

VILNIAUS UNIVERSITETAS

EGLĖ JASUTĖ

INTERAKTYVAUS VIZUALIZAVIMO MODELIS GEOMETRIJOS
KONSTRUKCIONISTINIAM MOKYMUI IR MOKYMUISI

Daktaro disertacija

Fiziniai mokslai, informatika (09P)

Vilnius, 2014 metai

Disertacija rengta 2010 – 2014 metais Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos institute

Moksliniai vadovai:

prof. habil. dr. Antanas Žilinskas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, informatika – 09 P) (2010–2012 m.),

prof. dr. Valentina Dagiienė (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, informatika – 09 P) (2012–2014 m.).

Padėka

Nuoširdžiai dėkoju mokslinei vadovei prof. Valentinai Dagienei už kantrybę, geranoriškumą ir nuolatinį skatinimą, moksliniam vadovui prof. Antanui Žilinskui už nuolatinį palaikymą ir pritarimą. Vadovų idėjos, patarimai ir diskusijos buvo neįkainojamos studijuojant ir rengiant šį darbą. Taip pat dėkoju visiems Informatikos metodologijos skyriaus darbuotojams už konstruktyvią kritiką, nuoširdų domėjimąsi ir vertingus patarimus.

Esu dėkinga darbo recenzentui prof. habil. dr. Romui Baronui. Jo pastabos ir patarimai prisidėjo prie disertacijos kokybės.

Dėkoju VU Matematikos ir informatikos instituto direktoriui prof. Gintautui Dzemydai už sudarytas sąlygas tobulėti ir skleisti savo didėjas Lietuvoje ir užsienyje per visą studijų laikotarpį. Esu dėkinga direktoriaus padėjėjai Danutei Rimeisienei už nuolatinį rūpestį ir skatinimą siekiant tikslo.

Labai ačiū Vilniaus jėzuitų gimnazijos direktoriui Artūriui Sederevičiui SJ, administracijai ir mokytojams už pritarimą ir palaikymą.

Dėkoju savo šeimai, tėveliams, vyrui Artūriui, sūnums Kasparui, Karoliui, Edvinui ir Ernestui už meilę, rūpestį, nuolatinį palaikymą ir supratingumą, taip pat visiems mano buvusiems, esamiems ir būsimiems mokiniams kaip vienam iš svarbiausių šio mokslinio darbo įkvėpimo šaltinių.

Turinys

<i>Paveikslų sąrašas</i>	7
<i>Lentelių sąrašas</i>	8
<i>Sąvokos, santrumpos ir žymėjimai</i>	9
Sąvokos ir santrumpos	9
Žymėjimai	11
1. Įvadas	12
1.1. Darbo aktualumas.....	12
1.2. Probleminė sritis.....	13
1.3. Tyrimo objektas	15
1.4. Tikslas	15
1.5. Uždaviniai.....	15
1.6. Ginamieji teiginiai	15
1.7. Mokslinis naujumas	16
1.8. Darbo rezultatų praktinė reikšmė	16
1.9. Darbo apimtis ir struktūra	17
1.10. Darbo aprobavimas.....	17
2. Informatikos metodai konstrukcionistiniam geometrijos mokymui ir mokymuisi	19
2.1. Įvadas.....	19
2.2. Konstrukcionistinio mokymo ir mokymosi samprata	22
2.3. Informacinės technologijos matematikoje	27
2.4. Interaktyvus vizualizavimas dinaminės geometrijos sistemoje.....	29
2.4.1. Dinaminės geometrijos sistemos samprata	31
2.4.2. Dinaminė geometrija konstrukcionistiniam mokymui.....	33
2.4.3. Dinaminės geometrijos sistema ugdymo programų kontekste	33
2.4.4. Dinaminė geometrija kaip vienas iš mokymo metodų	36

2.4.5.	Dinaminės geometrijos naudojimo problematika	38
2.4.6.	Interaktyvaus geometrijos vizualizavimo samprata	44
2.5.	Abstraktūs duomenų tipai	45
2.5.1.	Problemos sprendimas naudojant abstrakčiuosius duomenų tipus	46
2.5.2.	Abstrakčių duomenų tipų specifikacijos	47
2.6.	Skyriaus išvados ir apibendrinimas	50
3.	<i>Interaktyvaus vizualizavimo modelis</i>	51
3.1.	Įvadas	51
3.2.	Konstruccionistinio geometrijos mokymo(si) modelis	51
3.3.	Reikalavimai modeliui	55
3.4.	Interaktyvaus vizualizavimo kriterijai	55
3.4.1.	Technologiniai kriterijai	56
3.4.2.	Vartotojo kriterijai ir bendras kriterijų modelis	58
3.5.	Interaktyvaus vizualizavimo modelio veiklų diagrama	60
3.6.	Interaktyvaus vizualizavimo modelio situacijų diagrama	61
3.7.	Scenarijų šablonų klasifikacija	62
3.8.	ADT realizacija interaktyvių geometrijos mikropasaulių scenarijuose	69
3.8.1.	Abstraktusis duomenų tipas <i>geom.obj</i>	69
3.8.2.	Abstraktusis duomenų tipas <i>measurement</i>	76
3.8.3.	Abstraktusis duomenų tipas <i>text.block</i>	81
3.8.4.	Dinaminės geometrijos duomenų tipų ryšiai	84
3.8.5.	ADT praplėtimas nauju abstrakčiuoju duomenų tipu <i>action.buttons</i>	85
3.9.	Koncepcinis interaktyvaus vizualizavimo modelis	88
3.10.	Skyriaus išvados ir apibendrinimas	89
4.	<i>Modelio realizavimas ir vertinimas</i>	90
4.1.	Įvadas	90
4.2.	ADT realizavimas keturiose dinaminės geometrijos sistemose	90

4.2.1.	ADT realizacija „Geometer’ Sketchpad“	93
4.2.2.	ADT realizacija „Geogebra“	95
4.2.3.	ADT realizacija „Cabri“	96
4.2.4.	ADT realizacija „Cinderella“	98
4.2.5.	Realizacijų lyginamoji analizė	99
4.3.	Sistemos pasirinkimas vizualizavimui	100
4.4.	Eksperimentinis tyrimas	106
4.4.1.	Hipotezės	106
4.4.2.	Eksperimentinio tyrimo eiga	108
4.4.3.	Pradinio ir baigtinio testų sudarymas	111
4.4.4.	Eksperimento rezultatai	112
4.4.5.	Išvados ir diskusijos	115
4.5.	Interaktyvaus vizualizavimo modelio pagrindimas	116
4.6.	Skyriaus išvados ir apibendrinimas	117
	<i>Bendrosios išvados</i>	118
	<i>Literatūra</i>	120
	<i>Priedai</i>	138

Paveikslų sąrašas

1 pav.	Disertacijos probleminė sritis	14
2 pav.	Literatūros apžvalgos schema	21
3 pav.	Konstrukcionistinio mokymosi modelis pagal A. Baytak	25
4 pav.	Didaktinis tetraedras	30
5 pav.	Konstravimo žingsniai ir jų rezultatas dinaminėje geometrijoje	41
6 pav.	ADT specifikacijos metodas	49
7 pav.	Baytak modelis konstrukcionistiniam mokymuisi kurti dinامينius brėžinius	52
8 pav.	Kolb mokymosi ciklas [Kol75]	53
9 pav.	Konstrukcionistinio mokymosi su dinamine geometrija modelis	54
10 pav.	Interaktyvaus vizualizavimo kokybės kriterijų modelis	59
11 pav.	Mikropasaulių kūrimo veiklų diagrama	60
12 pav.	Interaktyvaus vizualizavimo situacijų diagrama	62
13 pav.	Scenarijų šablonų sistema	63
14 pav.	Koncepto pristatymo sekų diagrama	65
15 pav.	Savybės pristatymo sekų diagrama	66
16 pav.	Teoremos arba aksiomos pristatymo sekų diagrama;	67
17 pav.	Pažingsninio šablono sekų diagrama	68
18 pav.	ADT geom.obj sintaksės grafinis vaizdavimas	72
19 pav.	Atkarpos, apskritimo, susikirtimo taško scenarijų realizacijų pavyzdžiai	76
20 pav.	ADT measurement sintaksės grafinis vaizdavimas	78
21 pav.	Stygos ilgio matavimo realizacijos „Geometer’s Sketchpad“ pavyzdys	81
22 pav.	ADT text.block ryšių su ADT measurement grafinis vaizdavimas	82
23 pav.	Operacijos merge realizacijos „Geometer’s Sketchpad“ pavyzdys	84
24 pav.	ADT din.geom grafinis vaizdavimas	85
25 pav.	ADT action.buttons sintaksės grafinis vaizdavimas	86
26 pav.	Praplėsto ADT din.geom.GS grafinis vaizdavimas	88
27 pav.	Interaktyvaus geometrijos vizualizavimo modelis	89
28 pav.	ADT din.geom realizacijos „Geometer’s Sketchpad“ pavyzdys	95

29 pav.	ADT din.geom realizacijos „Geogebra“ pavyzdys	96
30 pav.	ADT din.geom realizacijos „Cabri II Plus“ pavyzdys	98
31 pav.	ADT din.geom realizacijos „Cinderella“ 2 pavyzdys	100
32 pav.	DGS pasirinkimo kriterijai	102
33 pav.	DGS vertinimo schema	105
34 pav.	Eksperimentinio tyrimo schema.....	110
35 pav.	Eksperimentinės ir kontrolinės grupių gebėjimų palyginimas	114

Lentelių sąrašas

1 lentelė.	Mokymosi metodai [DNO07]	36
2 lentelė.	Dinaminės geometrijos sistemų sudėtingumo lygiai	41
3 lentelė.	„Cabri“, „Geogebra“ ir „Geometer’s Sketchpad“ sistemų palyginimas	42
4 lentelė.	Kolb mokymosi ciklo ir konstrukcionistinio mokymosi ryšys	54
5 lentelė.	DG sistemų palyginimo rezultatai.....	106
6 lentelė.	Imties dydis ir paskirstymas.....	109
7 lentelė.	Eksperimento metu tiriama gebėjimai.....	111
8 lentelė.	Pradinio ir baigtinio testų rezultatų palyginimas.....	112
9 lentelė.	Vidurkių skirtumų palyginimas	113
10 lentelė.	Mokinių gebėjimų vidurkių pokyčių palyginimų p reikšmės	114

Sąvokos, santrumpos ir žymėjimai

Sąvokos ir santrumpos

Sąvoka ir (arba) santrumpa	Apibrėžtis
Abstraktusis duomenų tipas (ADT)	Duomenų tipas, kuris apibrėžiamas nusakant operacijas su to tipo duomenų reikšmėmis, tačiau nepriklauso nuo reikšmių pavaizdavimo.
ADT specifikacija	Kiekvienos duomenų tipo operacijos formalus nepriklausomas nuo realizacijos apibrėžimas.
Algebrinė specifikacija	Aibė iš trijų elementų (S, OP, E), čia S žymi reikšmių aibę, OP – operacijų aibę ir E – aksiomų aibę.
Atspindinčios operacijos	Operacijos, kurios vieno duomenų tipo reikšmes atvaizduoja kito duomenų tipo reikšmėmis.
Dinaminės geometrijos sistema (DGS)	Technologinė priemonė, kuri suteikia vartotojui galimybę tiesiogiai konstruoti susietus geometrinius objektus, matematinius reiškinius, juos transformuoti ir tirti realiuoju laiku naudojant įvairias technologines ir kompiuterines valdymo priemones, išlaikant ryšius tarp konstrukcijos objektų.
Generuojančios operacijos	Operacijos, kuriomis gaunamos visos duomenų tipo reikšmės.
Heterogeninė algebra	Aibių pora [T, F], kur T yra netuščia duomenų tipų T_i , $1 \leq i \leq n$ reikšmių aibė, o F yra baigtinė operacijų (funkcijų) F_{jn} aibė, kurios kiekviena operacija F_{jn} yra atvaizdis $F_{jn}: T_1 \times T_2 \times \dots \times T_n \rightarrow T_r$, tipų T_1, T_2, \dots, T_n reikšmių aibių į rezultato tipo T_r reikšmių aibę; čia $n - j$

sios operacijos operandų skaičius [Gri97].

Hierarchinės analizės metodas (AHP)	Analizės metodas naudojantis daugiakriterinį vertinimą ir taikomas pasirinkimui iš kelių alternatyvų.
--	---

Homogeninė algebra	Aibių pora $[R, F]$, kur R netuščia reikšmių aibė, o F baigtinė operacijų (funkcijų) F_{nj} aibė, kurios kiekviena operacija F_{nj} yra atvaizdis $F_{nj}: R_n \rightarrow R$, kur n yra j -osios operacijos operandų skaičius [Gri97].
---------------------------	---

Informacinės komunikacinės technologijos (IKT)	Informacijos kaupimo, laikymo, apdorojimo, pateikimo ir perdavimo būdų ir priemonių visuma.
---	---

Interaktyvus (dinaminis) geometrijos vizualizavimas	Geometrijos konceptų, aksiomų, teoremų ir problemų grafinių vaizdų kūrimas ir naudojimas dinaminės geometrijos sistemoje.
--	---

Konstrukcionistinis mokymasis	Konstruktivizmo idėjomis pagrįstas mokymas, kai mokinys skatinamas aktyviai kurti išorinio pasaulio objektus, kaip mentalinius objektus ir dalijasi jais su kitais.
--------------------------------------	---

Konstruktivistinis mokymasis	Mokymasis, kai mokinys skatinamas konstruoti žinias remdamasis savąja patirtimi [Pia54].
-------------------------------------	--

Mikropasaulis	Konstruktivistinio mokymo projektavimo modelį įgyvendinanti kompiuterinė aplinka, kuri leidžia mokiniui tyrinėti dirbtinėje ar realioje aplinkoje ir mokytis kuriant. Tokio mikropasaulio tikslas yra suteikti mokiniui išteklių kurti ir tobulinti savo pačių žinias [Pap80].
----------------------	--

Mokymo metodas (MM) Mokytojo ir jo vadovaujamų mokinių veiklos būdų sistema, padedanti mokiniams įgyti žinių, mokėjimų ir įgūdžių, lavinti gebėjimus, formuoti pasaulėžiūrą.

Mokymosi objektas (MO) Bet kuris skaitmeninis mokymo(si) išteklius (elektroninio mokymo(si) elementas), kuris tinka mokymui(si) ir gali būti taikomas iš naujo kituose mokymo(si) kontekstuose.

Skaitmeninė mokymo(si) priemonė (SMP) Interaktyvus skaitmeninis išteklius, kurį galima naudoti mokymui(si), apimantis visą mokymui(si) skirtą skyrių, temą ar kursą bei dokumentaciją. Gali būti sudarytas iš kelių ar daugiau mokymosi objektų.

Transformuojančios operacijos Operacijos pakeičiančios vienas duomenų tipo T reikšmes kitomis T tipo reikšmėmis, gautomis taikant generuojančias operacijas. Transformuojančios operacijos nesukuria naujų T tipo reikšmių, bet jų rezultatas priklauso tipo T reikšmių aibei.

