac{(t)^{p-1}}{(p-1)!} \\ 0 & 1 & t & \vdots & \vdots & \frac{(t)^{p-2}}{(p-2)!} \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & t - t_0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.21}$$

3. Jei A – bet kuri matrica, tai visuomet galima rasti tokią neišsigimusią matricą T, $|T| \neq 0$, kad $TAT^{-1} = B$ jau yra normaliosios Žordano formos matrica. Tada

$$d\vec{N} = A\vec{N};$$

$$Td\vec{N} = TA\vec{N};$$

$$Td\vec{N} = TAT^{-1}T\vec{N}.$$

Pažymėję $d\vec{z} = Td\vec{N}$, gauname vektorinę lygtį su normaliosios Žordano formos koeficientų matrica

$$d\vec{z} = B\vec{z}.$$

Tokios lygties bendrasis sprendinys

$$\vec{z}(t) = e^{B(t)}\vec{z}(t_0)$$

$$T^{-1}\vec{z} = T^{-1}e^{TAT^{-1}(t)}TT^{-1}\vec{z}_0;$$

$$\vec{N} = T^{-1}\left(E + TAT^{-1}(t) + \frac{1}{2!}TAT^{-1}TAT^{-1}(t)^2 + \cdots\right)T\vec{N}_0 =$$

$$= \left(E + A(t) + \frac{1}{2!}AA(t)^2 + \cdots\right)\vec{N}_0 = e^{A(t)}\vec{N}_0.$$

Taigi bendrasis (1.11) lygties sprendinys bendru atveju įgys tokią išraišką:

$$\vec{N} = T^{-1}e^{Bt}T\vec{N}_0 \qquad \textbf{(1.22)}$$

Šio metodo pagrindinis trūkumas, kad reikia ieškoti matricų T tokių kad $TAT^{-1} = B$. Tai gali reikalauti daug skaičiavimo laiko, tačiau skaičiuojant kompiuteriu, pvz., Matlab programa tai nesukelia daug problemų.

1.2.5.4 TIESINIŲ DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ SISTEMOS SPRENDIMAS NEAPIBRĖŽTŲJŲ KOEFICIENTŲ METODU

Ieškomi tokios formos sprendiniai:

$$\vec{N}_1 = \vec{P}_{m_1-1}(t)e^{\lambda_1 t}; \dots;\ \vec{N}_n = \vec{P}_{m_n-1}(t)e^{\lambda_n t};$$

Čia vektorių $\vec{P}_l$ komponentės yra daugianariai, kurių laipsnis vienetu mažesnis už atitinkamos matricos A tikrinės reikšmės kartotinumo eilę, o kai λ_j – paprastoji charakteristinės lygties šaknis, vektorinio daugianario laipsnis $m_j = 0$.

Tačiau tas laipsnis gali būti ir mažesnis. Pavyzdžiui, kai $n = 2$ arba $n = 3$, daugianario laipsnis šitaip priklauso nuo koeficientų matricos A formos:

tegu $r = rank(A - \lambda E)$; tuomet, jei $n - r = m$, tai daugianario laipsnis lygus nuliui, ir $\vec{N}(t) = \vec{h}e^{\lambda t}$, o jei $n - r < m$, tai $\vec{N}(t) = \vec{P}_{m-(n-r)}(t)e^{\lambda t}$; $(n - r)$ yra matricos A Žordano ląstelių skaičius.

Šis sprendimo būdas yra tampriai susijęs su Oilerio metodu, kadangi reikia rasti tikrines matricos A reikšmes, tačiau vietoje tikrinių vektorių ieškojimo, ieškomi daugianariai. Sprendžiant realų populiacijos uždavinį su realiais duomenimis, galima sakyti, kad bendru atveju tikrinės reikšmės yra visos skirtingos, todėl sprendimo algoritmas gerokai supaprastėja, nes visi daugianariai tampa tiesiog konstantomis. Kadangi problemos vėl kyla jei randamos kompleksinės tikrinės matricos A reikšmės. Šio metodo atskirai nenagrinėsime, nes jo sprendimo algoritmas panašus i Oilerio.

1.2.5.5 TIESINIŲ DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ SISTEMOS SPRENDIMAS SKAITINIAIS METODAIS

Jei mūsų nedomina (1.11) lygčių sistemos bendrasis sprendinys ir jo analizinė išraiška, (1.11) sistemą galime išspręsti apytiksliai taikydami matricinės analizės žinias. Kadangi pagal (1.19) formulę eksponentę pakeltą matrica galime skleisti eilute:

$$e^A = 1 + A + A^2/2! + A^3/3! + \cdots + A^n/n! = \sum_0^\infty \frac{A^n}{n!}$$

Gautą matricinės eksponentės išraišką įstatę į (1.11) lygčių sistemos sprendinį (1.14) gausim tokią šio sprendinio išraišką:

$$N(t) = \sum_0^\infty \frac{(tA)^n}{n!} * N_0 \qquad \textbf{(1.23)}$$

Be abejo, (1.23) lygtyje sumavimo negalime vykdyti begalinai, todėl reikia ištirti kiek eilutės narių reikia sudėti norint pasiekti norimą tikslumą, nes sudedant per daug narių švaistomas skaičiavimo laikas, o sudedant per mažai narių galimos didelės paklaidos. Būtina patyrinėti, kaip skaičiavimo rezultatai priklauso nuo eilutės narių skaičiaus, bei nuo lygčių sistemos apimties. Šis metodas gerokai pranašesnis už Oilerio, Matricų bei neapibrėžtųjų koeficientų, nes esant didelei n reikšmei sistemoje atsiranda kompleksinės tikrinės reikšmės, kurios gerokai apsunkina skaičiavimus, bei gali sukelti rezultatų patikimumo klausimą. Tuo tarpu skaičiuojant pagal (1.23) formulę apytiksliai nereikia ieškoti nei matricos tikrinių reikšmių nei tikrinių vektorių, nei Žordano ar transponuojančių T. Sumuodami baigtinį eilutės narių skaičių, galime lengvai ir greitai apskaičiuoti skaitinę sprendinio reikšmę.

Praktiškai atliekant skaičiavimus dėl greito faktorialo konvergavimo ir mažų A matricos reikšmių pastebėjau, kad jei mūsų lygčių sistemos koeficientų matrica A nėra didelio mato, tada pilnai pakanka sudėti 5 pirmuosius (1.23) eilutės narius. Tokiu atveju apytikslis sprendinys bus randamas taip:

$$N(t) \approx t\left(1 + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \frac{A^4}{4!}\right) * N_0 \qquad \textbf{(1.24)}$$

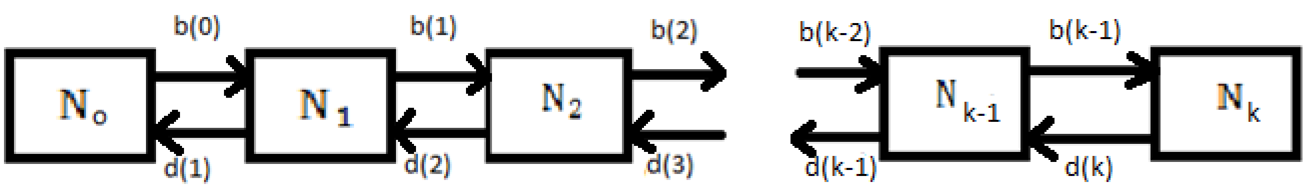
Tačiau jei nagrinėjame didesnę lygčių sistemą, reikia sudėti gerokai daugiau eilutės narių.

1.3 STOCHASTINIAI MODELIAI

1.3.1 DAUGINIMOSI IR ŽUVIMO PROCESAI

Skirtingai nei deterministiniuose populiaciniuose modeliuose, stochastiniuose modeliuose populiacijos dydis laiku t nėra determinuotas dydis, o atsitiktinis dydis, kur populiacijos dydis laiko momentu t įgyja tam tikra reikšmę N su tikimybe p**.** Dažniausiai populiacijos kaitai ir prognozavimui aprašyti naudojami Markovo procesai**,** tai labai svarbi atsitiktinių procesų klasė. Markovo procesams būdingas toks bruožas: jų skirstiniai būsimuoju laiko momentu visiškai apibūdinami proceso reikšmėmis esamuoju momentu ir nepriklauso nuo proceso praeities. Kai T – diskrešioji aibė, procesą $N(t)$ vadiname Markovo grandine, o kai T yra intervalas – tolydžiojo laiko Markovo procesu.

Populiacijos kaitą laike galėtume aprašyti 1.9 paveiksle esančiu būsenų grafu.



1.9 pav. Žuvimo ir dauginimosi proceso būsenų grafas

Taigi populiacijos būsenų grafą galima atvaizduoti kaip būsenų grandinę, kurios būsenos sujungtos perėjimų rodyklėmis, t.y. iš bet kokios būsenos N_k, išskyrus kraštines, galima patekti tik į dvi gretimas būsenas: N_{k-1} ir N_{k+1}. Procesus, kurie turi būsenų grafą (1.9 pav.), literatūroje priimta vadinti „žuvimo ir dauginimosi procesais". Toks pavadinimas kilo iš to, kad tokie procesai pirmiausia buvo panaudoti biologijoje populiacijų skaičiaus analizei, epidemijų išplitimui ir panašioms problemoms tirti. Pavyzdžiui, laikant, kad būsena N_k atitinka populiacijų skaičių lygų k, tai sistemos perėjimas iš būsenos N_k į N_{k+1} įvyksta atsirandant (gimus b) vienam populiacijos nariui, o perėjimas į būseną N_{k-1}, dingstant (žuvus d) vienam populiacijos nariui. Skaičius n gali būti baigtinis arba begalinis. Baigtinis populiacijos narių skaičius gali būti tada, kai turime fizinius apribojimus maksimaliam populiacijos skaičiui, pavyzdžiui, analizuojant mikroorganizmų vystymąsi uždarame stikliniame inde. Analizuojant populiacijų skaičių natūraliomis sąlygomis, praktiškai galime laikyti, kad tam skaičiui apribojimų nėra. Iš tikrųjų, tokių apribojimų yra, nes riboti Žemės rutulio matmenys, bet praktiškai tie apribojimai nėra esminiai.

1.9 paveiksle pavaizduotam būsenų grafui galime pagal taisyklę surašyti pagal tokią taisyklę: Tikimybės $p_i(t)$, kad sistema laiko momentu t bus būsenoje N_i, išvestinė lygi algebrinei sumai, kurios narių skaičius lygus rodyklių, jungiančių būseną N_i su kitomis būsenomis, skaičiui būsenų grafe. Jei rodyklė nukreipta į būseną N_i, tai narys imamas su pliuso ženklu. Jei rodyklė nukreipta iš būsenos N_i – su minuso ženklu. Kiekvienas sumos narys lygus tos būsenos, iš kurios nukreipta rodyklė, tikimybės ir įvykių srauto intensyvumo, kuris perveda sistemą pagal duotą rodyklę, sandaugai.

Žuvimo ir dauginimosi proceso diferencialines lygtis remiantis šia taisykle tada atrodys taip:

$$\begin{cases} \frac{dp_0(t)}{dt} = -b_0 p_0(t) + d_1 p_1(t) \\ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{dp_k(t)}{dt} = -(b_k + d_k) p_k(t) + b_{k-1} p_{k-1}(t) + d_{k+1} p_{k+1}(t), \qquad k = 1,2,\dots,n-1 \\ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{dp_n(t)}{dt} = -b_n + p_n(t) + d_{n-1} p_{n-1}(t) \end{cases} \qquad \textbf{(1.25)}$$

Ši diferencialinių lygčių sistema dar vadinama Kolmogorovo ir Felerio atvirkštinė diferencialinių lygčių sistema. Ji teisinga ir pastoviems gimimų ir mirčių intensyvumams, ir tada, kai intensyvumai yra laiko funkcijos:

$b_k = b_k(t), \qquad k = 0, 1, \dots, n-1;$

$d_i = d_i(t), \;\; i = 1, 2, \dots, n.$

Diferencialinių lygčių sistemos integravimui reikia žinoti pradines sąlygas:

$$p_0(0); p_1(0); \dots;\; p_n(0); \qquad \sum_{k=0}^{n} p_k(0) = 1. \qquad \textbf{(1.26)}$$

1.3.2 STOCHASTINIS EKSPONENTINIO AUGIMO MODELIS

Remdamiesi dauginimosi ir nykimo procesų teorija, apibrėžkime, kad stochastinio eksponentinio modelio atveju populiacijos dydis laiko momentu *t* yra lygus *N(t)*, kuris yra atsitiktinis dydis tegul $p_n(t)$ bus tikimybė, kad populiacijos dydis laiko momentu *t* bus lygus n. Tai reiškia, kad $p_n(t) = P\{N(t) = n\}$. Savaime suprantama, kad populiacijos dydis dydžio reikšmės n gali būti tik teigiami sveikieji skaičiai. Kaip jau minėta praeitame skyriuje tarkime, kad b_n nusako gimstamumo intensyvumą $b_n = bn$, o d_n mirtigumo intensivymą $d_n = dn$, čia $n = 0,1,2, \dots\dots\dots$, tuomet perėjimas iš vienos populiacijos būsenos (populiacijos padidėjimas, sumažėjimas) į kitą turi tenkinti tokią sąlygą:

$$P\{N(t+\Delta t)=n+i|N(t)=n\}=\begin{cases} b_n\Delta t+o\Delta t, & jei\ i=1 \\ d_n\Delta t+o\Delta t, & jei\ i=-1 \\ 1-(d_n+b_n)\Delta t+o\Delta t, & jei\ i=-1 \\ o\Delta t, & Kitu\ atvėju \end{cases}. \quad \textbf{(1.27)}$$

Kadangi aprašomas procesas yra akivaizdžiai žuvimo ir dauginimosi procesas, jo perėjimo tikimybės $P(t)=[p_0(t), p_1(t), \dots\dots, p_n(t)\ \dots\dots..]$, turi tenkinti (1.25) Kolmogorovo lygčių sistemą, kuri yra begalinė, o jos matricinė išraiška bus:

$$\frac{dp}{dt}=Qp \quad \textbf{(1.28)}$$

Čia matrica Q yra

$$Q=\begin{pmatrix} -b_0 & d_1 & 0 & 0 & \dots\dots \\ b_0 & -b_1-d_1 & d_2 & 0 & \dots\dots \\ 0 & b_1 & -b_2-d_2 & d_3 & \dots\dots \\ \dots.. & \dots.. & \dots. & \dots.. & \dots. \end{pmatrix} \quad \textbf{(1.29)}$$

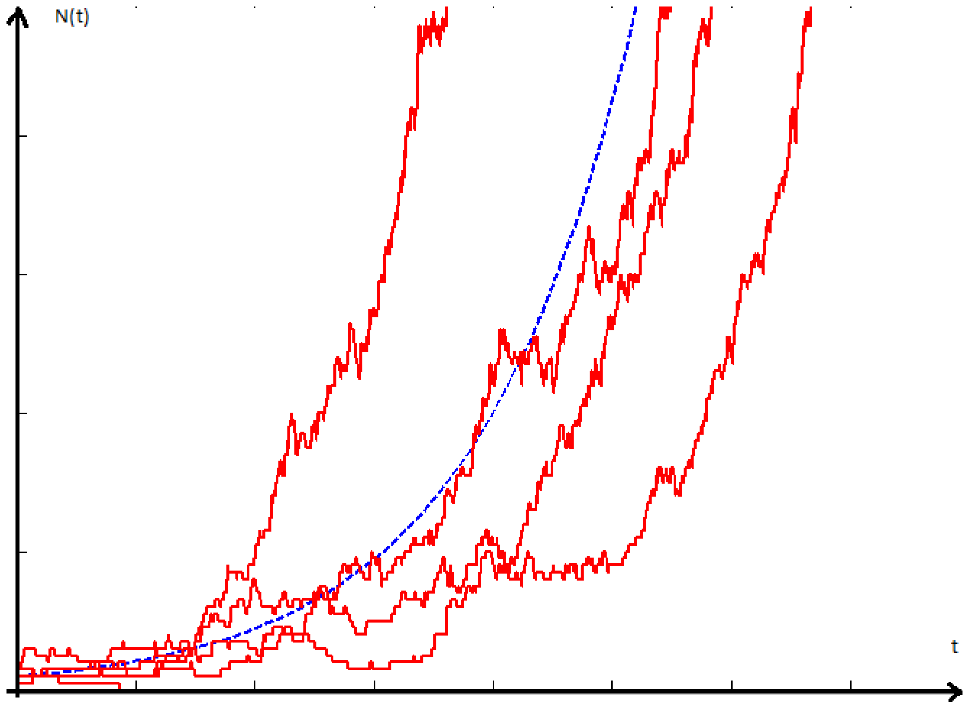
Toks eksponentinio augimo modelis yra tolydaus laiko Markovo procesas, kurio dinamika yra plačiai ištyrinėta. Verta paminėti, kad tokio modelio augimo vidurkis yra lygus:

$$m(t)=N_0 e^{(b-d)t} \quad \textbf{(1.30)}$$

Akivaizdu, kad jis sutampa su deterministinio eksponentnio augimo modelio sprendiniu. Paprastumo dėlei pažymėkime $\rho=e^{(b-d)t}$, tada tokio modelio dispersija bus lygi:

$$\sigma^2(t)=N_0\frac{(b+d)}{(b-d)}\rho(\rho-1)$$

Modelio dispersija auga eksponentiškai jei $b>d$, tikimybė kad populiacija išnyks yra lygi $(\frac{d}{b})^{N_0}$**,** o kad populiacija augs iki begalybės yra lygi $1-(\frac{d}{b})^{N_0}$.



1.10 pav. Eksponentinio augimo deterministinio (mėlyna kreivė) ir stochastinio (raudona laužtė) modelių sprendiniai

1.3.3 STOCHASTINIS LOGISTINIO AUGIMO MODELIS

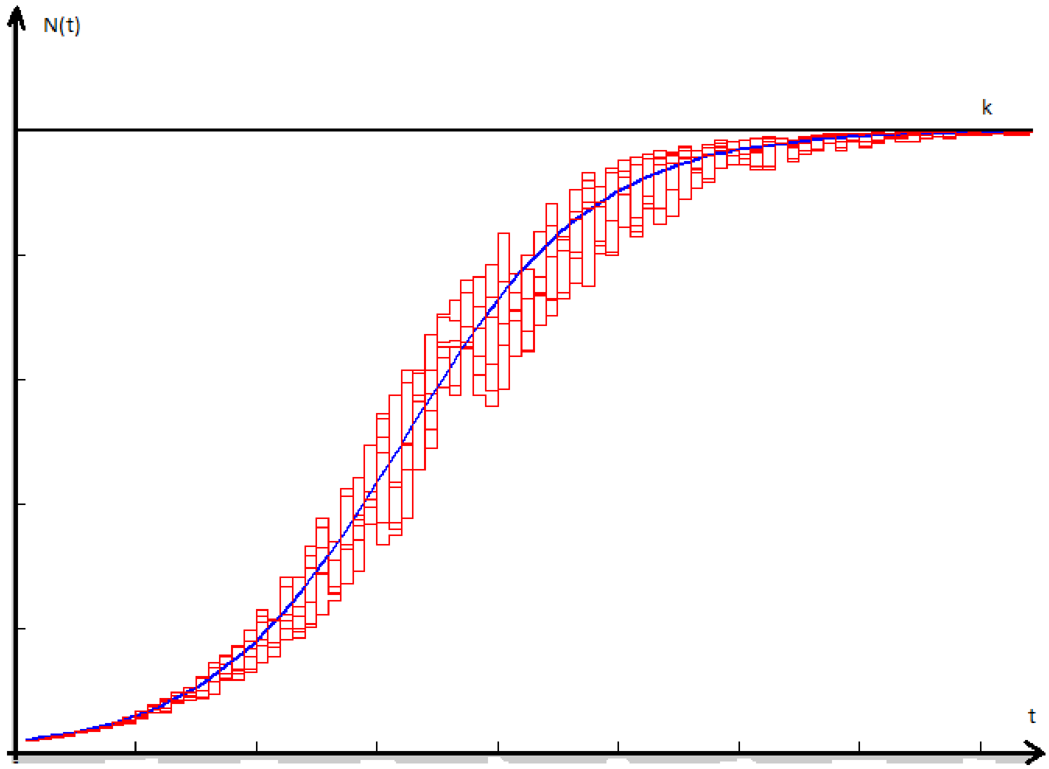
Stochastiniame logistiniame modelyje tegul $N(t)$ būna atsitiktinis dydis lygus gyventojų skaičiui laiko momentu t, o $p_n(t)$ tikimybė, kad gyventojų skaičiaus momentu t lygus $n = 0,1, \dots, M$, kur M yra maksimalus populiacijos dydis, $k \leq M$. Čia dydis k kaip ir determinstinio modelio atveju yra maksimalus populiacijos narių skaičius kurį gali išlaikyti tam tikra aplinka. Mirtingumo ir gimstamumo rodikliai vienam gyventojui, b ir d, dabar yra n funkcijos.

Gimstamumo ir mirtingumo rodikliai, b_n ir d_n, patenkina santykį:

$$b_n - d_n = rn(1 - \frac{n}{k}) \qquad \textbf{(1.31)}$$

kur $b_n$ir d_n yra neneigiamos n funkcijos $n = 0,1, \dots, M$.

Perėjimo iš būsenos į būseną tikimybės tenkina (1.27) lygybę, be to tikimybė $p_n(t)$ tenkina (1.28) lygtį $dp/dt = Qp$, kur Q tenkina lygybę (1.29). Logistiniame augime, b_n ir d_n yra neneigiamos funkcijos apibrėžiamos kai n yra baigtinis $\{0,1,2 \dots, M\}$ ir galioja sąryšis (1.31).

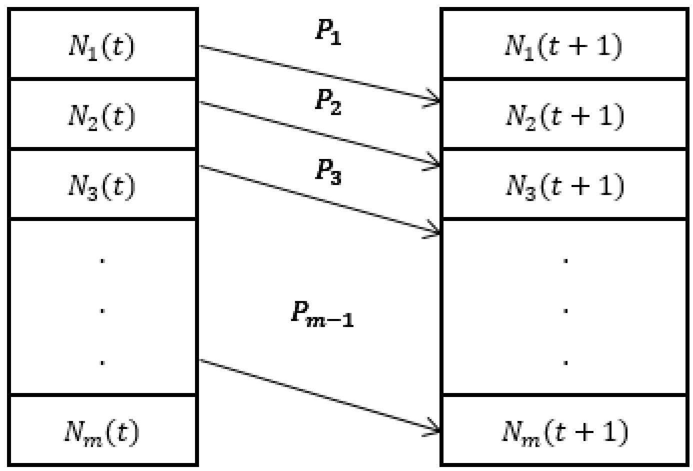


1.11 pav. Logistinio augimo deterministinio (mėlyna kreivė) ir stochastinio (raudona laužtė) modelių sprendiniai

Kadangi žmonių populiacija dažniausiai mažai priklauso nuo aplinkos veiksnių, o gerokai daugiau priklauso nuo ekonominių veiksnių, dažniausiai žmonių populiacija prognozuojama deterministiniais modeliais, nors savaime suprantama, kad populiacijos augimas kiekvienais metais nėra vienodas dydis, todėl stochastiniai modeliai šiuo atžvilgiu turi didelį privalumą.

1.3.4 STOCHASTINIS (MATRICINIS) STRUKTŪRIZUOTOS PAGAL AMŽIŲ POPULIACIJOS MODELIS

Kaip ir deterministiniu atveju, nors eksponentinio ir logistinio augimo modeliai yra gerai išnagrinėti ir plačiai naudojami nuo smulkiausių bakterijų iki žmonių populiacijos prognozavimo, tačiau nors jie puikiai gali prognozuoti populiacijos dydį, jie nesuteikia jokios informacijos apie populiacijos sudėtį pagal amžių, lytį ar kitus bruožus. Todėl patyrinėkime stochastinį populiacijos struktūrizuotos pagal amžių modelį, kur amžiaus ir laikas yra diskretūs, o ilgio atžvilgiu laiko intervalai yra vienodi. Modeliuojant žmonių populiaciją, mums dažniausiai pakanka žinoti populiacijos dydį kiekvienais metais todėl darykime prielaidą, kad mūsų vieno intervalo ilgis bus lygus metams. Suskaidykime savo turimą populiaciją į *m* amžiaus grupių, po vienerius metus, t.y. jei žmonių amžius dažniausiai vyrauja iki 100 metų amžiaus, suskaidome savo turimą populiaciją į 100 amžiaus grupių. Akivaizdu, kad per kiekviena tokį laiko intervalą $\Delta t = t - (t-1) = 1$, lygų metams i-*tojo* amžiaus individai i arba miršta arba progresuoja į vyresnę amžiaus grupę, i+*1*. Tegul $N(t) = [N_1(t), \ldots, N_m(t)]^T$ žymi m amžiaus grupių vektorių ir $N_t = \sum_{i=1}^{m} N_t(t)$ žymi totalų populiacijos dydį. Tokio modelio populiacijos kaitą galime aprašyti 1.12 paveiksle pateikta perėjimų iš vienos būsenos (amžiaus grupės) į kitą schema.



