VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS METODIKOS KATEDRA

Lina Jakubonienė

Matematinės analizės egzamino pagalbinės medžiagos tyrimas

Magistro baigiamasis darbas

Vadovas
Doc. Ričardas Kudžma

Leidžiu ginti: ______________________
(Vadovo parašas)

VILNIUS 2011

TURINYS

ĮVADAS

Šiuolaikinė visuomenė tobulėja kultūros ir mokslo dėka. Suvokiant mokslo svarbą, ieškoma būdų ir metodų, kaip pagerinti augančios kartos žinių įsisavinimą, todėl mokslininkai domisi ir tyrinėja patį mokymosi procesą. Dažniausiai studentų žinios ir sugebėjimai tikrinami nuolat egzaminuojant. Kontrolinių ar egzaminų rezultatai ir dėstytojui, ir studentui parodo, kokių žinių dar trūksta. Jei rezultatai geri, auga studento pasitikėjimas savimi, o dėstytojas mato, kurią medžiagą jis išdėstė nepakankamai. Studijų metu dažnai studentai susiduria su egzaminų įvairove, bei egzaminavimo raštu įvairove. Kiekvienas dėstytojas egzaminuodamas studentus naudoja skirtingus metodus.

Magistrinio darbo tikslas – apžvelgti egzaminavimo metodus su pagalbine medžiaga ir be jos ir išnagrinėti matematinės analizės egzamino pagalbines medžiagas, ruoštas pagal doc. R. Kudžmos reikalavimus, ryšį su egzamino įvertinimu.

Pirmame skyriuje apžvelgsime du egzaminavimo raštu metodus: su šaltiniais ir be šaltinių. Išsiaiškinsime šių egzaminavimo metodų trūkumus ir privalumus. Apžvelgsime mokslinius tyrimus, kuriuose nagrinėjama pagalbinės medžiagos naudojimas egzamino metu, jos įtaka egzaminų rezultatams ir jų psichologinei būsenai.

Antrame skyriuje išanalizuosime trijų Vilniaus universiteto I kurso skirtingų specialybių: finansų ir draudimo matematikos, ekonometrijos ir matematikos ir matematikos taikymo studentų kontrolinius ir egzamino darbus ir jų pagalbines medžiagas. Darbe nagrinėjama konkreti pagalbinė medžiaga – A4 lapas, todėl šią pagalbinę medžiagą dar vadinsime paruoštuke. Naudodami statistinę analizę išnagrinėsime šių paruoštukių turinius ir ieškosime ryšio su studentų kontrolinio ir egzamino rezultatais.

Darbo uždaviniai:

1. Apžvelgti populiariausius egzaminavimo raštu metodus
2. Išnagrinėti kontrolinio ir egzamino užduotis
3. Išsiaiškinti, kokių teorinių žinių reikia sprendžiant kontrolinio ir egzamino užduotis
4. Paruoštukių analizė
5. Išsiaiškinti ar studentai buvo užsirašę savo paruoštukėse reikiamą teoriją ir ją panaudojo egzamino metu
6. Palyginti FDM, EKO ir MMT studentų kontrolinio ir egzamino rezultatus

1. EGZAMINAVIMO METODŲ APŽVALGA

2.1 EGZAMINAI SU ŠALTINIAS IR BE ŠALTINIŲ

Kur yra klasės ir vyksta mokymo procesas, ten vyksta ir egzaminai ar žinių patikrinimai. Tėvai, mokytojai ar dėstytojai pagal egzaminų rezultatus vertina studento pažangą. Taigi, egzaminų svarba tapo tokia didelė, kad daugumai studentų tai sukelia nemažai streso. Studijų metu dažnai susiduriama su egzaminavimo raštu įvairove. Vieni dėstytojai atsiskaitymo metu draudžia naudotis papildoma medžiaga, kiti dėstytojai egzamino metu leidžia naudotis sutartais šaltiniais.

Panašią apžvalgą darė L. Ginevič (2005), kuri apžvelgė du egzaminavimo raštu metodus: *be šaltinių*, *su šaltiniais*. Jos darbo tikslas buvo ištirti pagalbinės medžiagos ruošimo ir naudojimo ypatumus ir išnagrinėti jos poveikį žinių įsisavinimui ir pasiekimo rezultatams. Šiame darbe taip pat apžvelgsime egzaminavimo metodus: *su šaltiniais* ir *be šaltinių,* ir panagrinėsime trijų specialybių kontrolinio ir egzamino darbus bei pagalbines medžiagas.

Yra du pagrindiniai egzaminavimo metodai:

1. Su šaltiniais (ang. *Open book*)
    - Suvaržytas, ribotas (ang. *restricted*)
    - Neribotas (ang. *unrestricted*)
2. Be šaltinių (ang. *closed book*)

Tad panagrinėkime kiekvieną iš jų giliau.

2.1 SU ŠALTINIAIS EGZAMINAVIMAS

Pasaulis pasikeitė ir visą laiką sparčiai kinta. Mokiniams, studentams svarbiausias pokytis buvo staiga nepaprastai padidėjęs informacijos kiekis. Prieš trisdešimt metų mokyklų, universitetų funkcija ir pareiga buvo skleisti informaciją. Anuomet išsimokslinęs pilietis turėjo daug žinių ir galėjo atsakyti į įvairiausius klausimus. Namuose knygų lentynas puošusios enciklopedijos kėlė saugumo jausmą, nes atrodė, kad informacija jam pavaldi. Šiandien padėtis kitokia. Niekas negali žinoti visko, o sėkmę nebūtinai lemia išmanymas ir žinios. Vienas žmogus neįstengia įsisavinti ir suvaldyti greitai plintančios informacijos. Mums reikia įvairių įgūdžių, kad galėtume įgyti informaciją, ja naudotis. Reikia žinoti, kur ieškoti informacijos, kaip ją susieti ir pritaikyti. Išsilavinęs žmogus turi gebėti kritiškai mąstyti ir išmokti spręsti problemas. Taip pat ir mokykloje ar universitete mokymasis negali būti kaip buvęs. Svarbiausias šiuolaikinės mokyklos uždavinys yra lavinti mąstymo įgūdžius, kurie apima ir mokėjimą elgtis su informacija.

Kalbant apie mokymąsi, kitas svarbus pokytis buvo pedagogikos, mokymosi psichologijos, sociologijos ir neurologijos laimėjimai. Pastarojo amžiaus moksliniuose mokymosi tyrimuose ir analizėje vyravo du skirtingi požiūriai, **bihevioristinis** ir **kognityvusis.**

Bihevioristai ieško visuotinio mokymosi modelio, paaiškinančio visų gyvų organizmų veiklą. Pagal šį požiūrį, mokyme ir mokymesi svarbiausi veiksniai yra mokymas, t.y., stimulas, ir mokymo rezultatas, t.y., reakcija. Taigi mokymusi (arba išmokimu) yra laikomas pasikeitęs individo išorinis elgesys, kurį galima sustiprinti apdovanojimais ir bausmėmis. Didžiausia bihevioristinių mokymosi ir išmokimo sampratų problema yra ta, kad pakitęs elgesys ir jo įsigalėjimas apibūdinami, remiantis "išoriniu" stebėjimu. Mokinys suvokiamas kaip pasyvus gavėjas, kuris neatsako už tai, kaip mokosi ir išmoksta [15].

Dar viena kryptis - konstruktyvizmas, mokymas(is), paremtas konstruktyvizmu, nėra žinių ir įgūdžių pasyvus perteikimas, tai aktyvus supratimo, reikšmių ir įgūdžių konstravimo procesas, ankstesnių ir naujų žinių ir įgūdžių susiejimas. Vaikas turi mokėti organizuoti, planuoti ir kontroliuoti savo mokymosi procesą, kuris turi tikslą ir yra susijęs su kontekstu bei aplinkybėmis (Tatjana Jevsikova, Jolanta Subatovič, 2010) [16]. Kitaip tariant, mokslo pagrindas pasikeičia nuo iškalimo į tam tikrų protinių gebėjimų išsivystymą. Mokytojo funkcija tada nėra tik apibendrinti informacijos iš vadovėlių, bet ir skatinti studentų kūrybišką ir kritišką mąstymą. Tai gali būti padaroma per pratimus ar projektus skatinančius turimų žinių panaudojimą ir supratimą.

Koks egzaminavimo metodas būtų tinkamiausias tokiam mokymui? Tikriausiai, kad tinkamesnis būtų egzaminavimas *su šaltiniais*. Egzaminavimas *su neribotais šaltiniais* (ang. *Open book unrestricted*) yra toks, kuriame egzaminuojamiesiems leidžiama naudotis šaltiniais. Tai gali būti knygos, paskaitų konspektai. Šis metodas yra žinomas teisės studijų programose, tačiau kitose programose šis metodas beveik nežinomas. Tie, kas naudoja ir pritaria tradiciniam žinių patikrinimui, gali pagalvoti, kad šis metodas yra radikalus ir sunkiai suprantamas. Tačiau toks metodas idealiai tinka tiems kursams, kur ypač svarbu yra kritinis ir kūrybiškas mąstymas. Žinoma, jei dėstytojo tikslas yra patikrinti informaciją, kurią studentai įsiminė, tai toks metodas nėra tinkamas. Juk studentai gali lengvai rasti atsakymus į klausimus knygose ir tiesiog perrašyti į egzamino lapus. Tačiau, jei tokiu egzaminu tikrinama studentų kritinis mąstymas ar problemų sprendimas, tai šis metodas kaip tik tam. Juk tokiu atveju visiškai beprasmiška perrašyti atsakymus iš knygos, jei studentams reikia padaryti savo išvadas remiantis tam tikromis sąvokomis [3].

Su šaltiniais egzaminavimo būdas yra skirstomas į dvi grupes: ribotą ir neribotą.

Ribotas su šaltiniais egzaminavimo būdas yra skirstomas į dvi rūšis: viena, kai pagalbinė medžiaga yra atspausdinta kompiuteriu ar iš anksto sutarta su dėstytoju knyga, vadovėlis. Tai galėtų būti logaritminės lentelės, žodynai, formulės. Tačiau negali būti ranka rašytais dokumentais ar ranka rašytomis pastabomis knygos paraštėse. Kad dėstytojai išvengtų studentų sukčiavimo, pastabų užsirašymo paraštėse, tai studentai egzamino metu gali naudotis tik dėstytojo atnešta literatūra. Pavyzdžiui, brandos egzaminų metu mokiniai gali naudotis formulių lapu (1 priedas). Antra, kai dėstytojai egzamino metu leidžia naudotis tam tikro formato lapais, dažniausiai tai būna A4 dydžio lapas. Tokia paruoštukė būtinai turi būti parašyta ranka ir tik iš vienos lapo pusės. Studentas į paruoštukę gali rašyti apibrėžimus, formules, teoremų formuluotes, tačiau negali rašyti įrodymų ar uždavinių sprendimų. Doc. R. Kudžma matematinės analizės egzaminų ir kontrolinių darbų metu leidžia studentams naudotis tokiomis legaliomis paruoštukėmis (2 priedas).

Neriboto egzamino metu studentas į egzaminą gali atsinešti neribotą kiekį knygų, gali būti ranka rašytos pastabos paraštėse, ankstesnių metų egzamino užduotys ar paskaitų konspektai.

2.1 BE ŠALTINIŲ EGZAMINAVIMAS

Egzaminavimo metodas *be šaltinių* (ang. Closed book) – tai tradicinis egzaminavimo metodas, kai egzamino metu negalima naudotis jokia papildoma medžiaga [6]. Beveik visuose šaltiniuose šis metodas dar vadinamas atgyvenusiu metodu (ang. Old-school) [11]. Tačiau Lietuvoje tai turbūt populiariausias egzaminavimo metodas. Studijuodama universitete laikiau beveik visus egzaminus *be šaltinių,* t.y. net 80% ir tik 20% iš jų buvo *su šaltiniais.*

Dažniausiai, o ypač universitetuose, mokymo programos apima labai daug medžiagos ir tikrai ne kiekvienas studentas sugeba greitai įsiminti ir egzamino metu prisiminti daug apibrėžimų teoremų ar jų įrodymų. Šis egzaminavimo metodas sukelia studentams prieš egzaminą ir egzamino metu didelę stresinę įtampą, o tai gali smarkiai įtakoti jų egzamino rezultatus [6]. Todėl dauguma studentų į egzaminą ateina su paruoštukėmis. Toks egzaminavimas sukelia psichologinę įtampą ir dėstytojams, jie egzamino metu ieško studentų paruoštukių, stebi, kad egzaminas vyktų sąžiningai. Studentai taip pat norėtų, kad egzaminavimas būtų visiems studentams vienodas. Studentai taip pat norėtų, kad visi egzaminai vyktų sąžiningai, t.y. būtų kuo mažiau nelegalių nusirašymų.

Jei egzaminas vyksta *su šaltiniais* egzaminavimo metodu, tai dėstytojas ne visada gali sužinoti, ką studentas žino ir moka. Tačiau jeigu egzamino metu studentai turi tik pieštuką, tušinuką, trintuką ir kartais skaičiuotuvą, tai ką studentas atsako, tai yra tai, ką jis moka [5]. Egzamino tikslumas ir naudingumas priklauso nuo klausimų suformulavimo, t.y. ar klausimai pagal Bloom‘o taksonomiją iš žinių lygmens, ar supratimo.

2.1 MOKSLINIAI TYRIMAI

Yoav Wachsman (2002) [7] darė tyrimą, norėdamas ištirti, ar pagalbinės medžiagos naudojimas įtakoja egzamino rezultatus. Bandymo dalyviai buvo ekonomikos studentai, testas buvo daromas iš studentams jau žinomos medžiagos. Trečdaliui studentų buvo leidžiama pasiruošti vieną A4 lapo dydžio pagalbinę medžiagą, kur jie galėjo rašyti, ką tik nori, ir naudotis per egzaminą. Kitam trečdaliui studentų buvo leidžiama pasiruošti tokią pat pagalbinę medžiagą, bet netikėtai prieš egzaminą neleista ja naudotis ir likusiam trečdaliui studentų buvo neleista pasiruošti pagalbinę medžiagą. L. Ginevič savo baigiamajame bakalauro darbe aprašė šį tyrimą, todėl išsamus tyrimo aprašymas yra jos darbe [10].

Tyrimas parodė, kad studentai, kurie galėjo naudotis pagalbine medžiaga gavo aukščiausius įvertinimus. Vidutinius įvertinimus gavo studentai, kurie ruošė pagalbinę medžiagą, bet negalėjo ja naudotis ir žemiausius balus gavo studentai, kurie neruošė pagalbinės medžiagos.

Apklausa, atlikta po tyrimo, atskleidžia, kad dauguma studentų palankiai vertina pagalbinės medžiagos naudojimą egzamine. Tyrėjas išvadose pateikia, kad testavimas *su šaltiniais* mažina studentų nerimą dėl įvertinimo ir didina studentų pasitikėjimą savimi [7]. Tiriamieji, kurie ruošė pagalbinę medžiagą egzaminui daugiau laiko skyrė egzamino pasiruošimui [7],[8]. Taip pat, studentai sako, kad pagalbinė medžiaga jiems padeda išvengti streso, nes žino, kad egzamino metu jei pamirš ką nors galės pažiūrėti į savo pagalbinę medžiagą [8].

L. Ordojanaitė ir E. Ignaško (2008-2009) atliko tyrimą, norėdamos ištirti pagalbinės medžiagos turinį ruošimą ir panaudojimą egzamino metu. Atlikusios tyrimą tyrėjos išsiaiškino, kad studentai apie paruoštukę pradeda galvoti nuo vienos dienos iki dviejų savaičių iki egzamino dienos, o jos rašymui studentai sugaišta nuo valandos iki devynių dienų [8]. Labai panašius rezultatus gavo ir L. Ginevič (2009) atlikusi tyrimą ir išsiaiškinusi, jog 63% studentų pagalbinės medžiagos ruošimui skyrė 2-5 valandas. Taip pat tyrime buvo domėtasi, kiek laiko skiriama kontrolinio darbo pasiruošimui, kai žinoma, jog galima bus naudotis pagalbine medžiaga. Nustatyta, jog studentai dažniausiai tam skyrė daugiau nei 20 valandų. Tai reiškia, kad leidimas naudotis pagalbine medžiaga didina mokymosi motyvaciją [10].

Studentai atsakė, kad ruošiant paruoštukes jie pasinaudojo dėstytojo nurodymais (reikalavimais), ankstesnių metų kontroliniais darbais, paskaitų konspektais bei vadovėliais ar internetu. Iš to galime spręsti, kad studentai atsakingai žiūri į tokią paruoštukę ir jos paruošimui skiria daug laiko. Į klausimą, kodėl naudojosi būtent tokiais šaltiniais studentai atsakė, kad dėstytojo reikalavimai bei ankstesnių metų kontroliniai darbai reikalingi norint atrinkti informaciją iš vadovėlių, o paskaitų konspektai – formuluočių patikslinimui. Studentai kontrolinio ar egzamino metu nepanaudojo tos informacijos, kurios gerai neįsisavino. Tačiau tik vienas studentas savo paruoštukės nepanaudojo egzamino metu, nes viską išmoko darydamas paruoštukę ir neturėjo reikiamos informacijos. Taip pat išsiaiškino, kad studentams nedažnai tenka susidurti su tokiu egzaminavimo būdu, dažniausiai studentai yra egzaminuojami be pagalbinių medžiagų. Jeigu studentai galėtų rinktis, jie pasirinktų egzaminavimą su legalia paruoštuke, nes tai jiems suteikia daugiau pasitikėjimo savo jėgomis, gali ramiau ruoštis atsiskaitymui, susisteminti jau turimas žinias ir lengviau įsiminti naujas [8].

Trys autoriai, Dr Richard Brightwell, Ms Janine-Helen Daniel and Dr Angus Stewart, tyrė, ar tikrai egzaminas *su šaltiniais* yra lengvesnis, ir ar studentai ruošdamiesi tokiam egzaminui įsimena daugiau informacijos.

Tyrimą studentai turėjo atlikti du kartus, pirma, kai studentai atsakinėjo į klausimus be šaltinių, o antra – su šaltiniais. Pirmu atveju studentai atsakinėjo 50 klausimų su galimais keliais atsakymais (Multiple choice), sąvokų apibrėžimai arba klausimai reikalaujantys kritinio mąstymo. Vėliau studentams buvo leista atlikti tą patį testą tik jau jie galėjo naudotis vadovėliais. Po pakartotinio testo buvo analizuojami testų rezultatai, tačiau didelio skirtumo tarp abiejų testų rezultatų vidurkio nebuvo. Šio tyrimo išvados buvo patvirtinti, kad tik tinkamai parinkus studentų egzaminavimui (*su šaltiniais* ar *be šaltinių*) klausimus galima įvertinti studentų gebėjimus.

Dauguma dėstytojų nori pasiekti kuo geresnių mokymo rezultatų, o tai sukelia studentams didesnį ar mažesnį stresą. Egzaminai *su šaltiniais* tai būdas pasiekti gerų ir naudingų mokymo rezultatų ir sumažinti studentų nerimą egzamino metu. Taip pat, šiuo tyrimu parodyta, kad dėstytojai supranta, egzaminavimas *su šaltiniais* skatina studentus egzamino metu daugiau mąstyti, suprasti nei įsiminti ir atkartoti įsimintą medžiagą. Tokio egzamino pasiruošimo metu studentai mažiau stresuoja ir daugiau laiko skiria turinio supratimui (Theophilides ir Dionysiou, 1996). Be to, manoma, kad egzaminai *su šaltiniais* labiau atitinka tikras gyvenimo situacijoms, kai problemų spendimui galime pasinaudoti šaltiniais (Feller, 1994). Tikros gyvenimo situacijos, kurioms pedagogai siekia paruošti savo studentus (Feller, 1994), gali būti struktūrizuotai aprašytos vartojant šešias klases, bendrais bruožais aprašomas Bloom‘o Taksonomijoje (Anderson ir Sosniak, 1994). Šios šešios klasės yra plačiai pripažintos ir buvo stimulas kai kuriems didžiausiems mokslo pakeitimams. Taksonomija yra padalyta į šešis lygmenis, pradedant žinių lygmeniu ir baigiant vertinimo.

Tyrime dalyvavo 196 pirmo semestro Tiksliųjų mokslų bakalauro studentų iš Edith Cowan universiteto (ECU). Šis, ECU, universitetas yra palyginti naujas, esantis Perte mieste, Vakarų Australijoje.