Žymėjimai

Žymėjimas	Paaškinimas
T	duomenų tipas
T_i	i-asis duomenų tipas
R	netuščia abstrakčiojo duomenų tipo reikšmių aibė
F	baigtinė abstrakčiojo duomenų tipo operacijų aibė
F_{nj}	n-tojo abstrakčiojo duomenų tipo j-oji operacija
M_{kj}	k-tosios temos j-asis mikropasaulis
N	imties dydis
F(X)	kumuliatyvinė pasiskirstymo funkcija
AD	Anderson-Darling kriterijus

1. Įvadas

1.1. Darbo aktualumas

Matematikos mokymas viena iš sudėtingiausių ir daugiausiai dėmesio reikalaujanti disciplina mokykliniame kurse. Mokytojo tikslas ne tik perteikti žinias, bet sudominti, motyvuoti ir įtraukti klasės mokinius į aktyvų mokymosi procesą konstruojant savo žinias ir gebėjimus.

Matematinų reiškinių vizualizavimas nuo pat Babilono laikų sudarė sąlygas šiems išlikti ir pasklisti. Šiuolaikinių dinaminų grafinių kompiuterių programų ir kitų mokymo technologijų atsiradimas itin stipriai veikia geometrijos vizualizavimą ir jos mokymą [Arc03] [Boz05] [GN07]. Atsiranda galimybės ne tik spręsti sudėtingus geometrinius uždavinius, bet ir pateikti juos aiškesne, suprantamesne forma. Vizualizuojant geometrinius konceptus, aksiomas ir teoremas galima lavinti mokinių vizualųjį mąstymą, vaizduotę, padėti susikaupti ties uždavinio sprendimu. Dėl to keičiasi matematikos edukologų požiūris į matematikos mokymą – informacinės technologijos tampa svaria sudėtine didaktikos dalimi [HHK08]. Vis daugiau dėmesio skiriama aktyviems mokymo metodams grįšties konstrukcionizmo teorija, kurie skatina mokinius aktyviai veikti ir įsitraukti į mokomąją veiklą. Informacinės technologijos tampa viena efektyviausių priemonių padedančių įgyvendinti konstrukcionizmo idėjas ir įtraukiančių mokinius į aktyvią veiklą konstruojant matematinės žinias ir gebėjimus

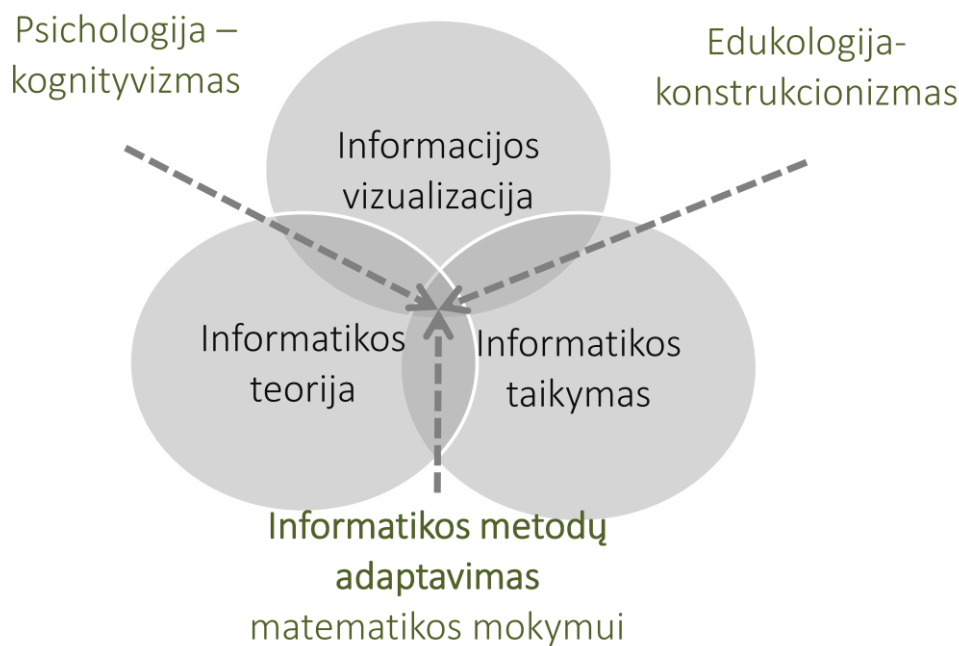
Matematikos mokytojai dažniausiai linkę tikėti ir pabrėžia interaktyvios (dinaminės) geometrijos naudą mokinių mokymuisi, neabejoja, kad mokiniai gali geriau suprasti geometrinius konceptus, aksiomas, teoremas, ypač įrodymų konstravimą, tačiau patys prisipažįsta retai taikantys šias technologijas. Dažniausiai nurodoma kliūtis – nepakankami techniniai įgūdžiai, kurie neleidžia patiems efektyviai kurti naujų pavyzdžių. Dažnai matematikos mokytojai nemoka sparčiai naudotis dinaminės geometrijos sistemomis ir neturi laiko šiai kompetencijai įgyti. Šiai problemai išspręsti gali padėti mokyklinės geometrijos vizualizavimas panaudojant dinaminės geometrijos sistemas.

Todėl šiame tiriamajame darbe sukurtas interaktyvus geometrijos vizualizavimo modelis paremtas dinaminės geometrijos sistema. Dinaminės geometrijos sistemą apibūdiname kaip programinę įrangą geometrijai mokyti, kurios pagrindinė savybė – dinaminių brėžinių konstravimas, analizė ir animacija (pavyzdžiui, „Geometer’s SketchPad“, „Geogebra“, „Cabri“).

1.2. Probleminė sritis

Mokymasis – tai procesas, vykstantis visada ir visur. Mokymosi klausimas keliamas įvairiose mokslinėse srityse: psichologijos, filosofijos, edukologijos, inžinerijos, informatikos ir kt. Atliekami tyrimai visame pasaulyje aiškinantis, kaip mokinys priima informaciją ir kaip pateikti informaciją, kad mokinys ją kuo efektyviau priimtų, t.y. įsisavintų žinias taip, kad jas galėtų taikyti įvairiame kontekste. Dalis mokslininkų yra įsitikinę, kad į šiuos klausimus gali atsakyti informacinės technologijos (IT). Todėl vis daugiau atliekama tarpdisciplininių tyrimų, kuriuose dėmesys kreipiamas tiek į IT poveikį mokymuisi, tiek į mokymuisi skirtų IT kūrimą.

Šiame darbe nagrinėjami geometrijos mokymo ypatumai pagrindinėje ir vidurinėje mokykloje. Tiriama informatikos metodai, kurie padėtų gerinti geometrijos mokymąsi konstrukcionistinių idėjų kontekste. Tam pasitelkiamos dinaminės geometrijos sistemos, aktyviai naudojamos pastaruosius porą dešimtmečių. Kai kurie tyrimai rodo, kad statinio brėžinio pakeitimas dinaminio daro teigiamą poveikį mokinių geometrinei vaizduotei, tai savo ruožtu veikia ir mokymąsi [Jon00] [GK08] [GV10] [EY11] [Guv12]. Todėl darbe susipina keletas mokslinių sričių: psichologijos, edukologijos, informatikos teorijos ir informatikos taikymo. Pagrindinė darbo dalis yra informatikos, nes naudojami informatikos konceptai: apdorojama daugiastruktūrė informacija, vizualizuojamos žinios, pasitelkiami informatikos duomenų struktūrizavimo metodai (abstraktieji duomenų tipai) ir jie adaptuojami dalykinei sričiai. Teorinis rezultatas orientuotas į informatiką – sukurtas modelis pritaikant abstrakčius duomenų tipus. Praktinis rezultatas: interaktyvi skaitmeninė mokymo priemonė geometrijai mokyti (1 pav.).



1 pav. Disertacijos probleminė sritis

Analitinėje dalyje pirmiausia analizuojama sritis, kuriai bus taikomi informatikos metodai: konstrukcionistinis geometrijos mokymas ir interaktyvus informacijos vizualizavimas, – labiau akcentuojama edukacinė problema. Toliau nagrinėjami informatikos teorijos metodai, kuriais remiantis kuriama priemonė pritaikyta konstrukcionistiniams geometrijos mokymui, – iškeliamą informatikos problema.

Teorijos skyriuje išplečiamas ir adaptuojamas konstrukcionistinio mokymo *Baytak* modelis ir nusakoma šio darbo vieta jame. Aprašomas ADT modelis, kuriuo grindžiamas interaktyvus geometrijos vizualizavimo modelis. Naudojant heterogeninę algebrą formalizuojama aprašytų ADT sintaksė ir semantika. Aprašomi technologiniai ir naudotojo kriterijai, kurie padeda valdyti interaktyvių mikropasaulių, kuriamų pagal interaktyvus vizualizavimo modelį, kūrimo procesą.

Eksperimento skyriuje pateikiama aprašytų ADT realizacija keturiuose dinaminės geometrijos sistemose ir palyginami realizacijų rezultatai. Aprašomas eksperimentas, kurio tikslas nustatyti pagal modelį sukurtų interaktyvių

mikropasaulių įtaką mokinių gebėjimams. Pateikiami šio eksperimento rezultatai.

1.3. Tyrimo objektas

Informatikos metodų adaptavimas geometrijos interaktyviam vizualizavimui.

1.4. Tikslas

Sudaryti interaktyvaus vizualizavimo modelį geometrijos konstrukcionistiniam mokymui ir mokymuisi, grįstą dinaminės geometrijos sistema.

1.5. Uždaviniai

1. Ištirti informatikos metodų taikymą konstrukcionistiniam geometrijos mokymui.
2. Nustatyti geometrijos interaktyvaus vizualizavimo kriterijus.
3. Pasiūlyti interaktyvaus geometrijos vizualizavimo modelį.
4. Pritaikyti abstrakčiųjų duomenų tipų teorijos principus interaktyviojo vizualizavimo scenarijams aprašyti.
5. Įgyvendinti ir patvirtinti sudarytąjį modelį ir atlikti jo validavimą.

1.6. Ginamieji teiginiai

1. Dinaminė geometrija – efektyvi priemonė, tinkanti geometrijai mokytis naudojant konstrukcionistinius metodus.
2. Sukurtas interaktyvaus vizualizavimo modelis geometrijai mokytis ir mokytis realizuojamas įvairiose dinaminės geometrijos sistemose.
3. Abstrakčiųjų duomenų tipų teorija pritaikoma interaktyvaus vizualizavimo scenarijams aprašyti.
4. Pasiūlytas modelis padeda kurti interaktyvius mikropasaulius geometrijai mokytis atsižvelgiant į DGS technologines galimybes ir matematikos mokymo didaktiką.

1.7. Mokslinis naujumas

Šio mokslinio darbo naujumą galima įžvelgti keliuose srityse:

1. *Informatikoje*: Pritaikyta abstrakčiųjų duomenų tipų teorija interaktyvaus vizualizavimo dinaminės geometrijos sistemoje modelio formalizavimui ir realizavimui. Formalizuota dinaminės geometrijos sistemos objektų ir operacijų sintaksė ir semantika abstrakčiaisiais duomenų tipais. Sukurtas ADT modelis grįstas dinaminės geometrijos sistemos technologinėmis galimybėmis.
2. *Informatikos inžinerijoje*: Pasiūlytas interaktyvaus vizualizavimo modelis interaktyviam geometrijos vizualizavimui. Sudarytas specifikuotų kriterijų modelis interaktyvių mikropasaulių kūrimo proceso stebėjimui ir SMP vertinimui.
3. *Edukologijoje*: Sudarytas konstrukcionistinio matematikos mokymo, naudojant dinaminės geometrijos sistemą, modelis.

1.8. Darbo rezultatų praktinė reikšmė

Praktinė darbo reikšmė įžvelgiama keliais aspektais:

1. Formalizuota dinaminės geometrijos sistemos objektų ir operacijų sintaksė ir semantika abstrakčiaisiais duomenų tipais, kurie galėtų padėti automatizuoti dinaminių brėžinių braižymą.
2. Išplėstas *Baytak* konstrukcionistinis mokymo(si) modelis suteikia gaires mokytojui, kaip efektyviai panaudoti dinamines geometrijos sistemas naudojant konstrukcionistinius metodus.
3. Sudarytas interaktyvaus vizualizavimo kokybės kriterijų modelis padedantis kokybiškai vizualizuoti matematikos kursą.
4. Interaktyvaus geometrijos vizualizavimo dinaminėje geometrijoje modelis pritaikytas vizualizuojant 9–10 klasių plokštumos geometrijos, funkcijų, tiesinių lygčių sistemų, tiesinių ir kvadratinių lygčių kursą.

1.9. Darbo apimtis ir struktūra

Darbą sudaro: terminų ir santrumpų žodynas, 4 pagrindiniai skyriai, išvados, literatūros sąrašas ir priedai. Apimtis be priedų – 137 puslapių, panaudoti 35 paveikslėliai ir 10 lentelių, cituojami 134 literatūros šaltiniai.

1.10. Darbo aprobavimas

Darbas aprobuotas septyniuose recenzuojamuose periodiniuose žurnaluose ir trijose recenzuojamose tarptautinių konferencijų leidiniuose bei septyniuose tarptautiniuose doktorantų konsorciumuose.

Straipsniai recenzuojamuose periodiniuose moksliniuose leidiniuose:

1. Jasutė E., Dagienė V. Implementation of Abstract Data Types in Dynamic Sketches for Learning Geometry. *Informatics in Education*, 2014.
2. Jasutė, E., Dagienė, V. Towards Digital competencies in mathematics education: a model of interactive geometry. *International Journal of Digital Literacy and Digital Competence*, 3(2), 2012, pp. 1–19, ISSN: 1947-3494.
3. Jasutė, E., Dagienė, V. Interaktyviojo geometrijos vizualizavimo modelis naudojant dinaminės geometrijos paradigmą. *Informacijos mokslai*, 56. Vilnius, VU leidykla.. 2011, pp. 31–41, ISSN 1392-0561.
4. Dagienė V. Jasutienė E., Informacinės technologijos matematikai vizualizuoti ir tyrinėti. *Informacijos mokslai*, 41, Vilnius: VU leidykla, 2007, pp. 76–88. ISSN 1392-0561
5. Jasutienė E. Konstruktyvūs matematikos mokymo metodai. *Lietuvos matematikų rinkinys*, spec. nr. 47, 2007, pp. 233–239. ISSN 0132-2818
6. Dagienė, V.; Jasutienė, E.; Jevsikova, T.; Zajančauskienė, L.; Žilinskienė, I. IKT mokymo modelis pradiniam ir specialiajam ugdymui. *Lietuvos matematikos rinkinys*, T. 47, 2007 pp. 161–167. ISSN 0132-2818

7. Jasutienė E., Dagienė V. Matematikos mokymas panaudojant Dinaminę geometriją. *Lietuvos matematikų rinkinys*, spec. nr. 44, 2004, pp. 430–434. ISSN 0132-2818

Straipsniai recenzuojamuose tarptautinių konferencijų leidiniuose:

1. Jasutė, E., Dagienė, V. Constructionist learning of geometry. *Constructionism 2012: Theory, Practice and Impact, Conference proceedings*. August 21–25, 2012, pp. 586–596. The education technology Lab, Athens
2. Dagienė V., Jasutienė E., Jevsikova T. An Approach to Combine Learning Entities to Support Mathematics Curriculum in Schools. In: D. Benzie, M. Iding (Eds.) *Informatics, Mathematics and ICT: a "golden triangle"*. CD proc.: Working Joint IFIP Conference. Northeastern University, Boston, Massachusetts, USA, June 27–29, 2007.
3. Dagienė V., Jasutienė E. Developing Dynamic Sketches for Teaching Mathematics in Basic Schools. *The 17th ICMI (International Commission on Mathematical Instruction) Study: Technology Revised*, Hanoi University of Technology, Vietnam, 2006, pp. 120–127.