1.12 pav. Perėjimų iš jaunesnės į vyresnę amžiaus grupę schema

Kiekvienos išskyrus pirmąją amžiaus grupės dydį po vieno periodo galime rasti taip:

$$N_i(t+1) = P_{i-1}N_{i-1}(t) \quad \textbf{(1.32)}$$

Čia $P_i > 0$ yra individo klasėje i išgyvenimo iki jis pasiekia amžiaus klasę $i+1$ tikimybė. Pirmoji amžiaus grupė, be abejo, po vieno laiko intervalo bus lygi naujagimių skaičiaus, kurio susilauks kiekviena amžiaus grupė per tą laiko intervalą, sumai:

$$N_1(t+1) = \sum_{i=1}^{m} b_i N_i(t) \quad \textbf{(1.33)}$$

Čia $b_i \geq 0$ yra naujagimių skaičius klasėje i ,tenkantis vienam individui, kurie išgyvena iki laiko intervalo pabaigos.

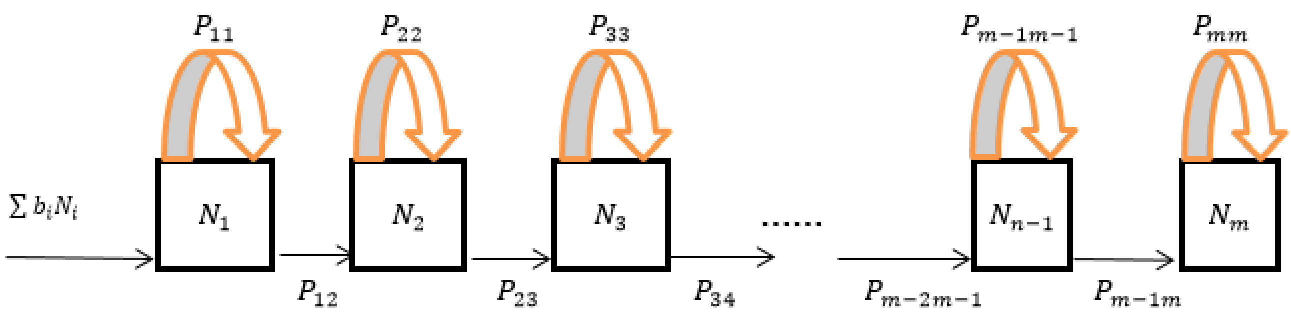
Tokiu būdu struktūrizuotos pagal amžių populiacijos dydį po vieno laiko intervalo (mūsų atveju metų) galime apskaičiuoti pagal tokią formulę:

$$N(t+1) = LN(t) \quad \textbf{(1.34)}$$

kur matrica L yra žinoma kaip Leslie matrica,

$$L = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & & b_{m-1} & b_m \\ P_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & P_{m-1} & 0 \end{bmatrix}$$

Dažniausiai gyvenime yra nenaudinga ir nepatogu (duomenų trūkumas ir darbo su jais sudėtingumas) skaidyti turimą populiaciją į vienerių metų amžiaus grupes. Jei tarsime, kad maksimali žmogaus gyvenimo trukmė mūsų modelyje yra 100 metų norėdami atlikti skaičiavimus visų pirma turėsime rasti 99 P_i reikšmes, bei dar tiek pat b_i reikšmių, o L taps 100x100 mato matrica. Tai gali sukelti daug nepatogumu, todėl dažniausiai gyvenime modeliuodami populiaciją ją skaidome į stambesnes nei vienerių metų amžiaus klases. Tokiu būdų savo modelį turime įtraukti papildomą sąlygą, kad po vieno laiko periodo (metų) individas priklausantis tam tikrai klasei gali ne tik pereiti į vyresnę klasę su tikimybe P_i, tačiau ir likti savo amžiaus klasėje, 1.13 paveikslas iliustruoja tokią perėjimų tarp amžiaus grupių schemą.



1.13 pav. Perėjimų tarp amžiaus grupių schema

Pataisykime (1.32) lygybę pataisę į:

$$N_i(t+1) = P_{i-1,i}N_{i-1}(t) + P_{i,i}N_i(t) \quad \textbf{(1.35)}$$

Čia $P_{i-1,i} > 0$ yra individo klasėje *i-1* perėjimo į klasę *i* tikimybė, po vienerių metų. O $P_{i,i} > 0$ yra tikimybė, kad individas liks savo klasėje po vienrių metų. Tarę, kad pirmoji mūsų klasė yra dar nevaisinga ir negali susilaukti palikuonių jos dydį po vienrių metų galime aprašyti taip:

$$N_1(t+1) = \sum_{i=2}^{m} b_i N_i(t) + P_{1,1}N_1(t) \quad \textbf{(1.36)}$$

Tokiu būdu (1.34) formulėje esančią matricą L (Leslie matrica) pakeisime į naują $\boldsymbol{L}$ (Lefkovich) matricą:

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} P_{11} & b_2 & & b_{m-1} & b_m \\ P_{12} & P_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & P_{23} & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & P_{m-1,m-1} & 0 \\ 0 & 0 & & P_{m-1,m} & P_{m,m} \end{bmatrix} \quad \mathbf{(1.37)}$$

Šio modelio privalumas lengvas jo apskaičiavimas, be to nors mes laikėme, kad perėjimų tikimybės yra skaliarai, taip pat būtų teisinga jai juos pakeistume laiko funkcijomis, tai, be abejo, gerokai apsunkintų skaičiavimus, tačiau atvertų naujas modeliavimo galimybes, kaip pavyzdžiui pamodeliuoti populiacijos kaita laike kintant (augant ar mažėjant) gimstamumui ar mirtingumui. Modelio pagrindinis trūkumas yra tai kad jis atvirkščiai nei deterministinis struktūrizuotas modelis, neišskiria vidinės ir išorinės migracijos efekto. Be to realiame gyvenime gali pasitaikyti, kad dėl išorinės imigracijos tam tikroje amžiaus grupėje, ar keliose grupėse, tikimybė išgyventi vienerius metus gali viršyti 1, o tai visiškai sugriautų modelį, nes jo rezultatai taptų iškreipti. Galvojant apie Lietuvos populiaciją žinome, jog tai yra labiau teorinės problemos, nes bent jau kol kas Lietuvoje imigracija stipriai nusileidžia emigracijai kiekvienoje amžiaus grupėje.

2. TIRIAMOJI DALIS IR REZULTATAI

2.1 LIETUVOS RESPUBLIKOS DEMOGRAFINIAI DUOMENYS

Duomenys apie Lietuvos Respublikos demografinius rodiklius: esamą gyventojų skaičių, gimstamumą, mirtingumą bei migraciją, yra nesunkiai pasiekiami ir prienami kiekvienam Lietuvos statistikos departamento internetinėje svetainėje () arba eurostat internetinėje svetainėje. Nors pastaroji yra naudinga tuo, kad kaupia visų Europos valstybių duomenis, tačiau yra gana sudėtingai valdoma, ir nepritaikyta duomenų eksportui. Todėl savo darbe daugiausiai naudojausi Lietuvos statistikos departamento duomenimis, juos kaupiau, analizavau ir ruošiau modeliavimui MS Exel programa. (Visi mano naudoti istoriniai demografiniai duomenys pateikiami 1 ir 2 darbo prieduose). Kadangi Lietuva yra nepriklausoma tik pora dešimtmečių Lietuvos statistikos departamentas kaupia informaciją apie piliečių migraciją tik nuo 1994 metų. Dauguma demografinės informacijos apie atskiras amžiaus grupes yra pasiekiama tik nuo 2000 ar vėlesnių metų. Todėl yra neįmanoma padaryti gilią pusės amžiaus ar ilgesnę gimstamumo ar kitų rodiklių analizę įvairiose amžiaus grupėse.

Kadangi 2004 metais Lietuva tapo Europos Sąjungos nare ir mūsų piliečiams atsivėrė galimybė laisvai (ar bent jau laisviau) migruoti Europoje, aš savo darbe daugiausiai analizavau 2004-2013 metų duomenis ir pagal juos atlikau prognozes.

2013 metais statistikos departamento duomenimis Lietuvos Respublikoje gyvena 2971905 žmonės. Gaila tačiau išsamesni duomenis apie gyventojų sudėtį pagal amžių, gyventojų mirtingumą bei gimstamumą, dar nėra pilnai apdoroti Lietuvos statistikos departamento ir yra nepasiekiami, todėl savo darbe naudosiuosi Eurostat arba Lietuvos statistikos departamento duomenimis nuo 2001 iki 2013 metų.

2.1.1 ISTORINIŲ DUOMENŲ ANALIZĖ

Šiame skyrelyje pamėginsime apžvelgti turimus Lietuvos demografinius (gyventojų kaitos, gimstamumo, mirtingumo bei migracijos) duomenis. Aptarsime demografines kaitos tendencijas bei pabandysime nuspėti kokių prognozių galime tikėtis.

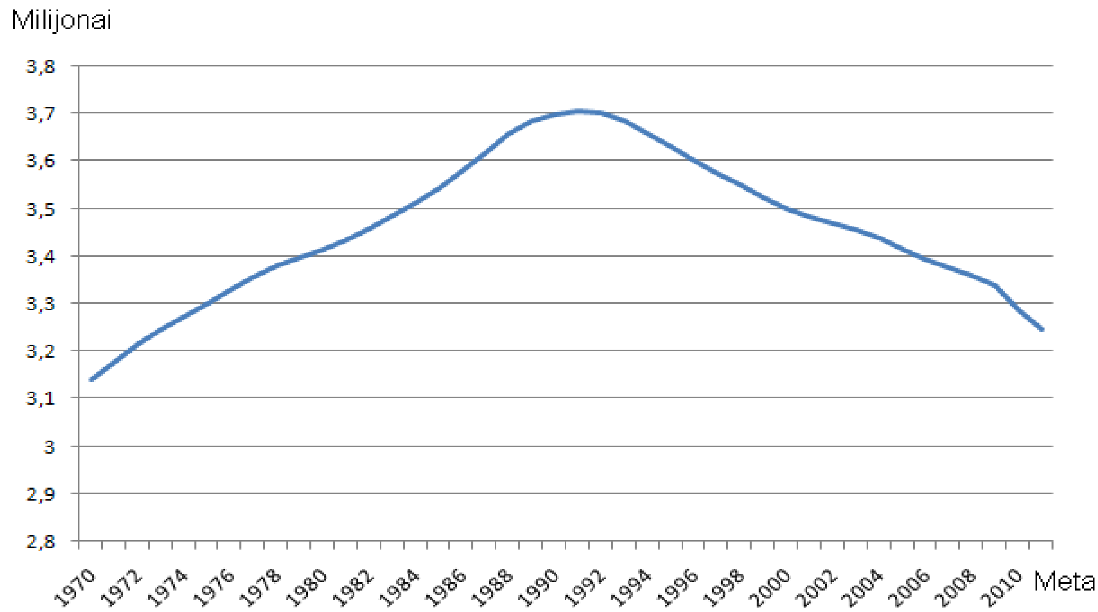
Lietuvos teritorijoje nuo 1987 iki 2011 metų dabartinėje Lietuvos teritorijoje vyko 8 visuotiniai gyventojų surašymai (2.1 lentelėje pateikiami jų duomenis).

2.1 lentelė

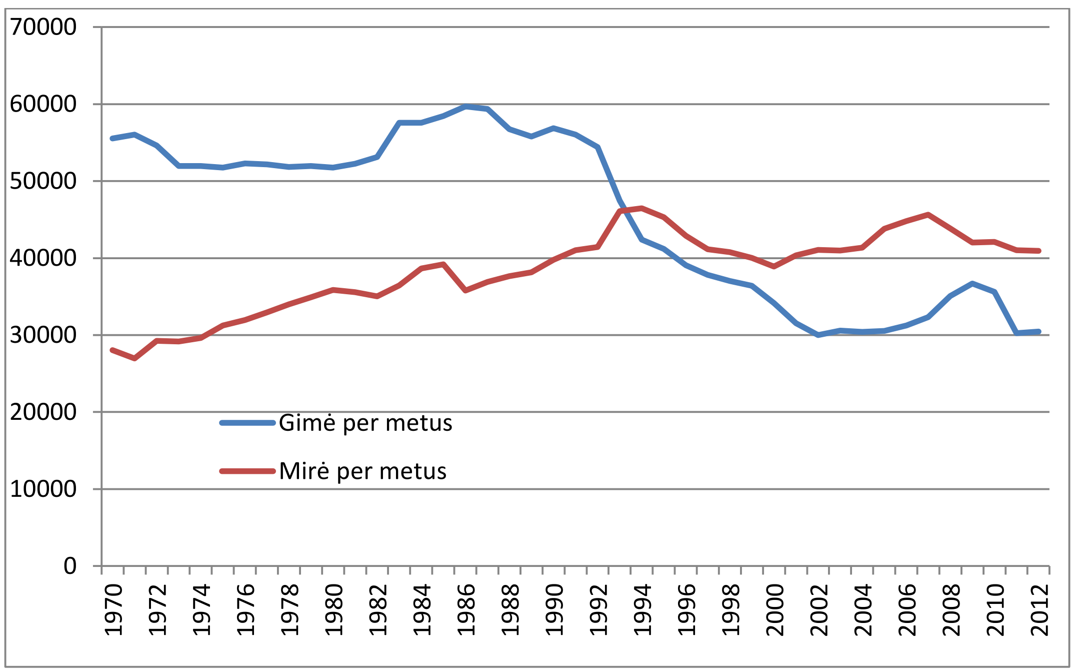
Gyventojų skaičius Lietuvos teritorijoje visuotinių gyventojų surašymų duomenimis

Metai	1897	1923	1959	1970	1979	1989	2001	2011	2013
Gyventojų sk. Mln.	2.75	2.146	2.711	3.1	3.398	3.369	3.46	3.244	2.971

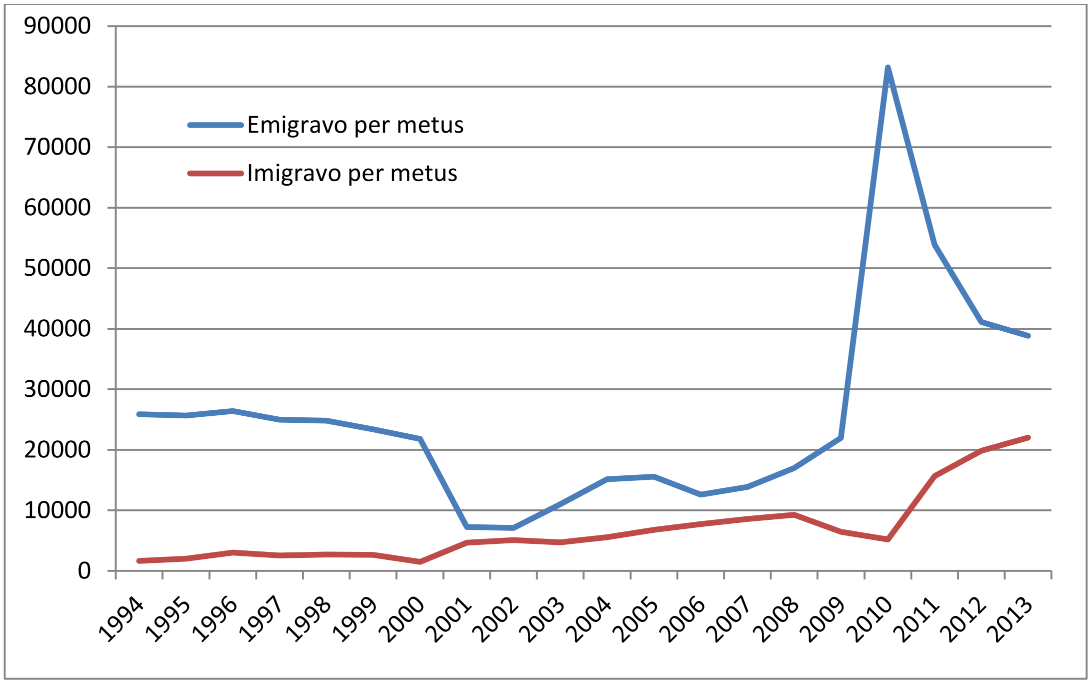
Kasmetė Lietuvos gyventojų kaita Lietuvos statistikos departamento pradėta fiksuoti tik nuo 1970 metų, (tikslūs duomenys pateikiami 1 priede):



2.1 pav. Lietuvos gyventojų kaitos istorija 1970-2013 metais



2.2 pav. Lietuvos gyventojų gimstamumo ir mirtingumo kaita 1970-2013 metais



2.3 pav. Lietuvos gyventojų migracijos kaita 1994 - 2013 metais

Kaip matome iš 2.1 2.2 ir 2.3 pav. Iki 1992 metų Lietuvos populiacija sparčiai augo, tačiau nuo 1992 metų dėl stipriai sumažėjusio gimstamumo (tai įtakojo po sovietų sąjungos žlugimo ūkio smukimas Lietuvoje, gyventojų neužtikrintumas dėl ateities ir daugybė kitų faktorių) ir išaugusios emigracijos Lietuvos gyventojų skaičius jau beveik 2 dešimtmečius sparčiai mažėja ir artėja prie 1970 metų lygio. Mažėjimas dar labiau pagreitėjo po 2008 metų pasaulinės ekonomikos krizės, kuri neigiamos įtakos turėjo ir Lietuvos ūkiui. Tai iššaukė dar neregėtus emigracijos mastus. Iš gimstamumo rodiklių galime pastebėti, kad gimimų dugnas Lietuvoje buvo apie 2002 metus, galbūt dėl vyriausybės išleistų gimstamumą skatinti turėjusių įstatymų: ilgų ir gerai apmokamų motinystės atostogų, gimstamumas nuo 2002 metų stabiliai augo, tačiau po 2008 metų krizės apkarpius motinystės atostogas bei jų apmokėjimą, vėl pastebimas gimstamumo mažėjimas. Į tai verta atsižvelgti galvojant apie Lietuvos demografinių problemų sprendimo būdus.

Taigi tokie duomenys akivaizdžiai sufleruoja, kad artimiausiu metu Lietuvos gyventojų skaičius tikrai mažės, net jei gimstamumo rodikliai artimiausiu metu aplenktų mirtingumo, Lietuvos populiacijos vis tiek neigiamai veiktų nepakeliamai didelė gyventojų emigracija. Todėl galime nesitikėti labai optimistinių prognozių. Beje, Lietuvos Vyriausybės ir Europos Sąjungos prognozėmis Lietuvoje 2050 metais tegyvens 2500000 žmonių.

2.1.2 LOGISTINIO IR EKSPONENTINIO MODELIŲ PARAMETRAI

Pažvelgus į (1.4) logistinės lygties sprendinį, akivaizdu, kad norint prognozuoti populiaciją, mums reikia žinoti šalies gimstamumo, mirtingumo, imigracijos ir emigracijos metinius rodiklius vienam gyventojui t.y. ε, bei šalies tikslią populiaciją duotuoju laiko momentu n_0. Pažymėkime gimimų skaičių per metus g mirimų skaičių per metus *m* imigrantų skaičių per metus *i* emigrantų skaičių per metus *e* tada

$$\varepsilon = \frac{g-m+i-e}{n_0} \qquad \textbf{(2.1)}$$

Šie rodikliai nuo 1994 metų yra kaupiami Lietuvos statistikos departamento ir nesunkiai prieinami kiekvienam. Tačiau, be to, mums reikia žinoti ir parametro *k* reikšmę. Kadangi *k* parametras nusako kokio dydžio populiacija galėtų stabiliai gyventi Lietuvoje, susiduriame su pirma problema, nes tokių tyrimų mano žiniomis Lietuvoje atlikta nėra. Galima tik spėti, kad Lietuvoje galėtų gyventi gerokai daugiau žmonių, nei dabar. Kaip bebūtų apytikslę *k* parametro reikšmę nesunku surasti logistiniu modeliu prognozuojant jau žinomus praeities duomenis. Mano skaičiavimais teorinė *k* reikšmė pagal istorinius Lietuvos Respublikos demografinius rodiklius yra 15 mln.

2.1.3 STRUKTŪRIZUOTŲ MODELIŲ DUOMENŲ MASYVAI

Pažvelgus į (1.11) lygčių sistemą, ir (1.34) lygtį akivaizdu, kad norint prognozuoti populiaciją, mums reikia žinoti šalies gimstamumo, mirtingumo, imigracijos ir emigracijos metinius rodiklius vienam gyventojui, kiekvienoje amžiaus t.y. α ir β bei tikslią kiekvienos amžiaus grupės populiaciją $N_{01},\ldots,N_{0n}$ duotuoju laiko momentu, bei jų sumą N_0. Be to mums reikia žinoti ir vidinės migracijos kiekvienoje grupėje dydį. Arba (1.34) lygties atveju mums reikia žinoti kiekvienos grupės išgyvenimo savo amžiaus grupėje tikimybę P_{ii} arba perėjimo į vyresnią amžiaus grupę tikimybę $P_{i,i+1}$. Tarkime, kad turimą populiaciją suskaidome į *n* amžiaus grupių tada kiekvienoje amžiaus grupėje papildomai mums reikės žinoti ir vyriausių toje amžiaus grupėje individų skaičių, nes jie po metų jau priklausys vyresnei amžiaus grupei t.y. emigruos į kitą grupę. Jei populiaciją suskaidytume pamečiui (į vienerių metų amžiaus grupes), akivaizdu, kad vidinė migracija būtų lygi grupės dydžiui.

Pažymėkime gimimų skaičių per metus kiekvienoje amžiaus grupėje g, tada

$$g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \ldots \\ g_n \end{pmatrix}$$

Mirimų skaičių per metus kiekvienoje amžiaus grupėje *m*,

$$m = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \dots \\ m_n \end{pmatrix}$$

Imigrantų skaičių per metus kiekvienoje amžiaus grupėje *i*,

$$i = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \dots \\ i_n \end{pmatrix}$$

Emigrantų skaičių per metus kiekvienoje amžiaus grupėje *i*

$$e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \dots \\ e_n \end{pmatrix}$$

Kiekvienos grupės vyriausių individų skaičių grupėje, kurie kitąmet pereis į kitą grupę pažymėkime *Ev*.

$$Ev = \begin{pmatrix} Ev_1 \\ Ev_2 \\ \dots \\ Ev_n \end{pmatrix}$$

Tada gimimų, mirimų imigracijos ir emigracijos intensyvumas kiekvienoje amžiaus grupėje bus: $gi=gi/N_{0i}$, $mi= mi/N_{0i}$, $ii= ii/N_{0i}$, $ei=ei/N_{0i}$.

$$gi = \begin{pmatrix} gi_1 \\ gi_2 \\ \dots \\ gi_n \end{pmatrix} mi = \begin{pmatrix} mi_1 \\ mi_2 \\ \dots \\ mi_n \end{pmatrix} ii = \begin{pmatrix} ii_1 \\ ii_2 \\ \dots \\ ii_n \end{pmatrix} ei = \begin{pmatrix} ei_1 \\ ei_2 \\ \dots \\ ei_n \end{pmatrix}$$

Pažymėkime, kad kiekvienos amžiaus grupės vyriausių narių, kurie kitąmet migruos į vyresnę amžiaus grupę skaičius, yra N_{ev}.

$$N_{ev} = \begin{pmatrix} N_{ev1} \\ N_{ev2} \\ \dots \\ N_{evn} \end{pmatrix}$$

Tuomet vidinės migracijos intensyvumas kiekvienoje grupėje bus:

$$Evi = \begin{pmatrix} \frac{Ev_1}{N_{ev1}} \\ \frac{Ev_2}{N_{ev2}} \\ \vdots \\ \frac{Ev_n}{N_{evn}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Evi_1 \\ Evi_2 \\ \dots \\ \dots \\ Evi_n \end{pmatrix}$$

Turėdami šiuos duomenis, galime sudaryti mūsų tyrimui svarbiausią (1.12) A bei L (1.37) matricas.