Minimumas ir maksimumo rezultatai egzaminui *be šaltinių* buvo 22 % ir 88 % atitinkamai, o egzamino *su šaltiniais* – 30 % ir 88 % atitinkamai. Mažiausias egzaminavimo *be šaltinių* rezultatas buvo 11, didžiausias - 44, *su šaltiniais* mažiausias rezultatas 15, didžiausias 44. Studentų rezultatai beveik vienodi tiek egzaminuojant *su šaltiniais,* tiek *be šaltinių.* Todėl šiuo tyrimu taip pat paneigiama populiari nuomonė, kad egzaminai *su šaltiniais* yra "lengvesni" nei egzaminai *be šaltinių* (Francis, 1982; Boniface, 1985; Feller, 1994; Ioannidou 1997; Theophilides ir Dionysiou, 1996).

2. PAGALBINIŲ MEDŽIAGŲ TYRIMAS

Nagrinėjame šešių grupių: finansų ir draudimo matematika pirma ir antra grupės (FDM1 ir FDM2), ekonometrijos pirma ir antra grupės (EKO1 ir EKO2), matematika ir matematikos taikymas pirma ir antra grupės (MMT1 ir MMT2), paruoštukes. Pagalbinės medžiagos buvo ruošiamos ir naudojamos remiantis doc. R. Kudžmos reikalavimais:

- Paruoštukės formatas: A4 lapas užpildytas tik iš vienos pusės
- Paruoštukė turi būti rašyta ranka
- Paruoštukėje turi būti studento vardas ir pavardė.
- Paruoštukėje gali būti apibrėžimai, formulės, teoremų formuluotės, t.y. duomenys iš Bloom‘o taksonomijos žinių lygmens.
- Neturi būti informacijos iš supratimo ir taikymo lygmens pagal Bloom‘o taksonomiją: įrodymai, uždavinių sprendimas
- Atiduodama kartu su darbu.

Iš viso buvo surinktos 150 studentų paruoštukės ir kontrolinio, bei egzamino darbai. Kiekvienos grupės studentų egzamino ir kontrolinio darbo rezultatus surašėme į lenteles. Studentų paruoštukių informaciją užkodavome 0 ir 1 (0, kai informacija turėjo būti, bet nebuvo ir 1, kai informacija buvo). Kiekvieną egzamino ir kontrolinio uždavinį išnagrinėjome ir atrinkome, kokia teorinė medžiaga gali būti naudinga sprendžiant tą uždavinį. Sugrupavę teorinę informaciją su uždavinio įvertinimais, ieškojome jų tarpusavio ryšio. Šio tyrimo tikslas buvo išsiaiškinti ar kontrolinio (egzamino) rezultatai priklauso nuo informacijos kiekio paruoštukėje.

Siekiant šio tikslo suformuluoti pagrindiniai uždaviniai:

- Nustatyti, kokia informacija buvo patalpinama pagalbinėse medžiagose ir kiek ji atitiko kontrolinio ir egzamino darbo reikalavimus;
- Ištirti, ar pagalbinių medžiagų turinys (informacijos kiekis) įtakojo kontrolinio (egzamino) darbo rezultatus.

2.1 KONTROLINIO IR EGZAMINO UŽDUOČIŲ NAGRINĖJIMAS

2.1.1 KONTROLINIO DARBO UŽDUOČIŲ NAGRINĖJIMAS

Pirmiausiai, nagrinėsime kontrolinio darbo užduotis (3 priedas). Kiekvienos grupės studentų rezultatus surašėme į lenteles (1, 2, 4, 5, 7 lentelės).

Lentelė 1 FDM1 grupės taškai

Studento nr.	1 užd	2 užd	3 užd	4 užd	5 užd	Iš viso
1	2	0	4	3,5	2,5	13,5
2	3	4	5	13,5	6	32
3	0	0	2	2	0	6,5
4	1,5	5	3	4	1	14,5
5	5,5	11	9	0	5	30,5
6	0	0	0	0	0	0
7	3,5	3	5	7	1	22,5
8	6	5	6	11	4	32
9	1,5	0	3	2,5	1	8,5
10	1,5	3	3	5,5	3	16,5
11	1,5	0	1	2	1	6,5
12	1	0	0	1,5	1,5	4
13	7	4	5	8,5	8	32,5
14	5	6	5	5	4	25
15	1	4,5	5	4,5	2	17,5
16	0	3	0	7	1	11
17	1,5	0	0	0	1	2,5
18	2,5	4,5	5	9,5	4,5	24,5
19	2,5	1,5	3	6,5	5	21
20	2	2	3	9	1,5	23
21	2	6	6	8,5	7	30,5

Lentelė 2 FDM2 grupės taškai

Studento nr.	1 užd	2 užd	3 užd	4 užd	5 užd	Iš viso
1	2	0	4	8,5	1	17
2	0	5,5	6	5	1,5	19
3	2,5	4,5	5	2,5	4	18
4	0,5	1	0	1,5	0	5,5
5	1	2,5	3	7	5	18,5
6	1	3	2	1	1	14
7	2	2,5	2	4	2	12,5
8	2	6	8	12,5	12	40,5
9	0	2	3	7	4	16
10	0	1	1	2	0	5
11	4	0	3	7	2	16
12	0	5	2	7	1,5	15,5
13	0,5	3	4	0	1,5	9
14	1,5	6,5	4	6	3	24,5
15	2	7	3	5	3	23
16	2,5	3	3	1	3	13,5
17	0	5,5	3	11	7	28,5
18	1	2,5	2	3,5	2	13,5
19	2	1,5	2	2,5	2	10
20	0,5	0	3	6	1,5	11
21	1,5	5	2	2	1	14,5
22	1	0,5	2	1	2	9,5
23	1	2	2	0,5	3,5	9,5
24	3	1	5	7	3,5	19,5
25	1	0	3	6,5	3	14,5
26	0,5	0	2	2	0	5,5

Pasinaudokime SPSS paketu ir palyginkime abi finansų ir draudimo matematikos grupes tarpusavyje (3 lentelė).

Lentelė 3

Statistics

		FDM1 užd1	FDM1 užd2	FDM1 užd3	FDM1 užd4	FDM1 užd5	FDM1 iš viso	FDM2 užd1	FDM2 užd2	FDM2 užd3	FDM2 užd4	FDM2 užd5	FDM2 iš viso
N	Valid	21	21	21	21	21	21	26	26	26	26	26	26
	Missing	5	5	5	5	5	5	0	0	0	0	0	0
Mean		2,4048	2,9762	3,4762	5,2857	2,8571	17,8333	1,2692	2,7115	3,0385	4,5769	2,6923	15,5192
Minimum		,00	,00	,00	,00	,00	,00	,00	,00	,00	,00	,00	5,00
Maximum		7,00	11,00	9,00	13,50	8,00	32,50	4,00	7,00	8,00	12,50	12,00	40,50

Iš 3 lentelės matome, kad pirmoje finansų ir draudimo matematikos grupėje studentų yra mažiau, nei antroje grupėje. Mažiausia taškų suma, surinkta kontrolinio darbo metu yra 0 pirmoje grupėje, o antroje – 5. Finansų ir draudimo matematikos specialybės pirmos grupės nagrinėtų uždavinių taškų vidurkis yra didesnis nei tos pačios specialybės antros grupės.

Lentelė 4 EKO1 grupės taškai

Studento nr.	1užd	2užd	3užd	4užd	5užd	Iš viso
1	0	1,5	1	1	2	5,5
2	1	0,5	4	1	0,5	7
3	1,5	4,5	4	4	0	14
4	2,5	5	5	5	1	18,5
5	2,5	0,5	2	4	3	12
6	1,5	0	2	3,5	0	7
7	1	0,5	2	4	0	7,5
8	0,5	5,5	3	5,5	1	15,5
9	3	4,5	4	6	6	23,5
10	1	0,5	2,5	6	0,5	10,5
11	0	3,5	2	3,5	1	10
12	0,5	0	0,5	1,5	0,5	3
13	0	2,5	3	4	1,5	11
14	0	2,5	2	0	0,5	5
15	0,5	0,5	1	4,5	0	6,5
16	0	3	3	5,5	0	11,5
17	1	0	1	1	1	4
18	1	4,5	3	2	1	11,5
19	0,5	0	1	0	0	1,5
20	0,5	4,5	4	3	4	16
21	1	3,5	1	0	1	6,5
22	2,5	2	2	2	0,5	9
23	1	0	2	5,5	0,5	9
24	0,5	0	1	3,5	2,5	7,5

Lentelė 5 EKO2 grupės taškai

Studento nr.	1užd	2užd	3užd	4užd	5užd	Iš viso
1	1	0,5	0	0	3	4,5
2	1	0,5	1	0	0,5	3
3	1	2,5	1	5,5	0,5	10,5
4	2	0	0,5	5,5	0,5	8,5
5	1,5	0,5	1,5	3	0	6,5
6	0	8	9	6	3	26
7	0,5	0	0	1,5	0	2
8	1,5	2,5	3	1	0,5	8,5
9	0,5	2,5	3	4	0	10
10	2	1	0	0	1	4
11	1	0	1	1,5	0	3,5
12	0,5	0	1	2	0	3,5
13	0	1	3	8,5	1	13,5
14	0,5	0,5	3	2,5	1	7,5
15	2	0,5	0	1	0	3,5
16	1,5	2,5	0,5	0	0	4,5
17	1	5	3	1	0,5	10,5
18	1	0	5	2,5	1,5	10
19	2	0	3	3	0,5	8,5
20	1,5	0	3	1,5	0,5	6,5
21	1,5	0	1,5	0	1	4
22	1	0	3	1	1	6

Lentelė 6

Statistics

		EKO1 užd1	EKO1 užd2	EKO1 užd3	EKO1 užd4	EKO1 užd5	EKO1 iš viso	EKO2 užd1	EKO2 užd2	EKO2 užd3	EKO2 užd4	EKO2 užd5	EKO2 iš viso
N	Valid	24	24	24	24	24	24	22	22	22	22	22	22
	Missing	0	0	0	0	0	0	2	2	2	2	2	2
Mean		,9792	2,0625	2,3333	3,1667	1,1667	9,7083	1,1136	1,2500	2,0909	2,3182	,7273	7,5000
Minimum		,00	,00	,50	,00	,00	1,50	,00	,00	,00	,00	,00	2,00
Maximum		3,00	5,50	5,00	6,00	6,00	23,50	2,00	8,00	9,00	8,50	3,00	26,00

Palyginkime abi ekonometrijos grupes (EKO1 ir EKO2) tarpusavyje, naudodamiesi SPSS paketu (6 lentelė). Pirmoje ekonometrijos grupėje studentų daugiau nei pirmoje grupėje. Kontrolinio darbo metu surinktų taškų vidurkis antroje grupėje yra didesnis nei antroje grupėje tik už pirmą uždavinį. Didžiausia surinktų taškų suma pirmoje grupėje yra 6 taškai už ketvirtą ir penktą uždavinius, o viso kontrolinio metu pirmoje grupėje maksimumas buvo 23,5. Antroje grupėje didžiausias maksimumas taškų buvo už trečią uždavinį 9 taškai, o viso kontrolinio darbo metu 26 taškai.

Lentelė 7 MMT1 grupės taškai

Studento nr.	1užd	2užd	3užd	4užd	5užd	Iš viso
1	1	0,5	2	0,5	1	5
2	0,5	0	3	3	1	7,5
3	0	6	4	4,5	0	14,5
4	1	0	2	2	0,5	5,5
5	4	2,5	4	7,5	4	22
6	1,5	1	2	2	0	6,5
7	0	0	2	1	2	5
8	0	0	3	0	2	5
9	1,5	0	3	1	0,5	6
10	0	3,5	0	0	0	3,5
11	0	2	2	1	3,5	8,5
12	1	3	2	6	4	16
13	0,5	0,5	0	0	1	2
14	1	0,5	3	3,5	1	9
15	1,5	0	0	2	0	3,5
16	1	3	1	2,5	2	9,5
17	2	2,5	4	6,5	3	18
18	1	4	6	9,5	8	28,5
19	0	2	5	0	1	8
20	1	1,5	2	0	1	5,5
21	0	2,5	8	3,5	0	14
22	1	5,5	3	7	2	18,5
23	0	0	0	8	0	8
24	0,5	3,5	0,5	3,5	2	10
25	1	2	2	2	2,5	9,5
26	0	0	1	0	2	3
27	0	0,5	0	0	3	3,5
28	1,5	1	1	3	1	7,5

Lentelė 8 MMT2 grupės taškai

Studento nr.	1užd	2užd	3užd	4užd	5užd	Iš viso
1	0,5	0,5	0,5	4	2	7,5
2	1	0,5	2	0	1	4,5
3	1	3	2	0	2,5	8,5
4	1	4	2,5	2,5	3,5	13,5
5	1,5	2	1	1,5	0	6
6	0	0,5	8	4	2	14,5
7	1	0,5	1	2	1	5,5
8	1	0	2	3	0,5	6,5
9	0	3,5	2	5	0	10,5
10	0	0	0	0	0,5	0,5
11	0,5	3,5	0	1	0	5
12	0,5	0	0	1	0,5	2
13	3	1	8	9,5	4	25,5
14	1,5	0	0	1	0,5	3
15	1	0,5	0	1	0	2,5
16	0	3	1	0	1	5
17	1	2	2	6	0,5	11,5
18	1	1	2	1	0,5	5,5
19	1	0	0	0	0	1
20	1	2	2	1	0,5	6,5
21	1,5	0,5	2,5	0	1,5	6
22	0	3	0	0	0,5	3,5
23	2,5	0	5	1	0,5	9
24	1	0	2	2	1	6
25	0	2	0	3,5	0,5	6
26	0,5	1	1	0,5	0,5	3,5
27	0	4,5	2	7,5	2	16
28	1	0	2	2	1	6
29	0,5	0	1	2	1	4,5

Lentelė 9

Statistics

		MMT1 užd1	MMT1 užd2	MMT1 užd3	MMT1 užd4	MMT1 užd5	MMT1 iš viso	MMT2 užd1	MMT2 užd2	MMT2 užd3	MMT2 užd4	MMT2 užd5	MMT2 iš viso
N	Valid	28	28	28	28	28	28	29	29	29	29	29	29
	Missing	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
Mean		,8036	1,6964	2,3393	2,8393	1,7143	9,3929	,8448	1,3276	1,7759	2,1379	1,0000	7,0862
Minimum		,00	,00	,00	,00	,00	2,00	,00	,00	,00	,00	,00	,50
Maximum		4,00	6,00	8,00	9,50	8,00	28,50	3,00	4,50	8,00	9,50	4,00	25,50

Palyginkime matematikos ir matematikos taikymo specialybės abi grupes (MMT1 ir MMT2) tarpusavyje, naudodamiesi SPSS paketu (9 lentelė). Vienu studentu mažiau yra pirmoje matematikos ir matematikos taikymo grupėje. Abiejų grupių taškų vidurkiai labai panašūs, bet antros grupės truputį didesni. Didžiausia taškų suma tiek pirmoje, tiek antroje grupėje yra 9,5 už 4 uždavinį.

Palyginkime visų trijų specialybių studentų gautus taškus tarpusavyje (3, 6, 9 lentelės). Daugiausiai studentų yra MMT2, o mažiausiai FDM1. Už 1 - 4 uždavinius taškų vidurkiai mažiausi yra MMT1 ir MMT2 grupėse, o didžiausi FDM1 ir FDM2 grupėse. Tik penktame uždavinyje mažiausias taškų vidurkis EKO2 grupėje.

2.2.1 KONTROLINIO DARBO PARUOŠTUKIŲ NAGRINĖJIMAS

Nagrinėjame kontrolinio darbo (3 priedas) studentų paruoštukes. Primename kontrolinio darbo pirmosios užduoties formuluotę:

1 uždavinys. Sakykime, tiesės, kurios posvyris į ordinačių ašį yra *m* ir abscisių ašies kirtimas *a*, lygtis yra $x = \quad + \quad$. Iš šio teiginio išveskite lygtį tiesės, nusakytos tašku $A(x_0, y_0)$ ir normaliniu vektoriumi $\vec{n} = \quad$.

a) Suformuluokite, kas duota ir ką reikia įrodyti. (2)

b) Suformuluokite, ką reikia atlikti pirmojoje įrodymo dalyje, ir padarykite tai geometriškai bei algebriškai. (4)

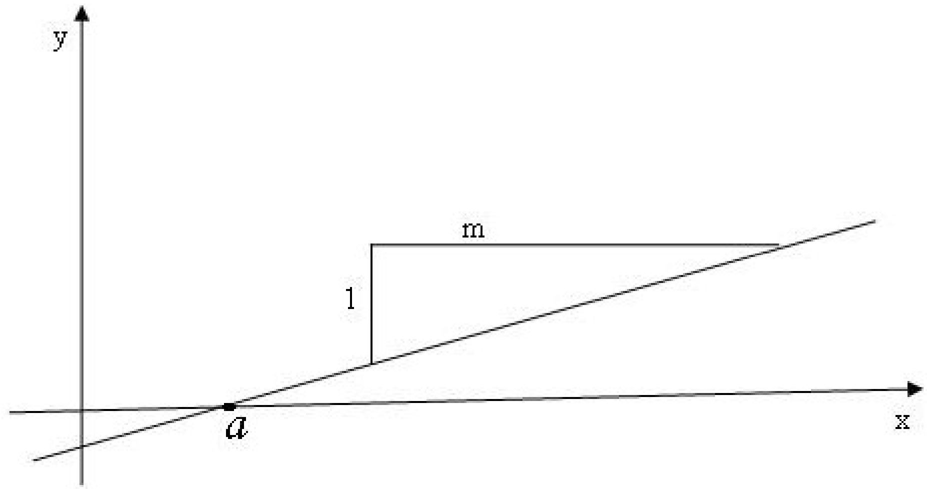
c) Pabaikite įrodymą. (1)

d) Ar kur nors parašėte, kada tik ką išspręsto uždavinio išspręsti negalima? Jei parašėte, tai kurioje dalyje? Jei neparašėte, tai parašykite. (1)

e) Gaukite tiesiogiai norimą rezultatą? (1)

Nagrinėjant studentų paruoštukes, nusprendėme, kad šio uždavinio sprendimui studentai galėjo savo paruoštukėse būti užsirašę tiesių lygtis ir būti nubrėžia grafikus:

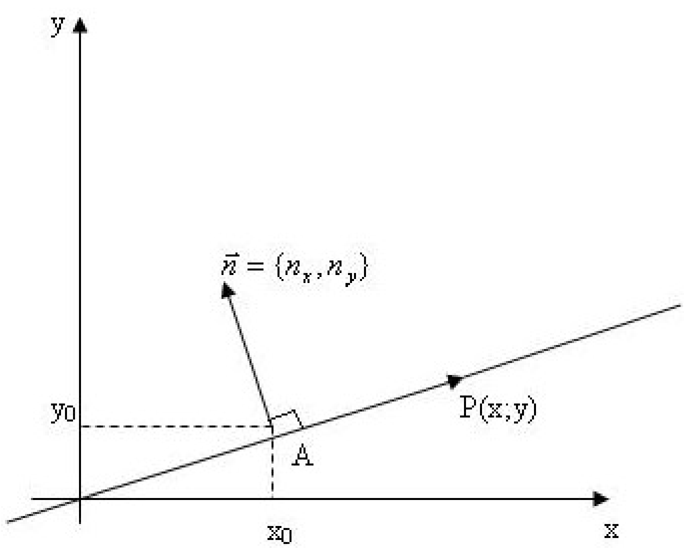
- kai žinomas posvyris į ordinačių ašį m ir abscisių ašies kirtimas a, $x = ny + \iota$, (1 pav)



Pav. 1

- kai žinomas taškas $A(x_0, y_0)$ ir normalinis vektorius $\vec{n} = (n_x, n_y)$:

  $n_x(x - x_0) + n_y(y - y_0) = 0$ (2 pav)



Pav. 2

Lentelė 10 FDM1 grupės A4 lapo turinys pirmam uždaviniui

L-lygtis **G**-grafikas	Tiesės per du taškus lygtis		Tiesės lygtis, kai turime tašką ir posvyrį		Tiesės lygtis, kai turime ordinatės kirtimą ir posvyrį		Tiesės lygtis, kai turime koordinačių ašių kirtimus		Tiesės lygtis, kai turime tašką ir normalės vektorių		Tiesės lygtis, kai turime tašką ir krypties vektorių		Tiesės lygtis, kai turime posvyrį į ordinatę ir abscisės kirtimą		posvyrio formulė
FDM1	L	G	L	G	L	G	L	G	L	G	L	G	L	G	
1	1		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
2	1		1		1		1		1		1		1		
3															
4															
5	1		1		1		1		1		1		1		
6															
7	1		1		1		1		1		1		1		
8	1		1		1		1		1		1		1		
9															1
10															
11															
12															1
13	1		1		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
14	1		1		1		1		1		1		1		
15	Nėra paruoštukės														
16															
17															1
18															
19	1		1				1						1		
20	1		1		1		1		1		1		1		
21	1		1		1		1		1		1		1		

Lentelė 11 FDM2 grupės A4 lapo turinys pirmam uždaviniui

L-lygtis **G**-grafikas	Tiesės per du taškus lygtis		Tiesės lygtis, kai turime tašką ir posvyrį		Tiesės lygtis, kai turime ordinatės kirtimą ir posvyrį		Tiesės lygtis, kai turime koordinačių ašių kirtimus		Tiesės lygtis, kai turime tašką ir normalės vektorių		Tiesės lygtis, kai turime tašką ir krypties vektorių		Tiesės lygtis, kai turime posvyrį į ordinatę ir abscisės kirtimą		posvyrio formulė
FDM2	L	G	L	G	L	G	L	G	L	G	L	G	L	G	
1	1														
2															
3	Nėra paruoštukės														
4															
5															
6															
7	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
8	1		1		1		1		1		1		1		
9															
10															
11															
12															
13															
14	Nėra paruoštukės														
15															
16															
17															
18															
19															
20	1														1
21															
22															
23															1
24	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
25															
26															1

Grupių EKO1 ir MMT2 studentų paruoštukėse nebuvo užrašytos reikiamos tiesės lygtys, o grupėse EKO2 ir MMT1 reikiamas tiesių lygtis užsirašė atitinkamai 3 ir 2 studentai.