Pristatytas darbas tarptautiniuose doktorantų konsorciujuose:

1. I International Doctoral Consortium on Informatics Engineering Education Research: Methodologies, Methods, and Practice, organized by Vilnius University Institute of Mathematics and Informatics on December 1–5, 2010 in Druskininkai, Lithuania.
2. 7th Joint European Summer School on Technology Enhanced Learning (Jtel), May 30th–June 3rd, 2011, Chania, Crete, Greece.
3. II International Doctoral Consortium on Informatics Engineering Education Research: Methodologies, Methods, and Practice, organized by Vilnius University Institute of Mathematics and Informatics on November 30th–December 4th, 2011 in Druskininkai, Lithuania.

4. III International Doctoral Consortium on Informatics Engineering Education Research: Methodologies, Methods, and Practice, organized by Vilnius University Institute of Mathematics and Informatics on December 3–7, 2012 in Druskininkai, Lithuania.
5. Doctoral Consortium on Informatics Education Research, organized by Nicolaus Copernicus University of Torun and Information Processing Society of Poland in cooperation with IFIP TC 3 (Technical Committee – Computers in Education) in World Conference on Computers in Education on July 4, 2013 in Torun, Poland.
6. IV International doctoral consortium on informatics and informatics engineering education research: scope, methods, and validation. December 3–7, 2013, Druskininkai, Lithuania
7. Doctoral consortium on Computer Science Education organized by Uppsala University in 19th ACM Annual Conference on Innovation and Technology in Computer Science Education (ITiSCE), June 23–25, 2014, Uppsala, Sweden.

2. Informatikos metodai konstrukcionistiniam geometrijos mokymui ir mokymuisi

2.1. Įvadas

Sparčiai augant komunikacinių technologijų pramonei, ugdymo ir viešųjų įstaigų kompiuterizacijai požiūris į mokymą turi keistis. Daugelį metų mokymas buvo grindžiamas bihevizorizmo idėjomis ir jų pagrindu naudojamais mokymo metodais, pagrindinis dėmesys skiriamas duomenų kaupimui, paskaitų dėstymui, refleksijai. Lygiagrečiai vystėsi ir kita psichologinė kryptis, kuri keitė požiūrį į mokymą, – kognityvizmas. Šios krypties idėjomis pagrįstas mokymas remiasi informacijos kaupimu, apdorojimu, kūrimu, dėmesys nukreipiamas į mąstymą. Ir bihevizoristiniai, ir kognityviniai metodai mokyme yra tinkami, kai atitinka išskeltus mokymo tikslus [GB94].

Gausėjant informacijos kiekiui, žmogus tiesiog nebepajėgus įsiminti gausybės informacijos, todėl pasaulyje sparčiai pradėtas naudoti J. Piaget psichologija grįstas mokymas, pradėjo vystytis nauja mokymo kryptis – konstruktyvizmas, kurio pagrindinis principas yra patirtimi grįsto žinojimo kūrimas, kuriame besimokantysis aktyviai dalyvauja [Hub00]. Informacinės komunikacinės technologijos (IKT) vien savo paskirtimi suteikia įvairias mokymo(si), bendravimo ir bendradarbiavimo priemones, padedančias įgyvendinti konstruktyvistinio mokymo idėjas. Todėl naujos tendencijos neišvengiamai pradeda skverbtis ir į matematikos mokymą: kuriamos ir diegiamos į ugdymo procesą kompiuterinės programos, skatinančios besimokantį atrasti, tirti, analizuoti ir įrodyti matematinės tiesas. Mokymasis per patirtį tampa vienu iš pagrindinių matematikos mokymo principų [Pap95]. Toliau formuojamos kitos, nekonstruktyvistinės teorijos, kurios, pripažindamos žinių konstravimo ypatumus, ieško konkrečių būdų mokymuisi pagerinti. Viena tokių pedagoginių teorijų yra konstrukcionizmas [Pap91].

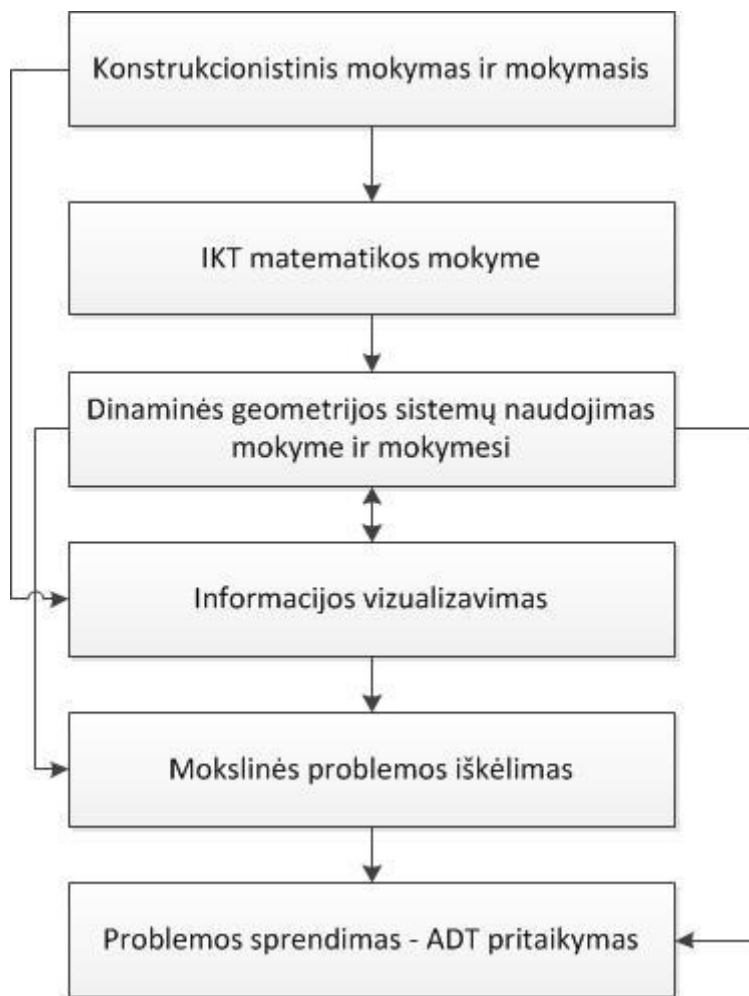
Naujosios mokymo metodų kryptys sparčiai skverbiasi ir į Lietuvos švietimą. Atkreiptas dėmesys į IKT diegimą į ugdymo procesą: parašytos IKT diegimo strategijos, perrašomos bendrosios ugdymo programos, perkamos ir diegiamos kompiuterinės programos į ugdymo procesą ir t.t.

Matematikai mokyti ir mokytis nupirkta, lokalizuota ir išdalinta visoms Lietuvos mokykloms kompiuterinė programa „Dinaminė geometrija“. Iškilę šios programos naudojimo sunkumai padėjo atrasti naują IKT diegimo etapą – interaktyvių mikropasaulių rinkinių kūrimą [DJ06]. Tačiau paruošti interaktyvių mikropasaulių rinkiniai nesumažina dinaminės geometrijos sistemos naudojimo mokyme(si) efektyvumo. Jie palengvina mokytojams sistemos naudojimą, suteikia naujų idėjų mokymui bei suteikia galimybes mokiniui mokytis be mokytojo pagalbos [DJ04].

Dinaminė geometrija yra lanksti mokymo sistema: naudojama įvairiame matematiname kontekste; integruojama į Lietuvos matematikos ugdymo programą; tinka taikant pamokose ir individualiai naudojant įvairius mokymo ir

mokymosi metodus. Be to, priemonės naudojimas, pagrįstas moksliniais tyrimais įvairiose pasaulio šalyse, lavina geometrinius gebėjimus, vizualinį ir matematinį mąstymą. Dėl šių priežasčių darbe pasirinkta dinaminės geometrijos sistema.

Darbo tarpdiscipliniškumas reikalauja atlikti tyrimą keliomis kryptimis. 2 paveiksle pateikiamas literatūros apžvalgos kelias.



2 pav. Literatūros apžvalgos schema

Šio skyriaus tikslas – iškelti mokslinę problemą ir numatyti jos sprendimo kelius analizuojant mokslinę literatūrą. Todėl atskleidžiamas edukologijos ir informatikos metodų ryšys ištiriant konstrukcionistinio mokymo ir mokymosi aspektus, įvertinant konstrukcionistinių skaitmeninių priemonių (dinaminės geometrijos sistemų) galimybes, pagrindžiančias jų naudojimo efektyvumą mokant matematikos, ir apžvelgiami informatikos metodai, kurie gali padėti

išspręsti iškeltą mokslinę problemą, – kaip sukurti interaktyvaus vizualizavimo modelį efektyviam geometrijos mokymui ir mokymuisi.

2.2. Konstrukcionistinio mokymo ir mokymosi samprata

Visais laikais mokymą ir mokymąsi veikė įvairios psichologinės srovės. Daugelį metų mokymas ir mokymasis buvo paremtas biheviorizmo idėja ir koncentruojamas į žinių perdavimą, dėstymo metodą ir atsimintų žinių tikrinimą. Tuo pačiu metu buvo plėtojamos kitos psichologinės srovės, tokios kaip kognityvinė teorija, kuri pakeitė pažiūrą į mokymą ir mokymąsi. Mokymo idėjos, grįstos informacijos rinkimu, apdorojimu, atradimu, yra nukreipiamos į mąstymą. Mokytojo ir mokinio vaidmuo abiejose kryptyse skiriasi: pirmoje mokytojas yra instruktorius ir žinių perdavėjas, o mokinys yra informacijos priėmėjas; antroje mokytojas yra konsultantas, o mokinys yra informacijos rinkėjas, apdorotojas ir sudarytojas [Hub00]. Šios dvi pagrindinės srovės turėjo įtakos matematikos mokymo idėjų formavimuisi.

Daugėjant informacijos kiekiui, žmogus tiesiog nepajėgus atsiminti visos informacijos, todėl mokant pradėta naudoti Jean Piaget psichologijos kryptis – kognityvinis konstruktyvizmas.

Kognityvinis konstruktyvizmas yra visų kitų konstruktyvizmo (socialinio, kultūrinio, kritinio, radikalaus) srovių pagrindas. Jos principą nusakė Piaget – konstruktyvistinio mąstymo pradininkas. Pagrindinė idėja yra ta, kad besimokantis žinias konstruoja aktyviai, o ne pasyviai gauna iš aplinkos [Pia54].

J. Piaget akcentuoja žinių konstravimą iš patirties: vaikui augant ir mokantis konstruojamos vis stabilesnės ir sudėtingesnės žinių (mentalinės) schemas, kuriomis naudodamasis vaikas interpretuoja pasaulį ir išplečia savo eksperimentų lauko ribas [Pia54].

J. Piaget konstruktyvizmą pateikia biologiniu – psichologiniu požiūriu. Jis išskiria kognityvinius procesus, vykstančius vaiko sąmonėje [Pia54]:

- asimiliacija – procesas, kai naudojant schemas patirtis padaroma prasminga; ji leidžia turimą schemą priderinti prie aplinkos;

- akomodacija – schemas keitimas, siekiant įtraukti naują informaciją; ji leidžia pakeisti schemą, kad galėtų valdyti, tvarkyti naują situaciją aplinkoje.

Kiekvieną kartą, kai schema modifikuojama, ji užtikrina geresnę pusiausvyrą tarp aplinkos ir vaiko turimo aplinkos supratimo. Pusiausvyros siekimas – asimiliacijos ir akomodacijos subalansavimas, lygsvaros pasiekimas.

Konstruktivizmo teorija paaiškina, kaip žmonės mokosi, tačiau nesiūlo konkrečių pedagoginių priemonių ir metodų, kaip tokį mokymąsi efektyviai organizuoti [Nos10]. Todėl formuojasi kitos, nekonstruktivistinės teorijos, kurios pripažindamos žinių konstravimo ypatumus ieško konkrečių būdų mokymuisi pagerinti. Viena tokių pedagoginių teorijų yra konstrukcionizmas.

Konstrukcionizmo teoriją pasiūlė S. Papert, žymus matematikas, edukologas, informatikas, vienas iš dirbtinio intelekto teorijos pradininkų, Logo programavimo kalbos autorius. Anot S. Papert [Pap91], mokymasis geriausiai vyksta tada, kai besimokantysis aktyviai kuria išorinio pasaulio objektus (o ne tik žinių schemas, kaip mentalinius objektus). Konstrukcionistinį mokymąsi gerai apibūdina frazė „mokymasis kuriant“ (angl. learning by making).

S. Papert apie konstrukcionizmą ir jo santykį su konstruktivizmu rašo:

„Konstrukcionizmas turi tą patį požiūrį į mokymąsi kaip konstruktivizmas (žinių schemų konstravimas), tačiau papildomai remiasi idėja, kad tai geriausiai vyksta kontekste, kai besimokantysis yra sąmoningai įsitraukęs į konstravimą tam tikro objekto, ar tai būtų smėlio pilis paplūdimyje, ar visatos teorija“ [Pap91].

„Žodis konstrukcionizmas reiškia mnemonika dviem šio sumanymo pagrindo mokslų mokymo teorijos aspektais. Iš konstruktivistinių teorijų mes paimame rekonstrukciją vietoj žinių perdavimo proceso. Tada mes praplečiame medžiagos manipuliavimo idėją sakydami, kad mokymasis yra efektyvesnis, kai mokinio veiklos dalis yra prasmingų dalykų konstravimas remiantis patirtimi.“

Kitaip galima pasakyti, kad konstrukcionizmas yra konstruktivizmas, kai mokinsy pasineria į kažkokio objekto konstravimą.

Seymour Papert [Pap93] teigia, kad yra svarbu, kaip vaikas mokosi tam tikrame kontekste, naudodamas savo arba kito kurtus objektus. Jis koncentruojasi į informacinių ir komunikacinių technologijų vaidmenį žmogaus mokymuisi. Pagrindinė konstrukcionizmo idėja yra mokytis tikslingos informacijos skirtingais metodais ir keliais, kad būtų galima atrinkti ir įsisavinti žinias ir efektyviai jas naudojant kurti naujas. Vėlesniuose S. Papert darbuose [Pap99] išskirtos aštuonios konstrukcionistinio mokymosi idėjos: (1) mokymasis veikiant – mokinys mokosi darydamas praktinius darbus; (2) technologija yra konstravimo medžiaga – mokymasis gali būti įdomesnis; (3) įsitraukimas – pamėgti tai, ką darai; (4) mokytis mokytis – mokiniai turi prisiimti atsakomybę už savo mokymąsi; (5) laiko planavimas – mokinys turi išmokyti dirbdamas planuoti savo laiką; (6) mokytis iš klaidų – klysti nėra nieko blogo; (7) mokytis savo pavyzdžiu – leisti mokiniui matyti mokytojo mokymosi pastangas; (8) skaitmeninis pasaulis – taikyti informacines technologijas mokantis visko.