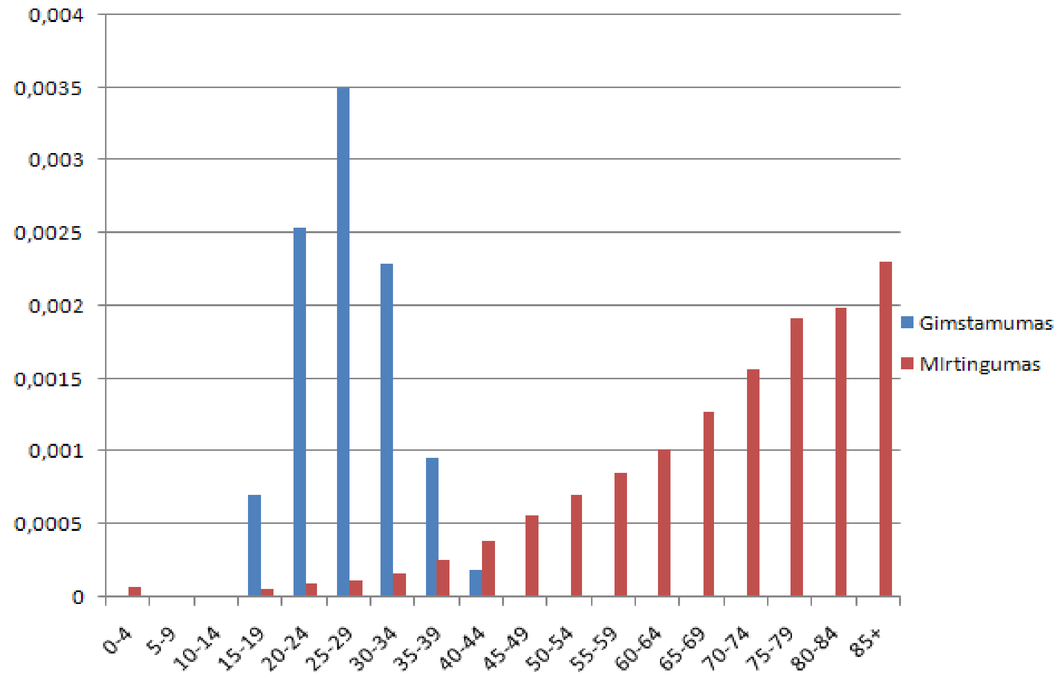
$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \tau_1 & g_2 & & g_{n-1} & g_n \\ Evi_1 & \tau_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & Evi_2 & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \\ 0 \quad 0 & & \dots & \tau_{i-1} & 0 \\ 0 \quad 0 & & & Evi_{n-1} & \tau_i \end{pmatrix}$$

Čia $\frac{g_i - m_i - e_i + i_i - Evi_i - N0_i * Evi_i}{N0_i} = \tau_i$ parodo kokio procento žmonių neteks jei $\tau_i > 0$ arba kokiu procentu žmonių pasipildys jei $\tau_i < 0$ *i-toji* amžiaus grupė .

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} Pp_1 & g_2 & & g_{n-1} & g_n \\ Evi_1 & Pp_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & Evi_2 & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \\ 0 \quad 0 & & \dots & Pp_{i-1} & 0 \\ 0 \quad 0 & & & Evi_{n-1} & Pp_i \end{pmatrix}$$

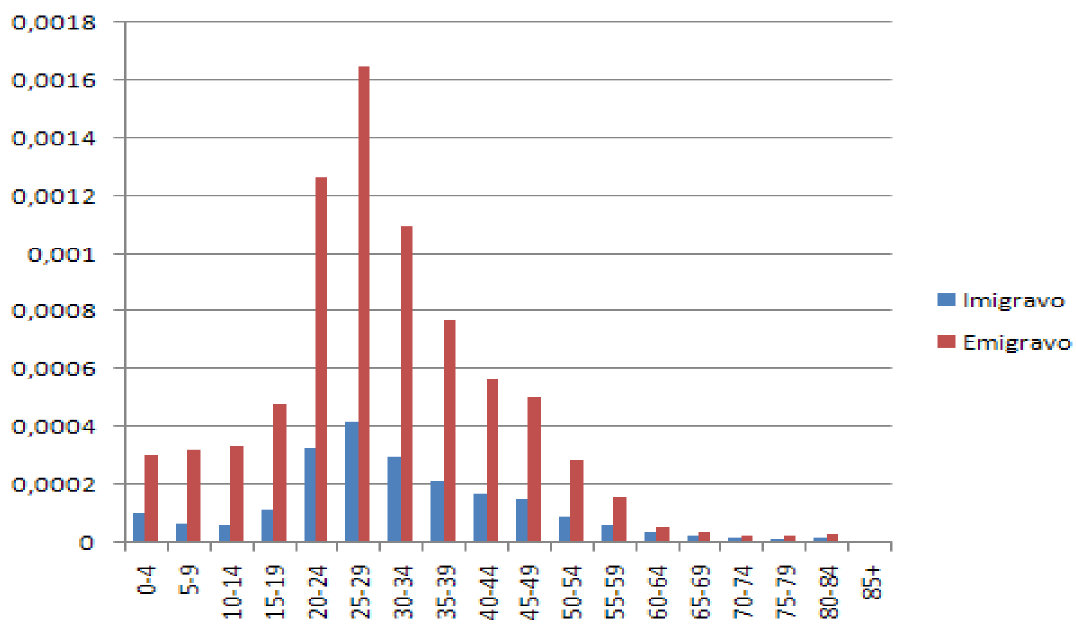
Čia $\frac{N0_i + g_i - m_i - e_i + i_i - Evi_i - N0_i * Evi_i}{N0_i} = Pp_i$ tikimybė pasilikti toje pačioje amžiaus grupėje ir kitais metais.

Kadangi Lietuvos statistikos departamentas savo duomenų bazėje pateikia mums reikiamus statistikos rodiklius suskaidytus smulkPp_iiausiai į penkerių metų amžiaus grupes, savo tyrime smulkiausiai populiaciją skaidysiu taipogi į penkerių metų amžiaus grupes. Kaip ir Logistiniu modeliui gimstamumo, mirtingumo, imigracijos ir emigracijos rodiklius imsiu kaip 2004-2013 metų rodiklių vidurkius (žr. 2 priedas).



2.4 pav. Gimstamumo ir mirtingumo intensyvumas Lietuvoje 5 metų amžiaus grupėse

Kadangi niekas neemigruoja iš paskutinės amžiaus grupės į vyresniąją, nes nebėra kur emigruoti. aš laikysiu, kad mirtingumas vyriausioje amžiaus grupėje lygus nuliui, o vidinė emigracija - Ev_n vyriausioje amžiaus grupėje bus lygi mirusių žmonių skaičiui šioje grupėje.



2.5 pav. Migracijos intensyvumas Lietuvoje 5 metų amžiaus grupėse

Gausiausiai iš Lietuvos emigruoja gyventojai iš amžiaus grupių, kuriose yra didžiausias gimstamumo intensyvumas, tai, be abejo, turėtų turėti labai neigiamą įtaką mūsų šalies populiacijos augimui. Kadangi nuo emigracijos labiausiai nyksta gimdančios ir auginančios vaikus amžiaus grupės, t.y. kiekvienos sveikos visuomenės „stuburas“.

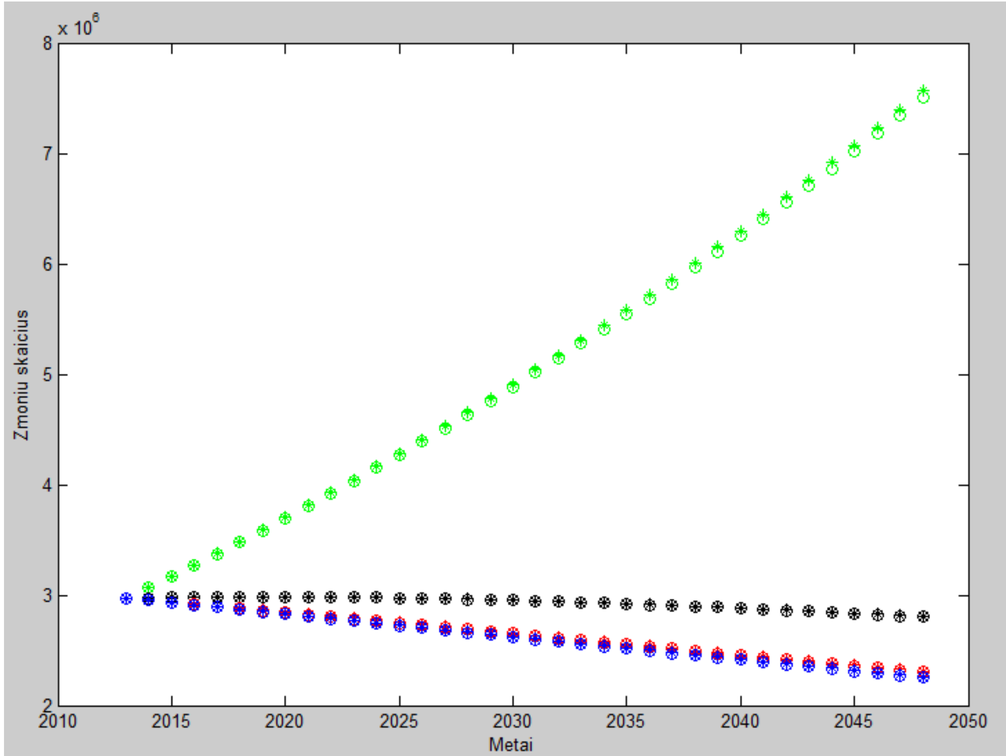
2.2. STRŪKTURIZUOTOS POPULIACIJOS MODELIŲ JAUTRUMO TYRIMAS

Prieš atliekant Lietuvos respublikos gyventojų skaičiaus prognozes svarbu patyrinėti, prognozavimui naudojamų modelių jautrumą. Dirbant su dideliais duomenų masyvais lengva padaryti klaidą, todėl svarbu žinoti ar tyrinėjami modeliai yra jautrūs nedideliems pradinių duomenų pokyčiams, ar atvirkščiai jie visiškai nejautrūs ir netgi padarę didelę klaidą sudarinėdami pradinių duomenų masyvus, gausime panašų rezultatą į tą jei klaidos padarę nebūtume. Tarkime pradiniai 1.2.5 ir 1.3.3 skyreliuose aprašytų modelių masyvai yra:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -0.020494 & 0.009644 & 0 \\ 0.035083 & -0.040269 + \Delta & 0 \\ 0 & 0.028702 + \Delta & -0.0461105 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 0.979505 & 0.009643 & 0 \\ 0.035083 & 0.95973 + \Delta & 0 \\ 0 & 0.028701 + \Delta & 0.953388 \end{pmatrix}$$

Patyrinėkime kaip skaičiavimo rezultatai priklausys nuo Δ reikšmės. 2.6 paveiksle pavaizduota stochastinio ir deterministinio modelių priklausomybė nuo pradinių duomenų masyvų, t.y. nuo parametro Δ. Mėlyna kreivė tai abiejų modelių prognozė 35 metams, kai $\Delta = 0$, raudona kreivė, kai $\Delta = 0{,}001$, juoda kreivė kai $\Delta = 0{,}01$, o žalia kreivė kai $\Delta = 0{,}05$.



2.6 pav. Struktūrizuotų modelių jautrumo tyrimas

Akivaizdu, kad netgi menkiausi Δ parametro pokyčiai sukelia didelius galutinių rezultatų pokyčius, todėl prieš atliekant prognozes yra labai svarbu, gerai ir preciziškai sudaryti bei parengti pradinius modeliavimo duomenis. Net prastai suskaičiavus vieną iš daugelio parametrų galime gauti visiškai nerealistišką prognozę, absoliučiai neatspindėsiančią realios situacijos. Tai ypač svarbu skaidant populiaciją į daugiau nei tris grupes, nes didėjant duomenų masyvo apimtims didėja ir tikimybė padaryti klaidą.

2.3 LIETUVOS RESPUBLIKOS GYVENTOJŲ SKAIČIAUS IR SUDĖTIES PROGNOZAVIMAS

Prognozavimui atlikti naudosimės duomenimis, esančiais 1 ir 2 priedo lentelėse. 1 priede pateikiama daugiametė Lietuvos demografinių duomenų statistika, nestruktūrizuota pagal gyventojų amžiaus grupes ar lygtį, tuo tarpu antrame priede pateikiama struktūrizuoti pagal amžių bei lytį Lietuvos gyventojų demografiniai rodikliai.

2.3.1. LIETUVOS RESPUBLIKOS GYVENTOJŲ SKAIČIAUS IR SUDĖTIES PROGNOZĖ LOGISNIU MODELIU

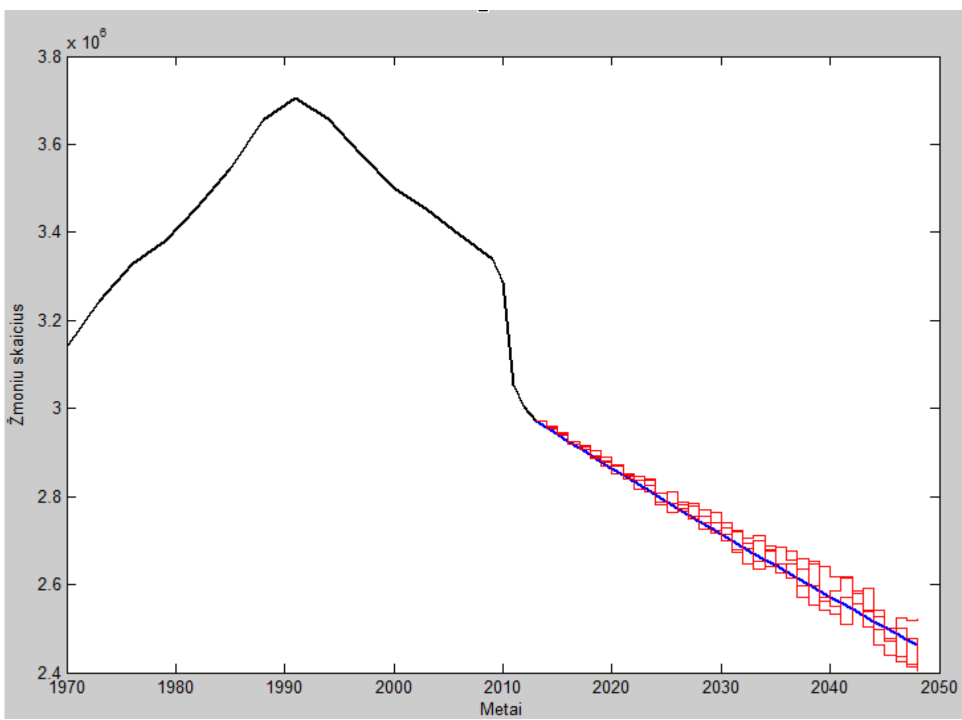
2.2 lentelė

Lietuvos Respublikos demografinių 2004-2013 metų duomenų statistiniai duomenų vidurkiai

Gimė	Mirė	Imigravo	Emigravo
32515	42719	22011	31311

Logistiniu deterministiniu ir logistiniu stochastiniu modeliais atlikęs prognozę 35-iems metams su 3.3 lentelės duomenimis ir *k* laikydami 15 milijonų gausime tokį Lietuvos populiacijos kitimo grafiką. (Tikslūs prognozavimo rezultatai pateikiami 4 priede)

3.6 paveiksle pateikiama reali Lietuvos populiacijos kaita 1970-2013 metais (juoda kreivė). Logistiniu deterministiniu (mėlyna kreivė) ir logistiniu stochastiniu (raudona kreivė) modeliais apskaičiuotos Lietuvos populiacijos kaitos prognozės 35-iems metams. Iš grafiko matyti, kad Lietuvos populiacija pastoviai mažės abiem atvejais, mažėjimas kiek mažesnis logistinio modelio prognozėje. Modeliai rodo, kad Lietuvoje 2048 metais gyvens 2400000 arba 250000 žmonės. Šios prognozės yra panašios į Lietuvos respublikos vyriausybės ar Europos komisijos, kurios prognozuoja, kad Lietuvoje 2050 metais gyvens 2500000 gyventojų.



2.7 pav. Lietuvos populiacijos kaitos prognozė 2013-2048 metais

Iš logistinių modelių prognozių negalime sužinoti jokios informacijos apie populiacijos sudėti, ar ji senės, ar jaunės, kokia išsilaikys vyrų moterų proporcija. Todėl šias prognozes laikysime daugiau kaip kelrodę žvaigždę, savo tolimesniuose tyrimuose. Prognozuojant stochastiniu modeliu laikiau, kad populiacijos prieaugio reikšmė ε yra atsitiktinis dydis su vidurkiu sutampančiu deterministinio modelio vidurkiui, o dispersija lygi $\frac{1}{1000}$. Kaip bebūtų akivaizdu, kad deterministinis modelis geriau tinka būtent žmonių populiacijos prognozavimui, nes žvelgiant į istorinius duomenis, akivaizdu, kad žmonių populiacija, nors ir ne nuolatos auga tuo pačiu tempu, tačiau atskiromis atkarpomis tikrai galime laikyti kad augimo intensyvumas yra vienodas.

2.3.2 LIETUVOS RESPUBLIKOS GYVENTOJŲ SKAIČIAUS IR SUDĖTIES PROGNOZĖ STRŪKTURIZUOTOS POPULIACIJOS MODELIAIS

Norint realiai prognozuoti ne tik populiacijos skaičių, bet ir jos sudėtį pagal amžių ar lyti, pasitelkime 1.2.5 ir 1.3.3 skyreliuose aprašytus modelius. Natūraliai kyla klausimas į kelias dalis geriausia skaidyti turimą populiaciją? Kaip nuo to priklauso prognozavimo rezultatai? Aišku mes negalėsime suskaidyti populiacijos į mažesnes nei 5 metų grupes, nes surinkti tokią informaciją užtruktų be galo daug laiko, kadangi Lietuvos statistikos departamentas ir *Eurostat* agentūra tokios informacijos nerenka arba nepateikia. Pamėginsime atlikti prognozavimo eksperimentus suskaidę Lietuvos populiaciją į 3, 9 18, bei 36 grupes. Pirmais trimis atvejais populiaciją skaidysime tiktai pagal amžių. Atitinkamai į grupes kas 30, kas 10 ir kas 5 metus. Paskutiniu atveju populiaciją skaidysim į 18 grupių pagal amžių, bei lytį (vyrus ir moteris)

Pradėkime nuo populiacijos skaidymo į tris amžiaus grupes: 0-29 metų, 30-59 metų ir 60+ metų. Deterministinio modelio duomenų matrica A ir Stochastinio-matricinio modelio duomenų matrica L įgys tokias reikšmes:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -0.020494 & 0.009644 & 0 \\ 0.035083 & -0.040269 & 0 \\ 0 & 0.028702 & -0.0461105 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 0.979505 & 0.009643 & 0 \\ 0.035083 & 0.95973 & 0 \\ 0 & 0.028701 & 0.953388 \end{pmatrix}$$

Kadangi 1.2.5 modelio lygčių sistemą galime išspręsti daugeliu metodu, t.y. Oilerio, matricų, neapibrėžtųjų koeficientų ir apytiksliais metodais, galime užrašyti kiekvieno iš metodų tikslų sprendinį ir jo išraišką. Analizinis sprendinys Oilerio metodu bus lygus:

$$\vec{\mathrm{N}}(\mathrm{t}) = -415074 * \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} * e^{-0.046110*t} + 179862 * \begin{pmatrix} 0.055314 \\ -0.175493 \\ 0.982746 \end{pmatrix} * e^{-0.051265171*t} - 875265 * \begin{pmatrix} -0.568074 \\ -0.6476759 \\ -0.507747 \end{pmatrix} * e^{-0.00949862*t}$$

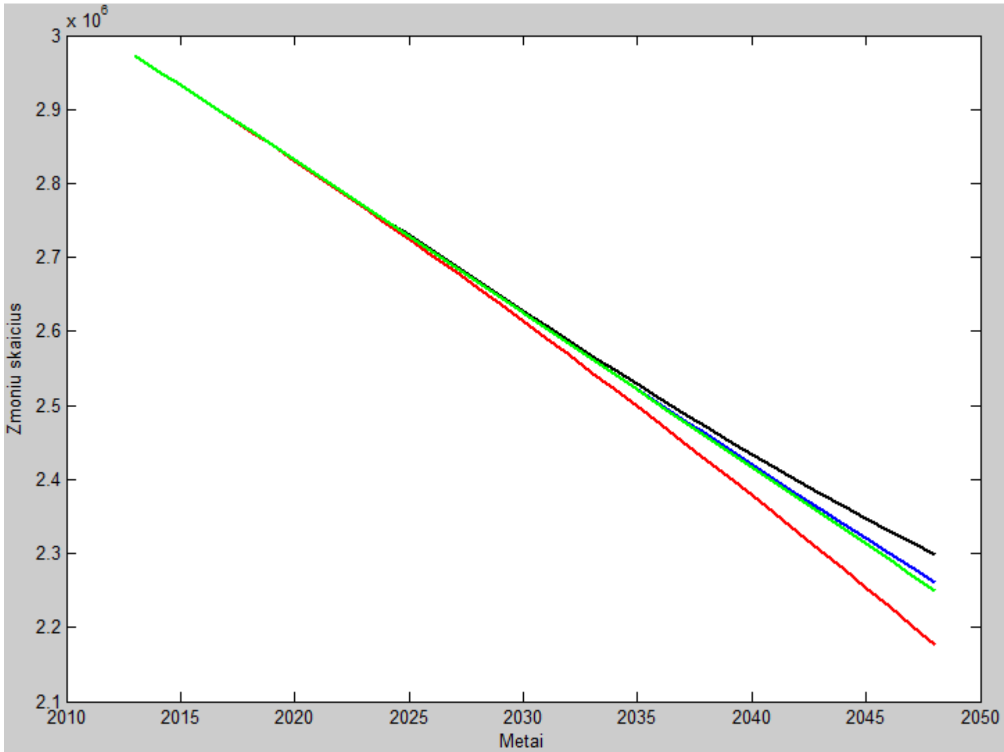
Analizinis sprendinys matricų metodu bus lygus:

$$\vec{\mathrm{N}}(\mathrm{t}) = \begin{pmatrix} 0.05628597 & 1.118812 & 0 \\ -0.179592 & 1.275586 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} e^{-0.046110*t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-0.051265171*t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-0.00949862*t} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 4.6771484 & -4.102309835 & 0 \\ 0.65850364 & 0.20638178 & 0 \\ -5.3356520 & 3.895928054 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1075239 \\ 1182820 \\ 713846 \end{pmatrix}$$

Sprendinys apytikslio skaičiavimo metodu tada bus lygus:

$$\vec{\mathrm{N}}(\mathrm{t}) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.020494 & 0.009644 & 0 \\ 0.035083 & -0.040269 & 0 \\ 0 & 0.028702 & -0.0461105 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -0.020494 & 0.009644 & 0 \\ 0.035083 & -0.040269 & 0 \\ 0 & 0.028702 & -0.0461105 \end{pmatrix}^2 + \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -0.020494 & 0.009644 & 0 \\ 0.035083 & -0.040269 & 0 \\ 0 & 0.028702 & -0.0461105 \end{pmatrix}^3 + \frac{1}{24} \begin{pmatrix} -0.020494 & 0.009644 & 0 \\ 0.035083 & -0.040269 & 0 \\ 0 & 0.028702 & -0.0461105 \end{pmatrix}^4 + \frac{1}{120} \begin{pmatrix} -0.020494 & 0.009644 & 0 \\ 0.035083 & -0.040269 & 0 \\ 0 & 0.028702 & -0.0461105 \end{pmatrix}^5 \right) * t$$

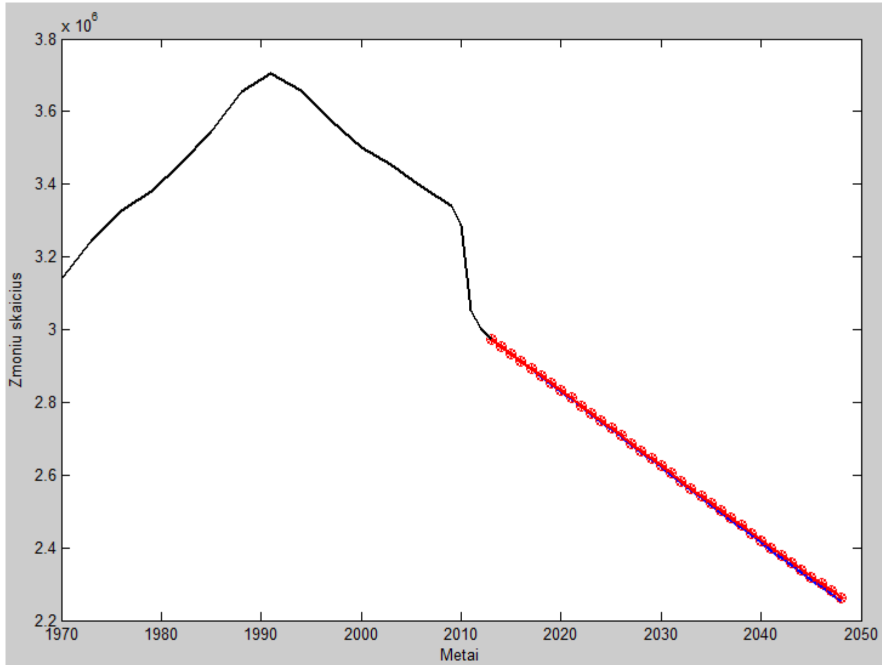
Atskirai neišskirsiu sprendinio neapibrėžtųjų koeficientų metodu, nes jis labai panašus į Oilerio ir matricų metodus, o jo sprendinys savaime aišku turi su jais visiškai sutapti. Analizinių sprendinių skaidant populiaciją į smulkesnes grupes nepateiksiu dėl labai didelio duomenų matricų *A* ir *L* formato. Kyla natūralus klausimas dėl to kiek narių reikia sudėti skaičiuojant` apytiksliu metodu, kad gautume norimą tikslumą, 2.8. paveiksle pateikiama kaip priklauso sprendinio tikslumas nuo pasirinkto sudedamų narių skaičiaus. Mėlyna kreivė, tikslaus sprendinio Oilerio metodu grafikas, raudona kreivė apytikslio skaičiavimo metodo grafikas, kai sudedami 3 eilutės nariai, juoda kreivė apytikslio skaičiavimo metodo grafikas, kai sudedami 4 eilutės nariai, žalia kreivė apytikslio skaičiavimo metodo grafikas, kai sudedami 5 eilutės nariai.