2 uždavinys. Sprendžiant šį uždavinį studentai galėjo paruoštukėse būti užsirašę:

- **Sekos ribos apibrėžimą**. Sekos $\{x_n\}$, riba yra 0, jei kiekvienam $\varepsilon > 0$ galima rasti tokį N, kad iš $n > N \Rightarrow 0 < x_n < \varepsilon$
- **Sekų sumos ribos teoremą.** Jei $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ ir $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, tai $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$.

Visų trijų specialybių studentų paruoštukėse ieškojome reikiamos teorijos ir surašėme į lenteles (6 priedas). Visos šešios grupės teorijos šiam uždaviniui turėjo panašiai. Iš viso trečdalis studentų užsirašė sekos ribos apibrėžimą ir beveik 25% studentų užsirašė sekų sumos ribos apibrėžimą. FDM grupėse 13 studentai (beveik 28% šios specialybės studentų) užsirašė sekos ribos apibrėžimą ir 7 (beveik 15% studentų šios specialybės) studentai užsirašė sekų sumos ribos teoremą. EKO grupėse 13 (28,5% studentų šios specialybės) studentų užsirašė sekos ribos apibrėžimą ir 18 (39% studentų šios specialybės) sekų sumos ribos teoremą. MMT grupėse sekos ribos apibrėžimą užsirašė 24 (42% studentų šios specialybės) studentai, o sekų sumos ribos teoremą – 12 (21% studentų šios specialybės).

3 uždavinys. Šio uždavinio sprendimui studentai savo paruoštukėse galėjo užsirašyti **Bolcano - Vejerštraso teoremą**: Kiekviena aprėžta seka turi konverguojantį posekį.

ir **monotoniškų ir aprėžtų sekų teoremą:** Monotoniška ir aprėžta realiųjų skaičių seka konverguoja.

Kadangi užduotyje prašo suformuluoti atsakymą tiek natūralia, tiek simbolių kalbomis, tai studentų paruoštukėse taip pat ieškojome teorijos abejomis kalbomis (12, 13 lentelės, 7 priedas).

Lentelė 12 FDM1 grupės A4 lapo turinys trečiam uždaviniui

N-natūrali kalba **S**-simbolių kalba	Bolcano - Vejerštraso teorema		Monotoniškų ir aprėžtų sekų teorema	
FDM1	N	S	N	S
1	1		1	
2	1		1	
3	1			
4	1		1	
5	1		1	
6	1	□	1	1
7	1		1	
8	1		1	
9	1		1	1
10	1		1	1
11	1		1	1
12	1		1	1
13	1		1	
14	1		1	
15	Nėra paruoštukės			
16	1		1	
17	1		1	
18	1		1	
19	1		1	
20	1	1	1	
21	1		1	1

Lentelė 13 FDM2 grupės A4 lapo turinys trečiam uždaviniui

N-natūrali kalba **S**-simbolių kalba	Bolcano-Vejerštraso teorema		Monotoniškų ir aprėžtų sekų teorema	
FDM2	N	S	N	S
1	1		1	1
2		1	1	
3	Nėra paruoštukės			
4	1		1	
5	1		1	
6	1		1	1
7	1		1	
8	1		1	
9	1			
10	1		1	1
11	1		1	1
12				
13	1		1	1
14	Nėra paruoštukės			
15	1		1	
16	1			1
17	1		1	
18	1		1	
19	1		1	
20	1	1	1	1
21	1			1
22	1		1	
23	1	1	1	
24	1		1	
25	1		1	
26	1		1	

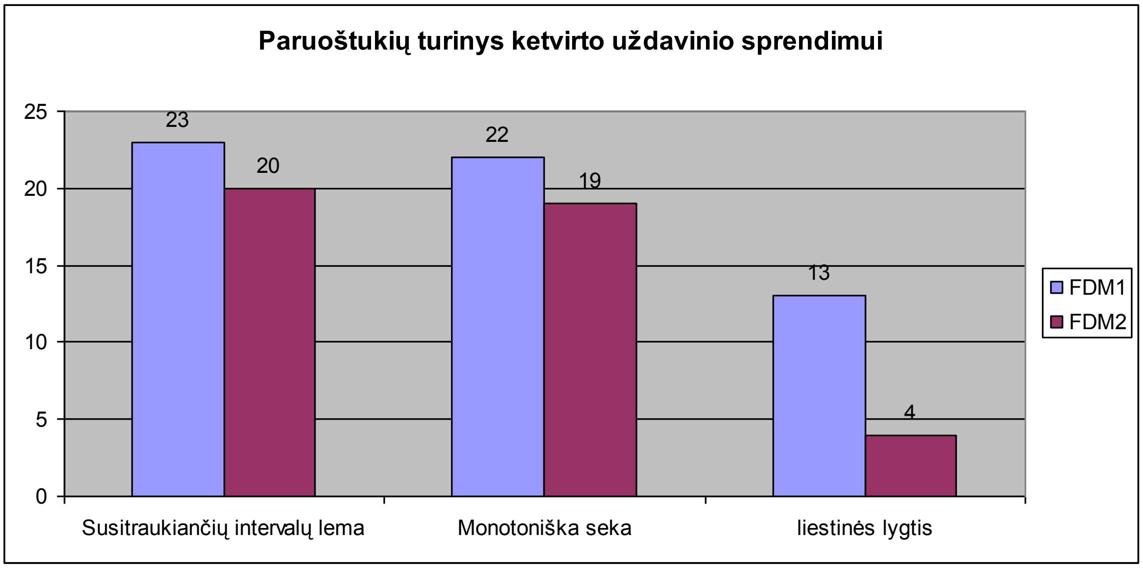
Iš lentelių matome, kad beveik visi studentai užsirašė šias teoremas. Visi užsirašę teoremas savo paruoštukėse studentai teoremas dažniausiai rašė natūralia kalba ir tik papildomai užsirašė simbolių kalba. Simbolių kaba dažniau studentai rašė monotoniškų ir aprėžtų sekų teoremą. Galime daryti išvadą, kad studentai paruoštukes rašo taip, kad jiems būtų aiškiau, t.y. natūralia kalba.

<u>4 uždavinys</u>. Šiam uždaviniui studentai savo paruoštukėse užsirašė:

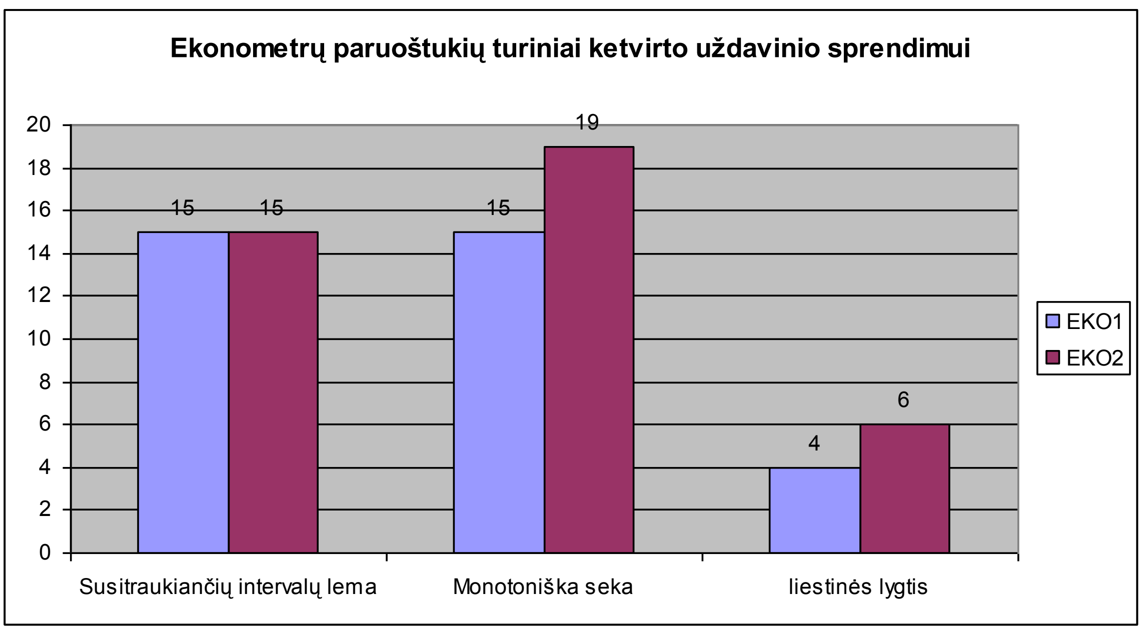
- **Susitraukiančiųjų intervalų lemą:** Jei intervalų seka I_n, $I_n = a_n, b_n]$ tenkina sąlygas:
  - $I_{n+1} \subset {}_n$ arba $\{a_n\}$ didėjanti, o $\{b_n\}$ mažėjanti.

- $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, tai egzistuoja vienintelis realus skaičius α, α priklauso visiems intervalams.

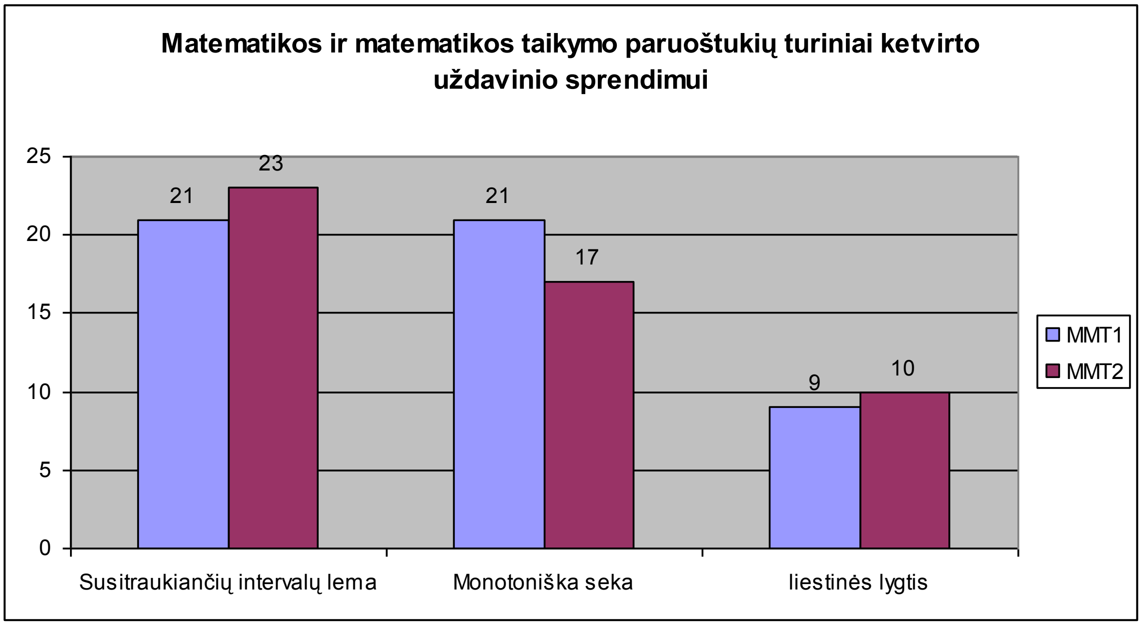
- **Monotoniškos sekos apibrėžimą:** Monotoniška ir aprėžta realiųjų skaičių seka konverguoja.
- **Liestinės lygtį:** $y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$



Pav. 3



Pav. 4



Pav. 5

Visų specialybių paruoštukėse populiariausia lema buvo susitraukiančiųjų intervalų, tačiau beveik toks pat užsirašymo į paruoštukes dažnis buvo monotoniškų aprėžtų sekų teorema. Rečiausiai visų trijų specialybių studentų paruoštukėse buvo užsirašyta liestinės lygtis.

Penkto uždavinio sprendimui iš studentų paruoštukių išrinkome tokias teoremas ir apibrėžimus:

- **Sekų ribų savybes:**

  1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n$

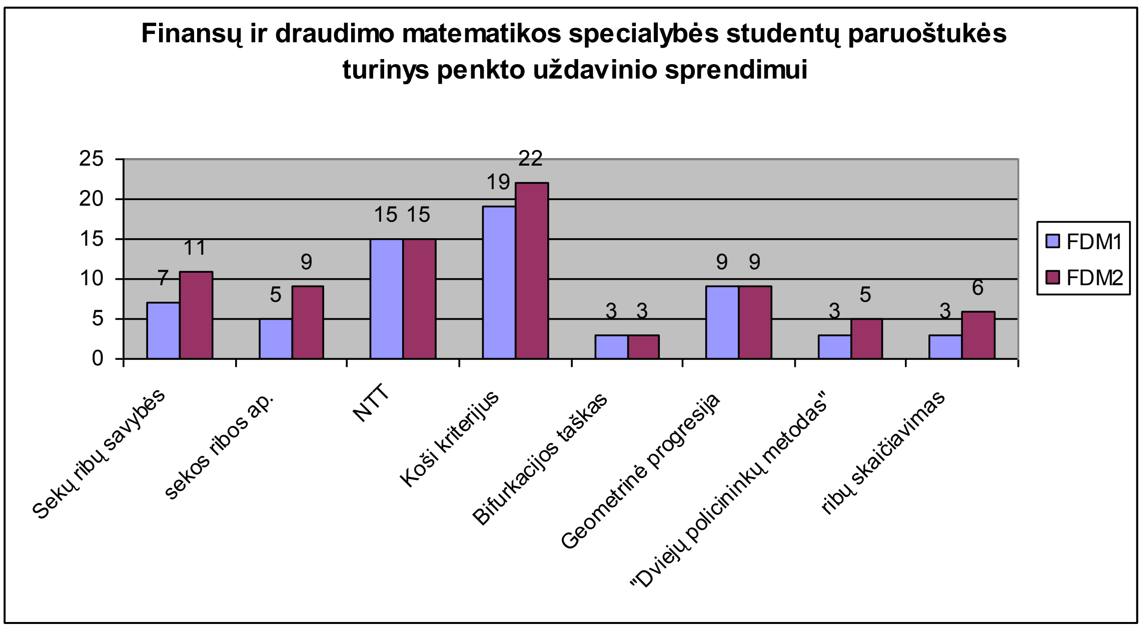
  2) $\lim\limits_{n\to\infty}(cx_n) = c\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

  3) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$

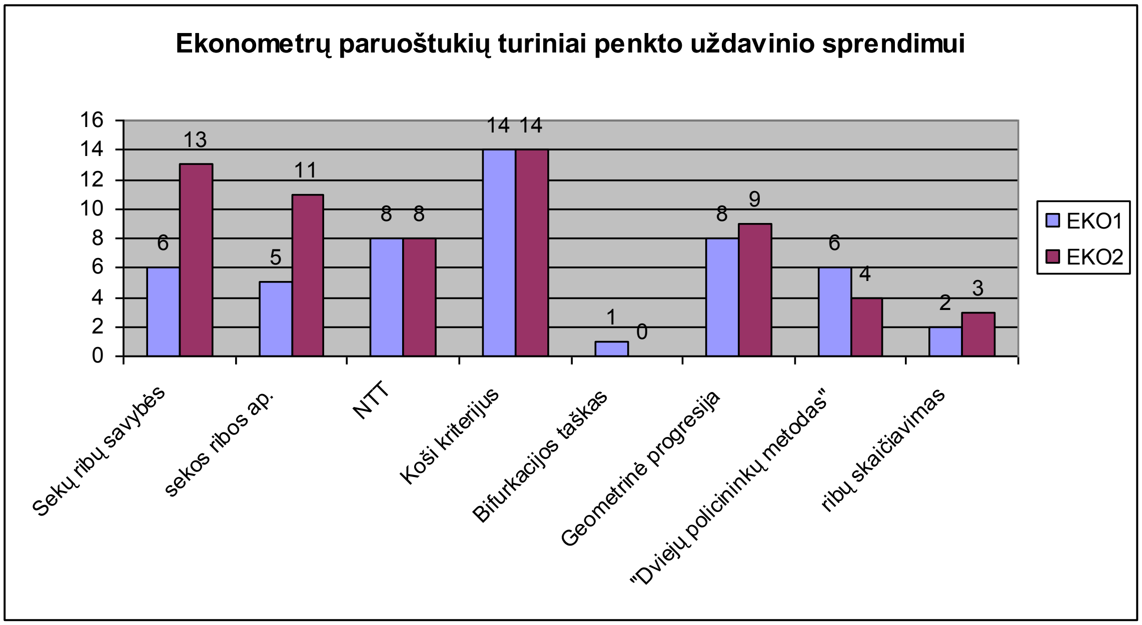
  4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right) = \dfrac{\lim x_n}{\lim y_n}$

- **Sekos ribos apibrėžimą.**
- **Nejudamo taško teoremą:** Jei funkcija tenkina sąlygą $g: I \to I$, $I = [a;b]$ - uždaras intervalas, egzistuoja toks k, $0 < k < 1$, kad $|g(x') - g(x'')| \le k|x' - x''|$, $\forall\ x', x'' \in I$, tai bet kokiai pradinei reikšmei x_0, $x_0 \in I$, rekurentine formule $x_{n+1} = g(x_n)$ nusakyta seka konverguoja į vienintelį lygties $x = g(x)$ sprendinį.