Konstrukcionistinių idėjų kūrėjas E. K. Askerman [Ask10] išskiria šiuos pagrindinius konstrukcionistinio mokymosi bruožus:

- vaikai patys yra savo pažinimo priemonių ir išorinių realybių kūrėjai;
- žinios ir pasaulis yra konstruojami ir interpretuojami naudojant tam tikras priemones ir simbolius;
- pagrindinis dėmesys skiriamas tam, kaip vaikai mokosi tam tikrame kontekste naudodami savo ir kitų sukurtus objektus;
- koncentruojamasi ties IKT vaidmeniu žmonių mokymesi.

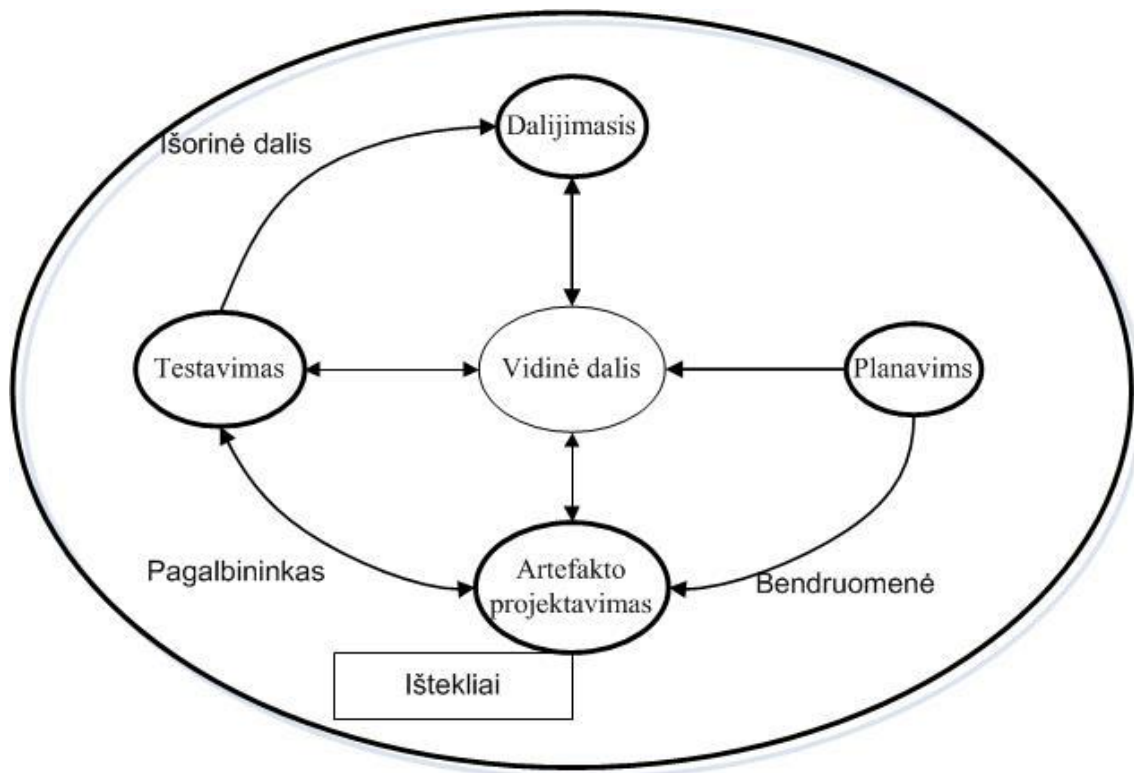
Žymus konstrukcionizmo šalininkas R. Noss pateikia konstrukcionistinio mokymosi bruožus: dalijimasis, personalizavimas, padaryti neišmokstamą išmokstamu, padaryti nematomą matomu ir meistriškumas[Nos10].

Konstrukcionistinis mokymas ir mokymasis galimas įvairiose disciplinose, ne tik informatikoje: algoritmus konstruojant Logo ar Scratch, robotus programuojant, bet ir mokant muzikos, šokio. Tokių pavyzdžių aprašymų galima

labai daug rasti konstrukcionistų (anksčiau Logo) konferencijų pranešimuose ir straipsniuose [CTP12] [CC10] [EYI07].

Pastaraisiais metais sustiprėjęs domėjimas konstrukcionistiniu mokymusi kuriant. Tokiu būdu stengiamasi motyvuoti ir įtraukti mokinius į aktyvų mokymosi procesą [Nav13] [MCN13]. Konstrukcionizmo idėjomis remiasi A. Baytak konstrukcionistinio mokymosi modelis kompiuterinių žaidimų kūrimui mokytis [Bay11]. Žaidimų kūrimas mokantis remiantis *Baytak* modeliu pradėtas taikyti įvairiuose mokomuosiuose dalykuose [APG12].

Modelį sudaro dvi dalys: *vidinė* – mokymasis yra aktyvi veikla, kai mokinys konstruoja žinias remdamasis savo patirtimi, ir *išorinė*, kuri yra pagrįsta tyrimais, patvirtinančiais, kad mokiniai mokosi geriau, kai jie konstruoja artefaktus, kuriais gali vėliau pasidalinti su kitais. A. Baytak teigia, kad *vidinis* žingsnis remiasi konstruktyvizmu, o *išorinis* konstrukcionizmu. Modelyje išskiriami keturi etapai: planavimas, projektavimas, testavimas ir dalijimasis. Visas procesas vyksta cikliška (3 pav.).



3 pav. Konstrukcionistinio mokymosi modelis pagal A. Baytak

Planavimas. Vidinės dalies žingsnis, kai mokinys išsikelia tikslus projektuodamas žaidimą. Priklausomai nuo jo projekto idėjų, jis gali turėti skirtingus projektavimo proceso planus. Didesnė šio žingsnio dalis vyksta remiantis mokinio patirtimi, kol mokinys paprašomas išreikšti savo planus naudojantis užrašais ar kita rašytine informacija. Planavimas grindžiamas konstrukcionizmo principais. Mokinys įsitraukia į formalų ar neformalų planavimą, bando sudėtingą žaidimo algoritmą padalinti į logines dalis taip jį supaprastindamas. [Bay11].

Artefakto projektavimas. Viena iš konstrukcionizmo savybių yra artefakto programavimas arba projektavimas. Projektuodami artefaktus, kuriais vėliau dalinsis su kitais, mokiniai parodo skirtingus mąstymo ir mokymosi stilius, ir tai yra vienas iš pagrindinių konstrukcionizmo teorijos principų. Remiantis S. Papert [Pap91], norint, kad mokinys supratus, jis turi sukurti, sukonstruoti ir padaryti.

Testavimas. Baytak išskiria tris konstrukcionistinės mokymosi aplinkos testavimo tipus: derinimą, testavimą porose ir vartotojų testavimą. Testuodami savo projektą, mokiniai gali surasti problemą ir pataisyti artefaktą. Testuodami poromis mokiniai ne tik tikrina artefaktą, bet ir bendradarbiauja. Tokiu būdu žaidimo sąsają gali padaryti labiau patrauklią, keisti ir taisyti žaidimą remdamiesi savo stebėjimais [Bay11]. Po testavimo mokiniai gauna pastabų ir išgirsta kitų pastebėjimų – gauna grįžtamąjį ryšį. Pirmiausia, vartotojas išreiškia nuomonę apie turinį, kurį projektuotojas pateikia žaidime. Be to, vartotojas mato ir projektuotojo žinias, susijusias su konkrečiu artefaktu. Baytak [Bay11] pateikia įvairių mokslininkų tyrimų pavyzdžių, kurie rodo, kad dauguma konstrukcionistinio mokymosi tyrimų vykdoma tokiu būdu, kai kažkas bendruomenėje nagrinėja, bando ir vertina artefaktą ir jo turinį. Kitas grįžtamojo ryšio kokybės vienetas konstrukcionistinio mokymosi aplinkoje yra vartotojo įtraukimas, dar vadinamas dalijimusi. Skirtumas nuo įprasto grįžtamojo ryšio formų yra tas, kad mokinys projektuoja savo artefaktą tikslinei grupei. Vertinant tokį artefaktą ir jo turinį, grupės refleksija yra ne tik nagrinėti, bet ir gauti iš to kokios nors naudos. Todėl projektuotojas turi atsižvelgti į visus projektavimo kriterijus, tokius kaip panaudojamumas, prieinamumas ir kt.

Dalijimasis ir bendradarbiavimas. Konstrukcionizmo teorijoje į mokymąsi žvelgiama kaip į aktyvų procesą, kai mokinys konstruoja žinias remdamasis savo patirtimi. Sukonstravęs artefaktą mokinys dalijasi juo su kitais bendruomenės nariais (mokiniais). Dalijimas leidžia mokiniui gauti grįžtamąjį ryšį, perprojektuoti artefaktą ir perkonstruoti savo žinias [Bayl1].

Šio darbo teorinėje dalyje pateikiamas išplėstas *Baytak* modelis, jis pritaikomas konstrukcionistiniam geometrijos mokymui ir mokymuisi naudojant dinaminės geometrijos sistemą.

2.3. Informacinės technologijos matematikoje

Matematika – vienas sunkesnių dalykų mokykloje. Priežasčių daug, viena pagrindinių – formalizuota matematinė kalba, kuri logiška ir graži mokslininkui, tačiau sunkiai suvokiama vaikų. Mokslininkai, tyrinėjantys matematikos mokymo būdus, atkreipia dėmesį į tai, kaip mokyklose dažniausia mokoma matematikos – paprastai perteikiamos matematikos žinios, informacija, aiškinama, pagrindžiama formaliais metodais, dar parodoma – iš esmės mokinio veikla būna treniruojamojo pobūdžio, vyrauja bihevioristinis mokymo būdas [SK03].

S. Papert siūlo konstrukcionistinius matematikos mokymo ir mokymosi metodus [Pap93]:

„Atsižvelgus į mokyklinį palikimą, galima matyti du matematikos mokymo kelius. Einant tradiciniu keliu, mokyklinė matematika priimama kaip aksioma ir beviltiškai bandoma ieškoti jos mokymo metodų. Kai kurie mokytojai tam naudoja kompiuterius. Paradoksas, tačiau mokymui naudojamas kompiuteris tampa priemone prievarta kišti nesuvirškinamą medžiagą <...> Pagrindinė pedagoginė problema mums yra ne kaip išmokyti esamos mokyklinės matematikos, o kaip pertvarkyti matematiką arba – bendriau – kaip pertvarkyti žinias, kad nereikėtų didelių pastangų jų išmokyti.“

Kompiuteris gali suteikti mokiniui puikią tyrinėjimo, konstravimo erdvę – matematikos mokymosi mikropasaulius. Norint tai padaryti, pagrindinį dėmesį

reikia skirti: 1) mokytojams rengti mokant naudotis konstrukcionistine metodika; 2) IKT priemonėms, tinkančioms matematikai mokytis konstrukcionistiniu metodu, kurti. Abu išvardyti punktai svarbūs. Pirmajam uždaviniui įgyvendinti reikia daug laiko, nepakanka tam skirti dėmesį tik mokytojų kvalifikacijos tobulinimo kursuose – reikia iš esmės keisti mokymą pedagogus rengiančiose aukštosiose mokyklose, nesitenkinti tik geru teoriniu lygmeniu. Antrajam uždaviniui įgyvendinti būtina rengti konstrukcionistiniais metodais grįstas priemones ir išmokyti mokytojus jomis tinkamai naudotis.

IKT veikiamas keičiasi mokymas ir mokymasis mokyklose. Pastebima, kad naudojant IKT gerėja mokinių matematiniai įgūdžiai ir matematinė vaizduotė [BWP92].

Lietuvoje nepakankamai dėmesio skiriama matematikai mokytis naudojant IKT, nors paskutinius 15 metų ši sritis yra prioritetinga. Pirmąsias nedideles matematikos mokomąsias kompiuterių programas (treniruoklius) parengė mokytojai [DT95] [A95]. Vėliau atsirado dar keletas analogiškų, bet beveik tuo viskas ir baigėsi ir keletą metų Lietuvos mokyklose nepasirodė IT pritaikytų matematikai. Vienas didesnių darbų taikant IT matematikai mokytis nuveiktas 2001 metais, kai išanalizavus tuomet labiausiai naudojamas universalias matematikos mokymo kompiuterines programas buvo pasirinkta universali kompiuterinė programa „Geometer’s Sketchpad“ (<http://www.dynamicgeometry.com/>), lokalizuota, licencijomis aprūpintos visos bendrojo lavinimo mokyklos (lokalizuota programa pavadinta „Dinamine geometrija“). Programos lokalizavimas, mokyklų aprūpinimas licencijomis – būtini pradiniai darbai. Tačiau to nepakanka. Toliau prasideda programos diegimas – ilga, daug triūso reikalaujanti veikla. Paprastai išskiriami du programų diegimo metodologiniai etapai: 1) mokytojų mokymas (t. y. kursai mokytojams, jų supažindinimas su programos galimybėmis), 2) mokymo metodinės medžiagos ir taikomųjų pavyzdžių parengimas. Analizuojant „Geometer’s Sketchpad“ diegimą į ugdymą buvo surastas ir suformuotas papildomas metodologinis etapas – ne tik mokomi mokytojai, rengiama metodinė medžiaga, bet ir sistemingai peržiūrimos matematikos mokymo bendrosios

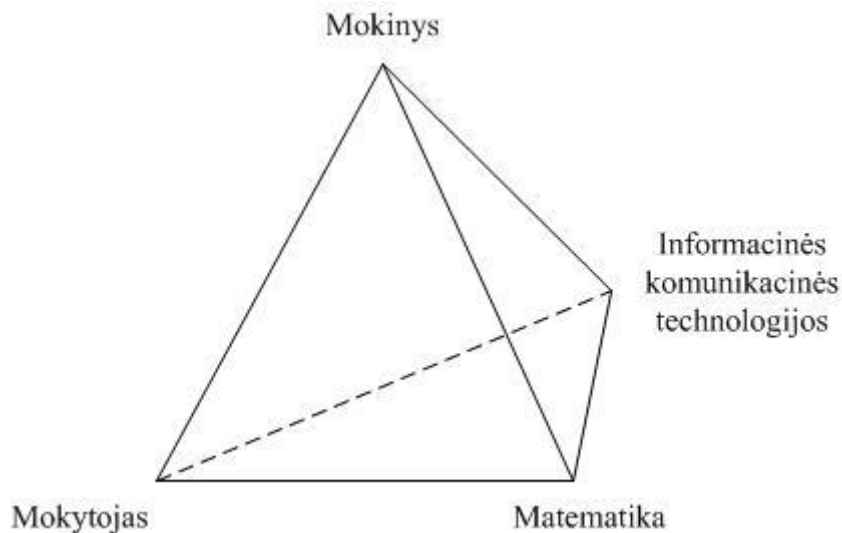
programos (mokymosi turinys), atrenkamos tinkamos kompiuterizuoti temos ir joms, naudojantis „Geometer’s Sketchpad“ priemonėmis, kuriami dinaminių brėžinių rinkiniai.