2.8 pav. Apytikslio skaičiavimo metodo tyrimas

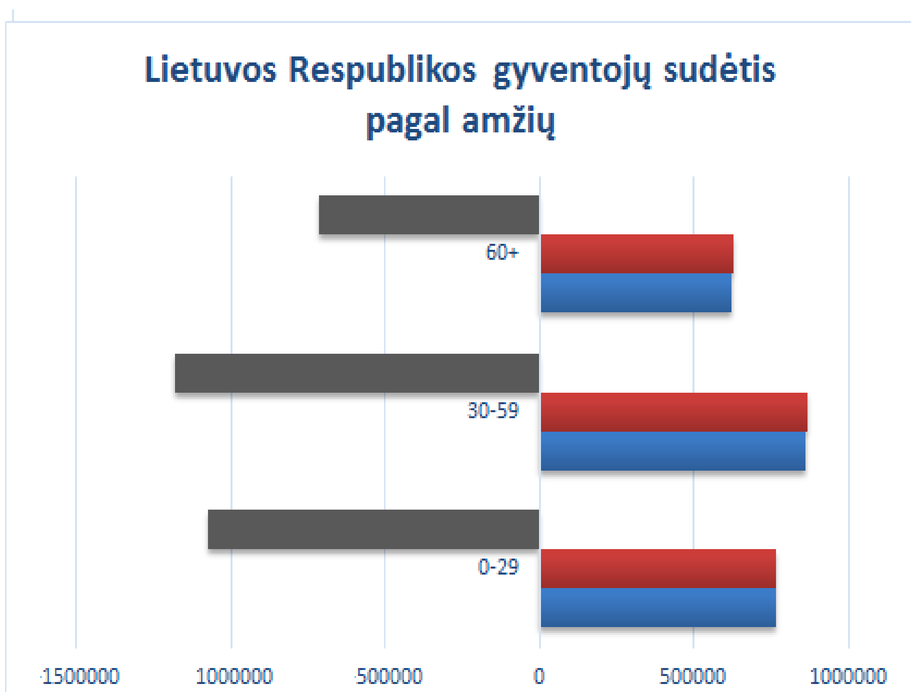
Akivaizdu, kad kuo daugiau narių sudedame, skaičiuodami apytikslio skaičiavimo metodu, tuo ilgesnį laiką *t* rezultatai sutampa su tikslių metodų rezultatais. Tačiau nors skaidant populiaciją į tris amžiaus grupes pakankamo tikslumas gaunamas sudėjus tik 6 eilutės narius, skaidant populiaciją į daugiau grupių, t.y. didinant *A* matricos matą reikia sudėti gerokai daugiau eilutės narių. Kai populiacija skaidoma į 9 grupes reikia sudėti 14 eilutės narių. Be to, akivaizdu, kad tikslumas taip pat priklauso ir nuo prognozavimo laiko *t*, kuo ilgesniam laikui norime atlikti prognozę, tuo daugiau narių reikia sudėti.

2.9 pav. Pateikiamos Lietuvos populiacijos prognozės 35-iems metams, populiaciją skaidant į tris amžiaus klases, naudojant stochastinį (mėlyna kreivė) ir deterministinį (raudona kreivė) struktūrizuotos populiacijos modelius. Deterministinio modelio rezultatai gauti visais trimis metodais (Oilerio *, Matricu o, apytikslis tiesė).



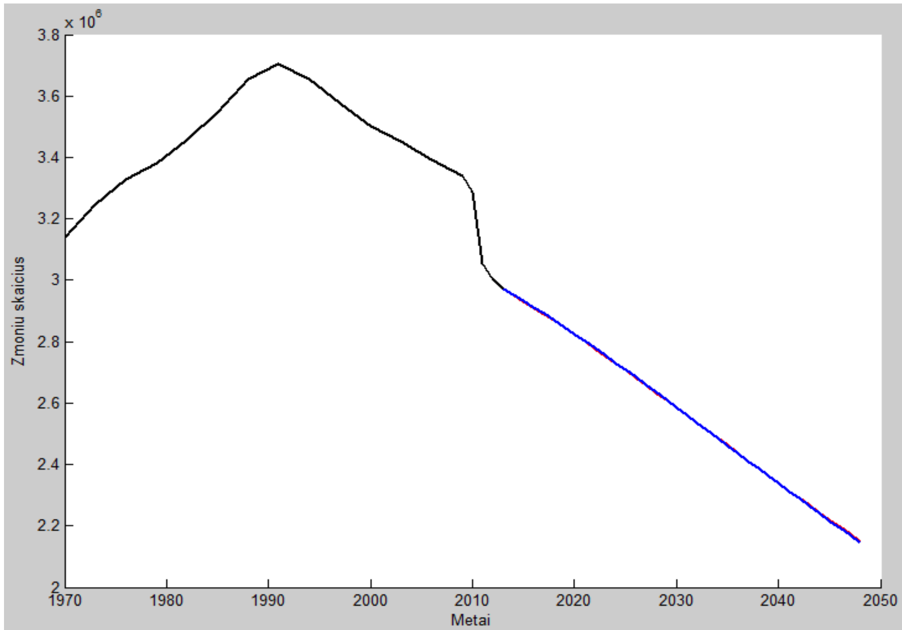
2.9 pav. Lietuvos populiacijos kaitos prognozė struktūrizuotos pagal amžių populiacijos modeliais 2013-2048 metais (kai grupių skaičius yra 3)

Abiejų modelių prognozės yra labai artimos, pagal jas Lietuvoje 2048 metais tegyvens 2260997 arba 2253318 gyventojai.

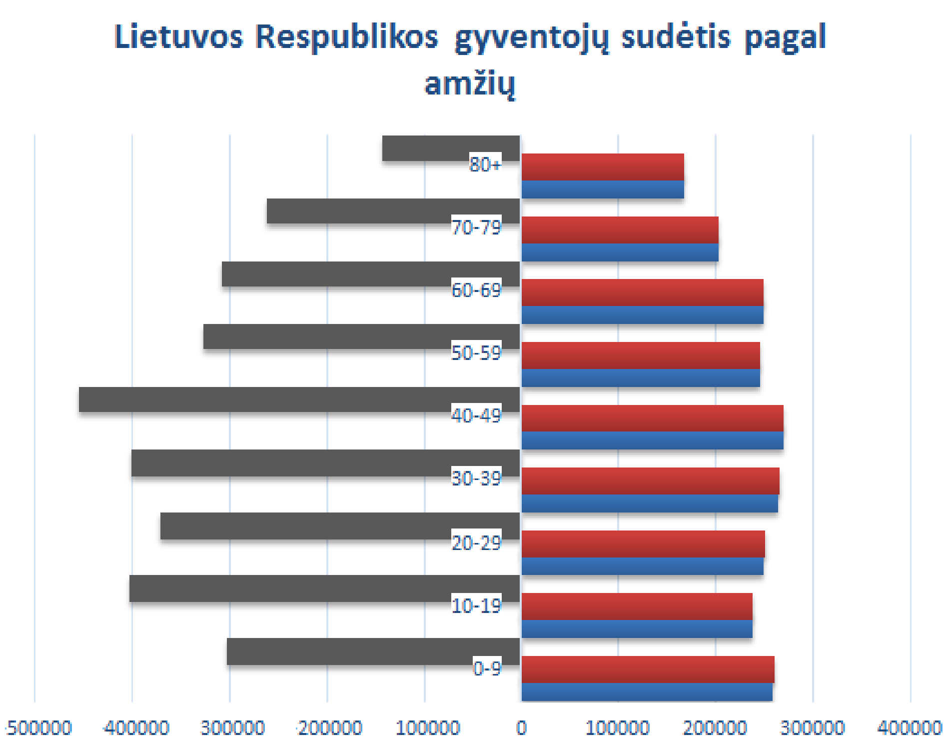


2.10 pav. Lietuvos populiacijos sudėtis pagal 3 amžiaus grupes 2013 (juodi stulpeliai) ir 2048 metais (mėlyni stulpeliai stochastinio modelis, raudoni deterministinis)

Suskaidę populiaciją į 9 dalis gausime amžiaus grupes nuo 0 iki 9 metų, nuo 10 iki 19 ir t.t. iki 80+ metų amžiaus grupės. 2.11 paveiksle matyti, kad skaičiuodami abiem modeliais (stochastinis mėlyna kreivė, deterministinis raudona) gavome, kad Lietuvoje 2048 metais tegyvens 2145000 gyventojai.

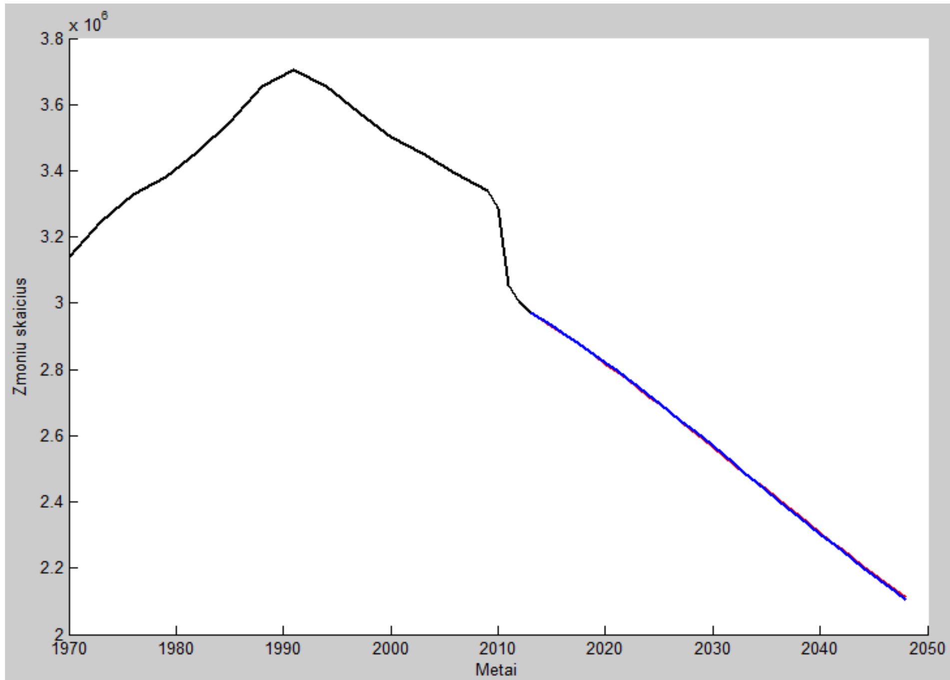


2.11 pav. Lietuvos populiacijos kaitos prognozė struktūrizuotos pagal amžių populiacijos modeliais 2013-2048 metais (kai grupių skaičius yra 9)

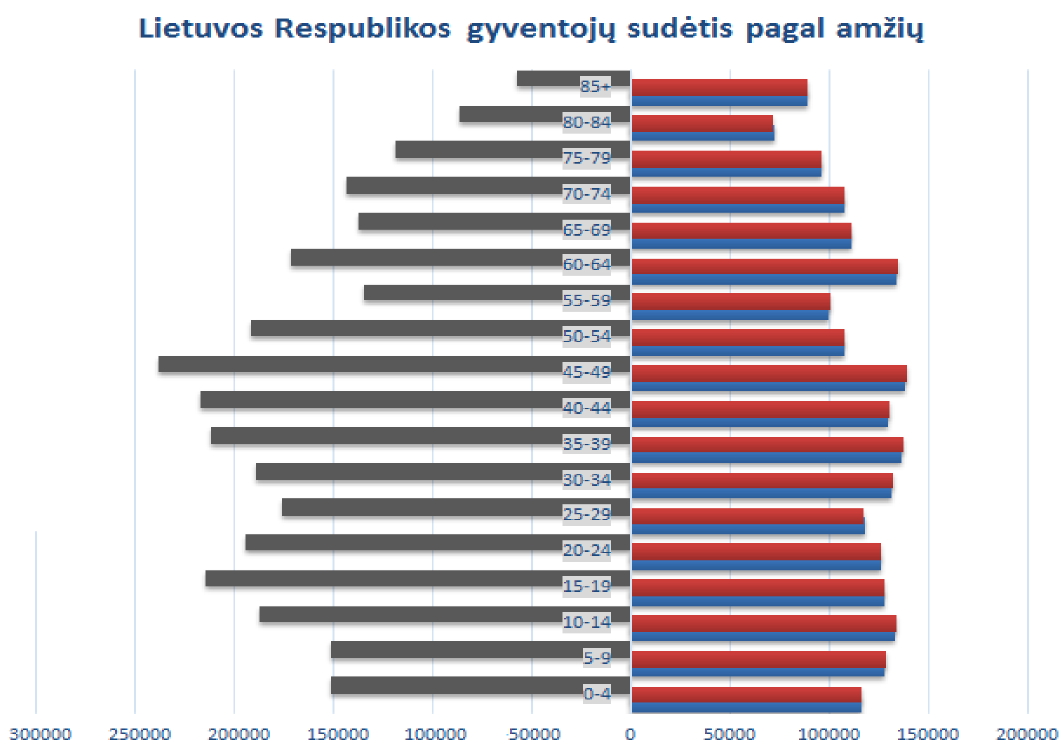


2.12 pav. Lietuvos populiacijos sudėtis pagal 9 amžiaus grupes 2013 (juodi stulpeliai) ir 2048 metais (mėlyni stulpeliai stochastinis modelis, raudoni deterministinis)

Analogiškai gailime suskaidyti populiaciją ir į 18 dalių, t.y. į amžiaus grupes po 5 metus. 2.13 paveiksle matyti, kad taip skaičiuodami abiem modeliais gauname, kad Lietuvoje 2048 metais tegyvens apie 2100000 gyventojų.

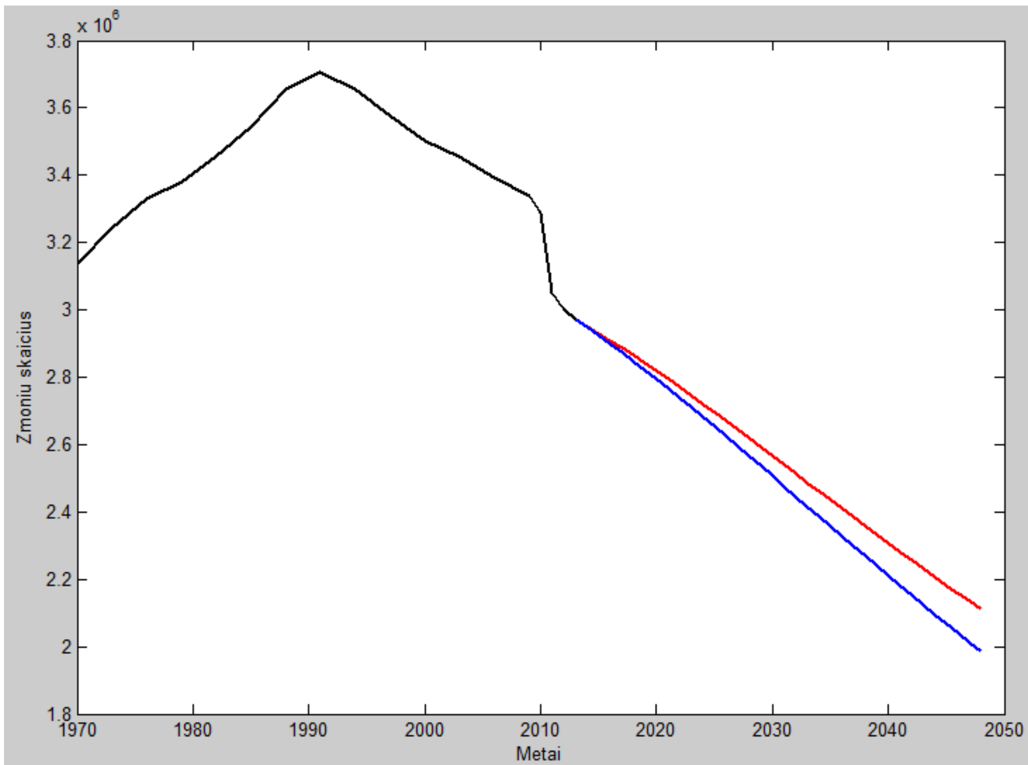


2.13 pav. Lietuvos populiacijos kaitos prognozė struktūrizuotos pagal amžių populiacijos modeliais 2013-2048 metais (kai grupių skaičius yra 18)



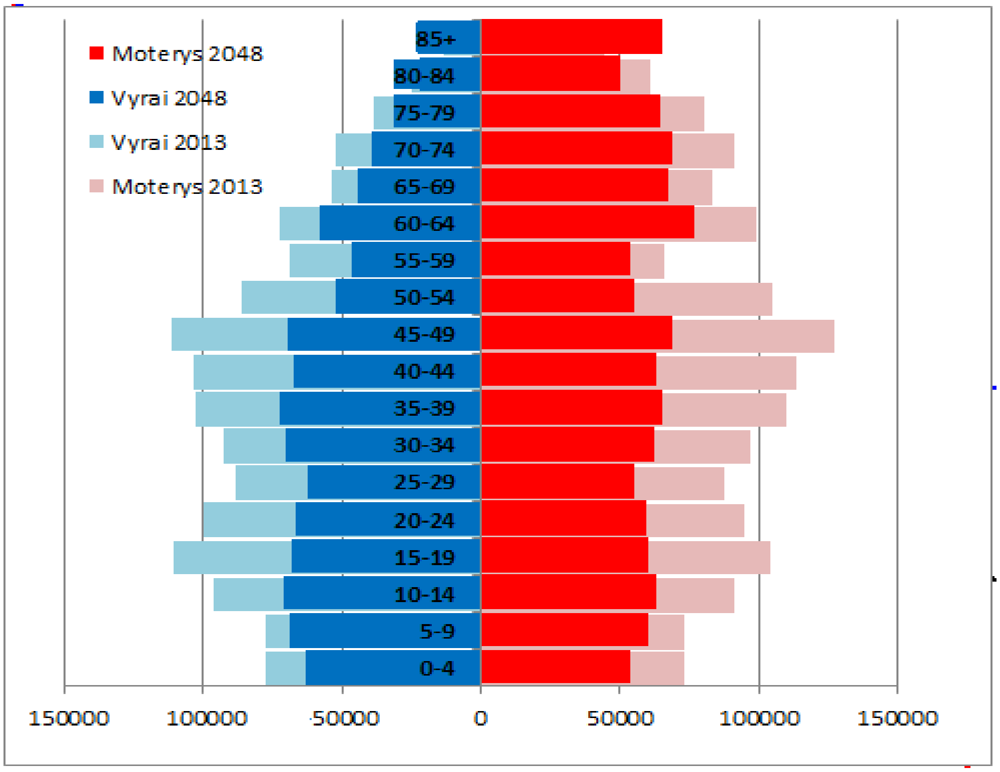
2.14 pav. Lietuvos populiacijos sudėtis pagal 18 amžiaus grupių 2013 ir 2048 metais

Galiausiai suskaidykime Lietuvos populiaciją į 36 dalis, t.y. pirmiausiai suskaidykime pagal lytį į vyrus ir moteris, o po to kiekvieną lytį atskirai suskaidysime į 18 amžiaus grupių. 2.15 pav. matyti, kad skaičiuodami abiem modeliais (stochastinis mėlyna kreivė, deterministinis raudona) gavome, kad Lietuvoje 2048 metais pagal pesimistiškesnę stochastinio-matricinio modelio prognozę gyvens kiek mažiau nei 2 mln. gyventojų, arba pagal kiek optimistiškesnę deterministinio modelio prognozę – 2,1 mln. gyventojų.

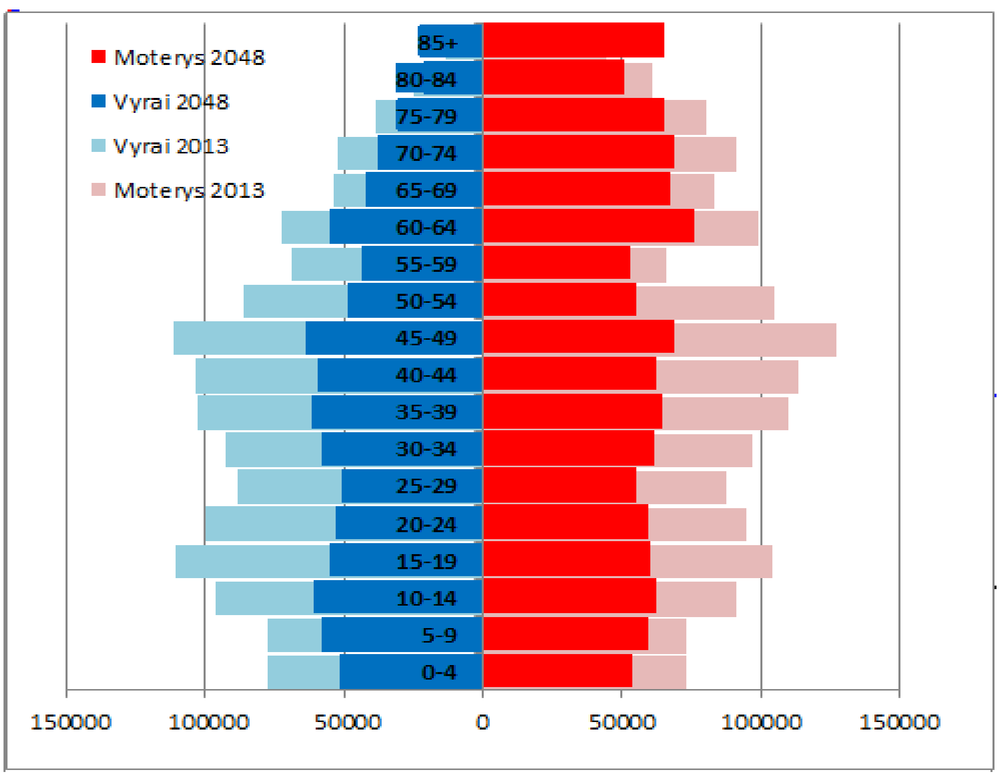


2.15 pav. Lietuvos populiacijos kaitos prognozė struktūrizuotos pagal amžių populiacijos modeliu 2013-2048 metais (kai grupių skaičius yra 36)

Skaidant populiaciją į smulkesnes grupes stochastinio-matricinio modelių prognozės visiškai sutapo, arba buvo labai panašios, tačiau skaidant populiaciją į 36 klases jos pradėjo skirtis, tai galėjo įtakoti pradinių duomenų paklaidos, kadangi modeliai yra labai jautrūs. Kaip bebūtų, rezultatai visgi yra pakankamai artimi. Patyrinėkime, kaip skirsis abiejų modelių populiacijos sudėties prognozės. 2.16 ir 2.17 paveiksluose pateiktas abiejų modelių prognozės palyginimas su 2013 metų Lietuvos populiacijos sudėtimi pagal amžių ir lytį.