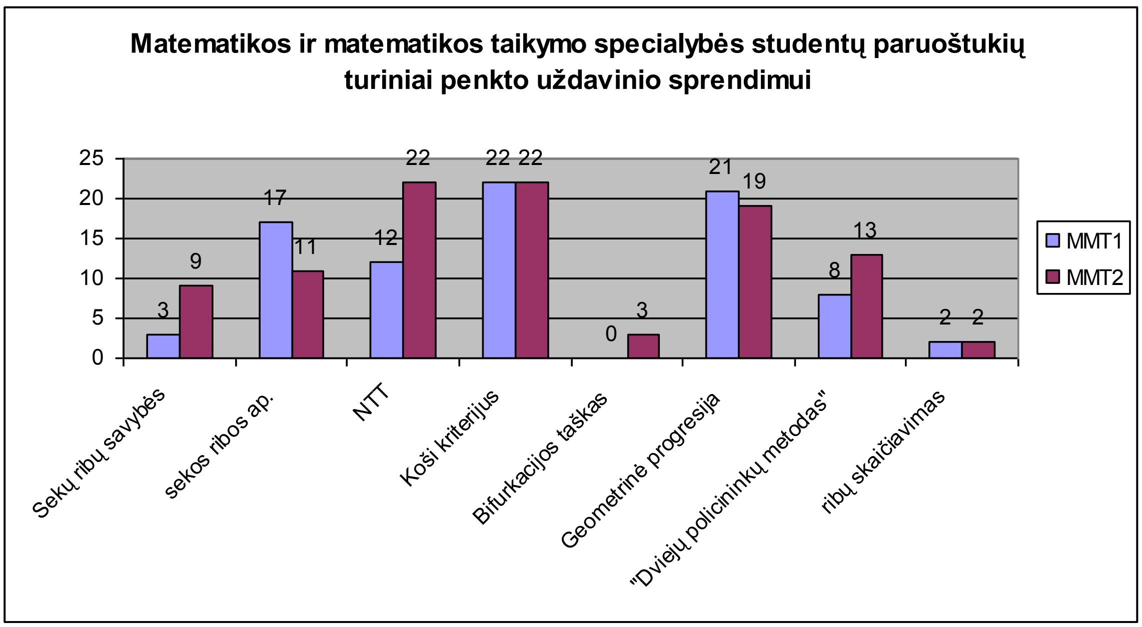
- **Koši kriterijų:** Seka (x_n) konverguoja tada ir tik tada, jei $\forall \varepsilon > 0$, $\varepsilon > 0$, egzistuoja N toks, kad $n,m > N \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon$
- **Bifurkacijos taško lygtį:** $\begin{cases} g'(x) = -1 \\ g(x) = x \end{cases}$
- **Geometrinės progresijos formules.**
- **„Dviejų policininkų metodą“:** Jei $x_n \le y_n \le z_n$, kiekvienam n ir $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} z_n = a$, tai ir $\lim_{n\to\infty} y_n = a$.
- **Ribų skaičiavimo formules:** $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$, $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ ir kt.



Pav. 6



Pav. 7



Pav. 8

Visų trijų specialybių studentų pagalbinėje medžiagoje dažniausiai buvo užrašoma koši kriterijus ir geometrinės progresijos formulės. Rečiausiai studentai savo paruoštukėse rašė bifurkacijos taško formulę ir sekų ribų skaičiavimo formules.

Studentai kontroliniam darbui ruošėsi rimtai, nes beveik visų studentų paruoštukės parašytos tvarkingai ir struktūrizuotai. Beveik visi studentai stengėsi užsirašyti kuo daugiau informacijos, taip išnaudodami visą leistiną A4 lapą.

2.1 KONTROLINIO METU GAUTŲ ĮVERTINIMŲ IR INFORMACIJOS KIEKIO RYŠIO ANALIZĖ

Patikrinsime, ar kontrolinio darbo rezultatas (X) priklauso nuo informacijos kiekio paruoštukėje (Y). Kitaip sakant, tikrinsime hipotezes: $\begin{cases} H_0 : b = 0 \\ H_1 : b \neq 0 \end{cases}$. Pasirenkame reikšmingumo lygmenį $\alpha = 0.05$. Hipotezė H_0 atmetama, jeigu $|T| > T(kr)$ ir hipotezė H_0 neatmetama, jeigu $|T| \leq T(kr)$. Jei nulinės hipotezės H_0 neatmetame, tai reiškia, kad X (kontrolinio darbo rezultatas) nelabai priklauso nuo Y (informacijos kiekio paruoštukėje).

Lentelė 14 Pirmo uždavinio

	koreliacija	n	T	T(kr)	|T|>T(kr)
FDM1	0,695	20	4,106	2,101	Hip. atmetame Y ir X priklausomi
FDM2	0,278	24	1,358	2,074	Hip.neatmetame,t.y Y ir X nepriklausomi
EKO1	#DIV/0!	17	#DIV/0!	2,131	#DIV/0!
EKO2	0,486	19	2,294	2,110	Hip. atmetame Y ir X priklausomi
MMT1	0,095	26	0,470	2,064	Hip.neatmetame,t.y Y ir X nepriklausomi
MMT2	#DIV/0!	27	#DIV/0!	2,060	#DIV/0!
bendras	0,541	133	7,356	1,978	Hip. atmetame Y ir X priklausomi

Pirmo kontrolinio darbo uždavinio beveik visų grupių koreliacijos yra vidutinio stiprumo. Dviejų grupių, t.y. EKO1 ir MMT2 grupių koreliacijos negalime skaičiuoti, nes nei vienas arba labai mažai studentų užsirašė reikiamą teoriją savo paruoštukėse. Patikrinus H_0 hipotezę, gauname, kad dviejose grupėse hipotezės neatmetame, t.y., kad X (kontrolinio darbo rezultatas) nepriklauso nuo Y (informacijos kiekio paruoštukėje).

Lentelė 15 2-5 uždavinių koreliacijos

	2 užd. koreliacija	3 užd. koreliacija	4 užd. koreliacija	5 užd. koreliacija
FDM1	-0,109	-0,275	-0,177	-0,017
FDM2	0,081	-0,154	-0,057	0,028
EKO1	-0,196	-0,135	-0,035	0,373
EKO2	-0,338	-0,116	-0,088	-0,063
MMT1	-0,160	0,285	-0,048	0,312
MMT2	0,121	0,073	0,055	-0,074
bendras	-0,157	0,051	0,015	0,126

Nuo antro iki penkto uždavinio koreliacijos labai mažos (15 lentelė), todėl visų grupių kontrolinio darbo rezultatas nepriklauso nuo informacijos paruoštukėje kiekio. FDM1, EKO1, EKO2, MMT1 ir bendra visų grupių koreliacijos yra neigiamos. Teigiama dviejų kintamųjų koreliacija yra tada, kai aukštas vieno kintamojo matas reguliariai susijęs su aukštu kito kintamojo matu. Neigiama koreliacija yra tada, kai aukštas vieno kintamojo matas reguliariai susijęs su žemu kito kintamojo matu. Kai koreliacija yra artima 0, kaip šiuo atveju, tai abiejų kintamųjų reikšmių polinkis nesietinas. Matome, kad beveik visų grupių koreliacija yra neigiama ir artima nuliui. Koreliacija artima nuliui yra labai silpna (16 lentelė), neigiama yra šiose grupėse todėl, kad teorijos šiems uždaviniams studentai turėjo, bet gauti rezultatai yra žemi. Galime daryti išvadą, kad, studentai turėjo reikiamą informaciją, bet jos nepanaudojo. Prisimenant 2008-2009 metais atliktą tyrimą – pokalbį su studentais [8], studentai anketoje rašė, kad į paruoštukes rašė, tą informaciją, kurios nesuprato arba neatsiminė. Tai galbūt todėl ir yra koreliacijos neigiamos, nes studentai nepanaudojo reikiamos informacijos.

Yra nusistovėjusios tam tikros tradicijos, kokią koreliaciją laikyti stipria (16 lentelė, V. Čekanavičius, G. Murauskas „Statistika ir jos taikymai“ I dalis 126psl.). Stipri koreliacija gali būti ir neigiama (kai r arti -1). Koreliacija silpna, kai r arti nulio.

Lentelė 16 Empiriniai r vertinimai

r reikšmė	Interpretacija
Nuo 0,9 iki 1,0 (nuo -0,9 iki -1,0)	Labai stipri teigiama (neigiama) tiesinė koreliacija
Nuo 0,7 iki 0,9 (nuo -0,7 iki -0,9)	Stipri teigiama (neigiama) tiesinė koreliacija
Nuo 0,5 iki 0,7 (nuo -0,5 iki -0,7)	Vidutinė teigiama (neigiama) tiesinė koreliacija
Nuo 0,3 iki 0,5 (nuo -0,3 iki -0,5)	Silpna teigiama (neigiama) tiesinė koreliacija
Nuo 0,3 iki -0,3	Labai silpna koreliacija arba jokios

Matome, kad priklausomybė yra pirmame uždavinyje tik FDM1 ir EKO2 grupių. Šių grupių koreliacija yra lygi 0,69 ir 0,48, t.y. vidutinio ir silpno stiprumo priklausomumas. Likusiuose uždaviniuose kontrolinio darbo rezultatai ir paruoštukių turiniai priklausomumo neturi, todėl negalime teigti, kad kontrolinio darbo rezultatai ir paruoštukėje parašytas informacijos kiekis yra priklausomi.

2.1.1 EGZAMINO UŽDUOČIŲ NAGRINĖJIMAS

Nagrinėjame matematinės analizės egzamino užduotis (4 priedas). Kiekvienos grupės studentų gautus taškus, kaip ir gautus kontrolinio darbo metu, surašėme į lenteles (17-22 lentelės).

Lentelė 17 FDM1 grupės egzamino taškai

FDM1	1užd	2užd	3užd	4užd	5užd	6užd	7užd	8užd	Iš viso
1	0	0	0	0,5	0,5	0	3	0	4
2	0,5	6	0	4,5	2,5	0	7	1	21,5
3	0	0	0	0	0,5	1	0,5	1,5	3,5
4	0	0	0	0	4	1	3	1	9
5	1,5	0	8	1,5	0	1	4,5	0	16,5
6	0	0	0	0	0,5	0,5	8	1	10
7	0,5	1	2	1,5	1,5	0	4	2,5	13
8	0	4	7	4,5	4	1	6,5	1	28
9	0	0	0	0	1	1	2	2	6
10	0	0	0	3	1	0	2,5	3	12
11	0	0	0	0	1	0	3	0	4
12	0,5	0	0	0	1	0	1	0,5	3
13	1	0	8	2,5	4	1,5	8,5	2,5	28
14	0	0	0	4,5	2,5	0	2,5	4	13,5
15	0	0	0	3,5	4	1	6	0,5	15
16	1,5	0	0	3	0	0	2	2,5	9
17	0	0	0	0	0,5	0	2,5	0,5	3,5
18	0	0	3	1	4	0,5	4	0	12,5
19	0	1,5	0	3	4	0	3,5	2	14
20	0	0	0	1	0	0	8	3,5	12,5
21	1,5	1	1,5	1,5	3,5	0	9	2	20

Lentelė 18 FDM2 grupės egzamino taškai

FDM2	1užd	2užd	3užd	4užd	5užd	6užd	7užd	8užd	Iš viso
1	0	0	0	2	1	0,5	4,5	2	10
2	0	0	0	2	1	0	0,5	3	6,5
3	0	0	0	1	4	1	6,5	5,5	18
4	0	0	0	1,5	2	0	5,5	0,5	9,5
5	0,5	0	0	2	5	0,5	4,5	0,5	13
6	0	0	0	0,5	0	0	3,5	0,5	4,5
7	0,5	0	0	1	0,5	1,5	3	3	9,5
8	3	3,5	8	3	4	1	9,5	8,5	40,5
9	0,5	0,5	0,5	1	2	1	4	1	10,5
10	0	0	0	1,5	1	0	0	0	2,5
11	1	0	0	5,5	2,5	0	3,5	1	13,5
12	0	1,5	0	2	0	0	3,5	2,5	9,5
13	0	0	0	0,5	0,5	0	5	2	8
14	0,5	0	0	1	1,5	0	4	4,5	11,5
15	0	0	0	1,5	2,5	0	1,5	1,5	7
16	1	0	0	0	2,5	0,5	3	0	7
17	0	3,5	0	2	4	0	6	3	18,5
18	0	0	1	2	1	1	2,5	0	7,5
19	0	0	0	1,5	1	0	4	3,5	10
20	0	0	0	2	0	0,5	3	4	9,5
21	0	0	0	4	0,5	0	5,5	3	13
22	0	0	0	0	2	1	8	0	11
23	0	0	0	1,5	1	1	5	1,5	10
24	0	0	0	0,5	0	0	3	3	6,5
25	0	0	0	1,5	2,5	1	6	1,5	12,5
26	0	0	0	0	0,5	0,5	2,5	2	5,5

Lentelė 19 EKO1 grupės egzamino taškai

EKO1	1užd	2užd	3užd	4užd	5užd	6užd	7užd	8užd	Iš viso
1	0	0	0	0	0,5	0	2	1	3,5
2	1	1	0	2	0,5	1	1	0	6,5
3	0	0	0	3	1,5	0	2,5	0	7
4	2	0	0	3,5	1,5	0	3	0	10
5	1	0,5	0	1	1,5	0,5	4,5	1,5	10,5
6	0	0	0	0,5	0,5	0,5	3	2,5	7
7	0	0	0	2	1,5	1	2	0	6,5
8	0	0	0	5	3,5	0,5	2	1	12
9	1	3	0,5	4	2,5	0	2	0	13
10	1	0	0	3	1,5	0,5	4	2,5	12,5
11	1	0	0	1,5	1	0	1	1	5,5
12	0	0	0	0,5	0,5	0	2	2	5
13	1,5	0	0	3	2	0	2	0,5	9
14	0	0,5	0	2	0	0	0,5	1,5	4,5
15	0	0	0	2	0,5	0	4,5	2,5	9,5
16	0	2	0	3	2	0,5	0,5	4	12
17	1	0	0	3,5	4	0	3	1	12,5
18	1,5	0	0	0	1	0	2	2	6,5
19	1	0	0	0	1	0,5	2	0	4,5
20	0	0	0	0,5	1	0	4	5,5	11
21	1,5	0	0	0	1	0	4,5	5	12
22	1,5	0	0	1	1	1	1	2,5	8
23	0,5	1	0	1,5	0	0	2	1	6
24	0	4	0	0	1	1	3	1	10

Lentelė 20 EKO2 grupės egzamino taškai

EKO2	1užd	2užd	3užd	4užd	5užd	6užd	7užd	8užd	Iš viso
1	1	0,5	0	1,5	0	0,5	4,5	1,5	9,5
2	0	0,5	0	1,5	0,5	0	2	1,5	6
3	0	0	0	2	4	0	3,5	0	9,5
4	0,5	0	0	0,5	0	0	3	4	8
5	0	0	0,5	0,5	1	1	2,5	1	6,5
6	0	2	0	5,5	2,5	5	5	1	21
7	0,5	0,5	0	2	2	1	4	3	13
8	1	0	0	1	3	0	1,5	0	6,5
9	1	0	0	1	0,5	0	1	3,5	7
10	0	0	0	0,5	1,5	0	2	1	5
11	0	0	0	0	1	1	2	1	5
12	0	0	0	1,5	0	1	1	1	4,5
13	1	2	0	2,5	0	1	2	1	9,5
14	1	0	0	4	3	0,5	5,5	1	15
15	0	0	0	2,5	2	1	3,5	2	11
16	1	0	0	0,5	0,5	0	1	0	3
17	0	0	0,5	1	0	0	1	3	5,5
18	0	0	0	0	0	0	6,5	1	7,5
19	0,5	0	0	0,5	0,5	0	3,5	1	6
20	0	0	0	0	0,5	0	2,5	2	5
21	0,5	0	0	1	0	1	4,5	1,5	8,5
22	0	0	0	0	0,5	0	2	1,5	4

Lentelė 21 MMT1 grupės egzamino taškai

MMT1	1užd	2užd	3užd	4užd	5užd	6užd	7užd	8užd	Iš viso
1	1	0	0	2	1	0	3	0	7
2	0	0	0	1	0,5	0	3,5	1	6
3	2	0	0	0	1	0	3,5	3	9,5
4	0	0	0	2	1	0,5	2	1	6,5
5	1	1	0	1	0	0	4,5	2	9,5
6	0	0	0	0	0,5	0,5	3,5	1,5	6
7	0	0	0	0	0	0	7,5	1	8,5
8	0	0	0	0	0,5	0	6,5	0	7
9	0	0	0	0,5	0	0	3	1	4,5
10	0	0	0	0	0	0	7	0	7
11	1	0,5	0	2	0,5	0	7	6	17
12	0	0	0	0	0,5	0	4,5	2	7
13	0	0	0	0	2	0	3,5	2	7,5
14	0	0	0	0,5	0,5	0	1,5	5,5	8
15	3	0	0	0	1	0	6,5	0,5	11
16	1	0	0	1,5	0,5	0	3,5	1	7,5
17	1	1	0,5	4,5	4	0	4,5	2,5	18
18	0	0	0	0	0	0	5	4	9
19	0	0,5	0	0,5	1,5	0,5	6	1,5	10,5
20	0	0	0	0,5	1,5	1	3,5	1	7,5
21	1	0	0	0	1	0	7	4	13
22	0	0	0	0	0	0	1	1,5	2,5
23	0	0	0	0,5	0,5	0,5	3	1	5,5
24	0	0	0	0	0	0	5,5	3,5	9
25	0	1	0	0	1	0	6,5	0	8,5
26	0	0	0	0	1,5	0	6,5	3,5	11,5
27	0	0	0	0	0,5	0	1	5,5	7

Lentelė 22 MMT2 grupės egzamino taškai

MMT2	1užd	2užd	3užd	4užd	5užd	6užd	7užd	8užd	Iš viso
1	0	0	0	0	0	0	2	4,5	6,5
2	0	0	0	0,5	0,5	1	0,5	0	2,5
3	0,5	0	0	0,5	1	0	1,5	1	4,5
4	1	0	0	2,5	1	0	6	1,5	12
5	0	1	0	0	1	1	1	0	4
6	0	0	0,5	0	1,5	0	1	0,5	3,5
7	0	0	0	0	0	0	2	2,5	4,5
8	0	0	0	0,5	0	1	1,5	1	4
9	0	0	0	2	0,5	0	6	1,5	10
10	0	0	0	0,5	0,5	0,5	0,5	0	2
11	0	0	0	0	0,5	0	5	1	6,5
12	0	0	0	0	0,5	0	2,5	2	5
13	0	1	0	2	4	3	7	2	19
14	0	0	0	0	1	1,5	1,5	1,5	5,5
15	0	0	0	0	0	0	1,5	0,5	2
16	1	1	0	0,5	0	1	0,5	0	4
17	0	1,5	0	1	1	0	5,5	2,5	11,5
18	0	0	0	0,5	0	0,5	3	2	6
19	0	0	0	0	0,5	0	2,5	1	4
20	0	0	0	1	1	1	3	2	8
21	0	0	0	1,5	0,5	0	5	0	7
22	0	0	0	0	1	0	0,5	1	2,5
23	0	0	0	0,5	0,5	0	0	0	1
24	0	0	0	0,5	0,5	0	0	2	3
25	0	0	0	0,5	0,5	1	1	1	4
26	0	0	0	0,5	0,5	0	0,5	2	3,5
27	0	0	2	2	3	0	3,5	1,5	12
28	0	0	0	1	0,5	0	0	0	1,5
29	0	0	0	1	0	1	4	2	8

Lentelė 23 nagrinėjamų grupių egzamino taškų statistika

Statistics

		FDM1	FDM2	EKO1	EKO2	MMT1	MMT2
N	Valid	21	26	24	22	27	29
	Missing	8	3	5	7	2	0
Mean		12,310	10,962	8,521	8,023	8,574	5,776
Minimum		3,0	2,5	3,5	3,0	2,5	1,0
Maximum		28,0	40,5	13,0	21,0	18,0	19,0

Pasinaudokime SSPS paketu ir palyginkime visų grupių egzamino rezultatus tarpusavyje (23 lentelė). Matome, kad didžiausias gautų taškų vidurkis yra FDM1 grupės, mažiausias – EKO2. Mažiausiai taškų surinko MMT2 grupėje, daugiausiai – FDM1.

Nagrinėjome kiekvieną egzamino užduotį atskirai. Pirma egzamino (4 priedas) užduotis, tai pakoreguota pirma nagrinėto kontrolinio darbo užduotis.

Prisiminkime pirmosios egzamino užduoties formuluotę:

1. Tiesės lygtys.
   a) Išveskite lygtį tiesės, nusakytos tašku $A(x_0, y_0)$ ir normaliniu vektoriumi $\vec{n} =$ (būtinas brėžinys). (1)
   b) Naudodami (*a*) dalies rezultatą, išveskite lygtį tiesės, nusakytos posvyriu į ordinačių ašį *m* ir abscisių ašies kirtimu *a*. (2)

Šiai užduočiai, kaip ir kontrolinio darbo metu, studentai paruoštukėse galėjo užsirašyti:

- Tiesės lygtį, kai žinomas posvyris į ordinačių ašį m ir abscisių ašies kirtimas a, $x = ny + \iota$,
- Tiesės lygtį, kai žinomas taškas $A(x_0, y_0)$ ir normalinis vektorius $\vec{n} = n_x, n_y)$: $n_x(x - x_0) + n_u(y - y_0) =)$.