Pastaraisiais metais IT diegimas matematikoje ėmė sparčiai plėstis. Pradėta domėtis ir kurti mokymosi objektus, mokymosi svetaines. Išsiskyrė dvi kryptys: vieni bandė laikytis nuoseklumo idėjos ir pateikia mokymosi priemones integruotas į visą matematikos kurso koncentrą [JSV03] [JSV05]; kiti palaikė atskirų mokymosi objektų idėją [Kub12] [MOG10].

Šiame darbe nagrinėjami metodai, kaip nuosekliai vizualizuoti pagrindinės ir vidurinės mokyklos geometrijos kursą interaktyviais pavyzdžiais, kuriais mokytojui būtų patogu iliustruoti kiekvieną pamoką, o mokinys galėtų nenutrūkstamai ir nuosekliai nagrinėti geometrijos temas.

2.4. Interaktyvus vizualizavimas dinaminės geometrijos sistemoje

Naudojant informacines technologijas – geometrijos vizualines priemones – lengvėja sudėtingų uždavinių sprendimas, juos galima pateikti mokiniams. Vizualizuojant geometrinius konceptus, aksiomas ir teoremas galima lavinti mokinių vizualųjį mąstymą, vaizduotę, padėti susikaupti ties uždavinio sprendimu. Dėl to keičiasi matematikos edukologų požiūris į geometrijos, statistikos, skaičiavimų, diferencialinių lygčių, funkcijų mokymą [HHK08]. Vizualizuojant matematinės idėjas neretai sukuriamos naujos geometrijos vizualizavimo priemonės, skirtos mokinių mokymosi efektyvumui palaikyti, geometriniams uždaviniams spręsti [Tal98]. Keičiasi požiūris į matematikos didaktiką – IKT tampa svaria sudėtine didaktikos dalimi. Nuo H. Steinbring pateikto „didaktinio trikampio“ [Ste05], kur siejami trys pagrindiniai elementai mokins – mokytojas – matematika, pereinama prie „didaktinio tetraedro“, kur pridedamas dar vienas elementas (informacinės komunikacinės technologijos) ir trikampis tampa tetraedru su keturiais elementais: mokytojas – mokins – matematika – informacinės komunikacinės technologijos, o kiekviena „didaktinio tetraedro“ siena vaizduoja atskirus sąryšius tarp mokytojo, mokinio, matematinių žinių ir technologijos [OMH10] (4 pav.).



4 pav. Didaktinis tetraedras

Mokslinėje literatūroje su dinaminės geometrijos sistemos (DGS) sąvoka susiduriame dviejose mokslinėse sferose: edukologijoje ir informatikoje. Edukaciniuose tyrimuose aiškinamasi, ar ir kaip dinaminės geometrijos sistemos padeda mokytis ir suprasti matematiką [Yan13] [One13] [LL13] [Guv12] [EY11] [AC10] [GK08]. Tuo tarpu informatikoje nagrinėjami dinaminės geometrijos aplinkos kūrimo problemų sprendimų būdai bandant padaryti dinaminės geometrijos sistemą tikslesnę, efektyvesnę ir patrauklesnę vartotojui [LBM13] [Den13] [FAS10] [EBA10] [Jan10]. Tačiau ryšiais tarp edukologijos ir dinaminės geometrijos sistemų naudojimo domisi tik keletas pasaulio mokslininkų [WYY12] [SK11] [JN02] [TJS09] [KBDKLM09]. Tyrimai šioje srityje taip pat išsiskiria dviem kryptimis: vieni tiria, kodėl mokytojai nenaudoja dinaminės geometrijos sistemų, nors pastarosios efektyvumas pagrindžiamas tyrimais, atliekamais įvairiose pasaulio šalyse [SK11] [HHL09]; kiti stengiasi automatizuoti dinaminės geometrijos sistemas, kai pagal vartotojo pateiktas instrukcijas nubraižomas dinaminis brėžinys ar pateikiamas teoremos įrodymas dinaminės geometrijos sistemoje [WYY12] [Jan10]. Pastarieji tyrimai atliekami su paprastais pradinei mokyklai skirtais brėžiniais ir kol kas sunkiai pritaikoma aukštesnio lygio geometrijoje.

Kadangi darbas yra tarpdisciplininis, tai norint gauti kokybišką rezultatą reikia apžvelgti sritį, kurioje bus taikomas galutinis rezultatas, iškelti kriterijus ir

nustatyti priemones bei metodus, kaip šie kriterijai bus įgyvendinti. Šiame skyriuje pirmiausia išsiaiškinama interaktyvaus vizualizavimo, dinaminės geometrijos samprata, dinaminės geometrijos galimybės, pagrindžiamas jos naudojimo efektyvumas mokinių mokymesi bei atskleidžiama dinaminės geometrijos problematika.

2.4.1. Dinaminės geometrijos sistemos samprata

Mokslinėje literatūroje randame įvairių dinaminės geometrijos sistemos apibrėžčių. Bendriausią dinaminės geometrijos apibūdinimą pateikia vienas iš „Geometer’s Sketchpad“ kūrėjų Jackiw [Jac04] – matematinė programa pagrįsta matematinių priklausomybių ir sąryšių sistema, kuri atitinkamai reaguoja į nenutrūkstamus nepriklausomų parametrų kitimus. Dažniausiai dinaminė geometrija apibūdinama vartotojui suteikiamomis jos naudojimo galimybėmis – tiesiogiai manipuluoti geometriniais objektais ir nusakyti bei grafiškai paaiškinti ryšius tarp objektų [Gor96]. Dinaminė geometrija – tai bet kokia technologinė priemonė, kuri suteikia vartotojui pagrindinių Euklido geometrijos objektų kūrimo ir valdymo pele arba klaviatūra priemones. Sukonstruoti elementai gali būti transformuojami tempiant bet kurį iš konstrukcijos laisvųjų elementų [Oli00]. Bendroju atveju dinaminę geometriją galima apibūdinti kaip priemonę arba priemonių visumą, kuri pakeičia braižymą pieštuku, liniuote ir skriestuvu popieriaus lape į galimybę tai daryti greičiau, tiksliau ir aprėpiant visą problemų aibę (transformuojant konstrukcijas) kompiuterio ekrane [FJS08]. Apžvelgę įvairius dinaminės geometrijos apibūdinimus apibrėžiame *dinaminę geometriją kaip technologinę priemonę, kuri suteikia vartotojui galimybę tiesiogiai konstruoti susietus geometrinius objektus, matematinius reiškinius, juos transformuoti ir tirti realiu laiku naudojant įvairias technologines ir kompiuterines valdymo priemones išlaikant ryšius tarp konstrukcijos objektų.*

Dinaminės geometrijos vizualizavimo galimybės, lyginant su įprastu statiniu vizualizavimu, yra platesnės: geometriniai objektai gali būti interaktyviai tempiami ir sujungiami ar padalijami, statiniai objektai paverčiami interaktyviais

iš karto ekrane; be to, vienas brėžinys gali vaizduoti visą geometrinių objektų klasę [SCH02].

Matematinų dinaminų brėžinių kūrimas dinaminėje geometrijoje reikalauja įdėti daugiau pastangų nei popieriaus lape braižant statinius brėžinius, tačiau po to galima tiksliai tyrinėti, panaudoti daugelį kartų tą patį brėžinį [Pre08] [Cas00].

Norint sukurti dinaminį brėžinį reikia žinoti pagrindinių figūrų konstravimo principus (pavyzdžiui, kaip skriestuvu ir liniuote konstruojamas lygiakraštis trikampis, kvadratas, rombas, kaip rasti apie trikampį apibrėžto apskritimo centrą ir pan.) [JS03]. Prieš konstruojant brėžinį reikia apmąstyti, kaip konstruoti geometrinę figūrą, kad išliktų jos pagrindinės savybės, kas turi būti brėžinyje dinamiška (taškas, atkarpa, parametras ir kt.), kad brėžinys prasmingai atskleistų kūrėjo mintį, kada ir kaip panaudoti animaciją, ką reikia paslėpti, ką rodyti ir pan. Tokiu būdu braižydamas dinaminį brėžinį mokinys ugdo savo matematinio modeliavimo įgūdžius, pritaiko matematinės žinias. Dinamiškai keisdamas brėžinį mokinys įgyja žinių, formuluoja išvadas, jas pagrindžia, apibendrina [CG97].

Pagrindinės dinaminės geometrijos galimybės: braižyti ir konstruoti Euklido geometrijos brėžinius, transformuoti (pastumti, pasukti, ištempti arba atspindėti) geometrinius objektus, sukurtais mygtukais animuoti brėžinius, braižyti funkcijų grafikus Dekarto ir polinėse koordinatėse, užrašyti tiesių ir apskritimų lygtis, išmatuoti geometrinių objektų dydžius pasirinktais matavimo vienetais, su matavimais atlikti įvairias aritmetines operacijas; brėžinius papildyti užrašais (antraštėmis, svarbiomis pastabomis, formuluotėmis ir pan.), sudaryti matematinius reiškinius, kurti scenarijus, kuriais būtų automatiškai aprašoma brėžinio kūrimo seka [ST03]. Svarbiausia dinaminės geometrijos savybė ta, kad tikslingai sukonstruotas geometrinės figūras galima transformuoti palaikant sukonstruotus geometrinius ryšius [GJ96]. Keičiant geometrinių objektų dydžius matavimai taip pat kinta. Šios galimybės sudaro sąlygas geometrijos mokymosi aplinkai kurti.

2.4.2. Dinaminė geometrija konstrukcionistiniam mokymui

Įvairios psichologinės srovės ir modernių technologijų plėtojimas daro įtaką naujų technologinių priemonių, leidžiančių taikyti aktyvius mokymo ir mokymosi metodus, kūrimui. Kaip jau minėta 2.2. skyriuje, pirmasis taikyti informacines technologijas konstrukcionistiniam mokymui pradėjo S. Papert. Kai kurios vėlesnės technologijos mokymuisi buvo kuriamos remiantis S. Papert idėja ir metodologijomis [HB01]. Viena iš tokių programų yra dinaminė geometrija.

Dinaminės geometrijos kūrimas paremtas didaktine idėja konstruoti mokinio žinias atrandant geometrinius objektus ir jų ryšius [Jac04]. Paskelbta nemažai tyrimų, kuriais įrodoma dinaminės geometrijos įtaka dedukciniam mąstymui, matematiniam mąstymui, matematinei vaizduotei ir geometriniam suvokimui [Jon00] [PK08] [Agu09]. Mokymasis konstruojant yra pagrindinis dinaminės geometrijos principas ir gali įgyvendinti visas S. Papert konstrukcionistines mokymosi idėjas, ypač mokymąsi kuriant – pagrindinę dinaminės geometrijos programos idėją.

Esminė dinaminės geometrijos idėja yra konstrukcionistinė: mokiniai mokosi remdamiesi savo patirtimi ir gali dalintis su kitais. Dinaminė geometrija sukonstruota taip, kad mokinys įtraukiamas į projektavimą, analizavimą ir veikimą.

2.4.3. Dinaminės geometrijos sistema ugdymo programų kontekste

Taikant informacines technologijas išvelgiamos naujos galimybės matematiniam mąstymui ugdyti, ypač kreipiamas dėmesys geometriniam vizualizavimui tobulinti naudojant grafines dinaminės geometrijos programas. Kai kurie mokslininkai mano, kad matematikos mokymas naudojant dinamines kompiuterines programas tapo toks efektyvus, jog galima pereiti nuo statinių algebrinių struktūrų prie interaktyvių jų interpretacijų, ryšių tarp objektų nagrinėjimo [Gal06] [MHK08]. Dažniausiai dinaminės geometrijos efektyvumas pagrindžiamas sprendžiant atskiras matematikos problemas [Oli00] [Pat08]

[Agu09] [Sch03]. Tačiau beveik visiškai neskiriama dėmesio nuosekliam matematikos turiniui interaktyviai vizualizuoti.

Dinaminė geometrija padeda įgyvendinti Ugdymo programose [UPB08] [UPB11] keliamus tikslus ir uždavinius. Kodėl taip galima teigti? Iš vienos pusės, šios kompiuterinės programos turi daug patogių galimybių įvairiems matematikos uždaviniams spręsti. Tai galima įrodyti pasitelkus daugybę išleistų pasaulyje knygų, kuriose pateikiami pavyzdžiai, realizuoti vienoje ar kitoje dinaminėje geometrijoje [Vil13] [Ben03] [Ser02] [KS97]. Iš kitos pusės, šios priemonės leidžia atskleisti mokinių vaizduotę, leidžia giliau suprasti sąvokas, savybes, įrodymus ir tarpteminį matematikos integravimą [JD12] [Nag10] [SJH10] [GK08] [RHD08] [Rut08] [GV03] [HJ98]. Šie gebėjimai išskiriami Lietuvos matematikos bendrosiose ugdymo programose [UPB08] [UPB11].

Nagrinėjant Bendrąsias matematikos programas išryškėja svarbiausi matematikai keliamų uždavinių aspektai:

1) žinių

„mokinių įgytos žinios turėtų būti gerai suprastos, leidžiančios kiekvienam iš jų orientuotis kasdieniame gyvenime ir sudarytų tvirtą pagrindą sėkmingai mokytis tikslųjų, technologijų ar kitų dalykų“ [UPB08]

2) gebėjimų

„mokiniai turėtų gebėti bendrauti ir bendradarbiauti vartodami matematikos sąvokas ir taikydami matematinis informacijos užrašymo būdus, išmokti naudotis matematikos žodynu ir naudoti matematikos simbolius, perimti matematinio mąstymo ir veiklos elementus, gebėti matematiškai tirti nesudėtingas gyvenimo problemas, pagal savo intelektines galias spręsti mokyklinius matematikos uždavinius, suprasti ir naudoti vidinius ir išorinius matematikos ryšius, gebėti mokytis matematikos“ [UPB08]

3) nuostatų

„mokiniai turėtų suvokti istorinę matematikos raidą, įgyti supratimą apie modernias matematikos sritis, plėtojančias kompiuteriją, gamtos ir socialinius

mokslus. Jie turėtų pajusti matematikos svarbą visuomenės gyvenime, jos objektyvumą, pritaikomumą įvairiose žmonių praktinės veiklos srityse. Svarbu padėti mokiniams susikurti motyvus siekti matematikos žinių, išsiugdyti atvirumą, atkaklumą, teigiamą nusiteikimą nuolatinės kaitos atžvilgiu, valingumą, norą, atsakomybės jausmą ir poreikį mokytis, domėtis tiksliaisiais, technologijų ar kitais dalykais“ [UP08].