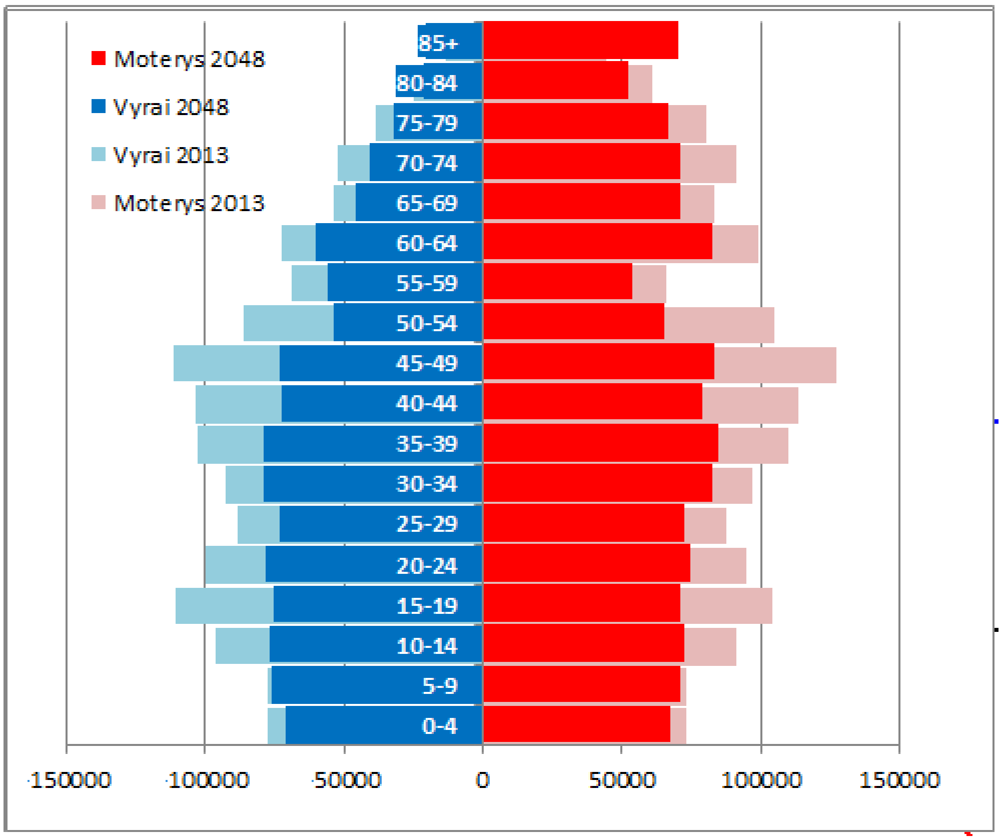


2.16 pav. Lietuvos populiacijos sudėtis pagal lytį ir amžiaus grupes 2013 ir 2048 metais (deterministinio modelio prognozė)



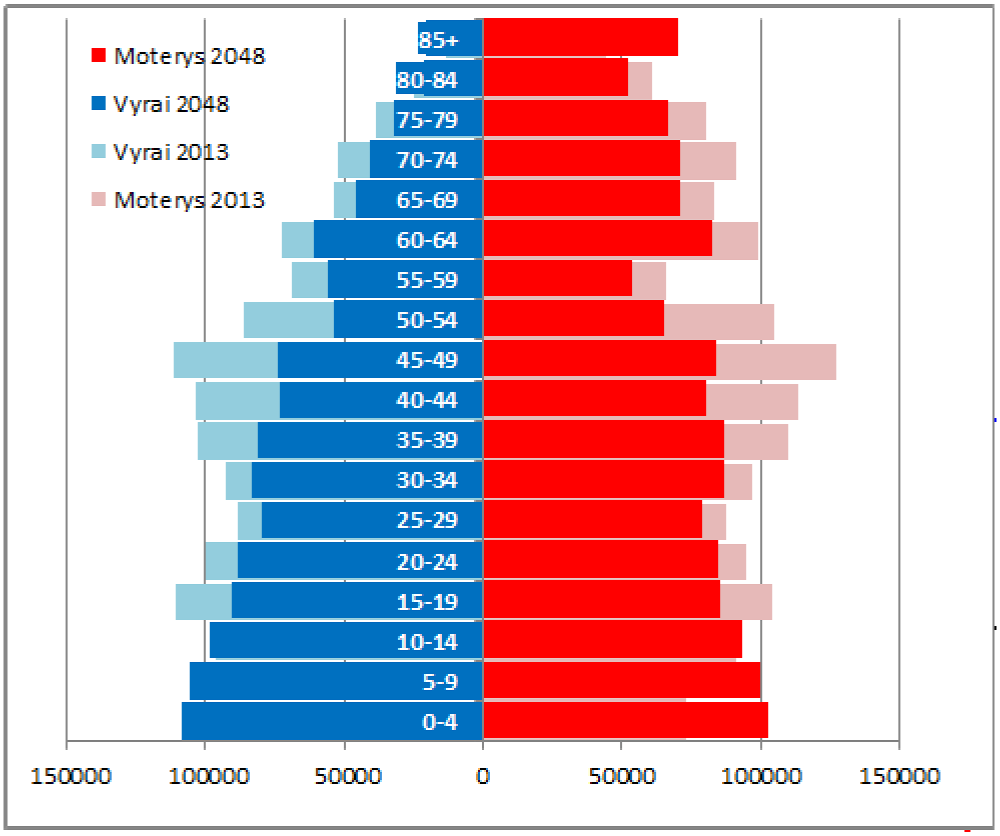
2.17 pav. Lietuvos populiacijos sudėtis pagal lytį ir amžiaus grupes 2013 ir 2048 metais (stochastinio-matricinio modelio prognozė)

Akivaizdu, kad skaidant populiaciją į 36 klases, t.y. pagal lytį ir į 18 amžiaus grupių, Lietuvos Respublikos gyventojų sudėties pagal amžių ir lytį abiejų modelių prognozės yra labai panašios. Kyla klausimas, kaip prognozės atrodytų, jei laikytume, kad populiacijos augimas nėra pastovus dydis, tačiau laiko funkcija? Tarkime, kad emigruojančių iš Lietuvos žmonių procentas nuo visos populiacijos skaičius artimiausius 35 metus nuosaikiai mažės po 2,5%, tuo tarpu imigruojančių procentas didės po 1,25% . Pasinaudoję stochastiniu-matriciniu modeliu gauvome tokią Lietuvos gyventojų skaičiaus ir sudėties prognozę 2048 metams:



2.18 pav. Lietuvos populiacijos sudėtis pagal lytį ir amžiaus grupes 2013 ir 2048 metais (kai modeliuojamos migracijos kaitos tendencijos)

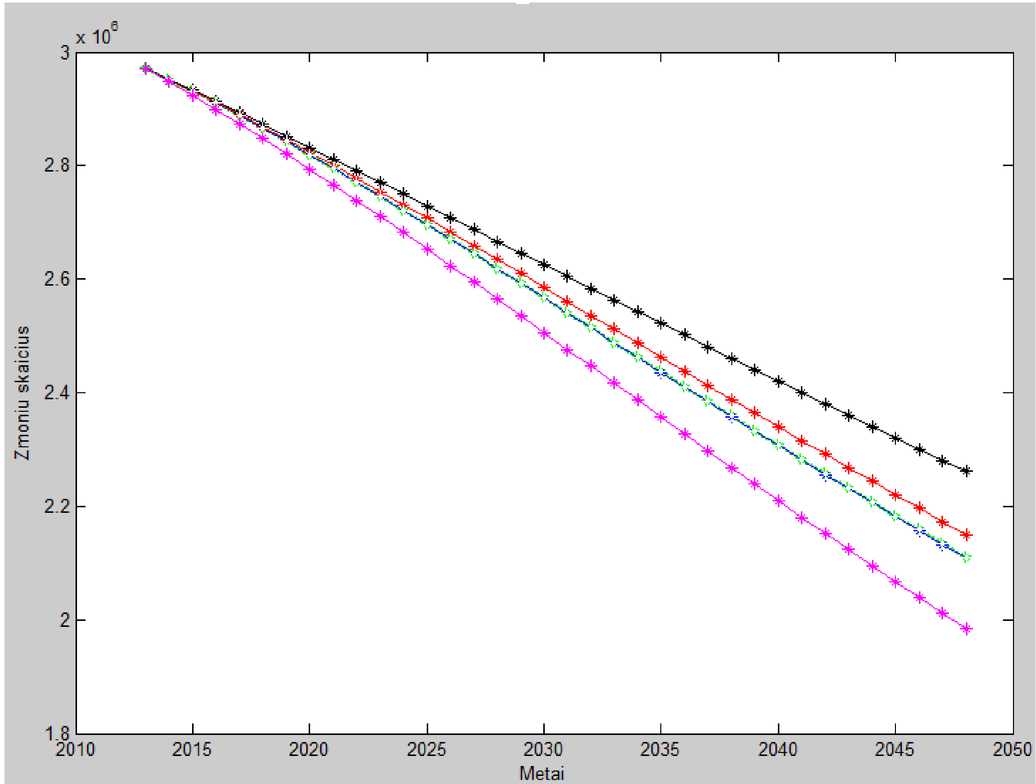
Pagal ją Lietuvoje 2048 metais gyvens 2373649 žmonės. Tarkime, kad per artimiausius 35 metus Lietuvoje vyraus ne tik jau minėtos migracijos tendencijos, tačiau didės ir gimstamumas 1,25% kasmet. Padarę tokias prielaidas gausime, kad 2048 metais Lietuvoje gyvens 2629779 gyventojų. Lietuvos gyventojų skaičiaus ir sudėties prognozę 2048 metams pateikiama 2.19 paveiksle.



2.19 pav. Lietuvos populiacijos sudėtis pagal lytį ir amžiaus grupes 2013 ir 2048 metais (kai modeliuojamos migracijos ir gimstamumo kaitos tendencijos)

2.4 REZULTATŲ PALYGINIMAS

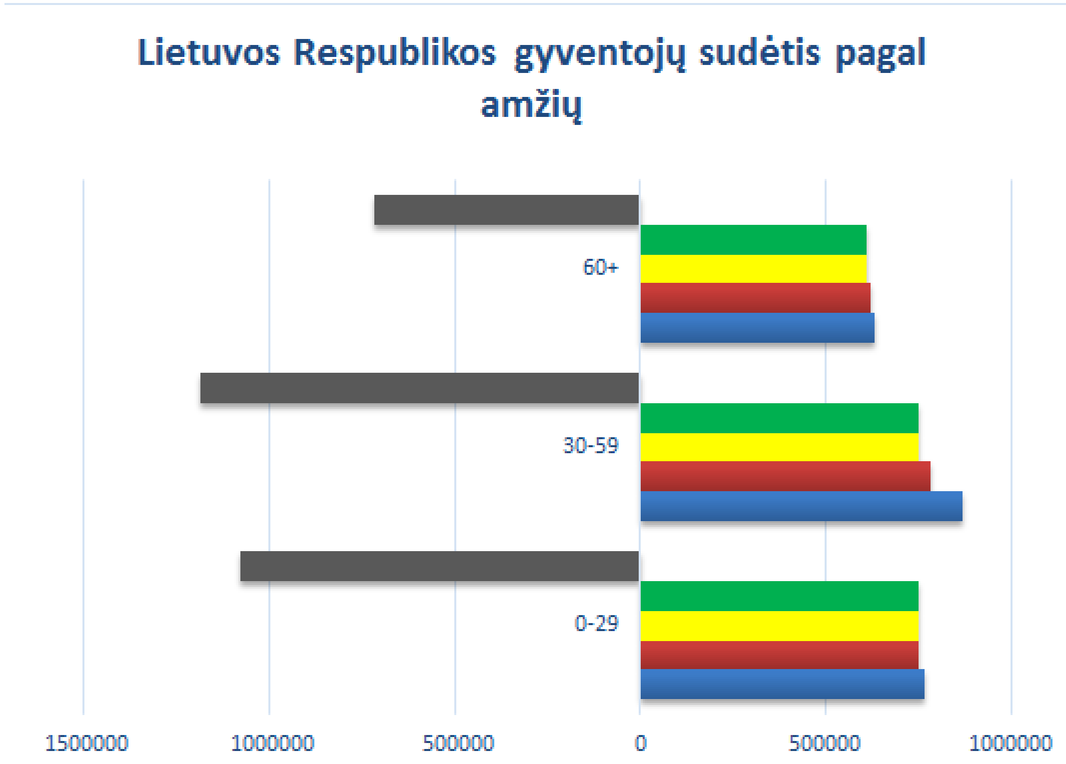
Atlikus visus eksperimentus ir skaičiavimus su skirtingais modeliais, galime palyginti gautus rezultatus. Iš 2.3.2 skyriuje pateiktų rezultatų akivaizdu, kad abiejų struktūrizuotos populiacijos modelių rezultatai yra labai panašūs arba sutampa absoliučiai, išskyrus, kai populiaciją skaidome į 36 klases. Tačiau galime palyginti, kaip rezultatai priklauso nuo klasių skaičiaus į kurias skaidome populiaciją. 2.19 paveiksle pateiktos deterministinio ir stochastinio-matricinio modelių prognozės 2048 metams, kai amžiaus grupių yra 3 (juoda kreivė), amžiaus grupių yra 9 (raudona kreivė), amžiaus grupių yra 18 (mėlyna kreivė) ir kai klasių yra 36 (žalia ir rožinė kreivės). Akivaizdu, kad didėjant amžiaus grupių, klasių skaičiui prognozės rezultatai pesimistiškėja.



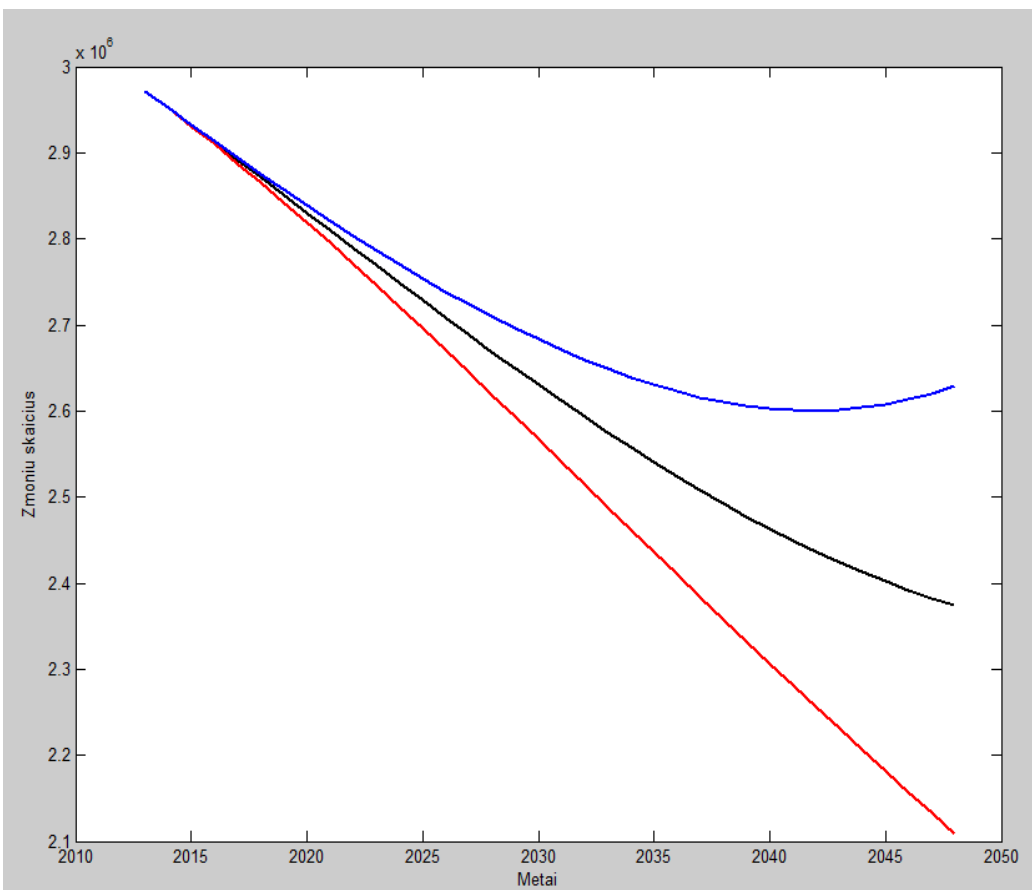
2.20 pav. Lietuvos populiacijos kaitos prognozių palyginimas skirtingais modeliais

Svarbu taip pat tyrinėti, kaip populiacijos skaidymas veikia populiacijos sudėties prognozes. 2.21 paveiksle pateikta trijų amžiaus grupių (jauniausia grupė 0-29 metai, vidurinioji 30-59 metai ir seniausia grupė 60+) prognozės 2048 metams, kai amžiaus grupių yra 3 (mėlyni stulpeliai), amžiaus grupių yra 9 (raudoni stulpeliai), amžiaus grupių yra 18 (geltoni stulpeliai) ir kai klasių yra 36 (žali stulpeliai). Juodi stulpeliai yra dabartinė Lietuvos populiacijos sudėtis pagal amžių. Akivaizdu, kad didėjant amžiaus grupių, klasių skaičiui prognozių rezultatai kiekvienoje amžiaus grupėje proporcingai mažėja, kaip mažėja ir visos populiacijos prognozė.

Taipogi, svarbu palyginti, kaip skiriasi paprastos prognozės, t.y. tos kuriose laikome, kad populiacijos demografiniai rodikliai yra pastovūs dydžiai ir tos kuriose laikome, kad demorafiniai rodikliai yra nuo laiko priklausančios funkcijos. 2.22 paveiksle pateikiama paprasta prognozė (raudona kreivė) ir prognozė, kai modeliuojame, kad emigracija kasmet mažės po 2,5%, o imigracija augs po 1,25% (juoda kreivė), bei kai modeliuojame, kad be imigracijos minėtų tendencijų gimstamumas taipogi augs 1,25% (mėlyna kreivė). Pagal pastarąją prognozę apie 2035 metus Lietuvos populiacija turėtų pasiekti demografinį dugną, bei atsispyrusi nuo jo po 45 metų pertraukos pradėti vėl augti.



2.21 pav. Lietuvos populiacijos sudėtis pagal amžiaus grupes 2013 ir 2048 metais



2.22 pav. Lietuvos populiacijos kaitos prognozių palyginimas skirtingais modeliais

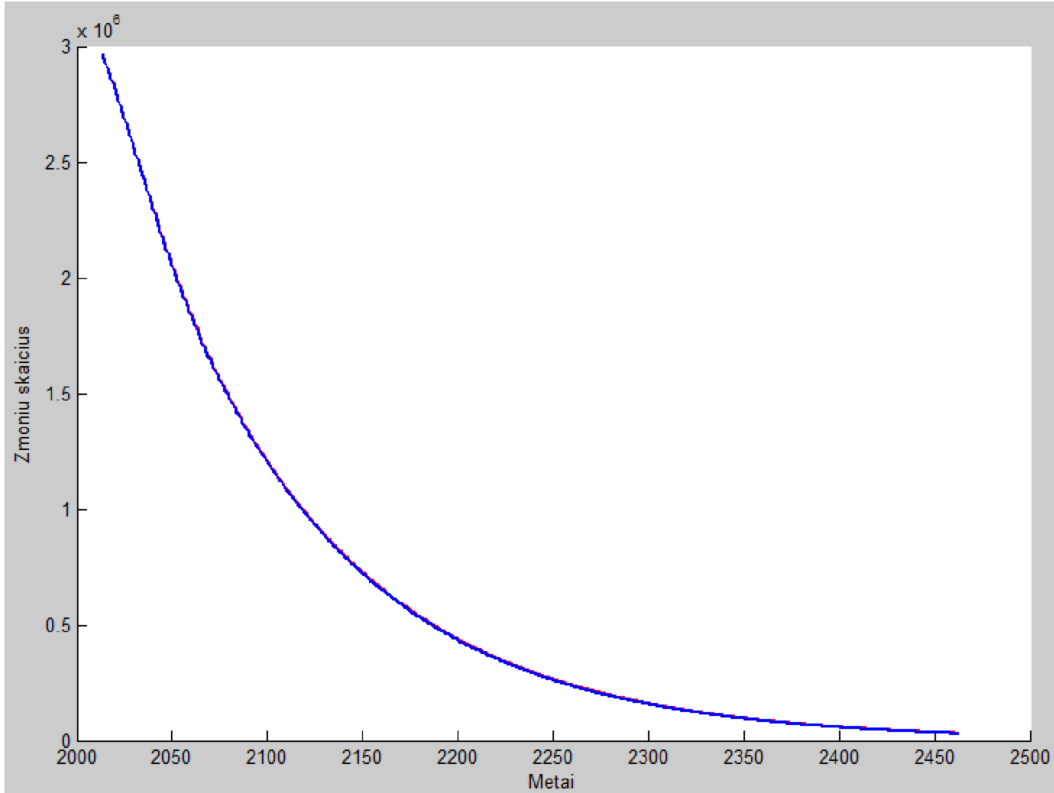
3. PROGRAMINĖ REALIZACIJA NUORODOS VARTOTOJUI

Šio darbo tikslams įgyvendinti: tyrinėti pasirinktus modelius, jų parametrus bei sprendinius, apskaičiuoti Lietuvos Respublikos gyventojų kaitos prognozę ir pateikti tyrimų ir prognozės grafinę vizualizaciją, pasirinkau MS Exel, bei MATLAB programinius paketus. MS Excel paketą naudojau tik statistinės informacijos iš Lietuvos statistikos departamento, bei „Eurostat“ apdorojimui ir sugrupavimui, kai kurių duomenų failų paruošimui. Tokį pasirinkimą nulėmė labai patogus duomenų importavimas iš Lietuvos statistikos departamento į MS Excel programą, bei programos prieinamumas kiekvienam ir populiarumas. Likusius tyrimus atlikau su MATLAB paketu, kadangi tai turbūt garsiausias ir galingiausias iš visų specializuotų matematinių paketų, turintis daugybę jau parengtų funkcijų (savo darbe naudojausi dviem parengtomis funkcijomis:[V,D] = eig(X) ir [T,J] = jordan(X), (eig() funkcija randa X matricos tikrines reikšmes ir tikrinius vektorius, o jordan() funkcija randa matricos X džordano formos matricą bei į ją transformuojančią matricą), kuriomis lengva naudotis, bei paprasta, kiekvienam įkandama programavimo kalba, kurios sintaksė yra trumpa ir nereikalaujanti didelio programuotojo išprusimo. Be to, paketas turi puikias grafinio rezultatų pateikimo galimybes, labai patogi vartotojo aplinka ir geras paketo aprašymas. Taip pat labai svarbu skaičiavimų tikslumas ir greitis, leidžiantis atlikti reikalingą duomenų analizę efektyviai ir greitai.