Šio uždavinio egzamino rezultatas buvo geresnis nei kontrolinio darbo metu 36 studentų, o lygūs 28 studentų ir 86 studentų kontrolinio darbo rezultatas liko geresnis nei egzamino. Visose grupėse beveik visi studentai kontrolinio darbo metu šiam uždaviniui turėjo daugiau teorijos, nei egzamino metu. Ir tik 10 studentų egzaminui užsirašė daugiau teorijos šiam uždaviniui. Iš jų 1 studentas, kurio rezultatas nepasikeitė, 6 studentai, kurių egzamino rezultatas pakilo ir 3 studentai, kurių kontrolinio darbo rezultatas buvo geresnis, nei egzamino.

Lentelė 24 FDM1 Kontrolinio ir egzamino ir paruoštukių rezultatai

Kontrolinio darbo rezultatai	Kontrolinio darbo paruoštukių turiniai	Egzamino rezultatai	Egzamino paruoštukių turiniai
2	4	0	0
3	2	0,5	2
0	0	0	0
1,5	0	0	0
5,5	2	1,5	0
0	0	0	0
3,5	2	0,5	0
6	2	0	0
1,5	0	0	0
1,5	0	0	0
1,5	0	0	0
1	0	0,5	0
7	4	1	0
5	2	0	0
1	0	0	2
0	0	1,5	4
1,5	0	0	0
2,5	0	0	0
2,5	1	0	0
2	2	0	3
2	2	1,5	0

Antrajam egzamino uždaviniui studentai savo paruoštukėse galėjo užsirašyti:

- **Sekos apibrėžimą**
- **Dalinės ribos sąvoką:** Sekos $\{x_n\}$ konverguojančio posekio $\{x_k\}$ ribą vadiname sekos daline riba.
- **Viršutinės ir apatinės ribos apibrėžimai:**
    - Didžiausiąją sekos $\{x_n\}$ dalinę ribą vadiname sekos viršutiniąja riba ir žymime $\overline{\lim_{x\to}} x_n$ arba $\lim_{n\to} \sup x_n$.
    - Mažiausiąją dalinę ribą vadiname apatiniąja sekos riba ir žymime $\underline{\lim}_{n\to} x_n$ arba $\lim_{n\to} \inf x_n$.
- **Bolcano – Vejerštraso teoremą:** Iš kiekvienos aprėžtos sekos galima išrinkti konverguojantį posekį.

Šiek tiek daugiau nei pusė studentų užsirašė šiuos apibrėžimus ir teoremą. Šis uždavinys nereikalauja konkrečių teorinių žinių. Sprendžiant šį uždavinį studentai turi pritaikyti turimas matematinės analizės žinias, o ne konkrečią teoremą.

Trečiajam uždaviniui studentai savo paruoštukėse užsirašyti galėjo pagrindinę ribų teoremą ir šią teoremą užsirašė 49% studentų. Ketvirtame uždavinyje studentams galėjo praversti funkcijos tolydumo apibrėžimas ir trigonometrinių funkcijų išvestinių žinojimas.

Lentelė 25 FDM1 grupės studentų paruoštukių turiniai ketvirtam uždaviniui

	Funkcijos tolydumas	Trigonometrinių f-jų išvestinės
1	1	
2		1
3	1	
4	1	
5		
6	1	
7	1	
8		
9		
10	1	
11		
12	1	
13		
14	1	1
15		
16	1	1
17		
18	1	1
19		
20	1	
21	1	1

Lentelė 26 FDM2 grupės studentų paruoštukių turiniai ketvirtam uždaviniui

	Funkcijos tolydumas	Trigonometrinių f-jų išvestinės
1	1	1
2	1	
3		
4	1	
5		
6		1
7		1
8		
9		
10		
11		
12	1	
13	1	
14	Nėra paruoštukės	
15	1	1
16		
17		
18		1
19		
20		
21		1
22		
23		
24		1
25		
26		

Lentelė 27 EKO1 grupės studentų paruoštukių turiniai ketvirtam uždaviniui

	Funkcijos tolydumas	Trigonometrinių f-jų išvestinės
1	Nėra paruoštukės	
2	1	1
3	Nėra paruoštukės	
4	1	
5	1	
6		
7	1	1
8	1	
9	1	
10	1	
11	Nėra paruoštukės	
12	1	1
13		1
14	1	
15	1	
16	1	1
17		1
18	1	
19	1	1
20	1	1
21		
22	1	1
23	Nėra paruoštukės	
24	1	

Lentelė 28 EKO2 grupės studentų paruoštukių turiniai ketvirtam uždaviniui

	Funkcijos tolydumas	Trigonometrinių f-jų išvestinės
1	Nėra paruoštukės	
2		
3	1	
4	1	
5	1	
6	1	
7	1	
8	1	
9		
10	Nėra paruoštukės	
11	1	
12		
13	1	
14	1	1
15	Nėra paruoštukės	
16		1
17	1	
18	1	1
19		
20	1	
21	1	1
22	1	

Penktojo uždavinio sprendimui studentai galėjo pasinaudoti funkcijos ribos apibrėžimu, jei turėjo ją užsirašę paruoštukėse. Tačiau tik 36 studentai užsirašė šį apibrėžimą savo paruoštukėse.

Šeštojo uždavinio sprendimui svarbu buvo Liopitalio teorema. Primename šešto uždavinio formuluotę:

6. Sakykime, funkcijos $f(x), g(x)$ apibrėžtos intervale $(0,1]$ ir $\lim_{x\downarrow} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\downarrow} g(x) = +\infty$.
   a) Suformuluokite Liopitalio teoremą šiuo atveju. (1)
   b) Įrodykite (a) dalyje suformuluotą teoremą, pasinaudodami Liopitalio teorema, įrodyta per paskaitą (pakeiskite kintamuosius $x = \frac{1}{t}$). (4)

Liopitalio teorema [20]: Jei diferencijuojamos intervale (a, b) funkcijos f ir g tenkina 3 sąlygas:

1) Egzistuoja baigtinė arba begalinė riba $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$,
2) f(a+)=g(a+)=0, arba g(a+)=∞=f(a+),
3) $g'(x)\neq 0$ visiems $x\in (a,b)$, tai $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Egzamino metu studentai šio uždavinio (a) dalyje turėjo parašyti:

$f(x)$ ir $g(x)$ apibrėžtos intervale $(0;1]$, $\lim\limits_{x\downarrow 0} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\downarrow 0} g(x)=\infty$. Jei $f(x)$ ir $g(x)$ tolydžios intervale $(0;1]$, diferencijuojamos intervale $(0;1)$, $g'(x)$ pastovaus ženklo visame intervale, $\lim\limits_{x\downarrow 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$, tai $\lim\limits_{x\downarrow 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$.

Riba ∞ turima omenyje $+\infty$ arba $-\infty$. Kitaip gautume $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\infty \Rightarrow \forall E, E>0$, $\exists\delta\ |x|<\delta \Rightarrow |f(x)|>E$. Tokiu atveju funkcija $f(x)$ gali būti arba $f(x)>E$, arba $f(x)<-E$ ir Liopitalio teoremos taikyti negalėtume.

Palyginę abi Liopitalio teoremas, iš V. Kabailos vadovėlio ir tai, ką studentai turėjo parašyti egzamino metu, matome, kad tai buvo labai lengvai gaunamas taškas studentams. Pusė studentų šią teoremą užsirašė ir lengvai gavo tašką egzamino metu.

Septintojo uždavinio sprendimui studentai savo paruoštukėse galėjo būti užsirašę (29, 30 lentelės, 9 priedas):

- **Parametrinės lygtys.**
- **Asimptotės:**
  - Tiesė $x=x_0$ vadinama funkcijos $y=f(x)$ vertikaliąja asimptote, jeigu bent viena iš ribų $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$ arba $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$ yra begalinės.
  - Tiesė $y=a$ vadinama funkcijos $y=f(x)$ horizontaliąja asimptote, jeigu $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a$
  - Tiesė $y=kx+b$ vadinama funkcijos $y=f(x)$ pasviràja asimptote, jeigu $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k$ ir $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx)=b$.

- **Kreivės iškilumas (įgaubtumas):** Kreivė vadinama **iškila aukštyn (žemyn)** intervale (a; b), jeigu visi tos kreivės taškai tame intervale yra po liestine (virš liestinės), nubrėžta per bet kurį kreivės tašką.
- **Perlinkio taškai:** Taškas M, kuris atskiria iškilą aukštyn kreivės dalį nuo iškilos žemyn dalies, vadinamas kreivės **perlinkio (vingio)** tašku.

Lentelė 29 EKO1 grupės septinto uždavinio teorija

	Parametrinės lygtys	**asimptotės**	**kreivės iškilumas**	**įgaubtumas**	**perlinkio taškai**
1	nėra paruoštukės				
2					
3	nėra paruoštukės				
4					
5					
6					
7		1			
8					
9					
10					
11	nėra paruoštukės				
12			1	1	
13			1	1	
14		1	1		
15					
16			1	1	
17			1	1	
18					
19					
20					
21					
22	1	1			
23	nėra paruoštukės				
24		1	1	1	

Lentelė 30 EKO2 grupės septinto uždavinio teorija

	Parametrinės lygtys	**asimptotės**	**kreivės iškilumas**	**įgaubtumas**	**perlinkio taškai**
1	nėra paruoštukės				
2	1	1	1	1	
3					
4		1	1	1	
5			1	1	
6					
7					
8					
9		1	1	1	
10	nėra paruoštukės				
11		1	1		
12					
13					
14	1	1	1	1	
15	nėra paruoštukės				
16		1	1		
17			1		1
18	1	1			
19	1	1	1	1	
20		1	1	1	
21			1	1	
22		1	1	1	

Dažniausiai studentai užsirašė asimptočių lygtis (45 studentai), labai panašiai studentai užsirašė kreivės iškilumo (42 studentai) ar įgaubtumo (36 studentai) apibrėžimus. Rečiausiai studentų paruoštukėse pasitaikydavo parametrinių kreivių (6 studentai) ir perlinkio taško (2 studentai) apibrėžimai.

Aštuntojo uždavinio sprendimui studentai galėjo būti užsirašę:

- **Funkcijos tolydumo apibrėžimą:** Funkcija $f(x)$ vadinama tolydžiąja taške $x = a$, kai $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- **Asimptočių lygtis**
- **Funkcijos ribos apibrėžimą:** Sakykime, a ir b yra baigtiniai skaičiai. Funkcijos f riba taške a vadiname skaičių b $\left(\lim_{x \to a} f(x) = b\right)$, jei kiekvienam teigiamam skaičiui ε egzistuoja toks teigiamas skaičius δ kad $|f(x) - b| < \varepsilon$ kai $0 < |x - a| < \delta$

Penkiasdešimt aštuoni studentai užsirašė funkcijos tolydumo apibrėžimą, asimptočių lygtis – 45 studentai, o funkcijos ribos apibrėžimą – 33.

2.1 EGZAMINO METU GAUTŲ ĮVERTINIMŲ IR INFORMACIJOS KIEKIO RYŠIO ANALIZĖ

Lentelė 31 Pirmas uždavinys

	koreliacija	n	T	T(kr)	|T|>T(kr)
FDM1	0,257	21	1,160	2,093	Hip.neatmetame,t.y Y ir X nepriklausomi
FDM2	0,107	25	0,515	2,069	Hip.neatmetame,t.y Y ir X nepriklausomi
EKO1	0,163	20	0,703	2,101	Hip.neatmetame,t.y Y ir X nepriklausomi
EKO2	0,225	19	0,953	2,110	Hip.neatmetame,t.y Y ir X nepriklausomi
MMT1	0,458	26	2,527	2,064	Hip. atmetame Y ir X priklausomi
MMT2	#DIV/0!	27	#DIV/0!	2,060	#DIV/0!
bendras	0,210	138	2,499	1,978	Hip. atmetame Y ir X priklausomi

Visų grupių, išskyrus MMT1, koreliacijos labai mažos, t.y. silpnos (31 lentelė). Galbūt dėl to, kad toks uždavinys jau buvo kontrolinio darbo metu ir studentai nesitikėjo, egzamino metu gauti vėl spręsti tokį uždavinį, todėl jie savo paruoštukėse neberašė tiesių lygčių. Kadangi matematikos ir matematikos taikymo antros grupės studentai tiesių lygčių neužsirašė egzamino paruoštukėse, tai statistiškai šios grupės nagrinėti negalime.

Antrame, trečiame, ketvirtame ir penktame uždaviniuose visų grupių koreliacijos labai silpnos (10 priedas). Taip yra todėl, kad studentai labai mažai užsirašė reikiamos teorijos ir gauti rezultatai yra labai įvairūs. Koreliacijos rezultatus įtakojo ir tai, kad šie uždaviniai nereikalauja konkrečių teorinių žinių, sprendžiant šiuos uždavinius studentai turi pritaikyti turimas matematinės analizės žinias. Ketvirtame uždavinyje bendras visų grupių taškų ir teorijos ryšys tampa statistiškai reikšmingas su reikšmingumo lygmeniu lygiu 0,1.

Lentelė 32 Šeštas uždavinys

	koreliacija	n	T	T(kr)	|T|>T(kr)
FDM1	0,418	21	2,008	2,101	Hip.neatmetame,t.y Y ir X nepriklausomi
FDM2	0,557	25	3,216	2,074	Hip. atmetame Y ir X priklausomi
EKO1	0,615	20	3,309	2,131	Hip. atmetame Y ir X priklausomi
EKO2	0,385	19	1,721	2,110	Hip.neatmetame,t.y Y ir X nepriklausomi
MMT1	0,586	26	3,541	2,064	Hip. atmetame Y ir X priklausomi
MMT2	0,704	27	4,963	2,060	Hip. atmetame Y ir X priklausomi
bendras	0,509	138	6,895	1,978	Hip. atmetame Y ir X priklausomi

Šiame uždavinyje visų grupių koreliacijos yra pakankamai didelės (32 lentelė), jei lygintume su kitų uždavinių koreliacijomis. Galbūt dėl to, kad beveik visi studentai į savo paruoštukes užsirašė Liopitalio teoremą ir egzamino metu ją nurašė nuo paruoštukės. Parašyti Liopitalio teorema buvo šio uždavinio (a) dalies užduotis, (b) dalyje studentai turėjo įrodyti šią teoremą. Teoremos įrodymas studentams buvo sunkesnė užduotis, todėl ne visi studentai gavo taškų už šią dalį.

Lentelė 33 Septintas uždavinys

	koreliacija	n	T	T(kr)	|T|>T(kr)
FDM1	-0,668	21	-3,997	2,101	Hip. atmetame Y ir X priklausomi
FDM2	0,083	25	0,399	2,074	Hip.neatmetame,t.y Y ir X nepriklausomi
EKO1	-0,342	20	-1,542	2,131	Hip.neatmetame,t.y Y ir X nepriklausomi
EKO2	-0,004	19	-0,018	2,110	Hip.neatmetame,t.y Y ir X nepriklausomi
MMT1	-0,019	26	-0,093	2,064	Hip.neatmetame,t.y Y ir X nepriklausomi
MMT2	-0,214	27	-1,096	2,060	Hip.neatmetame,t.y Y ir X nepriklausomi
bendras	-0,148	138	-1,751	1,978	Hip.neatmetame,t.y Y ir X nepriklausomi

Lentelė 344 Bendra visų egzamino uždavinių statistika

	koreliacija	n	T	T(kr)	|T|>T(kr)
FDM1	-0,463	21	-2,518	2,101	Hip. atmetame Y ir X priklausomi
FDM2	-0,223	25	-1,096	2,074	Hip.neatmetame,t.y Y ir X nepriklausomi
EKO1	0,055	20	0,234	2,131	Hip.neatmetame,t.y Y ir X nepriklausomi
EKO2	0,026	19	0,108	2,110	Hip.neatmetame,t.y Y ir X nepriklausomi
MMT1	-0,143	26	-0,708	2,064	Hip.neatmetame,t.y Y ir X nepriklausomi
MMT2	-0,211	27	-1,078	2,060	Hip.neatmetame,t.y Y ir X nepriklausomi
bendras	-0,062	138	-0,719	1,978	Hip.neatmetame,t.y Y ir X nepriklausomi

Septintajame uždavinyje visų grupių, išskyrus FDM1, koreliacijos yra labai silpnos arba beveik lygios nuliui. Todėl negalime teigti, kad egzamino rezultatai priklauso nuo informacijos kiekio paruoštukėje, t.y. visose grupėse, išskyrus FDM1, ryšys tarp egzamino rezultatų ir informacijos kiekio paruoštukėse yra statistiškai nereikšmingas. Iš studentų paruoštukių išrinkome, kad šio uždavinio sprendimui studentai galėjo panaudoti parametrines lygtis, asimptočių lygtis, kreivės iškilumo ir įgaubtumo sąvokas, perlinkio taško sąlygą. Beveik visi studentai savo paruoštukėse užsirašė šias teorines sąvokas, tačiau įvertinimai gauti už šio uždavinio sprendimą yra labai įvairūs, t.y. ne visi studentai užsirašę teorinius dalykus gavo aukštus įvertinimus. Sprendžiant šį uždavinį reikia suprasti ir mokėti pritaikyti turimas matematinės analizės žinias, nepakanka tik teorinių žinių. Vienintelėje FDM1 grupėje koreliacija -0,668, tai yra vidutinė arba stipri koreliacija. Jų paruoštukėse beveik nebuvo teorinės medžiagos šio uždavinio sprendimui, o taškų už uždavinio sprendimą beveik visi studentai gavo nemažai. Vadinasi, studentai labai gerai mokėjo spręsti uždavinį ir jiems nereikėjo beveik jokios papildomos informacijos. Kitose grupėse priešingai, teorinės medžiagos buvo daug, o rezultatai – žemi. Galbūt nesuprato užsirašytos teorinės medžiagos.

Remiantis L. Ordojanaitės ir E.Ignaško (2009) atliktu atskiro atvejo analizės tyrimu, studentai ruošdami pagalbinę medžiagą kontroliniui ar egzaminui dažniausiai naudojasi dėstytojo duotais reikalavimais (5 priedas), paskaitų konspektais, ankstesnių metų kontrolinių ir egzaminų užduotimis. Nagrinėjant studentų paruoštukes, paaiškėjo, kad visų studentų paruoštukių turiniai atitinka 70% dėstytojo duotų nurodymų, likę 30% tai yra studentai, kurie neturėjo visai paruoštukių arba užsirašė papildomos medžiagos, t.y. tokios, kurios dėstytojo nurodymuose nebuvo (pvz. Dvinario, pakelto kvadratu ar kubu, formulė).

IŠVADOS

Šiame darbe apžvelgėme du egzaminavimo raštu metodus: *be šaltinių, su šaltiniais*. Išsiaiškinome, jų privalumus ir trūkumus. Remiantis moksliniais tyrimais išsiaiškinome, kad egzaminai su šaltiniais mažina stresinę įtampą, skatina studentus ne aklai įsiminti studijuojamą medžiagą, o mąstyti ir mokėti ją pritaikyti praktikoje. Lietuvoje populiaresnis egzaminavimo metodas yra be šaltinių, tačiau studentai mieliau ruošiasi egzaminams su šaltiniais.

Atlikome tyrimą, kuriuo nagrinėjome kontrolinio ar egzamino įvertinimų ryšį su informacijos kiekiu studentų paruoštukėse. Pirmiausia, studentų paruoštukių turinį suskaitmeninome, t.y. pagalbinių medžiagų (paruoštukių) informacija užkodavome 0 ir 1. Tuomet atrinkome, kokia teorinė informacija galėjo būti naudinga sprendžiant kiekvieną kontrolinio ar egzamino uždavinį. Nagrinėjome kiekvieno uždavinio įvertinimų ryšį su informacijos kiekiu paruoštukėse, taip gavome trijų skirtingų koreliacijų rūšis: labai mažą, teigiamą didelę ir neigiamą didelę.

Apibendrinant, galima daryti išvadą, jog pagalbinės medžiagos naudojimas egzaminų metu skatina studentus skirti egzamino pasiruošimui daugiau laiko, pasiruošimas egzaminui tampa nuoseklesnis, nes studentai anksčiau pradeda galvoti apie pagalbinės medžiagos turinį. Verta ir toliau tęsti pagalbinės medžiagos ir egzamino rezultatų ryšių tyrimus. Tai galėtų pagerinti mokymo kokybę.