Dinaminės geometrijos naudojimas pamokose padeda įgyti matematikos žinių, plėtoti įgūdžius, susijusius su atskiromis matematikos sritimis, ugdyti bendruosius matematikos gebėjimus [UP08]. Labai svarbu, kad naudojantis šia programa darbas klasėje gali būti individualizuojamas pagal mokinių pajėgumą.

Mokiniai noriai dirba kompiuteriu, konstruoja, modeliuoja, programuoja, žaidžia. Konstruodamas arba tirdamas iš anksto parengtus brėžinius mokinys lavina savo matematinius gebėjimus, gilina matematinės žinias. Naudojant lokalizuotą programą, vartojamos taisyklingos lietuviškos matematinės sąvokos ir terminai, kas labai svarbu ugdant bendrąją mokinio kultūrą [UPB08] [UPB11].

Dinaminė geometrija tiesiogiai padeda įgyvendinti dalį šių uždavinių. Naudojant dinaminę geometriją pastebimas įvairių matematikos gebėjimų lavinimas [Nag10] [SJH10] [GK08]. Pavyzdžiui, nagrinėjant vieną brėžinį įgyjamos, įtvirtinamos matematinės žinios ir atrandami bei pagrindžiami matematiniai dėsningumai, kaupiamos, apibendrinamos žinios.

Matematikos žinias mokiniui perteikia mokytojas, jos įgyjamos skaitant knygas, atliekant užduotis, jas gali atrasti patys mokiniai. Dinaminė geometrija padeda tai įtvirtinti, atrasti, netgi gali būti panaudota matematiniams įrodymams parodyti [HJ98].

Prasmingai paruoštų dinaminių brėžinių tyrinėjimai, eksperimentavimai įvairiose matematinėse situacijose padeda mokiniui pačiam atrasti ir taip geriau įsisavinti matematinės žinias [JV12] [Sin05] [Sin03].

Naudodamiesi dinamine geometrija matematinį turinį iš esmės kuria patys mokytojai ir mokiniai. Eksperimentais įrodyta, kad ši programa geriausiai tinka

šioms mokyklinės matematikos temoms mokyti bei mokytis: planimetrijai, elementariems plokštumos analizinės geometrijos pagrindams, funkcijoms ir grafikams, matematinės analizės pagrindams, trigonometrijai, stereometrijos daliai (bet tik nedidelei daliai, nes trimatės grafikos programoje nėra), skaičių teorijai ir pagrindiniams aritmetiniams veiksams, vektoriams, kompleksiniams skaičiams [SJ03].

Programa labiausiai tinka planimetrijos ir matematinės analizės brėžiniams kurti. Tam programoje yra tiesiogiai skirtos priemonės ir komandos [Pre08]. Naudojant programą kūrybiškai galima dar išplėsti matematikos temų sąrašą.

2.4.4. Dinaminė geometrija kaip vienas iš mokymo metodų

Mokymo metodai yra svarbi sudedamoji dalis mokymo procese. Mokymo metodas yra apibrėžiamas kaip mokinių ir mokytojų atliekamų veiklų mokymo procese visuma [DNO07]. Pastaraisiais metais mokinio ir mokytojo veiklos keičiasi. Nauji tyrimai rodo gana aukštus aktyvių mokymo ir mokymosi veiklų naudojimo rezultatus. Būdami aktyvūs mokiniai įgyja gilesnių žinių. Žinios išlieka ilgiau ir taikomos sprendžiant įvairias problemas. Tačiau mokymosi stilių teorijos aiškina, kad tai gali būti tinkama ne visiems mokiniams [PŽ12]. Pagrindinis mokymo klasėje tikslas yra išmokyti klasės mokinius. Todėl šiame darbe didesnis dėmesys skiriamas aktyviems mokymosi metodams.

Mokymosi metodų sąrašas pateikiamas projekto iCOOPER ataskaitoje [DNO07]. Šis sąrašas buvo peržiūrėtas ir 1 lentelėje pateikiami tie metodai, kurie tinkami naudoti mokymo procese su dinamine geometrija ir joje sukurtais interaktyviais mikropasauliais.

1 lentelė. Mokymosi metodai [DNO07]

Mokymo metodai	Aprašas
Aktyvus mokymasis	Mokinys siūlo, planuoja, atlieka ir vertina projektą.
Konkuruojanti	Mokytojas trumpai pristato kontekstą, mokiniai užsiima

Mokymo metodai	Aprašas
simuliacija	simuliacija ir darbo sprendimus simuliacijos aplinkoje. Pabaigoje mokiniai pateikia ir pristato savo darbo su simuliacijos aplinka rezultatus.
Namų darbų pristatymas	Kiekvienai pamokai mokiniai ruošia namų darbus ir pristato prieš klasę (pasinaudodami įvairiomis technologinėmis ir kitomis priemonėmis). Pristatymas turi apimti proceso aprašymą ir galutinį namų darbų objektą. Pristatymo metu mokiniai ir mokytojai gali užduoti klausimus, diskutuoti pateikdami alternatyvius sprendimus.
Tyrimo įgyvendinimas	Metodo metu vykdomas eksperimentas, per kurį atliekami matavimai ir rezultatų parašymas su mokytojo pagalba.
Klausyk – daryk – reflektuok	Mokytojas pristato medžiagą, mokiniai atlieka pratimus (pratybų lapus, vaidmenų žaidimas ir kt.) naudodami anksčiau pristatytą informaciją ir pateikia savo patirtį, kuri gali būti filmuojama ir peržiūrima su mokiniais.
Modeliavimas	Pagrindinis šio metodo tikslas – išmokyti mokinius spręsti problemas individualiai.
Mokymasis poromis	Metodas naudojamas, kai norima palengvinti konceptų mokymąsi ar įtraukti mokinius į diskusiją.
Proceso vertinimas	Mokiniai prisiima atsakomybę už savo mokymosi procesą, kuria savo mokymosi tikslus, dokumentuoja ir reflektuoja kartu su kitais mokiniais ir (arba) mokytoju.
Projektas	Mokytojas pritaiko projekto specifikacijas, mokiniai dirba grupėmis atlikdami paskelbtą projektą.

Ir dinaminė geometrija, ir paruošti mikropasauliai dinaminės geometrijos sistemoje gali būti derinami su įvairiais mokymo ir mokymosi metodais.

2.4.5. Dinaminės geometrijos naudojimo problematika

Ankstesniame skyriuje išvardyti dinaminės geometrijos naudojimo ypatumai rodo, kad šių sistemų grupė yra efektyvi geometrijos mokymo priemonė. Bet IKT naudojimo mokymesi moksliniai tyrimai rodo, kad mokytojai savo pamokose retai naudoja dinaminę geometriją. Kai kurie tyrimai rodo, kad vienas iš pagrindinių šio fenomeno aspektų yra mokytojo požiūris į mokymosi procesą. P. A. Ertmer tvirtina, kad jei mes tikimės įtraukti mokytoją naudoti IT pamokose lavinant mokinių gebėjimus, turime atsižvelgti į tam tikros klasės mokymosi, tam tikro mokytojo mokymo stilių ir pedagoginius principus, kuriais vadovaujasi mokytojas [Ert05]. Šį teiginį patvirtino ir G. Stols bei J. Kriek tyrimas, kurio metu buvo aiškinamasi, kaip dažnai mokytojai pamokose naudoja dinaminę geometriją [SK11]. Autorės teigia, kad jei mokytojas naudoja aktyvius konstruktyvius mokymosi metodus, tai jis pasiruošęs naudoti dinaminę geometriją mokymuisi, ir priešingai, jei teikia pirmenybę tradiciniams mokymosi metodams, tai mažai tikėtina, kad naudos dinaminę geometriją. Taigi pabandysime išžvelgti priežastis, kodėl mokytojai retai naudoja šią efektyvią mokymo priemonę, tuomet išspręsimė ir kylančią problemą, kaip padėti mokytojui ir mokiniui.

Kai kurios dinaminės geometrijos sistemos, skirtos mokymui, pavyzdžiui, „Geogebra“, „Cinderella“ matematikos brėžiniams konstruoti, siūlo galimybę pasirinkti geometrines figūras, ir jos iš karto pateikiamos kompiuterio ekrane – galima tiesiogiai atlikti matavimus, transformacijas, nors sudėtingesnėms konstrukcijoms braižyti reikia gilesnių matematikos ir programos žinių. Daugumoje dinaminės geometrijos sistemų geometrinė figūra konstruojama naudojantis minimaliomis priemonėmis – pieštuku, liniuote, skriestuvu. Tokiu būdu stengiamasi lavinti gilesnį mokinių geometrijos suvokimą konstrukcionistiniu požiūriu – mokinys mokosi pats konstruodamas dinامينius brėžinius ir žinias.

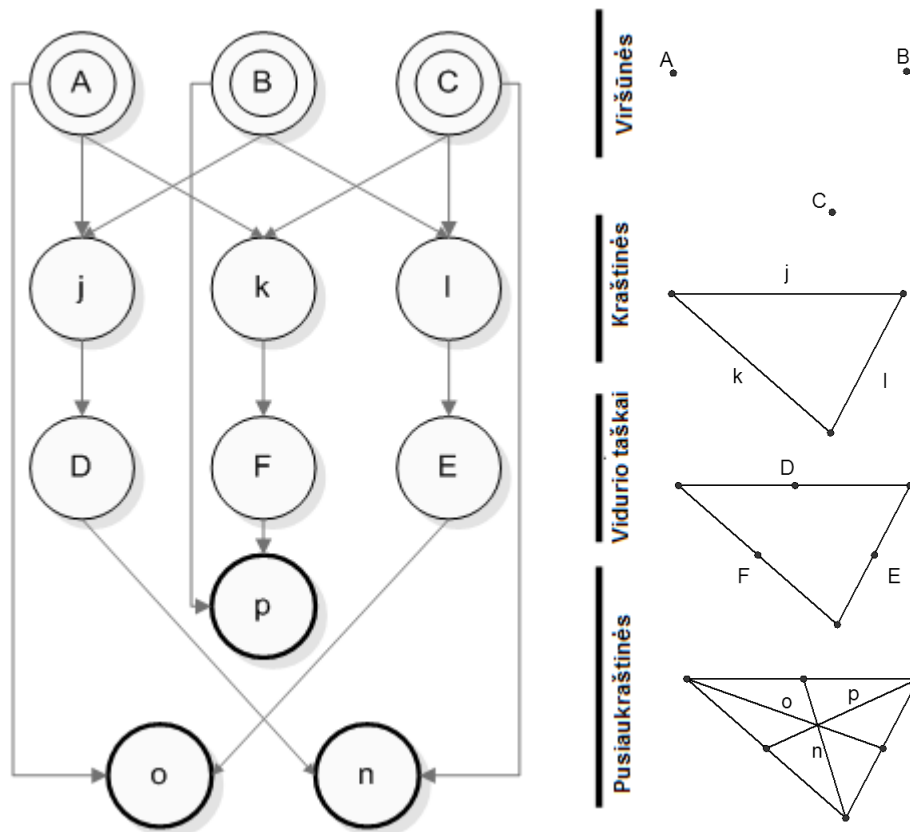
Norint nubraižyti kurią nors geometrinę figūrą reikia žinoti jos savybes ir būdą, kaip sukonstruoti figūrą. Nubraižyti taisyklingą geometrinę figūrą

naudojantis DGS nėra sudėtinga, tačiau nubraižyti taip, kad keičiant figūrą jos savybės išliktų nepakitusios, reikia nemažai matematikos žinių ir būti gerai įvaldžiusiam programą. Šis DGS ypatumas gali būti laikomas ir pranašumu (reikia žinoti konstruojamo objekto savybes, perprasti jo dalių ryšius), ir trūkumu (reikia gebėti naudotis programa, apgalvoti dinaminio brėžinio algoritmą ir pagal jį sukonstruoti brėžinį). Taigi norint sukonstruoti net ir nesudėtingą brėžinį, reikia matematinių žinių ir įgūdžių, taip pat mokėti dirbti kompiuterine programa, suprantama, visam tam reikia laiko. Šią problemą galima iš dalies išspręsti atitinkamai paruošiant darbui DGS, t. y. iš anksto sukuriant savo (naudotojo) priemones (pvz., sukonstruoti taisyklingas geometrines figūras ir jas įrašyti). Tai pakanka atlikti tik vieną kartą. Vėliau bet kuriame brėžinyje pasirinkus priemonę ir brėžinių lape spragtelėjus keletą kartų, bus nubraižoma pasirinktoji figūra. Taip sukuriama aplinka (mikropasaulis), kuria nesunku naudotis visiems. Todėl šiuo požiūriu DGS galimybės geometriniams brėžiniams konstruoti yra gerokai didesnės nei kitų programų.

Vienas esminių DGS trūkumų tas, kad nėra trimačio vaizdavimo priemonių. Vis dėlto šiek tiek padirbėjus trimates figūras (gretasienius, sukinius ir kt.) ir jų pjūvius galima pavaizduoti pasinaudojus esamomis priemonėmis bei komandomis – galima gauti erdvinį dinaminės figūros vaizdą. Kuriant dinaminių brėžinių komplektą pagrindinės mokyklos matematikos kursui buvo susidurta su dar vienu DGS trūkumu: programa neturi galimybės vaizduoti parametrinių nelygybių, lygčių, jų sistemų sprendinių. Šis trūkumas buvo įveiktas pasinaudojus standartinėmis funkcijomis, esančiomis programoje (būtent, sin, cos, tg, arccos, arcsin, arctg, abs, sqrt, ln, log, sgn, round, trunc). Išsamiau šis konstravimo būdas aptariamas tolesniame skyriuje. Dar viena dinaminės geometrijos ypatybė yra ta, kad geometrinių objektų konstravimas pagrįstas hierarchija. Pavyzdžiui, atkarpa, spindulys, tiesė, apskritimas konstruojami turint du taškus (taškai vadinami „tėvais“, o gautas objektas „vaiku“ ir t. t.). Todėl tempiant „tėvą“ – tašką, keičiamas ir „vaikas“ – atkarpa ar kt. Jei sukonstruojamas atkarpos vidurio statmuo, tai keičiant atkarpą keičiamas ir vidurio statmuo. Pašalinus tašką – „tėvą“, pašalinami ir visi jo objektai –

„vaikai“. Dėl šių ryšių galima sukonstruoti brėžinius, kuriuos dinamiškai keičiant jų pagrindinės savybės išlieka tos pačios. DGS galimybės leidžia sukurti mikropasaulį, kuriame būtų ir dinaminis geometrinis brėžinys, ir paaiškinimai, ir sprendiniai, ir navigacijos mygtukai, ir dar kitokių patogių darbui priemonių. Iš tikrųjų tai mokymo(-si) aplinka, kurioje programuojant objektus galima sukurti priemonę bet kuriai matematikos ir net kai kurioms fizikos temoms mokytis. Taigi dinaminėje geometrijoje nėra konkrečių komandų, kurias surašius sukonstruojamas brėžinys. Dinaminiai vaizdai konstruojami naudojant geometrinius, algebrinius bei grafinius objektus ir sistemos priemones, todėl dinaminę geometriją galima vadinti geometrinio programavimo aplinka [JW93]. Dėl šios priežasties mokytojas, kuris nori konstruoti dinaminis brėžinius, privalo turėti (arba įgyti) naują algoritmų sudarymo ir programavimo geometrija gebėjimą.