Visi mano sukurti metodai bei algoritmai pateikiami 4 priede. Kiekvienos amžiaus grupės prognozavimo, bei modelių tyrimo programos yra pateikiamos atskirame faile. Spendinys2.m, Spendinys10.m, Spendinys18.m, grafikai_pagr.m. Vartotojo sąsaja nėra sukurta, tačiau naudojimasis programa yra ir taip labai paprastas, vartotojui reikia įvesti tik teisingą direktoriją, kurioje yra duomenų failai, kurie pateikiami prie darbo esančioje laikmenoje. Kiekvieno iš minėtų failų pradžioje esančioje eilutėje `dir = 'C:\Users\Vartotojas\Desktop\Bakalauras\Duomenys\';` Reikia įvesti direktorijos, kurioje yra duomenų failai, tikslią lokaciją. Programos atlieka visus darbe naudotus skaičiavimus, tačiau jų neišveda į pagrindinį programos langą, tačiau tai nesunku atlikti kiekvienam savarankiškai. Programos naudoja mano parašytas funkcijas Sprendinys(V,D,t) kuris suformuoja Oilerio metodo sprendinį, bei MSprendinys(J,t), kuris suformuoja matricų metodo sprendinį. Taip pat naudojama Aformavimas(D) funkcija, kuri suformuoja duomenų matricas iš duomenų failų. LogExBand.m metodas skirtas logistinio ir eksponentinio modelių tyrimui, Sprendiniu graf.m skirtas tiesinių diferencialinių lygčių sistemos su pastoviais koeficientais sprendinių tyrimui, markoveks.m skirtas stochastinio eksponentinio modelio tyrimui. Visi falai.m yra su komentarais ir nuorodomis vartotojui.

4. DISKUSIJA

Vien pažvelgus į Lietuvos demografinius rodiklius aišku, kad artimiausius metus, jei niekas nesikeis, Lietuvos Respublikos gyventojų skaičius nuolatos mažės. Tačiau netgi ir Lietuvos vyriausybės bei Europos Sąjungos prognozės, kurios teigia, kad Lietuvoje 2050 m. gyvens 2,5 mln. žmonių panašu, kad yra tikrai labai optimistiškos, pagal mano atliktas prognozes Lietuvoje 2048 metais gyvens tarp 2 ir 2.3 mln. gyventojų. Prognozuojamas ne tik ryškus gyventojų mažėjimas, tačiau taipogi žymus kokybinis pasikeitimas gyventojų sudėtyje pagal amžių. Jei šiandien šalyje gyvena beveik 36% jaunų (iki 30 metų amžiaus) žmonių 40% vidutinio (iki 60 metų) ir kiek daugiau nei 24% pagyvenusių (virš 60 metų) žmonių, pagal gautas prognozes 2048 m. gyventojų procentinė sudėtis pagal amžių pakis labai nežymiai, net pagal pesimistiškiausią prognozę 2048 m. šalyje gyvens kiek daugiau nei 35.5% jaunų (iki 30 metų amžiaus) žmonių 35.5% vidutinio (iki 60 metų) ir kiek daugiau nei 29% pagyvenusių (virš 60 metų) žmonių. Tai sutinka su viešojoje erdvėje girdimomis prognozėmis apie Lietuvos visuomenės senėjimą, nors jis neprognozuojamas, labai greitas ir staigus. Galbūt dėl to, kad po 35 metų gausiausios 1990 metų kartos dar nebus pensinio amžiaus, ir be to dėl aukšto pagyvenusių žmonių mirtingumo, ypač vyrų tarpe visi modeliai, nepriklausomai nuo jų skaidymo į grupes, Lietuvai nežada didelio visuomenės senėjimo, tik 5% santykinį pagyvenusių žmonių padidėjimą visos populiacijos atžvilgiu. Tai gali būti visai įtikimas dalykas, nes stabilizavusis masinei emigracijai iš Lietuvos ir didėjant imigracijai, bei gausiausioms 1988-1991 m. kartoms pasiekus reprodukcinio piko amžių, galime tikėtis santykinai didesnio gyventojų prieaugio Lietuvoje. Kad ir kaip ten būtų, nors gyventojų sandaros prognozės ir nėra labai pesimistinės, tačiau vien jaunimo populiacijos drastiškas sumažėjimas nuo 1075239 iki 765641, t.y. daugiau nei trimis šimtais tūkstančių, gali labai skaudžiai paveikti Lietuvos švietimo sistemą. Mažėsiantis mokinių skaičius, ypač kaimo vietovėse, mažėsiantis studentų skaičius gali sukelti didelių finansinių problemų Lietuvos švietimo įstaigoms. Todėl galbūt moksleivių, o ypač studentų reiktų dairytis svetur? Taip pat drastiškai sumažėjus darbingo amžiaus žmonių (20-65 metų amžiaus) nuo 1553435 iki 1126050, t.y. daugiau nei 400000, gali kilti rimtų iššūkių Lietuvos pramonei bei verslui, kuris jau dabar skundžiasi darbo jėgos stoka. Žinant tokias demografines tendencijas Lietuvos Respublikos vyriausybei būtina imtis priemonių, t.y. galvoti apie gimstamumo ir reimigracijos skatinimą, emigracijos žabojimą, arba ūkio pertvarką pensinio amžiaus ilginimą, o gal netgi imigrantų iš kitų šalių kvietimą. Drastiškas populiacijos mažėjimas taipogi verčia susimąstyti apie visišką Lietuvių tautos išnykimą.



2.23 pav. Lietuvos populiacijos kaitos prognozė 2013 - 2463 metais

2.21 paveiksle matome Lietuvos Respublikos gyventojų skaičiaus kaitos prognozę 450 metų (tikslius duomenis žiūrėti 3 priede). Galime teigti, kad jei demografinė situacija kardinaliai nesikeis jau 2100 metais Lietuvoje tegyvens 1 mln. žmonių, o per 350 metų populiacija turėtų visiškai išnykti. Kadangi Lietuvos Respublikos gyventojų didžioji dalis yra Lietuvių tautybės, šioje prognozėje labiau reiktų akcentuoti Lietuvių kaip tautos, o ne kaip tam tikros teritorijos gyventojų išnykimą, nes išorinė imigracija gali ir greičiausiai pakeis nykstančią tautą, tačiau jie nepakeis tautos išnykimo fakto.

Tačiau jei prognozuosime, kad ateityje Lietuvoje emigracija pamažu mažės po 2,5% kasmet, ko tikėtis yra tikrai realu, nes Lietuvoje tuoj nebeliks kam emigruoti, o imigracija stabiliai augs po 1.25% (dalis emigravusiųjų grįš), tuomet 2048 m. šalyje gyvens 2,4 mln. žmonių o tarp jų kiek daugiau nei 37% jaunų (iki 30 metų amžiaus) žmonių 36% vidutinio (iki 60 metų) ir kiek daugiau nei 27% pagyvenusių (virš 60 metų) žmonių. Jei prie jau minėtų demografinių tendencijų dar modeliuosime ir 1,25% gimstamumo augimą Lietuvoje artimiausius 35 metus (tai irgi įmanoma pasiekti skatinant gimstamumą ir sudarant palankias sąlygas auginti vaikus) gausime, kad 2048 metais Lietuvoje gyvens 2,6 mln. žmonių o tarp jų kiek daugiau nei 42% jaunų (iki 30 metų amžiaus) žmonių 34% vidutinio (iki 60 metų) ir kiek daugiau nei 24% pagyvenusių (virš 60 metų) žmonių. Akivaizdu, kad gimstamumo augimas turi daug didesnės įtakos visuomenės jaunėjimui ir augimui nei emigracija bei imigracija kartu sudėjus. Todėl Lietuvos Respublikos vyriausybei reiktų apsvarstyti ne tik reimigracijos, tačiau ir gimstamumo skatinimą.

IŠVADOS

1. Žmonių populiacijai prognozuoti tinkami abu modeliai. Stochastinis-matricinis modelis yra lengviau apskaičiuojamas nei deterministinis modelis, tačiau deterministinis modelis turi tolydų analizinį sprendinį.
2. Atlikus eksperimentus buvo nustatyta, kad abu modeliai yra jautrūs pradiniams duomenims.
3. Atlikus eksperimentus buvo nustatyta, kad apytikslis (skaitinis) skaičiavimo metodo sprendinys, skleidžiant matricos eksponentę eilute, sutampa su Oilerio ir Matricų metodų sprendiniais, jei sudedamas pakankamas eilutės narių skaičius. Sudedamų eilutės narių skaičius priklauso nuo prognozavimo laikotarpio ilgio ir struktūrizuojamos populiacijos klasių skaičiaus. Ilgėjant prognozavimo laikotarpiui ir skaidant populiaciją į daugiau grupių, sudedamų eilutės narių skaičius didėja.
4. Atlikus eksperimentus su struktūrizuotos populiacijos modeliais buvo nustatyta, kad skaidant modelį į daugiau klasių jų prognozuojamos populiacijos dydis mažėja, tačiau populiacijos sudėtis pagal amžių procentaliai išlieka stabili.
5. Palyginęs skirtingų modelių prognozes, nustačiau, kad abiejų struktūrizuotų pagal amžių modelių rezultatai yra labai panašūs (minimalus prognozių skirtumas 3298 žmonės, maksimalus prognozių skirtumas 125310 žmonių), nepriklausomai nuo to, į kelias grupes-klases skaidome turimą populiaciją.
6. Informatyviausi rezultatai prognozuojant Lietuvos populiaciją gaunami naudojantis smulkiausiai suskaidytu populiacijos, struktūrizuotos pagal amžių ir lytį (n=36), modeliu, kadangi jis duoda daugiausiai informacijos apie būsimą populiacijos sudėtį ne tik pagal amžių, bet ir lytį.
7. Prognozavimo rezultatai rodo, kad jei nepakis vyraujančios tendencijos 2048 metais Lietuvos gyventojų skaičius sieks 2.1 mln. Visuomenės procentinė sudėtis pagal amžių 2048 metais atrodys taip: 35.5% jaunų žmonių (0-29 metų amžiaus), dabar jauni žmonės sudaro 36 % gyventojų, 35.5% vidutinio amžiaus žmonių (30-59 metų amžiaus), dabar vidutinio amžiaus žmonės sudaro 40% populiacijos ir 29 % pagyvenusių žmonių (60+ metų amžiaus), dabar pagyvenę žmonės sudaro 24% Lietuvos populiacijos. Iki 2048 metų Lietuvos Respublikoje jaunimo (iki 20 metų amžiaus) skaičius sumažės 200 tūkstančių, darbingo amžiaus žmonių skaičius sumažės (20-65 metų amžiaus) 600 tūkstančių

8. Jei emigracija pastoviai mažėtų po 2.5%, o imigracija augtų po 1.25% kasmet, 2048 metais Lietuvoje gyvetų 2.37 milijono gyventojų, o populiacijos sudėtis atrodytų taip: 37% jaunų žmonių (0-29 metų amžiaus), 36% vidutinio amžiaus žmonių (30-59 metų amžiaus), ir 27 % pagyvenusių žmonių (60+ metų amžiaus). Iki 2048 metų jaunimo (iki 20 metų amžiaus) skaičius sumažėtų 100 tūkstančių, dirbančių žmonių skaičius sumažėtų (20-65 metų amžiaus) 400 tūkstančių.
9. Jei emigracija pastoviai mažėtų po 2.5% ,o imigracija ir gimstamumas augtų po 1.25% kasmet, 2048 metais Lietuvoje gyvetų 2.62 milijono gyventojų, o populiacijos sudėtis atrodytų taip: 42.5% jaunų žmonių (0-29 metų amžiaus), 33.5% vidutinio amžiaus žmonių (30-59 metų amžiaus), ir 24% pagyvenusių žmonių (60+ metų amžiaus). Iki 2048 metų jaunimo (iki 20 metų amžiaus) skaičius padidėtų 80 tūkstančių, dirbančių žmonių skaičius sumažėtų (20-65 metų amžiaus) 370 tūkstančių.
10. Tokios prognozės verčia rimtai susimąstyti apie Lietuvos ūkio ir pramonės augimo perspektyvas (darbo jėgos trūkumą), mokslo plėtrą (studentų ir moksleivių skaičiaus mažėjimas) ir socialinių reformų būtinybę (pensinio amžiaus ilginimas).

REKOMENDACIJOS

Ateityje būtų naudinga atlikti prognozes laikant, kad visi veiksniai, darantys įtaką Lietuvos populiacijai: imigracija, emigracija, gimstamumas ir mirtingumas, yra ne stabilūs dydžiai, o laiko funkcijos, kadangi tokiu modeliu būtų galima ne tik modeliuoti, pavyzdžiui, kaip pakistų Lietuvos populiacija, jei ateinančius 35 metus imigracija kasmet mažės po 1.25%, arba gimstamumas didės po 1,25%, tačiau kaip populiacija kistų, jei laikysime, kad gimstamumas augs tik tam tikrą laiką po to įsisotins ir nusistovės, arba jei emigracija artimiausius 10 metų intencyviai mažės, tačiau pasiekus tam tikrą ribą, pvz 10000, irgi nusistovės ir taps stabili. Be abejo, toks modelis labai apsunkintų skaičiavimus, kadangi deterministinio modelio diferencialinė lygčių sistema taptų nebetiesinė. Manau, ateityje skaidyti populiaciją į smulkesnes nei 5 metų amžiaus grupes nėra verta, tai tik apsunkina pradinių duomenų apdorojimą, o suteikia labai mažai papildomos informacijos.

PADĖKOS

Dėkoju darbo vadovui prof. dr. E. Valakevičiui už patarimus, palaikymą ir laisvę pasirinkti įdomią tyrimo temą. Visiems KTU dėstytojams, kurie man dėstė, už žinias ir išsilavinimą. Dėkoju Fundamentaliųjų mokslų fakulteto raštinei už palaikymą, pagalbą ir patarimus sunkiausiais momentais. Taip pat savo šeimai ir merginai Simonai už kantrybę ir visokeriopą pagalbą.

ŠALTINIAI IR LITERATŪRA

1. Age-structured Matrix Models. Prieiga per internetą http://www.afrc.uamont.edu/whited/Age-Structured%20Matrix%20Population%20Models.pdf
2. Akçakaya, H.R. Population Viability Analyses with Demographicallly and Spatially Structured Model / *Ecological Bulletins*, vol. 48:23-38, 2000, p. 1-18.
3. Aksomaitis, A. Tikimybių teorija ir statistika. Kaunas: Technologija, 2002, p. 252-256.
4. Allen, L.J.S. Risk of Population Extinction Due to Demographic Stochasticity in Population Models / *Comments on Theoretical Biology*, vol. 8, 2003, p. 433-454.
5. Allen, L.J.S. Stochastic Modeling in Biology: Applications of Discrete-time Markov Chains. USA: Texas Tech Universtity, 2011, p. 1-47.
6. Annenberg Learner. The Demographic Transition. Prieiga per internetą http://www.learner.org/courses/envsci/interactives/demographics/demo_transition_1.php
7. Borrelli, R.L., Coleman, L.S. Differential Equations: A Modeling Perspective. USA: John Wiley & Sons, Inc, 2004.
8. de Roos, A.M. Modeling Population Dynamics. Amsterdam, 2001, p. 7-36.
9. Dosinas, G.S., Navickas, Z. Matricų analizė. Kaunas: 2010, p. 47-55, p. 97.
10. Dosinas, G.S., Papreckienė, L. Diferencialinės lygtys. Kaunas: Technologija, 2006, p. 70-82, p. 116-119.
11. Haberman R. Mathematical Models: Mechanical Vibrations, Population Dynamics, and Traffic Flow, Southern Methodist University, Dallas, Texas 1998.
12. European Commission. Eurostat: Population Database. Prieiga per internetą http://epp.eurostat.ec.europa.eu/portal/page/portal/population/data/database
13. Ferrière, R., Tran, V. C. Stochastic and Deterministic Models for Age-structured Populations with Genetically Variable Traits / HAL, version 2, 12 April 2009, p. 1-20.
14. Keshet Leah Edelstein Mathematical Models in Biology 1988.
15. Lietuvos statistikos departamentas. Rodiklių duomenų bazė. Prieiga per internetą http://db1.stat.gov.lt/statbank/default.asp?w=1024
16. Maruful Chowdhury, B. S. A Stochastic Age-structured Population Model: Master of Science. Texas Tech University: 1998.
17. Math Modeling Lecture 16: Marcov Processes, p. 1-7. http://facultypages.morris.umn.edu/~mcquarrb/teachingarchive/M4452/Lecture16.pdf

18. Ogbeide, E. M., Ikpotokin, O. Population Model of Esan West Local Government Area of Edo State, Nigeria / *Researcher*, No. 2, 2010. Prieiga per internetą http://www.sciencepub.net/researcher/research0209/06_0725research0209_27_30.pdf
19. Papreckienė, L. Sistemų satbilumas ir chaosas. Kaunas: Technologija, 2007, p. 42, p. 63-70.
20. Pekarskas, V. Diferencialinis ir integralinis skaičiavimas II. Kaunas: Technologija, 2003, p. 20-21, p. 105-110.
21. Pekarskas, V, Pekarskienė, A. Teisinės algebros ir analizinės geometrijos elementai. Kaunas: Technologija, 2004, p. 72, 91.
22. Pyragas, K. Netiesinės dinamikos pagrindai. Vilnius: Ciklonas, 2003.
23. Pranevičius, H., Valakevičius, E. Markovo procesų teorijos taikymas sistemoms modeliuoti. Kaunas: Technologija, 1991.
24. Sigman, K. Discrete-time Markov Chains. Prieiga per internetą http://www.columbia.edu/~ks20/stochastic-I/stochastic-I-MCI.pdf
25. Stage-structured Matrix Models. Prieiga per internetą http://www.afrc.uamont.edu/whited/Stage-Structured%20Matrix%20Population%20Models.pdf
26. The University of Arizona. World population graphs. Prieiga per internetą http://research.biology.arizona.edu/mosquito/willott/323/project/population/Worldpopmaps.html

1 PRIEDAS. LIETUVOS RESPUBLIKOS DEMOGRAFINIAI DUOMENYS

1.1 lentelė

Lietuvos Respublikos demografiniai duomenys 1900-2013

metai	Gyventojų skaičius	Gimusių skaičius	Mirusių skaičius	Imigravusių skaičius	Emigravusiu skaičius
1900	2750000				
1923	2146000				
1950	2570000	60719	30870		
1951		58504	0		
1952		56944	0		
1953		52610	0		
1954		54229	0		
1955		55525	24138		
1956		53741	0		
1957		56223	0		
1958		61190	0		
1959	2711000	62241	0		
1960		62485	21611		
1961		62775	0		
1962		59728	0		
1963		57024	0		
1964		55856	0		
1965		53818	23467		
1966		54275	23799		
1967		53806	24571		
1968		54258	25725		
1969		54263	27156		
1970	3139700	55519	28048		
1971	3179000	56044	26972		
1972	3213600	54616	29252		
1973	3244500	51944	29160		
1974	3273900	51941	29612		
1975	3301700	51766	31265		
1976	3328700	52296	31972		
1977	3355000	52166	32932		
1978	3379400	51821	34008		
1979	3397700	51937	34897		
1980	3413200	51765	35871		
1981	3433000	52249	35579		
1982	3457200	53141	35040		
1983	3485200	57589	36451		

1984	3514200	57576	38666		
1985	3544500	58454	39169		
1986	3578900	59705	35788		
1987	3616400	59360	36917		
1988	3654700	56727	37649		
1989	3684200	55782	38150		
1990	3697800	56868	39760		
1991	3704100	56019	41013		
1992	3700100	54417	41455		
1993	3682600	47464	46107		
1994	3657200	42376	46486	1664	25859
1995	3629100	41195	45306	2020	25688
1996	3601600	39066	42896	3025	26394
1997	3575200	37812	41143	2536	24957
1998	3549300	37019	40757	2706	24828
1999	3524200	36415	40003	2679	23418
2000	3499500	34149	38919	1510	21816
2001	3481300	31546	40339	4694	7253
2002	3469100	30014	41072	5110	7086
2003	3454200	30598	40990	4728	11032
2004	3435600	30419	41340	5553	15165
2005	3414300	30541	43799	6789	15571
2006	3394100	31265	44813	7745	12602
2007	3375600	32346	45624	8609	13853
2008	3358100	35065	43832	9297	17015
2009	3339400	36682	42032	6487	21970
2010	3286800	35626	42120	5213	83157
2011	3244601	30265	41036	15685	53863
2012	2988000	30459	40938	19843	41100
2013	2971905		41511	22011	38818

1.2 lentelė

Pasaulio populiacijos kaitos rodikliai

Metai	Žmonių skaičius
1900	1,65
1910	1,75
1920	1,86
1930	2,07
1940	2,3
1950	2,52
1960	3,02

1970	3,7
1980	4,44
1990	5,27
2000	6,06
2010	7

2 PRIEDAS. LIETUVOS GYVENTOJŲ DEMOGRAFINĖ STATISTIKA STRUKTŪRIZUOTA PAGAL AMŽIŲ IR LYTĮ

2.1 lentelė

Lietuvos populiacijos sudėtis 2013 metais pagal amžių ir lytį

2013	Vyrai	Moterys	Viso
0-4	77484	73537	151021
5-9	77763	73257	151020
10-14	96206	91499	187705
15-19	110376	104502	214878
20-24	99426	95233	194659
25-29	88292	87664	175956
30-34	92371	96854	189225
35-39	102323	109941	212264
40-44	103583	113351	216934
45-49	111227	127295	238522
50-54	86089	105251	191340
55-59	68829	65706	134535
60-64	72452	99196	171648
65-69	53620	83362	136982
70-74	52059	91092	143151
75-79	38814	80205	119019
80-84	25082	60947	86029
85+	12895	44122	57017
Viso	1368891	1603014	2971905

2.2 lentelė

Gyventojų skaičius ribinėse amžiaus grupėse

Metai	Vyrai	Moterys
4	15307	14818
9	15371	14828
14	18768	18128

19	25437	24028
24	27217	25073
29	22266	20731
34	20495	20817
39	23231	24446
44	22791	24538
49	25066	28028
54	19586	23403
59	16587	21308
64	11577	17019
69	11896	19445
74	9555	18015
79	6347	14130
84	2840	9247

2.3 lentelė

Gimstamumas Lietuvoje pagal moterų amžių

Gimstamumas Lietuvoje pagal moterų amžių												
Metai	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	Gyventojų skaičius 2013	Vidurkis	Salyginis gimimų sk.
0-4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	151021	0	0.00000
5-9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	151020	0	0.00000
10-14	16	6	10	11	13	8	5	10	3	187705	9	0.00005
15-19	2603	2488	2545	2411	2399	2041	1639	1432	1380	214878	2104	0.00979
20-24	8697	8361	8304	8418	8627	8203	7080	5880	5844	194659	7713	0.03962
25-29	9899	10042	10384	10814	11986	12982	13214	11110	11104	175956	11282	0.06412
30-34	6037	6409	6638	7038	7968	8923	9151	7703	7872	189225	7527	0.03978
35-39	2558	2624	2765	3047	3386	3817	3763	3418	3494	212264	3208	0.01511
40-44	575	583	592	582	665	676	722	689	738	216934	647	0.00298
45-49	26	26	24	25	18	30	40	23	19	238522	26	0.00011
50-54	0	0	0	0	0	0	0	0	0	191340	0	0.00000
55-59	0	0	0	0	0	0	0	0	0	134535	0	0.00000
60-64	0	0	0	0	0	0	0	0	0	171648	0	0.00000
65-69	0	0	0	0	0	0	0	0	0	136982	0	0.00000
70-74	0	0	0	0	0	0	0	0	0	143151	0	0.00000
75-79	0	0	0	0	0	0	0	0	0	119019	0	0.00000
80-84	0	0	0	0	0	0	0	0	0	86029	0	0.00000
85+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	57017	0	0.00000