SUMMARY

Lina Jakubonienė

THE ANALYSIS OF THE SUPPORTING MATERIAL IN MATHEMATICS EXAM. Supervisor: Dr. associate professor Ričardas Kudžma

Vilnius University, the Faculty of Mathematics and Informatics, Department of Didactics of Mathematics and Informatics

Vilnius, 2011

Aim of this work. Inspect the examination methods with the supporting material and without it. Explore the supporting material from the mathematical analysis exam, find out whether the amount of information in the supporting material has the capability to influence the test score results.

Tasks for the investigation:

1. Examine the most popular written examination techniques.
2. Analyze the tasks for the test and the exam.
3. Figure out which theoretical knowledge is required to successfully solve the tasks for the tests and the exams.
4. Evaluate the supporting material sheets.
5. Ascertain whether the students had the correct theoretical information written down on their supporting material sheets and if they used it during the examination process.
6. Compare the student‘s test and exam results from three programs at the Faculty of Mathematics and Informatics of Vilnius University.

Conclusions: The results about correlation between the information in the supporting material and exams score can be divided into three areas. The first one with the low correlation. This can be explained that we had not sufficient amount of data. Such was the most often case. Cases with big positive correlation can be explained that information of supporting material was directly applicable, almost been copied. The analysis of situation with big negative correlation is more interesting and more complicated. One interpretation (when results are low) might be that information written in the supporting material was not sufficient to solve the problem. Students had to understand the topic much deeper than written formulae only. Another one (when results

are sufficiently high), that students know how to solve the problem without almost any supporting material.

Results of this investigation are quite interesting and should be continued.

Literatūra:

1. Examinations - for and against, http://www.associatedcontent.com/article/1488788/examinations_for_and_against.html?cat=4, prisijungimo laikas 2011-02-18
2. Examinations for and against, http://targetstudy.com/articles/examinations-for-and-against.html, prisijungimo laikas 2011-02-18
3. **Open Book Examinations** *K. P. Mohanan* http://www.iiserpune.ac.in/~mohanan/educ/openbook.pdf, prisijungimo laikas 2011-02-18
4. **Exam Tips (Surviving Open And Closed Book Examinations)** Written By Maria Andritsos Edited by Evan Sycamnias 01-01-01, http://www.uplink.com.au/lawlibrary/Student/Exams/Exams1.html, prisijungimo laikas 2011-02-18
5. **Why Closed Book Exams?** http://zaidlearn.blogspot.com/2010/09/rt01-closed-book-exams-could-even-kill.html, prisijungimo laikas 2011-02-18
6. **Learning to Teach, Teaching to Learn home page.** *Closed-book examination*, http://www.cdtl.nus.edu.sg/Handbook/assess/types-final.htm, prisijungimo laikas 2011-02-18
7. **Should Cheat Sheets be Used as Study Aids in Economics Tests?** *Yoav Wachsman*, http://www.economicsbulletin.com/2002/volume1/EB-02A20002A.pdf, prisijungimo laikas 2011-02-19
8. Lina Ordojanaitė ir Elvyra Ignaško „Matematinės analizės egzamino ir kontrolinio darbo pagalbinės medžiagos turinio, ruošimo ir panaudojimo tyrimas“ bakalauro baigiamasis darbas
9. http://liskw.wordpress.com/2008/05/05/open-book-exam-1/, prisijungimo laikas 2011-02-16
10. Liucyna Ginevič „Pagalbinė medžiaga matematikos egzamine. Apžvalga ir tyrimas” Bakalauro baigiamasis darbas
11. **Open-Book vs. Closed-Book,** http://prawfsblawg.blogs.com/prawfsblawg/2005/10/openbook_vs_clo.html, prisijungimo laikas 2011-03-01
12. **Open Book & Take Home Exams**, http://www.lc.unsw.edu.au/onlib/pdf/obe.pdf, prisijungimo laikas 2011-03-05
13. **Cheat Sheets - Study Aid and Tool For Students,** http://ezinearticles.com/?Cheat-Sheets---Study-Aid-and-Tool-For-Students&id=5968640, prisijungimo laikas 2011-03-05
14. **Evaluation: is an open book examination easier?** *Dr Richard Brightwell, Ms Janine-Helen Daniel and Dr Angus Stewart*, http://www.bioscience.heacademy.ac.uk/journal/vol3/Beej-3-3.pdf, prisijungimo laikas 2011-03-21
15. **KAIP SUPRANTAMAS MOKYMASIS,** Dr.Pasi Sahlberg *Helsinkio universitetas,* http://www.mtp.smm.lt/dokumentai/InformacijaSvietimui/KonferencijuMedziaga/200505Sahlberg.doc, prisijungimo laikas 2011-03-30
16. **Mokymosi bendruomenė ir antrosios kartos saityno (Web 2.0) technologijos**, Tarptautinės konferencijos pranešimai, **Konstrukcionistinis ir konstruktyvistinis mokymas,** *Tatjana Jevsikova, Jolanta Subatovič*, 47-51 psl, http://ims.mii.lt/Web20Mokymui/mokymosi-bendruomene.pdf, prisijungimo laikas 2011-04-08
17. **A comparison of assessment by closed book and open book tests,** P. A. PHIRI, http://pdfserve.informaworld.com/515078__746871629.pdf, prisijungimo laikas 2011-04-08
18. Vydas Čekanavičius ir Gediminas Murauskas **Statistika ir jos taikymai** I dalis, TEV 2001, Vilnius

19. Vydas Čekanavičius ir Gediminas Murauskas **Statistika ir jos taikymai** II dalis, TEV 2008, Vilnius
20. V.Kabaila **Matematinė analizė** 1 dalis, 116-117psl, „Mokslas“ 1983, Vilnius

1 Priedas

Valstybinio brandos egzamino formulės

B➔Trikampis. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$, $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$,

$S = \dfrac{1}{2}ab\sin C = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = rp = \dfrac{abc}{4R}$;

čia a, b, c – trikampio kraštinės, A, B, C – prieš jas esantys kampai,
p – pusperimetris, r ir R – įbrėžtinio ir apibrėžtinio apskritimų spinduliai, S – plotas.

B➔Skritulio išpjova. $S = \dfrac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot \alpha$, $l = \dfrac{2\pi R}{360^\circ} \cdot \alpha$;

čia α – centrinio kampo didumas laipsniais, S – išpjovos plotas,
l – išpjovos lanko ilgis, R – apskritimo spindulys.

B➔Kūgis. $S_{šon.\ pav.} = \pi Rl$, $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 H$.

B➔Rutulys. $S = 4\pi R^2$, $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

Nupjautinis kūgis. $S_{šon.\ pav.} = \pi(R+r)\cdot l$, $V = \dfrac{1}{3}\pi H(R^2 + Rr + r^2)$;

čia R ir r – kūgio pagrindų spinduliai, V – tūris, H – aukštinė, l – sudaromoji.

Nupjautinės piramidės tūris. $V = \dfrac{1}{3}H(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$;

čia S_1, S_2 – pagrindų plotai, H – aukštinė.

Rutulio nuopjovos tūris. $V = \dfrac{1}{3}\pi H^2(3R - H)$;

čia R – spindulys, H – nuopjovos aukštinė.

Vektorių skaliarinė sandauga. $\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\alpha$;

čia α – kampas tarp vektorių $\vec{a}\{x_1, y_1, z_1\}$ ir $\vec{b}\{x_2, y_2, z_2\}$.

Geometrinė progresija. $b_n = b_1 q^{n-1}$, $S_n = \dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q}$.

Begalinė nykstamoji geometrinė progresija. $S = \dfrac{b_1}{1-q}$.

Trigonometrinės funkcijos.

B➔$1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$, $1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$,

$2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha$, $2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha$,

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$, $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$,

$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha\mp\beta}{2}$, $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$,

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$, $\mathrm{tg}(\alpha\pm\beta) = \dfrac{\mathrm{tg}\alpha \pm \mathrm{tg}\beta}{1 \mp \mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta}$.

Pav. 9 Valstybinio brandos egzamino formulės

Mokyklinio brandos egzamino formulės

Trikampis. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$, $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$,

$S = \dfrac{1}{2}ab\sin C = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = rp = \dfrac{abc}{4R}$;

čia a, b, c – trikampio kraštinės, A, B, C – prieš jas esantys kampai, p – trikampio pusperimetris, r ir R – įbrėžtinio ir apibrėžtinio apskritimų spinduliai, S – trikampio plotas.

Skritulio išpjova. $S = \dfrac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot \alpha$, $l = \dfrac{2\pi R}{360^\circ} \cdot \alpha$;

čia α – centrinio kampo didumas laipsniais, S – išpjovos plotas, l – išpjovos lanko ilgis, R – apskritimo spindulys.

Ritinys. $V = \pi R^2 H$, šoninis paviršius $S = 2\pi RH$

Kūgis. $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 H$, šoninis paviršius $S = \pi Rl$, čia l – kūgio sudaromoji.

Piramidė. $V = \dfrac{1}{3}SH$; čia S – piramidės pagrindo plotas.

Rutulys. $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$, $S = 4\pi R^2$.

Trigonometrinės funkcijos ir lygtys.

$1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$;

$\sin x = a$, $x = (-1)^k \arcsin a + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, $-1 \le a \le 1$;

$\cos x = a$, $x = \pm\arccos a + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, $-1 \le a \le 1$;

$\mathrm{tg}\, x = a$, $x = \mathrm{arctg}\, a + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

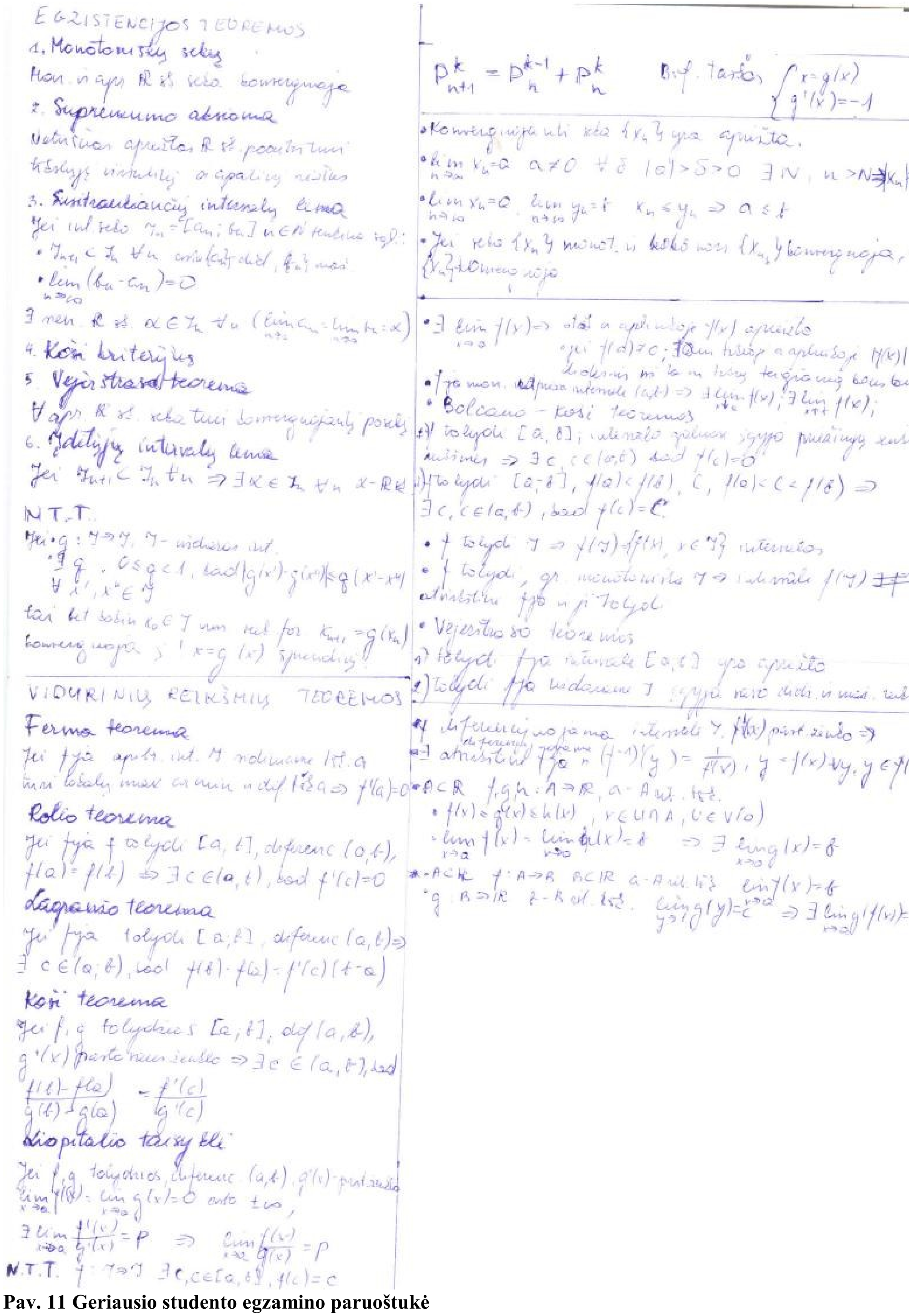
α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–

Išvestinių skaičiavimo taisyklės. $(cu)' = cu'$; $(u \pm v)' = u' \pm v'$; čia u ir v – diferencijuojamos funkcijos, c – konstanta;

$(x^n)' = nx^{n-1}$.

Pav. 10 Mokyklinio brandos egzamino formulės

2 priedas



EGZISTENCIJOS TEOREMOS

1. Monotoniškų sekų

2. Supremumo aksioma

3. Sintraukiančių intervalų lema

4. Koši kriterijus

5. Vejerštraso teorema

6. Įdėtųjų intervalų lema

N.T.T.

VIDURINIŲ REIKŠMIŲ TEOREMOS

Ferma teorema

Rolio teorema

Lagranžo teorema

Koši teorema

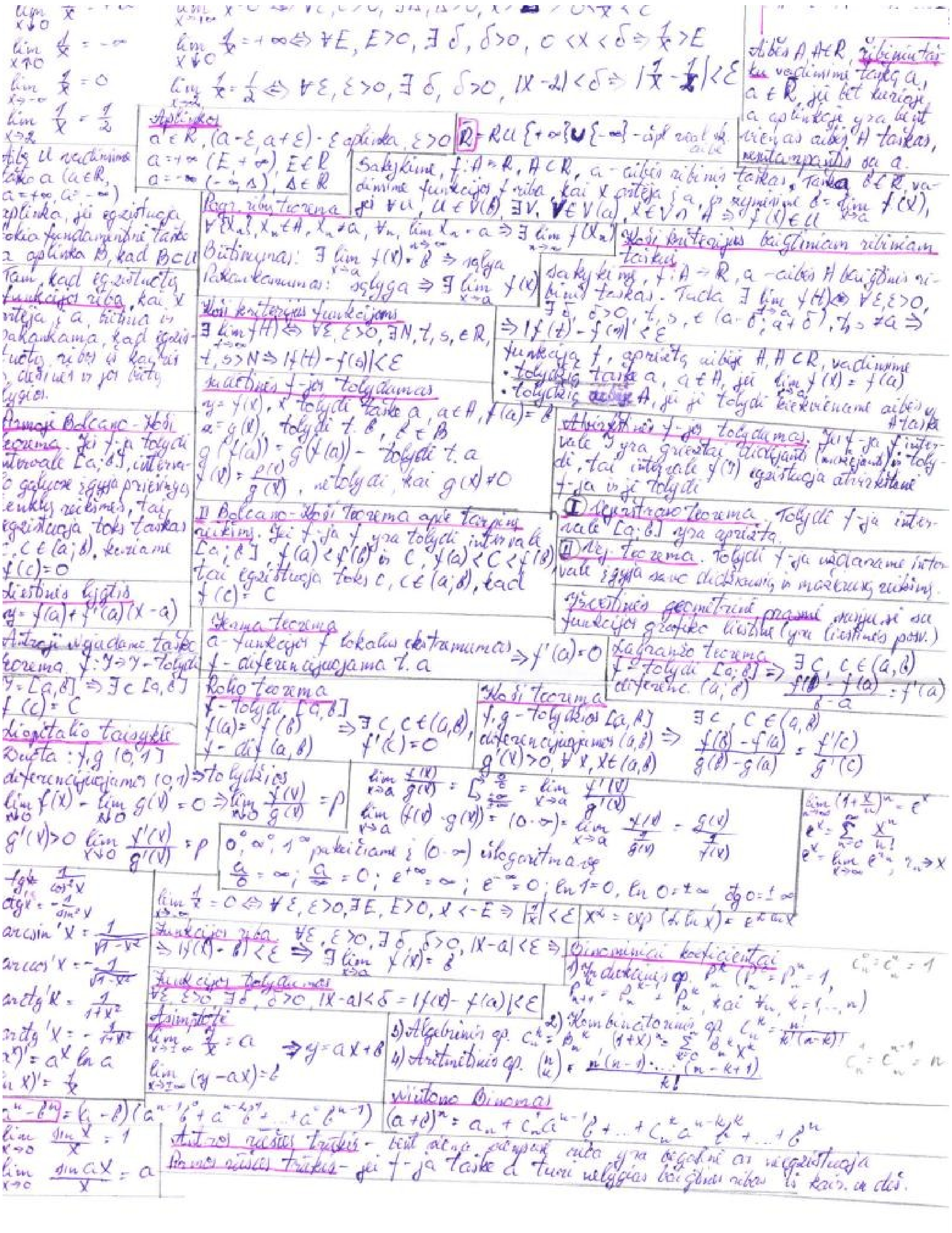
Liopitalio taisyklė

$P^k_{n+1} = P^{k-1}_n + P^k_n$

• Bolcano – Koši teoremos

• Vejerštraso teoremos

Pav. 11 Geriausio studento egzamino paruoštukė



Pav. 12 Blogiausio studento egzamino paruoštukė

3 priedas

Kontrolinis darbas 2007.11.17

Nurodymai:

Pasirinkite savo PIN kodą – tris raides ir skaičių (pvz., ABC5) ir užrašykite vidinėje viršelio pusėje. Būtų gerai, kad jį atsimintumėte (galite užsirašyti ant delno).

Atidžiai skaitykite užduočių sąlygas ir darykite tai, ko reikalaujama.

Sprendimuose aiškiai žymėkite uždavinius ir jų dalis. Sprendimo tvarka nesvarbi.

Atskirkite juodraštį nuo švarraščio.

Yra lengvų, vidutinių ir sunkių užduočių. Geriau iš pradžių pasiimti tikrus „savus“ taškus.