„Geometer's Sketchpad“ kūrėjai mano, kad konstravimas dinaminės geometrijos programoje yra programavimas geometrija, kai sukuriamas žingsnių sistema, kurioje yra pradiniai objektai (taškas, parametras, tiesus objektas, apskritimas) kaip įvestis ir galutinis objektas (daugiakampis, apskritimo liestinė ir kt.) kaip išvestis [JW93]. Trikampio pusiaukraštinių konstravimo pavyzdys pateikiamas 5-ame paveiksle. Pirmasis žingsnis (žvelgiant iš viršaus žemyn) yra sukonstruoti tris trikampio viršūnes – taškus A, B ir C; antrasis yra sukonstruoti trikampio kraštines – j, k ir l. Tuomet konstruojami trikampio kraštinių vidurio taškai – D, E ir F ir galiausiai sujungiamos trikampio viršūnės su atitinkamais trikampio kraštinių vidurio taškais atkarpomis – o, p ir n. Todėl matematikos mokytojas norėdamas sukonstruoti brėžinius dinaminėje geometrijoje turi įgyti naujos patirties, naują skaitmeninę kompetenciją.



5 pav. Konstravimo žingsniai ir jų rezultatas dinaminėje geometrijoje

Dauguma dinaminės geometrijos sistemų mokytojams yra pakankamai sudėtingos. Preinier išskyrė tris dinaminės geometrijos sistemų sudėtingumo lygius: 1) žemo sudėtingumo priemonės, kurios nepriklauso nuo jau egzistuojančių objektų arba priklauso tik nuo laisvo taško ir konstruojamos naudojant vieną braižymo priemonę bei priemonės, kurios daro įtaką tik vienam egzistuojančiam objektui arba visiems objektams tuo pačiu metu ir reikalauja vieno veiksmo, 2) vidutinio sudėtingumo priemonės, kurioms reikia nuoseklios veiksmų eilės arba naudojamos jau egzistuojančiam objektui ar jų grupei, bet nereikalauja jokių papildomų įvesčių iš klaviatūros 3) aukšto sudėtingumo priemonės, kurioms reikia įvesčių iš klaviatūros ir paprastai vieno ar kelių veiksmų, o jų eiliškumas yra svarbus teisingam rezultatui [Pre08]. Tokie rezultatai buvo gauti atlikus tyrimus su mokytojais ir paprašius juos įvertinti dinaminės geometrijos priemones (2 lentelė).

2 lentelė. Dinaminės geometrijos sistemų sudėtingumo lygiai

Sudėtingumas	Sudėtingumo kriterijai	Pavyzdžiai
--------------	------------------------	------------

Sudėtingumas	Sudėtingumo kriterijai	Pavyzdžiai
Žemo sudėtingumo priemonės	Nepriklauso nuo jau egzistuojančių objektų arba priklauso tik nuo laisvo taško ir konstruojamos naudojant vieną braižymo priemonę.	Atkarpos, spindulio, tiesės apskritimo konstravimas.
	Daro įtaką tik vienam egzistuojančiam objektui arba visiems objektams tuo pačiu metu ir reikalauja vieno veiksmo.	Tempimo mygtukas
Vidutinio sudėtingumo priemonės	Reikalauja nuoseklios veiksmų eilės, bet nereikalauja jokių papildomų įvesčių iš klaviatūros.	Daugiakampio konstravimas
	Naudojamos jau egzistuojančiam objektui ar jų grupei (išskyrus tašką), bet nereikalauja jokių papildomų įvesčių iš klaviatūros.	Lygiagrečios tiesės konstravimas
Aukšto sudėtingumo priemonės	Reikia įvesčių iš klaviatūros ir paprastai vieno ar kelių veiksmų, kurių eiliškumas yra svarbus teisingam rezultatui.	Transformacijos, iteracijos, funkcijų braižymas ir kt.

J. Preiner įvertino trijų dinaminės geometrijos sistemų priemonių sudėtingumas [Pre08]. Pastebime, kad visos trys tirtos programos yra panašaus sudėtingumo lygio (3 lentelė).

3 lentelė. „Cabri“, „Geogebra“ ir „Geometer’s Sketchpad“ sistemų palyginimas

Sudėtingumo kriterijus	„Cabri“	„Geogebra“	„Geometer’s Sketchpad“
Žemo sudėtingumo priemonės	18 (26%)	16 (31%)	28 (42%)

Sudėtingumo kriterijus	„Cabri“	„Geogebra“	„Geometer‘s Sketchpad“
Vidutinio sudėtingumo priemonės	45 (65%)	26 (50%)	24 (36%)
Aukšto sudėtingumo priemonės	6(9%)	10 (19%)	14 (21%)
Priemonių skaičius dinaminėje geometrijoje	69	52	66

Konstravimo dinaminėje geometrijoje sudėtingumas remiasi veiksmu, kurie reikalingi priemonės pritaikymui, skaičiumi ir eiliškumu. Taigi dinaminės geometrijos sistema tampa dar viena programavimo terpe, kai vartotojas turi žinoti ne tik geometrinius konceptus, bet ir gana gerai išmanyti algoritmavimą.

Sukonstruoti dinaminiai brėžiniai papildo matematikos mokymą, paskatina mokytojus dirbti taikant konstruktyvistinius metodus, patrauklius mokiniams: pagreitina žinių įsisavinimą; pagerina mokinių aktyvumą mokymosi procese; kelia mokymosi motyvaciją; padeda mokiniams ugdyti pasitikėjimą savimi; lavinamas loginis mąstymas; mokiniai aktyviai bendradarbiauja su mokytoju. Be to, pastebimi ir kiti dinaminių brėžinių pranašumai: nereikia daugelį kartų braižyti popieriuje ar lentoje tų pačių brėžinių – mokymo(-si) laikas skiriamas žinioms gilinti; ištiriama visa brėžinių grupė – matomas visuminis vaizdas; tempiant objektus ir keičiant parametrus matomas brėžinio kitimas – tiriant įsitikinama įvairių savybių egzistavimu; konstruojant dinaminis brėžinius lavinami matematiniai gebėjimai ir įgūdžiai bei algoritminis mąstymas, gilinamos matematinės žinios [HJ98] [Dix97]. Kai imamasi konstruoti dinaminį brėžinį, reikia numatyti, kuriai temai jis skirtas ir kuriuos gebėjimus turėtų lavinti. Kiekvienas konstruojamas dinaminis brėžinys turi savo paskirtį: ištirti objekto savybes, vizualizuoti įrodymą, pagrįsti teoremą, pavaizduoti uždavinio sprendimą ir pan. Nuo dinamiško vaizdo (brėžinio) paskirties priklauso ir jo konstravimo būdas.

Skyrelyje atskleidėme priežastis, kodėl mokytojai retai naudoja dinaminės geometrijos sistemas: jos reikalauja papildomų mokytojų gebėjimų – algoritminio mąstymo; sistemos yra gana sudėtingos mokytojui – reikalauja pasiruošimo, sistemos naudojimo įgūdžių; kokybiškų dinaminių brėžinių kūrimas reikalauja papildomo laiko ir gilaus matematinio mokymo suvokimo.

Tyrimai rodo, kad apmokyti mokytojus naudoti dinaminę geometriją neužtenka. Iškyla problema, kaip pateikti dinaminę geometriją, kad mokytojas ją naudotųsi.

2.4.6. Interaktyvaus geometrijos vizualizavimo samprata

Atlikta keletas tyrimų aiškinantis *vizualizavimo* (angl. visualization, spatial thinking, visual image) sąvoką [Bis88] [ZC91] [Pre89] [Boz05] [GN07] [War12]. Vizualizavimas paremtas idėja, kaip nematomą padaryti matomu. Pavyzdžiui, matematikoje vizualizuojamos matematinės taisyklės (konceptai, brėžinių savybės, teoremos, aksiomos), kurios pasakytos žodžiu ar išreikštos tekstu gali būti sunkiau suprantamos. Iliustruotą taisyklę, matematinį reiškinių, lygtį ar kt. mokinys gali lengviau perprasti. Mokslo publikacijose vizualizavimo sąvoka suprantama ir kaip veiksmožodinis daiktavardis, reiškiantis veiklą, procesą, ir kaip daiktavardis, reiškiantis vaizdinį, artefaktą [Bis88]. Išskiriamos trys vizualizavimo interpretacijos: 1) vizualizavimas kaip išskirtinai protinis kuriamasis procesas, kurio metu formuojamas vaizdinys [PI71] [Pre06], 2) vizualizavimas kaip vaizdinio kūrimo procesas (vaizduotėje, popieriaus lape pieštuku, naudojant kompiuterines technologijas) ir gebėjimas tą vaizdinį efektyviai panaudoti kitiems matematikos reiškiniams, jų supratimui [Her89], 3) vizualizavimas kaip matematikos konceptų, principų, sprendimų, geometrinių ir grafinių vaizdų naudojimas bei kūrimas popieriuje ar kompiuteriu [ZC91]. Pastarasis apibūdinimas taikomas ir sąvokai vaizdavimas. *Vaizdavimas* – tai tarpinis ryšys tarp informacinių technologijų ir mokinio supratimo [Mor99]. Pačios informacinės technologijos keičia žinių kūrimo procesą – mokymąsi [KM09].

Sąvoka *interaktyvus (arba dinaminis) geometrijos vizualizavimas* apibūdina veiklą, kai yra galimybė judinti geometrines figūras paprastai naudojantis kompiuteriu, tačiau galima ir mintyse, pasitelkus ištrenuotą vaizduotę [Boz05]. Lavindamas savo interaktyvaus vizualizavimo gebėjimą asmuo atlieka figūros transformacijas (pasukimą, ištempimą, atvaizdavimą ir kt.) kompiuterio ekrane arba įsivaizduodamas ir taip sprendžia geometrinius uždavinius. Yra žinomas metodas, kaip mokinys, lavindamas savo vizualizavimo gebėjimą, gali atlikti geometrinių objektų transformacijas vaizduotėje [Prie86].

Tyrimo objektui artimiausia W. Zimmermanno ir S. Cunninghamo [ZC91] vizualizavimo samprata, tik vartojama siauresnė sritis. Interaktyvus geometrijos vizualizavimas yra geometrijos konceptų, aksiomų, teoremų ir problemų grafinių vaizdų kūrimas ir naudojimas dinaminės geometrijos sistemoje.

Mokslinėje literatūroje matematinis vizualizavimas dinaminėje geometrijoje nagrinėjamas trimis aspektais: 1) progresyvių vizualinių objektų tyrimas, pavyzdžiui, automatiniai sudėtingų teoremų įrodymai, trimatės funkcijos, fraktalų tyrimai, [Kon10] 2) geometrinių ar algebrinių konceptų ir taisyklių vizualizavimas [Sin04], 3) vizualus matematikos aiškinimas [GJ96]. Šiame darbe remiamasi antruoju aspektu, t. y. geometrijos konceptų, aksiomų, teoremų ir jų įrodymų bei uždavinių interaktyviu vizualizavimu dinaminėje geometrijoje. Turėdami omeny šį aspektą sukonstruosime *modelį*, pagal kurį būtų galima sukurti kokybišką produktą, skirtą geometrinių konceptų, aksiomų, teoremų, įrodymų ir kai kurių uždavinių vizualizavimui.

2.5. Abstraktūs duomenų tipai

Vis dažniau tarpdisciplininuose darbuose informatikos teorijos metodai randa vietą realizuojant technologines idėjas mokymuisi. Mokslinėje literatūroje galima rasti tarpdisciplininių darbų, kuriuose programos mokymuisi grindžiamos modaline logika [BDŠBP11]. Ontologijomis grindžiamos mokymuisi (ir ne tik) skirtos paieškos sistemos, duomenų bazės, e-mokymosi aplinkos ir t.t. [EA12] [LDMLDH08] [LSO08]. Kuriant programinę įrangą dažnai naudojami abstraktieji duomenų tipai [LZ75]. Taip pat duomenų struktūros gana dažnai

naudojamos informatikoje sprendžiant įvairias globalias problemas, pvz. interneto srautų [BBD13] [BN03].

Šiame tarpdisciplininiame darbe taikoma abstrakčiųjų duomenų tipų teorija interaktyvių geometrinių brėžinių vizualizavimo scenarijams aprašyti.

Geometrijos gimimas Antikos Graikijoje ir Euklido vaidmuo ją sisteminant padarė svarbią įtaką dedukcijos ir mokslo vystymesi [Sta13]. Euklido teorija remiasi visos dinaminės geometrijos programos. Atsiradus technologijoms pasikeitė ne tik priemonės, kuriomis braižomi brėžiniai, – popieriaus lapą, pieštuką, skriestuvą ir liniuotę pakeitė kompiuterio ekranas, bet ir braižymo aplinka ir brėžinio dinamiškumas.

Dinaminės geometrijos aplinka grįsta braižymo uždaviniais. Kai kuriose DG aplinkų elementariausių braižymo uždavinių sprendiniai (kampo pusiaukampinė, vidurio statmuo, kvadratas, lygiakraštis trikampis ir kt.) yra pateikiami kaip priemonės („Geogebra“, „Cinderella“ ir kt.). Tačiau prireikus sukonstruoti sudėtingesnius objektus iškyla sunkumų ir mokytojui, ir mokiniui. Kaip jau minėjome anksčiau, dinaminėje geometrijoje braižomi dinaminiai brėžiniai pagal algoritmą. Kadangi objektai yra susiejami tarpusavyje tėvų – vaikų santykiais, tai yra svarbus jų braižymo eiliškumas. Galime išvelgti baigtinį operacijų skaičių ir begalinę gaunamų reikšmių aibę. Šie samprotavimai atkreipė mūsų dėmesį į abstrakčiųjų duomenų tipų teoriją.

2.5.1. Problemos sprendimas naudojant abstrakčiuosius duomenų tipus

B. Haberman ir O. Muller pateikia įprastą koncepcinį problemos sprendimo, naudojant ADT, modelį [HM08]. Modelyje išskiriamos šešios fazės:

Konceptualizavimas: duotos problemos suvokimas; pagrindinių idėjų, konceptų, esybių ir jų ryšių nusakymas; pagrindinių tikslų ir klausimų apibūdinimas.

Apibendrinimas: pagrindinio problemos aprašymo ir jos konkrečios specifikacijos atskyrimas; problemos predikatų pasirinkimas, kurie aprašo

pagrindinius probleminius ryšius ir duomenų predikatus, specifikuojančius konkrečius problemos pavyzdžius.

Abstrakcija: konceptų ir ryšių aprašymas abstrakčiųjų duomenų tipų termais; priimtinių ADT, kurie charakterizuoja pagrindinę problemą, formalaus modelio, kuris aprašo apibrėžtų problemos objektų rinkinį, ir ADT predikatų tinkamų sprendžiamos problemos ryšiams aprašyti, pasirinkimas.