Viso	30411	30539	31262	32346	35062	36680	35614	30265	30454	2971905	32514	0

2.4 lentelė

Vyrų mirtingumas pagal amžių Lietuvoje

Metai	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	Vidurkis	Sąlyginis mirtingumas
0-4	132	156	142	120	120	127	105	101	82	79	110	0.001413195
5-9	30	43	38	25	29	18	12	18	13	6	20	0.000255584
10-14	31	39	35	40	29	33	22	24	21	16	28	0.000285845
15-19	169	161	155	171	108	157	120	100	87	89	123	0.00111777
20-24	272	296	264	293	261	238	209	189	180	185	227	0.002286877
25-29	324	374	338	363	341	262	212	230	220	229	274	0.003107586
30-34	517	493	459	489	450	361	341	278	326	271	372	0.004025885
35-39	618	705	677	781	649	539	528	445	433	437	561	0.00548386
40-44	973	1025	1100	1109	936	746	757	719	648	660	834	0.008055135
45-49	1302	1442	1463	1679	1364	1223	1121	1105	959	996	1239	0.011137134
50-54	1552	1697	1815	1822	1772	1455	1505	1472	1521	1501	1608	0.018676893
55-59	1686	1925	2106	2184	2072	1818	1827	1698	1672	1683	1883	0.02735039
60-64	2306	2451	2478	2377	2115	2090	2106	2089	2100	2046	2175	0.030021601
65-69	2624	2826	2793	2888	2615	2589	2400	2313	2153	2057	2476	0.0461768
70-74	2942	2944	3003	2990	2793	2660	2718	2623	2567	2514	2734	0.052507732
75-79	2644	2817	2965	3090	2881	2929	2796	2773	2775	2686	2862	0.07373306
80-84	1908	2099	2131	2304	2291	2463	2524	2606	2613	2692	2453	0.097799219
85+	1804	1890	1847	1958	2092	2120	2233	2160	2321	2642	2172	0.168408298
Viso	21834	23383	23809	24683	22918	21828	21536	20943	20691	20789	22149.63	0.551842861

2.5 lentelė

Moterų mirtingumas pagal amžių Lietuvoje

Metai	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	Vidurkis	Sąliginis mirtingumas
0-4	130	115	123	109	96	86	84	77	59	58	91	0.00123164
5-9	20	15	16	17	15	8	10	8	13	16	12	0.00016966
10-14	17	17	20	29	24	17	11	12	7	8	17	0.00018736
15-19	51	55	50	45	49	40	26	22	28	36	37	0.00035543
20-24	44	54	50	47	66	54	41	38	32	32	47	0.00049203
25-29	71	77	85	86	56	53	59	53	43	64	62	0.00070888
30-34	90	121	130	113	101	95	85	89	65	69	97	0.00100003
35-39	153	182	217	219	186	152	125	148	148	123	171	0.00155278

40-44	313	308	317	324	324	264	219	232	223	218	272	0.00239837
45-49	425	463	516	539	487	415	434	392	371	344	451	0.00353958
50-54	602	594	617	642	684	575	567	588	577	559	607	0.00576852
55-59	715	821	819	888	925	737	754	694	677	674	785	0.01194498
60-64	1113	1057	1113	1076	987	963	924	916	870	952	978	0.00986359
65-69	1506	1512	1558	1514	1500	1380	1284	1237	1163	1134	1377	0.01651318
70-74	2332	2364	2304	2284	2173	2077	2014	1915	1891	1847	2094	0.02298775
75-79	3402	3457	3534	3396	3326	3201	3124	2993	2911	2843	3212	0.04004916
80-84	3631	4040	4339	4318	4310	4317	4416	4264	4222	4382	4312	0.07075468
85+	4857	5173	5196	5295	5605	5770	6407	6415	6947	7363	5948	0.13480479
Viso	19472	20425	21004	20941	20914	20204	20584	20093	20247	20722	20569.571	0.32432241

2.6 lentelė

Vyrų emigracija pagal amžių

Metai	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	Vidurkis	Sąlyginė emigracija
0-4	237	303	277	318	362	472	1524	1112	1009	948	656.2	0.008469
5-9	378	388	352	371	428	435	1398	886	783	740	615.9	0.00792
10-14	406	440	370	408	478	467	1390	1766	1330	1149	820.4	0.008528
15-19	514	530	403	464	478	588	2307	5644	3962	3621	1851.1	0.016771
20-24	1044	1141	866	804	1005	1228	6867	5816	4111	3545	2642.7	0.02658
25-29	1378	1490	1124	980	1459	1983	8661	3579	2552	2586	2579.2	0.029212
30-34	940	993	766	884	1130	1643	6012	2490	1902	1863	1862.3	0.020161
35-39	633	682	559	686	935	1608	4141	1850	1419	1394	1390.7	0.013591
40-44	559	562	470	559	700	1257	2950	1309	1118	1075	1055.9	0.010194
45-49	521	503	471	567	646	1016	2256	909	712	745	834.6	0.007504
50-54	212	247	206	208	359	603	1457	404	336	399	443.1	0.005147
55-59	142	126	107	158	205	289	668	896	869	930	439	0.006378
60-64	83	58	52	83	91	105	183	130	141	140	106.6	0.001471
65-69	47	39	52	47	41	39	51	39	57	71	48.3	0.000901
70-74	21	18	24	29	23	36	39	38	39	47	31.4	0.000603
75-79	15	24	21	19	18	19	25	23	25	30	21.9	0.000564
80-84	16	14	10	22	13	23	34	30	30	44	23.6	0.000941
85+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Viso	7146	7558	6130	6607	8371	11811	39963	26921	20395	19327	15422.9	0.164934

2.7 lentelė

Moterų emigracija pagal amžių

Metai	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	Vidurkis	Sąlyginė emigracija
0-4	230	238	255	326	376	408	1516	1025	960	964	629.8	0.008564
5-9	351	375	299	374	340	417	1359	856	755	659	578.5	0.007897
10-14	376	415	338	379	413	414	1296	2057	1570	1353	861.1	0.009411
15-19	503	507	389	416	514	647	2602	6080	4473	4063	2019.4	0.019324
20-24	1381	1402	1019	1022	1136	1482	8264	5494	4122	3600	2892.2	0.03037

25-29	1791	1751	1426	1476	1913	2198	9859	3251	2515	2550	2873	0.032773
30-34	951	1022	789	1021	1283	1493	5952	2158	1699	1558	1792.6	0.018508
35-39	672	673	571	681	897	1140	3712	1666	1248	1214	1247.4	0.011346
40-44	542	549	411	462	549	566	2765	1403	963	913	912.3	0.008048
45-49	519	492	388	476	469	521	2559	1090	753	761	802.8	0.006307
50-54	269	173	161	175	220	284	1931	556	375	406	455	0.004323
55-59	147	116	103	133	179	250	942	876	803	819	436.8	0.006648
60-64	69	72	68	77	92	100	148	144	132	149	105.1	0.00106
65-69	63	65	84	63	61	50	89	81	83	133	77.2	0.000926
70-74	53	49	49	52	67	48	65	61	69	98	61.1	0.000671
75-79	59	62	52	42	41	52	47	47	66	81	54.9	0.000684
80-84	43	52	70	71	94	89	88	97	119	170	89.3	0.001465
85+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Viso	8019	8013	6472	7246	8644	10159	43194	26942	20705	19491	15888.5	0.168325

2.8 lentelė

Vyrų imigracija pagal amžių

Metai	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	vidurkis	Sąlyginė imigracija
0-4	59	137	197	216	227	197	162	366	555	643	275.9	0.008298
5-9	65	107	155	153	133	114	71	100	128	151	117.7	0.001942
10-14	92	104	108	126	133	104	51	298	292	292	160	0.003035
15-19	199	189	201	180	205	169	119	1881	2113	2026	728.2	0.018355
20-24	509	605	621	601	667	385	432	1913	2474	2620	1082.7	0.026351
25-29	536	709	784	844	940	541	518	1185	1578	1880	951.5	0.021293
30-34	403	507	614	716	749	522	399	778	1098	1254	704	0.013576
35-39	295	393	481	542	727	400	324	610	836	1030	563.8	0.010066
40-44	241	364	415	463	584	298	232	498	680	765	454	0.007385
45-49	174	292	378	423	547	272	196	354	491	550	367.7	0.004945
50-54	147	158	167	232	297	152	131	182	232	286	198.4	0.003322
55-59	100	95	112	107	123	82	70	191	251	291	142.2	0.004228
60-64	50	60	46	76	80	57	51	87	102	121	73	0.00167
65-69	34	46	49	48	33	23	4	26	29	44	33.6	0.000821
70-74	27	18	17	26	23	20	8	14	19	19	19.1	0.000365
75-79	16	15	12	10	21	9	11	5	13	16	12.8	0.000412
80-84	21	17	15	14	13	12	13	9	15	11	14	0.000439
85+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Viso	2968	3816	4372	4777	5502	3357	2792	8497	10906	11999	5898.6	0.126504

2.9 lentelė

Moterų imigracija pagal amžių

Metai	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	vidurkis	Sąlyginė imigracija
0-4	69	120	175	208	200	183	158	342	535	585	257.5	0.007955
5-9	67	98	136	150	133	99	61	108	100	135	108.7	0.001843

10-14	76	131	106	100	134	110	39	228	300	330	155.4	0.003607
15-19	177	182	250	228	242	179	112	1719	1888	1861	683.8	0.017808
20-24	560	587	597	594	520	358	386	1780	2334	2581	1029.7	0.027102
25-29	521	569	720	847	825	661	509	977	1199	1543	837.1	0.017601
30-34	251	342	385	522	536	499	379	536	673	752	487.5	0.007764
35-39	153	229	211	305	337	267	216	354	434	522	302.8	0.004748
40-44	150	174	210	218	229	203	133	309	365	410	240.1	0.003617
45-49	149	168	175	207	196	167	104	272	397	421	225.6	0.003307
50-54	75	79	102	130	130	120	101	208	224	260	142.9	0.00247
55-59	65	93	95	92	114	104	67	163	233	327	135.3	0.004977
60-64	58	50	60	64	77	59	66	78	132	156	80	0.001573
65-69	55	44	47	53	37	46	21	28	35	44	41	0.000528
70-74	57	38	37	34	24	28	27	28	38	27	33.8	0.000296
75-79	49	35	28	37	30	25	23	30	22	24	30.3	0.000299
80-84	53	34	39	43	31	22	19	28	28	34	33.1	0.000558
85+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Viso	2585	2973	3373	3832	3795	3130	2421	7188	8937	10012	4824.6	0.106054

3 PRIEDAS. PROGNOZAVIMO EKSPERIMENTŲ REZULTATAI

3.1 lentelė

Prognozavimo rezultatai 2013-2048 metams

	Determi-nistinis modelis				Apytikslio skaičiavi-mo metodas	Stochast-inis modelis			
Metai	Amžiaus grupių n=3	n=9	n=18	n=36		n=3	n=9	n=18	n=36
2013	2971905	2971905	2971905	2971905	2971905	2971905	2971905	2971905	2971905
2014	2952311	2952130	2951990	2951990	2971906	2952042	2952400	2952400	2948496
2015	2932551	2931834	2931318	2931318	2971907	2932012	2932342	2932039	2924285
2016	2912639	2911048	2909971	2909971	2971908	2911831	2911762	2910936	2899383
2017	2892591	2889803	2888013	2888013	2971909	2891514	2890692	2889177	2873868
2018	2872422	2868130	2865500	2865500	2971910	2871077	2869164	2866827	2847802
2019	2852145	2846062	2842480	2842480	2971911	2850534	2847209	2843937	2821229
2020	2831773	2823628	2818997	2818997	2971912	2829898	2824858	2820553	2794192
2021	2811320	2800859	2795091	2795091	2971913	2809183	2802144	2796716	2766726
2022	2790798	2777784	2770801	2770801	2971914	2788401	2779096	2772463	2738867
2023	2770216	2754433	2746164	2746164	2971915	2767563	2755744	2747830	2710650
2024	2749588	2730834	2721215	2721215	2971916	2746681	2732120	2722853	2682109
2025	2728922	2707015	2695991	2695991	2971917	2725765	2708250	2697568	2653279
2026	2708229	2683003	2670527	2670527	2971918	2704825	2684165	2672010	2624197

2027	2687518	2658825	2644855	2644855	2971919	2683872	2659891	2646212	2594896
2028	2666799	2634506	2619011	2619011	2971920	2662914	2635457	2620210	2565414
2029	2646079	2610071	2593027	2593027	2971921	2641959	2610887	2594039	2535784
2030	2625367	2585543	2566937	2566937	2971922	2621017	2586207	2567731	2506043
2031	2604670	2560946	2540771	2540771	2971923	2600095	2561443	2541322	2476225
2032	2583996	2536301	2514561	2514561	2971924	2579200	2536617	2514844	2446364
2033	2563352	2511630	2488337	2488337	2971925	2558339	2511752	2488330	2416492
2034	2542744	2486952	2462126	2462126	2971926	2537520	2486871	2461812	2386642
2035	2522179	2462287	2435958	2435958	2971927	2516747	2461992	2435321	2356845
2036	2501662	2437652	2409857	2409857	2971928	2496028	2437137	2408885	2327129
2037	2481199	2413066	2383849	2383849	2971929	2475368	2412324	2382534	2297523
2038	2460795	2388544	2357957	2357957	2971930	2454772	2387570	2356294	2268052
2039	2440456	2364101	2332202	2332202	2971931	2434245	2362892	2330190	2238742
2040	2420186	2339753	2306603	2306603	2971932	2413792	2338306	2304245	2209615
2041	2399989	2315511	2281180	2281180	2971933	2393418	2313827	2278480	2180691
2042	2379870	2291389	2255949	2255949	2971934	2373126	2289467	2252915	2151991
2043	2359833	2267399	2230924	2230924	2971935	2352921	2265239	2227568	2123532
2044	2339881	2243551	2206120	2206120	2971936	2332806	2241157	2202452	2095328
2045	2320019	2219855	2181547	2181547	2971937	2312786	2217229	2177583	2067395
2046	2300248	2196321	2157216	2157216	2971938	2292862	2193466	2152971	2039744
2047	2280573	2172957	2133137	2133137	2971939	2273038	2169878	2128626	2012386
2048	2260997	2149770	2109316	2109316	2971940	2253318	2146472	2104557	1985330

3.2 lentelė

Ilgalaikio prognozavimo rezultatai 2013-2317 metams

metai	žmonių skaičius	metai	žmonių skaičius	Metai	žmonių skaičius	metai	žmonių skaičius	metai	žmonių skaičius	metai	žmonių skaičius
2013	2971905	2064	1765647	2115	1039257	2166	554149	2217	330388	2267	191077
2014	2951990	2065	1746489	2116	1028759	2167	548558	2218	327054	2268	189149
2015	2931318	2066	1727590	2117	1018368	2168	543024	2219	323754	2269	187241
2016	2909971	2067	1708946	2118	1008084	2169	537545	2220	320488	2270	185352
2017	2888013	2068	1690553	2119	997904	2170	532121	2221	317254	2271	183482
2018	2865500	2069	1672407	2120	987828	2171	526753	2222	314054	2272	181631
2019	2842480	2070	1654505	2121	977855	2172	521438	2223	310885	2273	179798
2020	2818997	2071	1636842	2122	967983	2173	516177	2224	307748	2274	177984
2021	2795091	2072	1619414	2123	958211	2174	510969	2225	304643	2275	176188
2022	2770801	2073	1602217	2124	948539	2175	505814	2226	301570	2276	174411
2023	2746164	2074	1585247	2125	938965	2176	500711	2227	298527	2277	172651
2024	2721215	2075	1568499	2126	929487	2177	495659	2228	295515	2278	170909

2025	2695991	2076	1551970	2127	920106	2178	490658	2229	292534	2279	169185
2026	2670527	2077	1535655	2128	910820	2179	485708	2230	289582	2280	167478
2027	2644855	2078	1519550	2129	901628	2180	480807	2231	286661	2281	165788
2028	2619011	2079	1503651	2130	892529	2181	475956	2232	283768	2282	164115
2029	2593027	2080	1487953	2131	883522	2182	471154	2233	280905	2283	162459
2030	2566937	2081	1472453	2132	874606	2183	466400	2234	278071	2284	160820
2031	2540771	2082	1457146	2133	865780	2184	461695	2235	275266	2285	159198
2032	2514561	2083	1442029	2134	857044	2185	457037	2236	272488	2286	157592
2033	2488337	2084	1427097	2135	848396	2186	452425	2237	269739	2287	156002
2034	2462126	2085	1412347	2136	839835	2187	447861	2238	267018	2288	154428
2035	2435958	2086	1397774	2137	831361	2188	443342	2239	264324	2289	152870
2036	2409857	2087	1383377	2138	822972	2189	438869	2240	261657	2290	151327
2037	2383849	2088	1369149	2139	814668	2190	434441	2241	259017	2291	149800
2038	2357957	2089	1355089	2140	806448	2191	430058	2242	256404	2292	148289
2039	2332202	2090	1341193	2141	798311	2192	425719	2243	253817	2293	146793
2040	2306603	2091	1327457	2142	790256	2193	421424	2244	251256	2294	145312
2041	2281180	2092	1313879	2143	782282	2194	417172	2245	248721	2295	143846
2042	2255949	2093	1300455	2144	774389	2195	412963	2246	246211	2296	142395
2043	2230924	2094	1287183	2145	766576	2196	408797	2247	243727	2297	140958
2044	2206120	2095	1274059	2146	758842	2197	404672	2248	241268	2298	139536
2045	2181547	2096	1261081	2147	751185	2198	400589	2249	238834	2299	138128
2046	2157216	2097	1248246	2148	743606	2199	396548	2250	236424	2300	136734
2047	2133137	2098	1235552	2149	736103	2200	392547	2251	234039	2301	135355
2048	2109316	2099	1222996	2150	728676	2201	388586	2252	231678	2302	133989
2049	2085759	2100	1210576	2151	721324	2202	384666	2253	229340	2303	132637
2050	2062473	2101	1198290	2152	714047	2203	380785	2254	227026	2304	131299
2051	2039461	2102	1186135	2153	706842	2204	376943	2255	224736	2305	129974
2052	2016726	2103	1174110	2154	699711	2205	373140	2256	222468	2306	128663
2053	1994269	2104	1162213	2155	692651	2206	369375	2257	220224	2307	127365
2054	1972094	2105	1150441	2156	685663	2207	365648	2258	218002	2308	126080
2055	1950200	2106	1138792	2157	678745	2208	361959	2259	215802	2309	124808
2056	1928587	2107	1127266	2158	671897	2209	358307	2260	213625	2310	123549
2057	1907255	2108	1115860	2159	665118	2210	354692	2261	211470	2311	122302
2058	1886202	2109	1104573	2160	658407	2211	351113	2262	209336	2312	121068
2059	1865427	2110	1093403	2161	651764	2212	347571	2263	207224	2313	119847
2060	1844929	2111	1082348	2162	645188	2213	344064	2264	205133	2314	118637
2061	1824704	2112	1071408	2163	638679	2214	340593	2265	203064	2315	117440
2062	1804751	2113	1060580	2164	632235	2215	337157	2266	201015	2316	116256
2063	1785066	2114	1049864	2165	625856	2216	333755	2267	198987	2317	115083

3.3 lentelė

Struktūrizuotos populiacijos modelio prognozių rezultatų palyginimas, pagal amžiaus grupes

Amžius	Amžiaus grupių skaičius N=3	N=9	N=18	N=36
0-29	764345	747963	750648	752010
30-59	864620	782133	747614	747498
60+	624353	619672	611055	611133

3.4 lentelė

Lietuvos gyventojų sudėties pagal amžių prognozės 2048 metams

Amžius	Deterministinis modelis	Stochastinis modelis	Amžius	Deterministinis modelis	Stochastinis modelis	Amžius	Deterministinis modelis	Stochastinis modelis
0-29	765641	764345	0-9	259551	259122	0-4	116484	116076
30-59	865763	864620	10-19	238110	237893	5-9	128910	128244
60+	629593	624353	20-29	250302	249674	10-14	133780	133346
			30-39	265540	264483	15-19	127656	127710
			40-49	270421	269225	20-24	126118	126443
			50-59	246172	245297	25-29	117700	117870
			60-69	249537	249389	30-34	131957	131521
			70-79	202991	203449	35-39	137468	136427
			80+	167144	167940	40-44	130945	129889
						45-49	139148	138373
						50-54	107789	107419
						55-59	100307	100047
						60-64	134618	134108
						65-69	111529	111014
						70-74	108014	107702
						75-79	96072	96230
						80-84	71979	72448
						85+	88843	89691

3.5 lentelė

Lietuvos gyventojų sudėties pagal amžių ir lytį prognozės 2048 metams

	Detrministinis modelis		Stochastinis modelis	
Amžius	vyrai	moterys	vyrai	moterys
0-4	62802	53992	51759	51759
5-9	69022	60170	58033	58033
10-14	71146	62870	60668	60668

15-19	67818	60035	54952	54952
20-24	66759	59516	53233	53233
25-29	62637	55243	51065	51065
30-34	70016	62124	58309	58309
35-39	72305	65284	61709	61709
40-44	67670	63264	59377	59377
45-49	69838	69123	63635	63635
50-54	52152	55338	48798	48798
55-59	46730	53654	43435	43435
60-64	58274	76507	55032	55032
65-69	44253	67501	42141	42141
70-74	39147	69204	37526	37526
75-79	31487	64842	30395	30395
80-84	21904	50084	21252	21252
85+	22920	65010	22507	22507

3.6 lentelė

Lietuvos gyventojų sudėties pagal amžių ir lytį prognozės 2019, 2024, 2029, 2034, 2039, 2044 metams

Amžius	2019	vyrai	moterys	2024	vyrai	moterys	2029	vyrai	moterys
0-4	158815	81483	77332	156014	80046	75968	147955	75911	72044
5-9	158383	81554	76829	162046	83440	78606	159582	82172	77410
10-14	165947	85054	80893	160636	82332	78304	158560	81268	77292
15-19	178310	91592	86718	158557	81446	77111	149602	76846	72756
20-24	186021	95014	91007	166798	85195	81603	152190	77734	74456
25-29	173179	86899	86280	161872	81225	80647	147934	74231	73703
30-34	187700	91627	96073	181881	88786	93095	170628	83293	87335
35-39	195479	94232	101247	186898	90095	96803	178033	85822	92211
40-44	193410	92351	101059	178659	85307	93352	168573	80491	88082
45-49	215063	100288	114775	194940	90904	104036	180213	84036	96177
50-54	172263	77506	94757	155353	69897	85456	141741	63773	77968
55-59	152833	78190	74643	145711	74547	71164	134011	68561	65450
60-64	181097	76440	104657	185010	78092	106918	178015	75139	102876
65-69	137474	53813	83661	141955	55567	86388	141691	55463	86228
70-74	130449	47440	83009	128690	46800	81890	129366	47046	82320
75-79	115066	37525	77541	110630	36078	74552	109397	35676	73721
80-84	84711	24698	60013	81736	23830	57906	79658	23225	56433
85+	79300	17935	61365	88780	20079	68701	91862	20776	71086

Amžius	2034	vyrai	moterys	2039	vyrai	moterys	2044	vyrai	moterys
0-4	138572	71097	67475	129974	66685	63289	122701	62954	59747
5-9	152896	78729	74167	144567	74440	70127	136339	70203	66136
10-14	154734	79307	75427	148623	76175	72448	141278	72410	68868
15-19	144595	74274	70321	139772	71796	67976	134046	68855	65191
20-24	143232	73159	70073	137180	70067	67113	131783	67311	64472
25-29	136715	68601	68114	128853	64656	64197	122958	61698	61260
30-34	158003	77130	80873	147160	71837	75323	138729	67721	71008
35-39	167113	80558	86555	155815	75111	80704	145784	70276	75508
40-44	159135	75985	83150	149250	71265	77985	139590	66652	72938
45-49	168810	78719	90091	158509	73916	84593	148541	69267	79274
50-54	131323	59086	72237	122793	55248	67545	115063	51770	63293
55-59	123386	63125	60261	114637	58649	55988	107136	54811	52325
60-64	166508	70282	96226	154750	65319	89431	144127	60835	83292
65-69	136128	53286	82842	128011	50108	77903	119512	46782	72730
70-74	127365	46318	81047	122206	44442	77764	115315	41936	73379
75-79	108588	35412	73176	106058	34587	71471	101626	33142	68484
80-84	78685	22941	55744	77505	22597	54908	75268	21945	53323
85+	92549	20931	71618	92297	20874	71423	91128	20610	70518