1. Sakykime, tiesės, kurios posvyris į ordinačių ašį yra m ir abscisių ašies kirtimas a, lygtis yra $x = \quad + \quad$. Iš šio teiginio išveskite lygtį tiesės, nusakytos tašku $A(x_0, y_0)$ ir normaliniu vektoriumi $\vec{n} = \quad$.
   a) Suformuluokite, kas duota ir ką reikia įrodyti. (2)
   b) Suformuluokite, ką reikia atlikti pirmojoje įrodymo dalyje, ir padarykite tai geometriškai bei algebriškai. (4)
   c) Pabaikite įrodymą. (1)
   d) Ar kur nors parašėte, kada tik ką išspręsto uždavinio išspręsti negalima? Jei parašėte, tai kurioje dalyje? Jei neparašėte, tai parašykite. (1)
   e) Gaukite tiesiogiai norimą rezultatą? (1)

2. Nagrinėkite seką $x_n = \quad + \quad \quad < \quad < \quad < \quad$.
   a) Įrodykite pagal apibrėžimą $\lim_{n\to\infty} x \quad = \quad$ dviem būdais (vertindami ir naudodami sekų sumos ribos teoremos įrodymo idėją). Palyginkite rezultatus. (4)
      Pastaba. Tiek šioje dalyje, tiek kitose taikykite tik vieną nelygybių sprendimo būdą – su logaritmine funkcija arba su binomu.
   b) Sakykime, $q_1 = \frac{1}{4} \quad = \frac{2}{4}$. Iš dalies (a) rezultatų raskite tokį N, kad $0 < \quad < \quad$, kai $n > \quad$. (1)
   c) Paaiškinkite, ką reikštų “pagerinti (b) dalies rezultatą”. (1)
   d) Pagerinkite (b) dalies rezultatą. Jei negalite visko realizuoti, tai bent pasakykite idėją, kaip tai būtų galima padaryti. (4)

3. **Teiginys.** Jei teisinga Bolcano-Vėjerštraso teorema, tai teisinga monotoniškų ir aprėžtų sekų teorema.
   a) Suformuluokite natūralia bei simbolių kalbomis, kas duota. (2)
   b) Suformuluokite natūralia bei simbolių kalbomis, ką reikia įrodyti. (1)
   c) Suskaidykite įrodymą į tris dalis (i)-(iii) ir tai atlikite. (1, 1, 4)

4. Septintojo laipsnio šaknies iš skaičiaus $c, c >$, algoritmas.
   a) Nubrėžkite funkcijos $f(x) = \quad -$ grafiko eskizą. Paimkite $x_0, x_0^7 >$. Naudodami Niutono liestinų algoritmą lygčiai $x^7 - \quad =$ spręsti, raskite seką
   $x_{n+} = \left(\quad \right)$. (2)
   b) Raskite funkcijos $g(x) = \quad + \quad$ minimumo tašką, nubrėžkite grafiko eskizą ir sekos $\{x_n\}$ "voratinklį". (2)
   c) Įrodykite nelygybę $\sqrt[7]{a_1 \cdot} \cdot \cdot \leq + + + >$ $=$. (3)
   d) Pasirinkime $b_0, b_0^7 >$ ir apibrėžkime $a_0 = \frac{}{b_0}$, $b_{n+} = \quad + \quad = \frac{}{b_{n+}}$, $n =$.
      (i) Įrodykite, kad $a_n \leq \quad \leq \quad \forall$. (2)
      (ii) Įrodykite, kad seka $\{b_n\}$ mažėjanti, o $\{a_n\}$ didėjanti. (1)
      (iii) Įvertinkite $b_n - \quad \leq \left(\quad \right)$. (2)
      (iv) Pritaikykite susitraukiančiųjų intervalų lemą ir įrodykite, kad $\lim_{n\to\infty} b = \quad$. (2)
      (v) Galutinį (iv) dalies rezultatą buvo galima gauti iš sekos $\{b_n\}$ monotoniškumo ir aprėžtumo? Galbūt, dar ką nors galima gauti iš pirmųjų (i)-(iii) dalių? (3)

5. Funkcija $g(x) = \quad -$ nusako seką $x_{n+} = \quad -$ (dinaminę sistemą).
   a) Sakykime, $b = \quad = -$. Nubrėžkite „voratinklį" ir įrodykite skirtingais būdais, kad $\lim_{n\to\infty} x \quad = -\infty$. (po 2 t.)
   b) $b = \frac{}{4}$, $x_0 =$. Nubrėžkite "voratinklį" ir pritaikykite nejudamo taško teoremą sekos ribai rasti. (3)
   c) Pademonstruokite, kaip "veikia" geometrinė progresija ir Koši kriterijus nejudamo taško teoremos įrodyme. (4)
   d) Paaiškinkite, kas yra sistemos bifurkacijos taškas, kokiomis lygtimis jis nusakomas. Raskite jį. (2)

Pastaba. Ištaisius darbus, užduočių vertinimai taškais gali būti pakoreguoti (tai būna labai retai ir dažniausiai padidėja). Už labai retus arba ypatingus sprendimus gali būti skiriami papildomi taškai.

Paruošė R.Kudžma

4 priedas

Matematinės analizės egzamino užduotys 2008.01.04

Nurodymai: Užrašykite vidinėje viršelio pusėje savo PIN kodą.

Atidžiai skaitykite užduočių sąlygas ir darykite tai, ko reikalaujama.

Sprendimuose aiškiai žymėkite uždavinius ir jų dalis.

Atskirkite juodraštį nuo švarraščio.

1. Tiesės lygtys.
   a) Išveskite lygtį tiesės, nusakytos tašku $A(x_0, y_0)$ ir normaliniu vektoriumi $\vec{n} =$ (būtinas brėžinys). (1)
   b) Naudodami (*a*) dalies rezultatą, išveskite lygtį tiesės, nusakytos posvyriu į ordinačių ašį *m* ir abscisių ašies kirtimu *a*. (2)

2. Sakykime, $\{x_n\}, \{y_n\}$ - aprėžtos teigiamų realiųjų skaičių sekos.
   a) Įrodykite nelygybę $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n y_n \leq \quad _{\to\infty} \quad \overline{\mathrm{n}} y$ (galima dviem būdais, kiekvienas būdas bus atskirai įvertintas). (po 4)
   b) Pateikite pavyzdžius nekonverguojančių sekų, kurioms (*a*) dalies nelygybėje būtų
      (i) griežta nelygybė, (1)
      (ii) lygybė. (1)

3. Įrodykite pagrindinės ribų teoremos (arba teoremos apie dviejų funkcijos ribos apibrėžimų ekvivalentumą) variantą.
   Teorema. Sakykime, funkcija *f* apibrėžta intervale $[1, +\infty$. Tam, kad egzistuotų riba $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, būtina ir pakankama, kad bet kokiai argumentų sekai $\{x_n\}$, konverguojančiai į $+\infty$, t.y. $\lim_{n\to\infty} x \ = +\infty$, funkcijos reikšmių seka $\{f(x_n)\}$ konverguotų į $+\infty$, t.y. $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty$. (8)
   Patarimas. Pakankamumui įrodyti gerai sufomuluokite sąlygą $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ir ją paneikite.

4. Sakykime, $- \ \leq \ \leq \ , 0 \leq \ \leq \ .$
   a) Užrašykite veiksmų seką, kuri vienetiniame skritulyje realizuoja geometrinį <u>realaus argumento</u> funkcijos $x =$ apibrėžimą. (1)
   b) Įrodykite analiziškai (pirma parašykite apibrėžimą), kad funkcija $x =$ tolydi taške $t =$. (1)
   c) Įrodykite geometriškai, kad funkcija $x =$ tolydi (interpretuokite geometriškai vienetiniame skritulyje $\Delta \ = \ - \quad \Delta \ = \quad - \quad$). (1)
   d) Išveskite kosinuso išvestinės formulę $(\cos t)' = -$. (1)

e) Pademostruokite geometriškai vienetiniame apskritime, kad lygtis $0,3 =$ turi vienintelį sprendinį intervale $0 \leq \ \leq$. (1)

f) Įrodykite, kad lygtis $0,3 =$ turi vienintelį sprendinį intervale $0 \leq \ \leq$. (1)

g) Apskaičiuokite funkcijos $t = \qquad = \qquad$ išvestinę? (1)

h) Nubrėžkite funkcijos $t =$ grafiko eskizą *tOx* koordinačių sistemoje ir paaiškinkite $\arccos'$ geometrinę prasmę. (1)

5. Sakykime, teigiama funkcija $y =$ apibrėžta intervale $(0,1]$ ir $\lim\limits_{x\downarrow} f(x) = +\infty$.

a) Nubrėžkite viename brėžinyje *tOx* ir *xOy* koordinačių sistemose funkcijų $y =$ ir $x =$ grafikų eskizus. (1)

b) Įrodykite pagal apibrėžimą, kad $\lim\limits_{t\to+\infty} f \ \ 1/t \ \ = +\infty$. (2)

c) Pavaizduokite (b) dalį (a) dalies brėžinyje. (1)

6. Sakykime, funkcijos $f(x), g(x)$ apibrėžtos intervale $(0,1]$ ir $\lim\limits_{x\downarrow} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\downarrow} g(x) = +\infty$.

c) Suformuluokite Liopitalio teoremą šiuo atveju. (1)

d) Įrodykite (a) dalyje suformuluotą teoremą, pasinaudodami Liopitalio teorema, įrodyta per paskaitą (pakeiskite kintamuosius $x = \frac{1}{t}$). (4)

7. Kreivė γ nusakyta parametrinėmis lygtimis $x = \frac{\ }{1-} \qquad - \frac{\ }{-}$.

a) Nubrėžkite funkcijų $x = \qquad =$ grafikų eskizus. (2)

b) Nubrėžkite kreivės γ eskizą *xOy* plokštumoje. (1)

c) Raskite kreivės γ asimptotes. (3)

d) Apskaičiuokite išvestinę y' .

Nustatykite kreivės didėjimo ir mažėjimo intervalus. (1)

e) Apskaičiuokite išvesinę y'' . Nustatykite kreivės iškilumą, įgaubtumą ir perlinkio taškus. (2)

f) Patikslinkite brėžinį. (1)

8. Pereitame uždavinyje iš pirmosios lygties galima išspręsti *t* ir gauti dvi funkcijas

$t = \qquad = - + \quad + \qquad x$ ir $t = \qquad = - - \quad + \qquad x$. Panagrinėkime funkciją

$y = \qquad = \qquad = \frac{\ }{x} \qquad - \ .$

a) Nubrėžkite funkcijos $t =$ grafiką *tOx* koordinačių sistemoje. (1)

b) Ištirkite funkcijos $y =$ tolydumą taško $x =$ aplinkoje (apskaičiuokite ribą ir „pataisykite“ funkciją). (2)

c) Raskite funkcijos $y =$ asimptotes. (2)

d) Apskaičiuokite išvestinę f' . (1)

e) Apskaičiuokite išvestinę f' . (2)
f) Nustatykite lygties f' = šaknų skaičių, raskite jas 0,1 tikslumu. (3)
g) Nubrėžkite funkcijos $y =$ grafiką. (1)

Pastaba. Užduočių vertinimai taškais gali būti pakoreguoti vertinimo metu.
Paruošė R.Kudžma

5 priedas

NURODYMAI.

1. **Į egzaminą studentas gali atsinešti A4 formato lapą, kurio vienoje pusėje ranka gali būti parašyta bet kokios formulės, apibrėžimai, teoremų formuluotės. Negali būti jokių įrodymų ar uždavinių sprendimų. Tą lapą studentas privalės atiduoti kartu su egzamino užduočių sprendimais.**
2. **Studentas turi atsinešti ploną sąsiuvinį, skaičiuoklį, liniuotę, rašiklį, pieštuką.**

Pirmojo semestro matematinės analizės mokymo tikslai (reikalavimai). Studentas privalo mokėti:

1. Sekos. Realieji skaičiai

1.1. Pirmojo laipsnio funkcijos, tiesės lygtys

1. Įrodyti, kad pirmojo laipsnio funkcijų grafikai yra tam tikros tiesės, kurias reikia tiksliai nusakyti.
2. Apibrėžti tiesės posvyrį.
3. Išvesti lygtis tiesių, nusakytų:
   a) dviem taškais,
   b) tašku ir posvyriu,
   c) tašku ir normaliniu vektoriumi,
   d) tašku ir krypties vektoriumi,
   e) kitaip.
4. Išreikšti vienas tiesės charakteristikas kitomis:
   a) algebriškai (naudojant tiesių lygtis),
   b) geometriškai.
5. Paaiškinti terminų “funkcija $y = \quad + \quad$”, “lygtis $y = \quad + \quad$”, ‘tiesė $y = \quad + \quad$” ypatybes ir skirtumus.
6. Rasti funkcijos $y = \quad + \quad$ atvirkštinę funkciją ir jos grafiką.

1.2. Binominiai koeficientai. Indukcija. Sumavimas

1. Apibrėžti binominius koeficientus kombinatoriniu, indukciniu (rekurentiniu), algebriniu, geometriniu-kombinatoriniu ir aritmetiniu būdais.
2. Įrodyti skirtingais būdais apibrėžtų binominių koeficientų lygybę.
3. Paaiškinti, kodėl naudojami skirtingi žymėjimai $\left(\quad \right)$, B_n^k .

4. Paaiškinti matematinės indukcijos metodą.
5. Spręsti uždavinius matematinės indukcijos metodu.
6. Įrodyti binominių koeficientų savybes, naudojantis skirtingais apibrėžimais (kai kurios savybės vienareikšmiškai nusako binominius koeficientus):
   a) -simetriškumo,
   b) - sudėties - skaidymo,
   c) - įkėlimo-iškėlimo,
   d) $(x+ \quad = \sum_{k=}$ - binominę teoremą,
   e) $\sum_{k=}$ - sumavimo,
   f) $\sum_{j=}^{\mathrm{mi}}$ - Vandermondo sąsūką.

1.3. Geometrinė progresija. Sekos riba

1. Charakterizuoti geometrinę progresiją skirtingais būdais.
2. Išvesti geometrinės progresijos sumos “globalią” ir rekurentinę formules.
3. Nubrėžti geometrinės progresijos $\{a_n\}$ bei sumos $\{s_n\}$ “voratinklius” ir grafikus.
4. Apibrėžti sekos ribą (nulį, baigtinę ir begalinę).
5. Rasti sekų $a_n =$ ir $s_n = \frac{(1}{1-}$ ribas pagal apibrėžimą.
6. Suformuluoti elementarias (aritmetines) sekų ribų savybes.
7. Suformuluoti monotoniškų ir aprėžtų sekų savybę.
8. Rasti geometrinės progresijos $\{a_n\}$ bei sumos $\{s_n\}$ ribas, naudojant monotoniškų ir aprėžtų sekų savybę.
9. Susieti geometrinės progresijos sumos formulę su binomine teorema.
10. Pateikti geometrinės progresijos taikymų geometrijoje, finansuose, tikimybių teorijoje.

1.4. Elementarios sekų ribų savybės

1. Valdyti sekos ribos apibrėžimą ir įrodinėti:
   a) aritmetines sekų ribų savybes,
   b) konverguojančios sekos aprėžtumą, atskyrimą nuo nulio (jei sekos riba nelygi nuliui),
   c) sekų ribų savybes su nelygybėmis,
   d) sąryšius tarp nulinių ir begalinių ribų ($\lim_{n\to\infty} x = +\infty \Rightarrow \lim_{\to\infty} \frac{1}{x_n} =$,

   $x_n > \quad \lim_{n\to\infty} \quad = \Rightarrow \lim_{\to\infty} \frac{1}{x_n} = +\infty$).

2. Pateikti pavyzdžių, iliustruojančių tuos atvejus, kai negalima tiesiogiai taikyti aritmetinių sekų ribų savybių:
    a) seka $\{x_n y_n\}$, kai $\lim_{n\to\infty} x \ = +\infty \quad \to\infty \quad = \ ,$
    b) seka $\{x_n -$, kai $\lim_{n\to\infty} x \ = +\infty \quad \to\infty \quad = +\infty$,
    c) seka $\left\{ \quad \right\}$, kai $\lim_{n\to\infty} x \ = +\infty \quad \to\infty \quad = +\infty$ arba $\lim_{n\to\infty} x \ = \quad \to\infty \quad = \ .$
3. Įrodyti ribas $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \quad \to\infty \quad = \ .$

1.5. Kvadratinės šaknies algoritmas. Susitraukiančiųjų intervalų lema. Koši kriterijus

1. Išvesti kvadratinės šaknies algoritmą:
    a) mąstant aritmetiškai,
    b) naudojant Niutono liestinių metodą.
2. Įrodyti kvadratinės šaknies algoritmo konvergavimą, naudojant:
    a) monotoniškų ir aprėžtų sekų savybę,
    b) susitraukiančiųjų intervalų lemą,
    c) Koši kriterijų.
3. Įrodyti susitraukiančiųjų intervalų lemą, laikant teisinga monotoniškų aprėžtų sekų savybę.
4. Apibrėžti ir skirti savokas: Koši sąlyga, Koši seka, Koši kriterijus.
5. Pateikti pavyzdį sekos, parodančios, kad sąlygos $\lim_{n\to\infty} |x \ - \quad =$ neužtenka sekos $\{x_n\}$ konvergavimui.
6. Įrodyti Niutono begalinės binominės eilutės $\sum_{k=} \left(\quad \right)$ konvergavimą.
7. Išvesti ir ištirti atvirkštinio skaičiaus radimo algoritmą.

1.6. Skaičius e

1. Paaiškinti reiškinio $\left(\quad \right)$ finansinę prasmę.
2. Įrodyti sekos $x_n(i) = \left(\quad \right)$, $i >$, monotoniškumą.
3. Įvertinti seką $x_n(i)$ seka $y_n(i) = \sum_{k=}$.
4. Įrodyti sekos $y_n(i)$ aprėžtumą.
5. Įrodyti ribų lygybę $\lim_{n\to\infty} x \ (i) = \quad \to\infty \quad)$.
6. Paaiškinti ribos $\lim_{n\to\infty} \left(\quad \right)$ finansinę prasmę.

1.7. Logistinis dėsnis

1. Paaiškinti logistinio (Verhiulsto) dėsnio $x_{n+} = \quad - \quad$ prasmę.
2. Tirti seką $x_{n+} = \quad - \quad$, $k = - \quad = \quad = \quad$,
   a) aritmetiškai,
   b) geometriškai (braižyti “voratinklius”),
   c) analiziškai (naudoti įvairias egzistencijos teoremas).
3. Įrodyti nejudamo taško teoremą.
4. (Mėgėjams) Tirti seką $x_{n+} = \quad - \quad$.

1.8. Egzistencijos teoremos (Realiųjų skaičių pilnumas)

1. Suformuluoti ir aiškiai atskirti prielaidą ir tvirtinimą šiuose teiginiuose:
   a) Monotoniškų aprėžtų sekų teorema (MonSek).
   b) Susitraukiančiųjų intervalų lema (SusInt).
   c) Koši kriterijus (KošiKr).
   d) Supremumo aksioma(SupAks).
   e) Vejerštraso teorema (VejTeor).
2. Įrodyti minėtas teoremas tokia tvarka:
   SupAks $\Rightarrow$ MonSek $\Rightarrow$ SusInt $\Rightarrow$ VejTeor $\Rightarrow$ KošiKr
3. Išskirti tris dalis ir suformuluoti, kas turi būti daroma kiekvienoje dalyje įrodymo, siejančio bet kuriuos du teiginius iš anksčiau minėtų penkių.

1.9. Viršutinės ir apatinės ribos

1. Apibrėžti dalinės ribos sąvoką.
2. Apibrėžti viršutinę ir apatinę sekos ribas. Pateikti pavyzdžių.
3. Įrodyti lygybę $\lim_{n\to\infty}\sup x_n = \quad_{\geq} x_k$ ir $\lim_{n\to\infty}\inf x = \quad_{\to\infty} \quad_{\geq} x$.
4. Apskaičiuoti konkrečių sekų viršutines ir apatines ribas.
5. Paaiškinti, kodėl neaprėžtai iš viršaus sekai apibrėžiame $\overline{\lim_{n\to\infty}} x = +\infty$
6. Susieti sekos ribą su viršutine ir apatine sekos ribomis.
7. Įrodyti nelygybes
   $\underline{\lim}_{n\to\infty} x + \quad_{\to\infty} \leq \quad_{\to\infty} + \leq \quad_{\to\infty} + \quad_{\to\infty} \leq \quad_{\to\infty} + \leq \quad_{\to\infty} + \quad_{\to\infty}$.

2. Funkcijos riba, tolydumas, išvestinė

2.1. Funkcijos riba

1. Motyvuoti ribos reikalingumą išvestinės apibrėžimui.
2. Pateikti pavyzdžių, rodančių, kad liestinę galima rasti ir be ribos sąvokos (naudojant kartotinės šaknies sąvoką).
3. Apibrėžti įvairias funkcijų ribas $\varepsilon - \Delta$ kalba. **Pavaizduoti tai grafiškai.**
4. Įrodyti (patikrinti) funkcijų ribas pagal apibrėžimą.
5. Apibrėžti taško (baigtinio ir begalinio) aplinkas ir įrodyti jų savybes.
6. Apibrėžti ribinio taško sąvoką. Pateikti pavyzdžių ir kontrapavyzdžių.

7. Įrodyti funkcijos ribos apibrėžimų aplinkų ir $\varepsilon-$ kalba ekvivalentumą.
8. Įrodyti pagrindinę funkcijų ribų teoremą (funkcijos ribos aplinkų kalba ir sekų kalba ekvivalentumas).

2.2. Funkcijų ribų savybės. Jų egzistencija

1. Įrodyti elementarias funkcijų ribų savybes dviem būdais:
   a) pagal apibrėžimą;
   b) naudojant pagrindinę funkcijų ribų teoremą.
2. Įrodyti sudėtinės funkcijos ribos teoremą. **Pavaizduoti tai grafiškai.**
3. Suformuluoti ir įrodyti Koši kriterijų funkcijų riboms.
4. Įrodyti monotoniškų ir aprėžtų funkcijų ribų egzistenciją.

2.3. Funkcijos tolydumas

1. Apibrėžti funkcijos tolydumą, trūkio taškus.
2. Suformuluoti ir įrodyti elementarias tolydžių funkcijų teoremas (sudėties, sandaugos, dalmens, sudėtinės funkcijos).
3. Paaiškinti tolydumo iš kairės (iš dešinės) sąvokas. Panagrinėti pavyzdžius
   $f(x) = \qquad = \quad .$
4. Įrodyti elementariųjų funkcijų tolydumą.

2.4. Eksponentinė (rodiklinė) funkcija

1. Paaiškinti eksponentinės funkcijos apibrėžimo problemą.
2. Įrodyti sekos $y_n(u) = \sum_{k=}$, monotoniškumą ir aprėžtumą.
3. Įrodyti eksponentinės funkcijos daugybos taisyklę ($f(u + \quad = \qquad v))$.
4. Įrodyti eksponentinės funkcijos tolydumą, rasti ribas $\pm\infty$, palyginti su laipsnine funkcija.
5. Pagrįsti, kad apibrėžtai funkcijai $f(u) = {}_{n\to\infty}\left(\qquad \right)$ prasminga naudoti įprastą žymenį $\exp(u)$ arba e^u.

2.5. Klasikinės tolydžių funkcijų teoremos

Pateikti pavyzdžių, kontrapavyzdžių ir įrodyti:

1. Bolcano – Koši teoremas.
2. Teoremą apie tolydžios funkcijos intervalo vaizdą (apibrėžti, kas yra intervalas).
3. Paprastą nejudamo taško teoremos variantą (paaiškinti skirtumą tarp analogiškos teoremos iš skyrelio 1.7).
4. Teoremą apie atvirkštinės funkcijos tolydumą.
5. Vejerštraso teoremas.

2.6. Išvestinė, diferencijavimas

1. Apibrėžti funkcijos išvestinę kaip ribą ir susieti ją su grafiko liestinės posvyriu.
2. Apibrėžti o ir O sąvokas (bent atskirais atvejais).

3. Įrodyti, kad funkcija diferencijuojama tada ir tik tada, kai ją galima aproksimuoti tiesine funkcija.
4. Išvesti sumos, sandaugos ir dalmens išvestinių formules.
5. Apskaičiuoti elementarių funkcijų išvestines.
6. Apskaičiuoti eksponentinės funkcijos išvestinę.
7. Išvesti atvirkštinės funkcijos išvestinės formulę:
    a) geometriškai,
    b) analiziškai.
5. Apskaičiuoti atvirkštinių funkcijų $\ln, \arcsin, \arccos, \mathrm{arctg}, \mathrm{arcctg}$ ir kitų išvestines.
6. Įrodyti sudėtinės funkcijos išvestinės teoremą.

2.7. Vidurinių reikšmių teoremos, jų taikymai

1. Pateikti pavyzdžių, kontrapavyzdžių, interpretuoti geometriškai ir įrodyti:
    a) Ferma teoremą,
    b) Rolio teoremą,
    c) Lagranžo teoremą,
    d) Koši teoremą,
    e) paprasčiausią Liopitalio taisyklės atvejį.
2. Perskaityti V.Kabailos vadovėlyje apie kitus Liopitalio taisyklės atvejus.
3. Susieti funkcijos monotoniškumą su išvestinės ženklu **(įsikalti amžiams į galvą, kad tai daroma (siejama, ne kalama) su Lagranžo teorema)**.
4. Teisingai interpretuoti ir apskaičiuoti kai kurias klasikines ribas:
    a) $\lim\limits_{t\to} \frac{\ln(1+}{t} = \;,$
    b) $\lim\limits_{t\to} \frac{e^t -}{} = \;,$
    c) $\lim\limits_{t\to} \frac{(1+ \quad -}{t} = \quad \in \square \;.$

2.8. Teiloro formulė ir jos taikymai

1. Interpretuoti Lagranžo teoremą, kaip Teiloro formulės paprasčiausią atvejį ir gauti liekamojo nario $r_0(x)$ įvertį.
2. Išvesti iš ankstesnės formulės Teiloro polinomą $P_{Teil,1}(x)$ ir gauti Peano formos liekamąjį narį $r_1(x)$.
3. Išvesti Lagranžo formos liekamąjį narį $r_1(x)$.
4. Gauti Teiloro polinomą $P_{Teil,2}(x)$ ir Peano formos liekamąjį narį $r_2(x)$.
5. Išvesti bendruoju atveju Teiloro formulę ir gauti Lagranžo bei Peano formos liekamuosius narius (jei patiems neišeina, tai paskaitykite V.Kabailos vadovėlyje).
6. Išvesti būtinas ir pakankamas ekstremumų sąlygas.
7. Parašyti eksponentinės funkcijos Teiloro formulę ir išvesti Teiloro eilutę.

2.9. Iškilumas

1. Pateikti iškilos funkcijos geometrinį apibrėžimą ir iš jo išvesti analizinį.

2. Įrodyti lemą, siejančią taško padėtį tam tikrų tiesių atžvilgiu su tų tiesių posvyriais.
3. Pateikti ekvivalenčius iškilumo apibrėžimus geometrine, algebros bei analizės kalbomis.
4. Įrodyti ekvivalenčias iškilumo sąlygas, jei funkcija yra diferencijuojama:
    a) funkcijos išvestinė yra didėjanti,
    b) funkcijos grafikas yra po liestine, nubrėžta per bet kokį grafiko tašką.
5. Susieti funkcijos iškilumą su antrosios išvestinės ženklu.
6. Apibrėžti perlinkio tašką bei išvesti būtinas ir pakankamas jo buvimo sąlygas.
7. Įrodyti Jenseno nelygybę.
8. Įrodyti aritmetinio – geometrinio vidurkio nelygybę.

2.10. Grafikų brėžimas

1. Brėžti funkcijų $y =$ grafikus, remiantis šia schema:
    a) nustatyti funkcijos apibrėžimo sritį;
    b) nustatyti grafiko simetrijas ir periodiškumą;
    c) rasti tolydumo intervalus ir trūkio taškus, apskaičiuoti trūkio taškuose ribas iš kairės ir dešinės;
    d) rasti funkcijos nulius ir jos ženklo pastovumo intervalus;
    e) ištirti funkcijos elgesį begalybėje ir rasti asimptotes;
    f) nubrėžti grafiko eskizą;
    g) apskaičiuoti išvestinę, rasti funkcijos didėjimo ir mažėjimo intervalus, funkcijos ekstremumus;
    h) apskaičiuoti funkcijos antrąją išvestinę, rasti perlinkio taškus ir nustatyti funkcijos iškilumo ir įgaubtumo intervalus;
    i) nubrėžti tikslų funkcijos grafiką.

2. Brėžti x, y plokštumoje kreives $(x(t); y(t))$, remiantis šia schema:
    a) brėžti funkcijų $x =$ ir $y =$ grafikų eskizus atitinkamai t, x ir t,y plokštumose;
    b) brėžti kreivės $(x(t); y(t))$ eskizą x, y plokštumoje;
    c) rasti kreivės asimptotes (vertikalias, horizontalias ir pasvirąsias $y = \quad + \quad$);
    d) apskaičiuoti išvestines $x' \quad '$ ir $y' = \frac{\quad '}{x'}$;
    e) nustatyti kreivės (kreivės dalių) didėjimo ir mažėjimo intervalus;
    f) apskaičiuoti antrąją išvestinę $y'' = \quad \cdot \frac{}{x'}$;
    g) rasti kreivės perlinkio taškus ir iškilumo (įgaubtumo) intervalus;
    h) brėžti tikslią kreivę $(x(t); y(t))$.

6 priedas

Lentelė 35 FDM1 grupės A4 lapo turinys antram uždaviniui

FDM1	Sekos ribos ap	Sekų sumos ribos teorema
1	1	
2		
3	1	
4		1
5		
6		
7	1	1
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15	nėra paruoštukės	
16	1	
17	1	
18	1	
19		
20	1	1
21	1	
22	nėra paruoštukės	
23	1	

Lentelė 36 FDM2 grupės A4 lapo turinys antram uždaviniui

FDM2	Sekos ribos ap	Sekų sumos ribos teorema
1	1	
2	1	1
3	nėra paruoštukės	
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		1
14	nėra paruoštukės	
15		1
16		
17		
18	1	
19		
20		
21		
22	1	1
23		
24		
25		
26		

Lentelė 37 EKO1 grupės A4 lapo turinys antram uždaviniui

EKO1	Sekos ribos ap	Sekų sumos ribos teorema
1		1
2		
3	nėra paruoštukės	
4	nėra paruoštukės	
5	1	1
6		
7		1
8	nėra paruoštukės	
9		
10		1
11	nėra paruoštukės	
12		
13		
14	1	
15		
16		1
17		
18		
19	nėra paruoštukės	
20		1
21	nėra paruoštukės	
22		
23	nėra paruoštukės	
24		1

Lentelė 38 EKO2 grupės A4 lapo turinys antram uždaviniui

EKO2	Sekos ribos ap	Sekų sumos ribos teorema
1		1
2	1	1
3	nėra paruoštukės	
4	1	1
5		
6	nėra paruoštukės	
7		1
8	1	1
9		1
10	nėra paruoštukės	
11		1
12		
13	1	
14	1	1
15		
16		
17	1	
18	1	1
19	1	1
20	1	
21	1	
22	1	1

Lentelė 39 MMT1 grupės A4 lapo turinys antram uždaviniui

MMT1	Sekos ribos ap	Sekų sumos ribos teorema
1	1	
2		
3		
4		
5		
6	1	
7		1
8	1	
9		
10	nėra paruoštukės	
11		1
12		
13	1	
14		
15	1	
16		
17		
18	1	
19	nėra paruoštukės	
20		
21		
22		
23		
24	1	1
25	1	
26		
27	1	1
28	1	

Lentelė 40 MMT2 grupės A4 lapo turinys antram uždaviniui

MMT2	Sekos ribos ap	Sekų sumos ribos teorema
1		
2		1
3		
4	nėra paruoštukės	
5	1	
6		
7		1
8	1	1
9		
10	1	1
11	1	1
12		
13	1	
14	1	
15		
16	1	
17		
18		
19	nėra paruoštukės	
20	1	1
21	1	
22	1	1
23	1	
24		
25	1	1
26		
27	1	
28		
29	1	

7 priedas

Lentelė 41 EKO1 grupės A4 lapo turinys trečiam uždaviniui

N-natūrali kalba **S**-simbolių kalba	Bolcano-Vėjerštraso teorema		Monotoniškų ir aprėžtų sekų teorema	
EKO1	N	S	N	S
1	1		1	
2	1		1	
3	Nėra paruoštukės			
4	Nėra paruoštukės			
5	1		1	
6	1		1	
7	1		1	
8	Nėra paruoštukės			
9	1		1	
10	1	1		
11	Nėra paruoštukės			
12	1	1	1	
13	1		1	
14		1	1	
15	1		1	
16	1		1	1
17				
18	1		1	
19	Nėra paruoštukės			
20	1		1	
21	Nėra paruoštukės			
22	1		1	
23	Nėra paruoštukės			
24	1	1	1	1

Lentelė 42 EKO2 grupės A4 lapo turinys trečiam uždaviniui

N-natūrali kalba **S**-simbolių kalba	Bolcano-Vėjerštraso teorema		Monotoniškų ir aprėžtų sekų teorema	
EKO2	N	S	N	S
1			1	
2	1		1	
3	Nėra paruoštukės			
4	1		1	
5	1		1	
6	Nėra paruoštukės			
7	1		1	
8			1	
9	1		1	
10	Nėra paruoštukės			
11	1		1	
12	1		1	
13	1		1	
14	1		1	
15	1		1	
16	1		1	
17	1		1	
18	1		1	
19	1		1	
20	1		1	
21	1		1	
22	1	1	1	1

Lentelė 43 MMT1 grupės A4 lapo turinys trečiam uždaviniui

N-natūrali kalba **S**-simbolių kalba	Bolcano-Vėjerštraso teorema		Monotoniškų ir aprėžtų sekų teorema	
MMT1	N	S	N	S
1	1		1	
2				
3	1		1	
4	1		1	
5	1		1	
6	1		1	1
7	1		1	
8	1		1	
9	1			
10	Nėra paruoštukės			
11	1		1	
12	1		1	
13	1	1	1	
14	1		1	
15				
16	1		1	
17	1		1	
18	1		1	
19	Nėra paruoštukės			
20	1		1	
21	1	1	1	
22	1		1	
23			1	
24	1			
25	1		1	
26	1		1	
27	1			
28			1	

Lentelė 44 MMT2 grupės A4 lapo turinys trečiam uždaviniui

N-natūrali kalba **S**-simbolių kalba	Bolcano-Vėjerštraso teorema		Monotoniškų ir aprėžtų sekų teorema	
MMT2	N	S	N	S
1	1		1	
2	1		1	
3	Nėra paruoštukės			
4	1		1	
5	1			
6	1		1	
7	1		1	
8				
9	1			
10			1	
11	1		1	
12	1		1	
13	1		1	
14				
15	1	1	1	
16	1		1	
17	1			
18	Nėra paruoštukės			
19	1		1	
20	1		1	
21	1			
22	1		1	
23				
24	1	1	1	
25	1		1	
26				
27	1		1	
28	1			
29				

8 priedas

Lentelė 45 MMT1 grupės studentų paruoštukių turiniai ketvirtam uždaviniui

	Funkcijos tolydumas	Trigonometrinių f-jų išvestinės
1	1	
2		
3		
4		
5		
6		
7		1
8	1	
9		
10	Nėra paruoštukės	
11		1
12		
13		1
14		
15		1
16		
17	1	
18		
19	1	
20		
21		
22		
23	Nėra paruoštukės	
24	1	
25		
26		1
27	1	
28	1	1

Lentelė 46 MMT2 grupės studentų paruoštukių turiniai ketvirtam uždaviniui

	Funkcijos tolydumas	Trigonometrinių f-jų išvestinės
1	1	
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9	Nėra paruoštukės	
10		
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17		
18		
19	Nėra paruoštukės	
20		
21		
22		
23		
24		
25		
26		
27		
28		
29		

9 priedas

Lentelė 47 FDM1 grupės septinto uždavinio teorija

	Parametrinės lygtys	asimptotės	kreivės iškilumas	įgaubtumas	perlinkio taškai
1		1			
2					
3		1	1	1	1
4					
5					
6					
7					
8					
9		1			
10					
11		1	1	1	
12		1	1	1	
13					
14		1			
15					
16			1	1	
17			1	1	
18					
19					
20					
21					

Lentelė 48 FDM2 grupės septinto uždavinio teorija

	Parametrinės lygtys	asimptotės	kreivės iškilumas	įgaubtumas	perlinkio taškai
1			1	1	
2			1	1	
3					
4		1	1	1	
5					
6					
7					
8					
9		1			
10					
11		1			
12					
13		1			
14	Nėra paruoštukės				
15					
16					
17					
18		1	1	1	
19					
20		1			
21		1	1	1	
22		1	1	1	
23					
24			1	1	
25					
26					

Lentelė 49 MMT1 grupės septinto uždavinio teorija

	Parametrinės lygtys	asimptotės	kreivės iškilumas	įgaubtumas	perlinkio taškai
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7		1			
8					
9		1			
10	Nėra paruoštukės				
11		1	1	1	
12					
13					
14			1	1	
15					
16			1	1	
17		1	1	1	
18					
19					
20					
21					
22					
23	Nėra paruoštukės				
24	1	1	1	1	
25		1		1	
26					
27			1	1	
28		1	1	1	

Lentelė 50 MMT2 grupės septinto uždavinio teorija

	Parametrinės lygtys	asimptotės	kreivės iškilumas	įgaubtumas	perlinkio taškai
1					
2		1			
3					
4					
5		1			
6			1		
7		1			
8					
9	Nėra paruoštukės				
10		1			
11		1			
12					
13					
14		1	1	1	
15					
16		1	1		
17					
18					
19	Nėra paruoštukės				
20		1			
21					
22					
23		1			
24					
25			1		
26					
27			1	1	
28					
29		1			

10 priedas

Lentelė 51 Antras uždavinys

	koreliacija	n	T	T(kr)	|T|>T(kr)
fdm1	0,150	21	0,662	2,101	Hip.neatmetame,t.y Y ir X nepriklausomi
fdm2	-0,125	25	-0,604	2,074	Hip.neatmetame,t.y Y ir X nepriklausomi
eko1	0,171	20	0,739	2,131	Hip.neatmetame,t.y Y ir X nepriklausomi
eko2	-0,272	19	-1,165	2,110	Hip.neatmetame,t.y Y ir X nepriklausomi
mmt1	-0,318	26	-1,641	2,064	Hip.neatmetame,t.y Y ir X nepriklausomi
mmt2	0,245	27	1,264	2,060	Hip.neatmetame,t.y Y ir X nepriklausomi
bendras	-0,042	138	-0,487	1,978	Hip.neatmetame,t.y Y ir X nepriklausomi

Lentelė 52 Trečias uždavinys

	koreliacija	n	T	T(kr)	|T|>T(kr)
fdm1	0,332	21	1,532	2,101	Hip.neatmetame,t.y Y ir X nepriklausomi
fdm2	-0,187	25	-0,914	2,074	Hip.neatmetame,t.y Y ir X nepriklausomi
eko1	0,134	20	0,572	2,131	Hip.neatmetame,t.y Y ir X nepriklausomi
eko2	0,205	19	0,863	2,110	Hip.neatmetame,t.y Y ir X nepriklausomi
mmt1	0,219	26	1,101	2,064	Hip.neatmetame,t.y Y ir X nepriklausomi
mmt2	-0,079	27	-0,394	2,060	Hip.neatmetame,t.y Y ir X nepriklausomi
bendras	0,110	138	1,293	1,978	Hip.neatmetame,t.y Y ir X nepriklausomi

Lentelė 53 Ketvirtas uždavinys

	koreliacija	n	T	T(kr)	|T|>T(kr)
fdm1	0,101	21	0,441	2,101	Hip.neatmetame,t.y Y ir X nepriklausomi
fdm2	0,025	25	0,122	2,074	Hip.neatmetame,t.y Y ir X nepriklausomi
eko1	0,029	20	0,122	2,131	Hip.neatmetame,t.y Y ir X nepriklausomi
eko2	0,072	19	0,296	2,110	Hip.neatmetame,t.y Y ir X nepriklausomi
mmt1	-0,221	26	-1,113	2,064	Hip.neatmetame,t.y Y ir X nepriklausomi
mmt2	-0,175	27	-0,888	2,060	Hip.neatmetame,t.y Y ir X nepriklausomi
bendras	0,142	138	1,670	1,978	Hip.neatmetame,t.y Y ir X nepriklausomi

Lentelė 54 Penktas uždavinys

	koreliacija	n	T	T(kr)	|T|>T(kr)
fdm1	-0,084	21	-0,368	2,101	Hip.neatmetame,t.y Y ir X nepriklausomi
fdm2	-0,185	25	-0,904	2,074	Hip.neatmetame,t.y Y ir X nepriklausomi
eko1	-0,195	20	-0,843	2,131	Hip.neatmetame,t.y Y ir X nepriklausomi
eko2	-0,068	19	-0,279	2,110	Hip.neatmetame,t.y Y ir X nepriklausomi
mmt1	-0,025	26	-0,122	2,064	Hip.neatmetame,t.y Y ir X nepriklausomi
mmt2	-0,243	27	-1,253	2,060	Hip.neatmetame,t.y Y ir X nepriklausomi
bendras	-0,130	138	-1,524	1,978	Hip.neatmetame,t.y Y ir X nepriklausomi

Lentelė 55 Aštuntas uždavinys

	koreliacija	n	T	T(kr)	|T|>T(kr)
fdm1	-0,016	21	-0,072	2,101	Hip.neatmetame,t.y Y ir X nepriklausomi
fdm2	-0,181	25	-0,883	2,074	Hip.neatmetame,t.y Y ir X nepriklausomi
eko1	0,064	20	0,271	2,131	Hip.neatmetame,t.y Y ir X nepriklausomi
eko2	0,166	19	0,696	2,110	Hip.neatmetame,t.y Y ir X nepriklausomi
mmt1	0,043	26	0,211	2,064	Hip.neatmetame,t.y Y ir X nepriklausomi
mmt2	-0,196	27	-1,000	2,060	Hip.neatmetame,t.y Y ir X nepriklausomi
bendras	-0,015	138	-0,178	1,978	Hip.neatmetame,t.y Y ir X nepriklausomi