3.7 lentelė

Lietuvos gyventojų prognozės su skirtingomis *k* parametro reikšmėmis

Metai	Prognozė kai k $13*10^6$	Prognozė kai k $14*10^6$	Prognozė kai k $15*10^6$	Prognozė kai k $16*10^6$
1950	2570000	2570000	2570000	2570000
1951	2594032	2594459	2594829	2595153
1952	2618233	2619098	2619848	2620505
1953	2642602	2643916	2645057	2646055
1954	2667139	2668915	2670455	2671805
1955	2691845	2694093	2696045	2697754
1956	2716720	2719453	2721825	2723905
1957	2741764	2744992	2747797	2750256
1958	2766976	2770713	2773961	2776809
1959	2792357	2796615	2800317	2803564
1960	2817907	2822699	2826865	2830521
1961	2843625	2848963	2853607	2857682
1962	2869512	2875410	2880541	2885046
1963	2895567	2902038	2907669	2912614
1964	2921791	2928847	2934990	2940386
1965	2948183	2955838	2962505	2968364
1966	2974743	2983011	2990214	2996546

1967	3001471	3010366	3018118	3024934
1968	3028366	3037902	3046216	3053527
1969	3055429	3065620	3074508	
1970	3082659	3093520	3102995	3111333
1971	3110055	3121601	3131676	3140546
1972	3137618	3149863	3160552	3169965
1973	3165348	3178306	3189623	3199591
1974	3193242	3206930	3218888	3229425
1975	3221303	3235735	3248348	3259466
1976	3249528	3264721	3278003	3289714
1977	3277917	3293886	3307852	3320170
1978	3306471	3323232	3337896	3350834
1979	3335187	3352757	3368134	3381705
1980	3364067	3382461	3398566	3412784
1981	3393109	3412344	3429192	3444071
1982	3422313	3442406	3460012	3475565
1983	3451677	3472645	3491025	3507267
1984	3481202	3503062	3522231	3539176
1985	3510887	3533656	3553630	3571293
1986	3540731	3564427	3585221	3603617
1987	3570732	3595373	3617005	3636147
1988	3600892	3626495	3648980	3668885
1989	3631208	3657791	3681147	3701829
1990	3661680	3689261	3713504	3734979
1994	3657200	3657200	3657200	3657200
1995	3636892	3636328	3635839	3635411
1996	3616654	3615533	3614562	3613713
1997	3596485	3594816	3593371	3592108
1998	3576385	3574177	3572265	3570594
1999	3556355	3553615	3551244	3549172
2000	3536396	3533132	3530309	3527843
2001	3516506	3512728	3509460	3506605
2002	3496687	3492402	3488696	3485460
2003	3476939	3472154	3468018	3464406
2004	3457262	3451985	3447425	3443445
2005	3437656	3431896	3426919	3422576
2006	3418122	3411885	3406499	3401800
2007	3398659	3391954	3386165	3381115

2008	3379267	3372102	3365916	3360523
2009	3359948	3352329	3345755	3340023
2010	3340701	3332636	3325679	3319615

4. PRIEDAS. SKAIČIAVIMO PROGRAMŲ TEKSTAI

Logistinio ir eksponentinio modelių programa

```
clear all;
%istoriniai duomenys
X(1)=1897;  Y(1)=2750000;
X(2)=1923;  Y(2)=2146000;
X(3)=1959;  Y(3)=2711000;
X(1)=1970;  Y(1)=3139700;
X(2)=1973;  Y(2)=3244500;
X(3)=1976;  Y(3)=3328700;
X(4)=1979;  Y(4)=3379400;
X(5)=1982;  Y(5)=3457200;
X(6)=1985;  Y(6)=3544500;
X(7)=1988;  Y(7)=3654700;
X(8)=1991; Y(8)=3704100;
X(9)=1994; Y(9)=3657200;
X(10)=1997; Y(10)=3575200;
X(11)=2000; Y(11)=3499500;
X(12)=2003; Y(12)=3454200;
X(13)=2006; Y(13)=3394100;
X(14)=2009; Y(14)=3339400;
X(15)=2010; Y(15)=3286800;
X(16)=2011; Y(16)=3052588;
X(17)=2012; Y(17)=3003641;
X(18)=2013; Y(18)=2971905;
%logistinio ir eksponentinio modeliu parametrai
N0   = 2971905;
 K    = 15000000;
t0   = 2013;
dt   = 35;
Gim = 32515;
Mir = 42719;
Im   = 22011;
Em   = 31311;
Nt(dt)=0;
mu(dt)=0;
Nts(dt)=0;
Et(dt)=0;
T(dt)=0;
g=Gim/N0;
m=Mir/N0;
I=Im/N0;
e=Em/N0;
R0 = g-m+I-e;
% logistinio deterministinio modelio sprendinys
% eksponentinio deterministinio modelio sprendinys
for i = 0:dt
    T(i+1)=t0+i;
    Nt(i+1) = (N0*K*exp(R0*i))/(K-N0+N0*exp(R0*i));
```

```
end;
plot(X,Y, 'k')
hold on;
plot(T,Nt,'b')
plot(T,Et,'r')
num = 5;
 % logistinio stochastinio modelio sprendinys
for i = 0:dt
    mu(i+1) =(0.5-rand)/500; % generuojam atsitiktinius skaicius
    T(i+1)=t0+i;
    Nts(i+1) = (N0*K*exp((R0+mu(i+1))*i))/(K-N0+N0*exp((R0+mu(i+1))*i));
     T(i+1)=t0+i;
end
plot(T,Nts,'r')
hold on;
figure;
stairs(T,Nts,'r-');
 hold on;
 plot(T,Nt,'b')
plot(T,Et,'r')
hold on;
```

Logistinio ir eksponentinio modelių sprendinių tyrimas

```
Ro=0.2; %pradines salygos
No=1;
k=10000;
int=50; % iteraciju skaicius
int2=85;
ti2=0;
ti=0;
Log=0;
Exp=0;
Y=0;
for i = 0:int-1
    ti(i+1)=1+i;
    Exp(i+1) = No*exp(Ro*i); % eksponentinis sprendinys
    Yi(i+1)=Exp(i+1);
    Y(i+1)=20;
end;
for i = 0:int2-1
    ti2(i+1)=1+i;
    Log(i+1) = (No*k*exp(Ro*i))/(k-No+No*exp(Ro*i)); % logistinis sprendinys
    K(i+1)=k;
    X(i+1)=-1;
    Y(i+1)= 20;
end;
plot(ti2,Log,'b')
hold on;
plot(ti2,K, 'k')
plot(ti2,X, 'k')
plot(Y,Yi, 'k')
plot(ti,Exp,'r')
```

Tiesinių diferencialinių lygčių sistemos sprendinių tyrimas

```
in=100;
Sk=25;
Lai=0;
```

```
la1=0.005;
la2=-0.12;
la3=0.05+0.025i;
la4=0.01-0.01i;
C1=0; % konstanos C
C2=0;
C3=0;
C4=0;
%jei realus ir skirtingii
SExp1=0;
%jei realus ir vienodi
SExp2=0;
%jei skirtingi kompleksiniai
SExp3=0;
X=0;
 for j = 1:Sk % konstanu C sekos
         C1(:,1)=1;
         C2(:,1)=5;
         C1(:,j+1)=C1(:,j)+1;
         C2(:,j+1)=C2(:,j)+2;
         C3(:,j+1)=C2(:,j)+4;
         C4(:,j+1)=C2(:,j)+3;
         Y(j)=1;
     for i = 1:in-1
    Lai(i+1)=1+i;
    SExp1(i+1,j) = C1(1,j)*exp(la1*i)+C2(1,j)*exp(la2*i);
    SExp2(i+1,j) = (i*C2(1,j)+C3(1,j))*exp(la2*i)+C1(1,j)*exp(la1*i);
    SExp3(i+1,j) = C3(1,j)*real(la4*exp(la3*i))+C4(1,j)*imag(la3*exp(la4*i));
    X(i+1)=-1;
     end;
   plot(Lai,X,'k');
   hold on;
   plot(Y,Lai,'k');
   plot(Lai,SExp3(:,j),'k');
   hold on;
   figure
   plot(Lai,SExp1(:,j),'b');
   hold on;
   plot(Lai,SExp2(:,j),'r');
   hold on;
   end;
```

Struktūrizuotų pagal amžių ir lytį populiacijos modelių programa, kai yra 36 klasės

```
clc;
close all;
 clear all;
% demografiniai lietuvos rodikliai
Ga=32515;
Ma=42719;
Ea=31311;
Ia=22011;
Ti=0;

if (dt>T)
    dt=T;
end;
```

```
tmod=1;

CMgr = 18;
% duomenu nuskaitymas
dir = 'C:\Users\Vartotojas\Desktop\Bakalauras\Duomenys\';
load(strcat(dir,'Gv.dat'));
load(strcat(dir,'Gm.dat'));
load(strcat(dir,'Mv.dat'));
load(strcat(dir,'Mm.dat'));
load(strcat(dir,'Ev.dat'));
load(strcat(dir,'Em.dat'));
load(strcat(dir,'Iv.dat'));
load(strcat(dir,'Im.dat'));
load(strcat(dir,'Evv.dat'));
load(strcat(dir,'Evm.dat'));
load(strcat(dir,'X0.dat'));
load(strcat(dir,'Y0.dat'));
load(strcat(dir,'V.dat'));
load(strcat(dir,'Lvi.dat'));
load(strcat(dir,'Lmi.dat'));
load(strcat(dir,'Av.dat'));
load(strcat(dir,'Am.dat'));
D(1,1:CMgr) = Gv*Ga;
D(2,1:CMgr) = Gm*Ga;
D(3,1:CMgr) = Mv*Ma;
D(4,1:CMgr) = Mm*Ma;
D(5,1:CMgr) = Ev*Ea;
D(6,1:CMgr) = Em*Ea;
D(7,1:CMgr) = Iv*Ia;
D(8,1:CMgr) = Im*Ia;
D(9,1:CMgr) = Evv;
D(10,1:CMgr) = Evm;
D(11,1:CMgr) = Y0;
D(12,1:CMgr) = X0;
D(13,1:CMgr) = Lvi;
D(14,1:CMgr) = Lmi;
D(15,1:CMgr) = Av;
D(16,1:CMgr) = Am;
t0 =  1;

 [Lv,Lm,Av,Am]=Aformavimas(D);

%tikriniu vektoriu ir tikriniu reiksmiu radimas
[AvV,AvD] = eig(Av,'nobalance');
[AmV,AmD] = eig(Am,'nobalance');



% konstantu paieska
Cv = inv(Sprendinys(AvV,AvD,0))*D(11,:)';
Cm = inv(Sprendinys(AmV,AmD,0))*D(12,:)';
Lv18s(1:CMgr,1:T)=0;
Lm18s(1:CMgr,1:T)=0;
Lm18(1:18,1)=X0;
Lv18(1:18,1)=Y0;
for t=dt:T
    AvS = Sprendinys(AvV,AvD,t)*Cv;
```

```
    Pv(t+1)=sum(AvS);
    Pvv(1:CMgr,t+1)=AvS;
    AmS = Sprendinys(AmV,AmD,t)*Cm;
    Pm(t+1)=sum(AmS);
    Pmm(1:CMgr,t+1)=AmS;
    Ti(t+1)=2013+t;
    P(t+1) = round(sum(AmS)+sum(AvS));% deterministinio modelio sprendinys
Lv18s=Lv18(1:18,t+1);
Lv18ss(t+1)=sum(Lv18s);
Lv18(1:18,t+2)=Lv*Lv18(1:18,t+1);

Lm18s=Lm18(1:18,t+1);
Lm18ss(t+1)=sum(Lm18s);
Lm18(1:18,t+2)=Lm*Lm18(1:18,t+1);
 Ls(t+1)= round(sum(Lm18s)+sum(Lv18s)); % matricinio modelio sprendinys
 end;
plot(Ti,P,'g*')
hold on;
plot(Ti,Pv,'g')
plot(Ti,Pm,'*')
hold on;
plot(Ti,Ls,'m*')
hold on;
round(AvS)
round(AmS)
round(Lv18s)
round(Lm18s)
plot(Ti,Lv18ss,'k')
plot(Ti,Lm18ss,'o')
for j=1:6
    hold on;
plot(Ti,Pvv(j,:), 'r');
plot(Ti,Pvv(j+6,:), 'g');
plot(Ti,Pvv(j+12,:), 'k');

hold on;

plot(Ti,Pmm(j,:), 'r');
plot(Ti,Pmm(j+6,:), 'g');
plot(Ti,Pmm(j+12,:), 'y');
end;
figure
plot(Ti,Pm,'r')
plot(Ti,Pv,'k')
```

Matricos A formavimas

```
function [Lv,Lm,Av,Am]=Aformavimas(D)
[CPoz,CMgr]=size(D);
%suformuoja deterministinio ir stochastinio modeliu duomenu matricas
%kiekvienai lyciai Av vyrms Am moterims, Lv vyrams, Lm moterims
Av(1:CMgr,1:CMgr)=0;
Am(1:CMgr,1:CMgr)=0;
Lv(1:CMgr,1:CMgr)=0;
Lm(1:CMgr,1:CMgr)=0;

for i = 1:CMgr
        for j = 1:CMgr
                if (i==j)
```

```
                    %  Av(i,j)=D(7,i)-D(5,i)-D(9,i)-D(3,i);
                     Av(i,j)=D(15,i);
                     Lv(i,j)=D(13,i);
                  end;
                  if ((i==1)&&(j~=1))
                      Av(i,j)=D(1,j);
                      Lv(i,j)=D(1,j);
                  end;
                  if (i-1==j)
                      Av(i,j)=D(9,j);
                      Lv(i,j)=D(9,j);
                  end;
                  if (i==j)
                     % Am(i,j)=D(8,i)-D(6,i)-D(10,i)-D(4,i);
                     Am(i,j)=D(16,i);
                     Lm(i,j)=D(14,i);
                  end;
                  if ((i==1)&&(j~=1))
                      Am(i,j)=D(2,j);
                      Lm(i,j)=D(2,j);
                  end;
                  if (i-1==j)
                      Am(i,j)=D(10,j);
                      Lm(i,j)=D(10,j);
                  end;
         end;
end;
```

Oilerio metodo sprendinio formavimas

```
function Spr = Sprendinys(AV,AD,t)
[CMgr1,CMgr1]=size(AV);
Spr(1:CMgr1,1:CMgr1)=0;
for i = 1:CMgr1
        for j = 1:CMgr1
            if imag(AD(j,j))==0 % jei nera kompleksiniu reiksmiu
                   Spr(i,j)=AV(i,j)*exp(AD(j,j)*t);
            else
                if imag(AD(j,j))>0 % jei yra kompleksiniu reiksmiu
                  Spr(i,j)= real(exp(AD(j,j)*t)*AV(i,j));
                else
                  Spr(i,j)= imag(exp(AD(j,j)*t)*AV(i,j));
                end;
            end;
        end;
end;
```

Matricų metodo sprendinio formavimas

```
function Spr = MSprendinys(V,t)
[CMgr1,CMgr1]=size(V);
Spr(1:CMgr1,1:CMgr1)=0;
for i = 1:CMgr1
        for j = 1:CMgr1
            if (i==j)

                Spr(i,j)=exp(V(j,j)*t);
            else
                Spr(i,j)=0;
```

```
            end;
        end;
end;
```

Struktūrizuotų pagal amžių ir lytį populiacijos modelių programa, kai yra 18 klasių

```
clear all;

Ga=63135;
Ma=73362;
Ia=7099;
Ea=25619;
CMgr = 18;
% nuskaitomi duomenys
dir = 'C:\Users\Vartotojas\Desktop\Bakalauras\Duom18\';
load(strcat(dir,'Giv18.dat'));
load(strcat(dir,'Mir18.dat'));
load(strcat(dir,'L18.dat'));
load(strcat(dir,'A18.dat'));
load(strcat(dir,'Ev18.dat'));
load(strcat(dir,'X018.dat'));

D18(1,1:CMgr) = Giv18;
D18(2,1:CMgr) = Mir18*Ma;
D18(3,1:CMgr) = L18;
D18(4,1:CMgr) = A18;
D18(5,1:CMgr) = Ev18;
Xo=X018;
B=0;
L=0;
% formuojamos pradiniu duomenu matricos B ir L
for i = 1:CMgr
        for j = 1:CMgr
                if (i==j)
                    B(i,j)=D18(4,i);
                    L(i,j)=D18(3,i);

                end;
                if ((i==1)&&(j~=1))
                    B(i,j)=D18(1,j);
                    L(i,j)=D18(1,j);
                end;
                if (i-1==j)
                    B(i,j)=D18(5,j);
                    L(i,j)=D18(5,j);



         end;
end;
end;

[BV9,BD9] = eig(B,'nobalance');
C18=0;
L18=0;
L18s=0;
p18=0;
```

```
L18ss=0;
L18(1:18,1)=Xo;
Sp18=Sprendinys(BV9,BD9,0);
C18 = inv(Sprendinys(BV9,BD9,0))*Xo;
for t=0:35
p18= Sprendinys(BV9,BD9,t)*C18;
P18(1:CMgr,t+1)=p18;
ps18(t+1)= sum(p18);
T18(t+1)=t+2013; % deterministinio modelio sprendinys
 L18s=L18(1:18,t+1);
L18ss(t+1)=sum(L18s); % matricinio modelio sprendinys
L18(1:18,t+2)=L*L18(1:18,t+1);
 end;
hold on;
plot(T18,ps18, 'r');
hold on;
format long g;
 for l = 1:6
     hold on;
 plot(T18,P18(13,:)+P18(14,:)+P18(15,:)+P18(16,:)+P18(17,:)+P18(18,:),'b');
 plot(T18,L18ss,'b');
 plot(T18,P18(l+12,:), 'k');
 end;
```

Struktūrizuotų pagal amžių ir lytį populiacijos modelių programa, kai yra 10 klasių

```
clear all;

Ga=32515;
Ma=42717;
Ia=10723;
Ea=31311;
CMgr = 9;
% nuskaitomi duomenys
dir = 'C:\Users\Vartotojas\Desktop\Bakalauras\Duom9\';
load(strcat(dir,'Giv9.dat'));
load(strcat(dir,'Mir9.dat'));
load(strcat(dir,'Im9.dat'));
load(strcat(dir,'Em9.dat'));
load(strcat(dir,'Ev9.dat'));
load(strcat(dir,'X09.dat'));
load(strcat(dir,'Mat9.dat'));
load(strcat(dir,'L9ii.dat'));
load(strcat(dir,'L9i.dat'));
load(strcat(dir,'A9i.dat'));
B=0;
D(1,1:CMgr) = Giv9;
D(2,1:CMgr) = Mir9*Ma;
D(3,1:CMgr) = Im9*Ia;
D(4,1:CMgr) = Em9*Ea;
D(5,1:CMgr) = Ev9;
D(6,1:CMgr) = L9i;
D(7,1:CMgr) = L9ii;
D(8,1:CMgr) = A9i;
X0=X09;
A=0;
L=0;
% fomuojamos A ir L matricos
for i = 1:CMgr
```

```
        for j = 1:CMgr
                if (i==j)
                    A(i,j)=D(1,i)-D(2,i)-D(4,i)-D(5,i)+D(3,i);
                    B(i,j)=D(8,j);
                    L(i,j)=D(6,j);
                end;
                if ((i==1)&&(j~=1))
                    A(i,j)=D(1,j);
                    L(i,j)=D(1,j);
                    B(i,j)=D(1,j);
                end;
                if (i-1==j)
                    A(i,j)=D(5,j);
                    L(i,j)=D(7,j);
                    B(i,j)=D(7,j);
         end;
end;
end;
[AV9,AD9] = eig(B,'nobalance');
C9=0;
Sp=Sprendinys(AV9,AD9,0);
% [AV9,AD9] = eig(A,'nobalance');
C9 = inv(Sprendinys(AV9,AD9,0))*X0;
Ti=0;
PPP9=0;
P9=0;
Ps=0;
L9=0;
L9s=0;
L9ss=0;
L9(1:9,1)=X0;
for t=0:35
P= Sprendinys(AV9,AD9,t)*C9;
P9(1:CMgr,t+1)=P;
Ps(t+1)= sum(P);% deterministinio modelio sprendinys
PP9(1:9,t+1)=(eye(9)+B*t+((B*t)^2)/2+((B*t)^3)/factorial(3)+((B*t)^4)/factorial(4)+((
B*t)^5)/factorial(5)+(B*t)^6/factorial(6)+(B*t)^7/factorial(7)+(B*t)^8/factorial(8)+(
B*t)^9/factorial(9)+(B*t)^10/factorial(10)+(B*t)^11/factorial(11)+(B*t)^12/factorial(
12)+(B*t)^13/factorial(13))*X0;
PPP9(t+1)=sum(PP9(1:9,t+1));% deterministinio modelio sprendinys apytiksliu
skaiciavimo metodu
 L9s=L9(1:9,t+1);
L9ss(t+1)=sum(L9s);
L9(1:9,t+2)=L*L9(1:9,t+1);% matricinio modelio sprendinys
 Ti(t+1)=t+2013;
end;
hold on;
 plot(Ti,Ps(), 'r*');
%  figure
 hold on;
plot(Ti,PPP9(), 'r');
 plot(Ti,L9ss(), 'b');
```

Struktūrizuotų pagal amžių ir lytį populiacijos modelių programa, kai yra 3 klasės

```
del=0;
% duomenu matrica A
x3=[-0.020494 0.009644 0; 0.035083 -0.0402698+del 0; 0 0.028702+del -0.046110521];
s=0;
```

```
PP=0;
NPs=0;
NPss=0;
NLss=0;
NLs=0;
Pss=0;
V=0;
D=0;
Ti=0;

[V,D]=eig(x3);
No1 =1075239;
No2 =1182820;
No3 =713846;
n1=No1;
n2=No2;
n3=No3;
% duomenu matrica A
L=[0.9795058 0.00964399 0;0.035083 0.959730+del 0;0 0.0287017+del 0.95338894];
No=[No1 No2 No3];
C= inv(Sprendinys(V,D,0))*No';
NP(1:3,1)=No';
NL(1:3,1)=No';
[T,J]=jordan(x3);
for t=0:35
Ps= Sprendinys(V,D,t)*C;
P3(1:3,t+1)=Ps;
Pss(t+1)= sum(Ps); % deterministinio modelio sprendinys Oilerio metodu
NLs=NL(1:3,t+1);
NLss(t+1)=sum(NLs);
NL(1:3,t+2)=L*NL(1:3,t+1);% matricinio modelio sprendinys Matricu metodu
 PMs= T*MSprendinys(J,t)*inv(T)*No';
 PM3(1:3,t+1)=PMs;
PMss(t+1)= sum(PMs); % deterministinio modelio sprendinys Matricu metodu
PP(1:3,t+1)=(eye(3)+x3*t+((x3*t)^2)/2+((x3*t)^3)/factorial(3)+((x3*t)^4)/factorial(4)
+((x3*t)^5)/factorial(5))*No';
PPP(t+1)=sum(PP(1:3,t+1));% deterministinio modelio sprendinys apytiksliu skaiciavimo
metodu
Ti(t+1)=t+2013;
end;
%hold on;
 plot(Ti,Pss(), 'k*');
 hold on;
   plot(Ti,NLss, 'b');
 plot(Ti,P3(1,1:26), 'g');
  hold on;
   plot(Ti,PPP(), 'r');
 plot(Ti,PMss, 'or');
```

Stochastinio eksponentinio augimo modelio modelis

```
%deterministinis modelis: dx/dt=(b-d)x

x0=2; b=2; d=1.25; % pradiniai parametrai
x=[0:.1:8];
y=x0*exp((b-d).*x);% sprendinys
set(gca,'fontsize',18);
plot(x,y,'b--','Linewidth',2);
```

```
hold on
%Markovo grandiniu sprendiniai (5)
for j=1:5
 clear n t
 t(1,j)=0;
 tt=1;
 n(tt)=x0;
% tesiam iki nulio arba iki laikas pasieks 500
 while n(tt)>0 & tt<500
 u1=rand; u2=rand; %generuojam atsitiktinius skaicius
 t(tt+1,j)=-log(u1)/(b*n(tt)+d*n(tt))+t(tt,j);
 tt=tt+1;
 if u2<b/(b+d)
 n(tt)=n(tt-1)+1; % gimimas
 else
 n(tt)=n(tt-1)-1; % mirtis
 end
 end
 s=stairs(t(:,j),n,'r-','Linewidth',2);
end
hold off
xlabel('Laikas'); ylabel('Populiacijos dydis N');
axis([0,8,0,min(max(y),100)]);
```