Formalizavimas: konceptų ir ryšių realizavimas kompiuterio programoje. Pagrindinės problemos aprašymas formalios terminologijos termais naudojant ADT juodąsias dėžes. Šioje fazėje problemos predikatai yra realizuojami pagrindinėje programoje naudojant ADT(aprašytus juodose dėžėse) predikatus.

Konkretizavimas: konkrečių duomenų (įvesties) pavaizdavimas duomenų predikatų termais. Tai gali būti padaryta pagrindinėje programoje arba atskirame faile. Konkretus problemos pavyzdys aprašomas apibrėžiant problemos predikatus duomenų predikatų termais.

Testavimas: programos derinimas ir vertinimas pagal nurodytus reikalavimus.

Šis modelis nusako visus žingsnius nuo problemos iškėlimo iki jos įgyvendinimo.

2.5.2. Abstrakčiųjų duomenų tipų specifikacijos

Abstrakčiųjų duomenų tipų (ADT) teorija, nepakeičiama kuriant programinę įrangą, remiasi aibių teorijos pagrindais ir algebrinėmis specifikacijomis [GK80]. Teorijos pradininkai apibrėžia abstraktųjį duomenų tipą, kaip duomenų tipą, aprašomą nusakant operacijas su to tipo duomenų reikšmėmis ir nepriklausančio nuo reikšmių pavaizdavimo kompiuterio atmintyje [Gut77] [LZ74].

Abstraktusis duomenų tipas yra abstraktus duomenų objektų modelis su loginės architektūros formaliais trumpiniais ir tiems duomenų objektams galiojančiomis operacijomis. ADT sutrumpina duomenų struktūras ir vartotojui pateikia jas sąsajomis, kuriomis duomenys gali būti gaunami. Dėl to išskiriamas

tipas, aibė galiojančių operacijų, aksiomų ir prielaidos, kurios apibrėžia ADT sritį [GM78].

Abstrakčiųjų duomenų tipų tikslas yra sutrumpinti ir specifikuoti programą abstrakčiai apibrėžiant duomenis reikšmėmis, kurios sugeneruojamos operacijomis ir konstruktais, apibrėžtais pirmos eilės tiesioginėmis lygybėmis [JO97] [Lin76].

Abstraktiesiems duomenų tipams keliami reikalavimai [LG86]:

- Duomenų tipo apraše turi būti apibrėžtos visos operacijos, taikytinos to tipo reikšmėms;
- Abstrakčiojo duomenų tipo vartotojas neturi žinoti, kaip to tipo reikšmės vaizduojamos kompiuterio atmintyje.
- Abstrakčiojo duomenų tipo vartotojas gali operuoti to tipo reikšmėmis vien tik to tipo operacijomis, bet negali manipuluoti tiesiogiai tų reikšmių atvaizdais atmintyje.

Naujas ADT turi būti aprašomas formaliu aprašu ir realizacija [GH78]. ADT gali būti aprašomi formaliais arba neformaliais metodais. Norint išvengti dviprasmybės ADT aprašomi formaliais metodais. Sintaksės specifikacijoje apibrėžiami vardai, sritys ir operacijų tipų ribos. Semantika apima aksiomų išreiškiamų lygybėmis, aibę. Aksiomos išreiškia ryšius tarp operacijų [GH78]. Dažniausiai naudojami du specifikacijos metodai: algebrinis ir funkcinis [Loe87]. Funkcinis metodas yra artimas realizacijai. ADT reikšmių aibė konstruojama naudojant programavimo kalbos duomenų struktūras. Operacijos apibrėžiamos naudojant programavimo kalbą [Leo86]. Funkcinio metodo naudojimas sumažina ADT abstrakciją. Šis metodas labiau išreiškia realizaciją nei specifikaciją [Loe87]. Algebrinės specifikacijos metodas naudoja aksiomatinę sistemą ir yra nesusietas su realizacija kaip aprašyta [Loe87] [GH78] [Kie83] [Gut77]. Formaliam ADT aprašymui naudojama homogeninė ir heterogeninė algebra [Loe87] [LG86] [EM85].

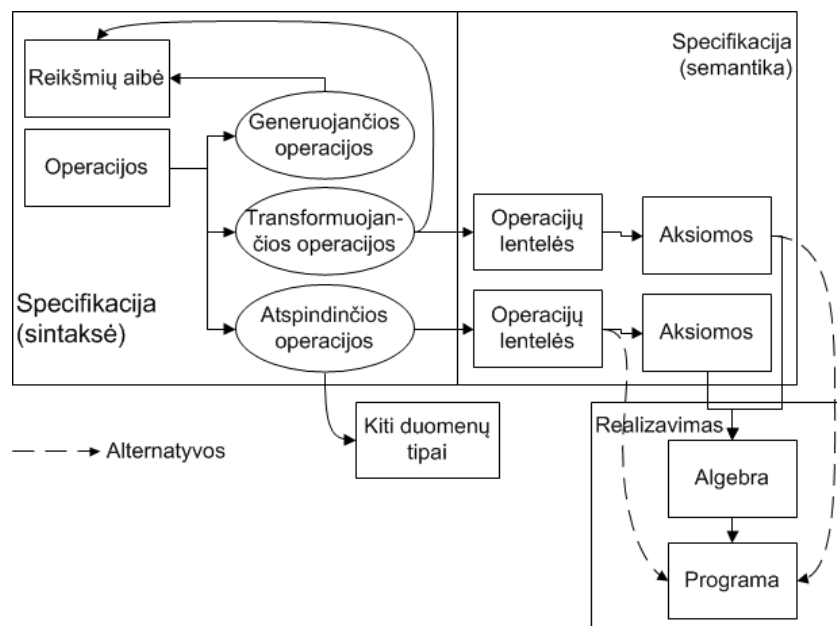
Heterogeninė algebra apima kelių tipų reikšmes. Ši galimybė pritaikoma aprašant duomenų tipus programavime. Pagal ADT teoriją išskiriamas vienas

duomenų tipas ir aprašomas keliais kitais duomenų tipais, kurie buvo aprašyti anksčiau [GH78].

Algebrinė specifikacija remiasi aksiomatine sistema. Kadangi apibrėždami tipus naudosime aksiomatinę sistemą, patogiu operacijas sugrupuoti pagal jų atvaizdžių paskirtį į tris grupes [DG83]:

- generuojančias, kurios sugeneruoja visus reikšmių aibės elementus. Šiai grupei galima būtų priskirti ir operacijas, kurios kaip ir nesukuria naujų reikšmių, bet priskiria esamoms kokius nors požymius;
- transformuojančias, kurios pakeičia vieną tipo T reikšmę kita, kurią gali sukurti generuojanti operacija. Jos nesukuria naujų reikšmių, o rezultatas priklauso reikšmių aibei, kurią sukuria generuojančios operacijos;
- atspindinčias, kurios vieno duomenų tipo T reikšmę atvaizduoja į kurio nors kito duomenų tipo reikšmę.

Naujų duomenų tipų specifikacijas galima sudaryti sistemingai, pradedant nuo operacijų rezultatus apibrėžiančių lentelių [GK80]. Kiekvienai transformuojančiai ir atspindinčiai operacijai rašoma tiek aksiomų, kiek yra generuojančių operacijų su tai (apibrėžiamai) operacijai tinkamomis reikšmėmis (6 pav).



6 pav. ADT specifikacijos metodas

2.6. Skyriaus išvados ir apibendrinimas

Perskaityta daugiau kaip 130 edukologinių ir informatikos mokslinių darbų, peržiūrėta ir išbandyta virš 50 interaktyvių matematikos mokymosi priemonių.

Pirmiausia buvo tiriama konstrukcionistinio mokymosi samprata. Konstrukcionistinis mokymasis yra aktyvus procesas, kuris vyksta mokiniui kuriant apčiuopiamus objektus ir jais dalijantis. Mokslinės literatūros analizė parodė, kad dinaminės geometrijos sistemos naudojimas mokymesi gali padėti realizuoti daugelį konstrukcionistinio matematikos mokymosi tikslų. Be to atlikti moksliniai tyrimai pagrindžia dinaminės geometrijos naudojimo mokymosi procese efektyvumą įvairiais aspektais: ugdo gebėjimus, lavina vaizduotę, loginį mąstymą ir kt. Tačiau literatūros analizė taip pat atskleidė, kad mokytojai retai naudoja dinaminės geometrijos sistemas. Publikuoti mokslininkų tyrimai atskleidė keletą galimų priežasčių, kodėl mokytojai nenaudoja šios sistemos: vis dar sudėtingas naudojimas, nepakankamai intuityvi vartotojo sąsaja, patogūs pasyvūs mokymo metodai ir kita. Šioje vietoje iškeliamas bendras tyrimo klausimas:

kaip pateikti dinaminę geometriją, kad mokytojas ja naudotųsi?

Bandant atsakyti į šį klausimą imta gilintis į informacijos vizualizavimą ir dinaminės geometrijos naudojimo ypatumus. Nuspręsta padėti mokytojui apeiti interaktyvių mikropasaulių konstravimą, t. y. sukonstruoti mikropasaulius dinaminėje geometrijoje ir pateikti juos mokytojui. Literatūros analizė šia kryptimi leido iškelti klausimą:

kaip vizualizuoti geometrijos temas?

Toliau analizuojant literatūrą šia kryptimi iškeliamą mokslinę problemą:

kaip sukurti interaktyvaus geometrijos vizualizavimo modelį efektyviam mokymui ir mokymuisi?

Literatūros analizė atskleidė dinaminės geometrijos sistemos ryšį su duomenų struktūromis. Pradėta ieškoti informatikos metodų, kurie padėtų

įgyvendinti keliamą problemą. Rastas būdas mikropasaulių realizacijai – *abstrakčiųjų duomenų struktūros*.

Teorinėje dalyje pirmiausia nusakoma tyrimo vieta konstrukcionistiniame modelyje. Sudaromas interaktyvaus geometrijos vizualizavimo dinaminėje geometrijoje kokybės kriterijų modelis, kurio pagrindas yra mokymosi priemonių kokybės standartuose aprašomi kriterijai ir vertinimo modeliai [ISO09] [ISO12]. Aprašomas interaktyvaus geometrijos vizualizavimo modelis su abstrakčiųjų duomenų struktūrų adaptavimu metodu realizuojant modelį.

3. Interaktyvaus vizualizavimo modelis

3.1. Įvadas

Antrame skyriuje iškelta mokslinė problema, kaip sukurti interaktyvaus vizualizavimo modelį efektyviam geometrijos mokymui ir mokymuisi. Darbo tyrimas siejamas su konstrukcionistiniu mokymu ir mokymusi. Todėl šiame skyriuje pirmiausia aprašysime konstrukcionistinio geometrijos mokymo naudojant dinaminės geometrijos sistemą modelį ir nusakysime tyrimo vietą jame.

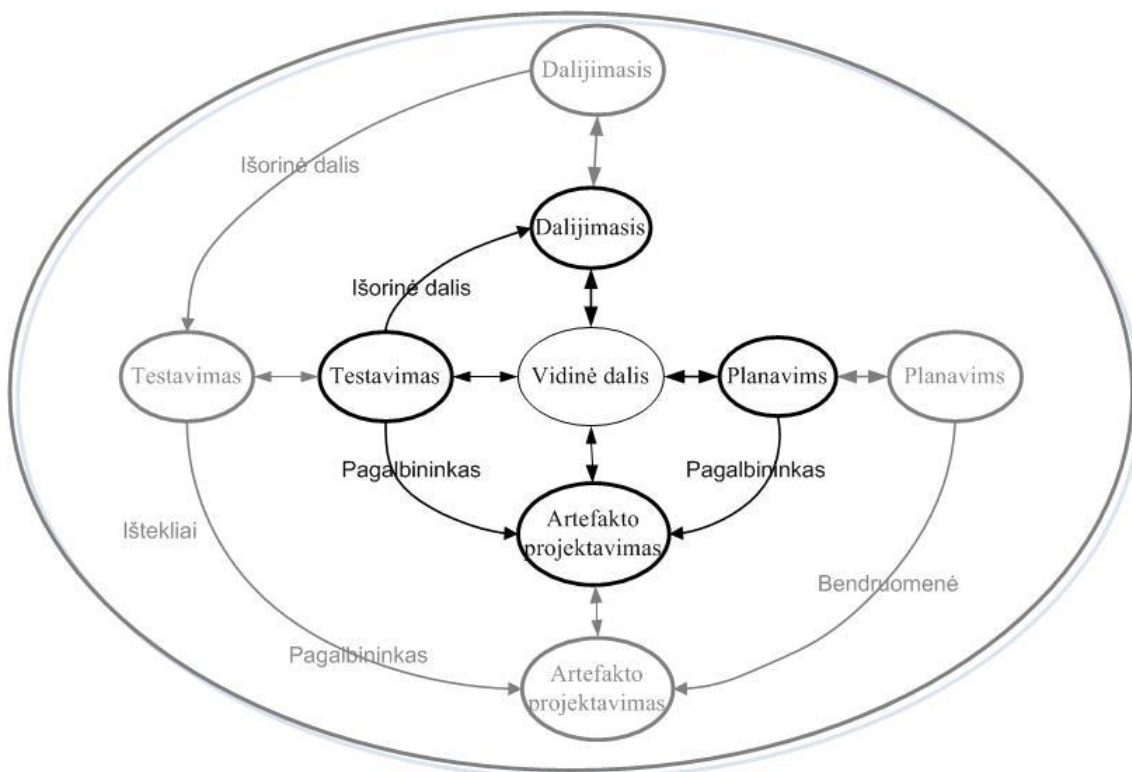
Šiame skyriuje aprašomi interaktyvaus vizualizavimo kriterijai remiantis ISO standarto kriterijais skaitmeninei mokymo(si) priemonei (SMP). Išskiriami technologiniai ir vartotojo kriterijai. Pagal modelį sukurta priemonė naudojama mokant, todėl vartotojo kriterijai yra ypač svarbūs norint gauti kokybišką ir efektyvią mokymo(si) priemonę. Pagrindinis dėmesys skyriuje skiriamas interaktyviam vizualizavimo modeliui. Skyriuje taip pat aprašomi ADT, kurie pritaikomi įgyvendinant modelį.

3.2. Konstrukcionistinio geometrijos mokymo(si) modelis

2.2 skyriuje aprašytame A. Baytak [Bay11] modelyje išskiriami keturi žingsniai: planavimas, projektavimas, testavimas ir dalijimasis. Šis modelis skirtas konstrukcionistiniam mokymuisi kuriant žaidimus. Interaktyvių geometrijos brėžinių konstravimas yra labai artimas žaidimų kūrimui. Čia projektavimo žingsnis keičiamas scenarijaus rašymu, o testavimo žingsnis

keičiamas braižymo žingsniu. 7-ame paveiksle pilkai išorėje yra pavaizduoti Baytak žingsniai, o viduje juodai pavaizduotas adaptuotas konstrukcionistinis modelis geometrijai mokytis kuriant ir tiriant interaktyvius geometrijos brėžinius dinaminės geometrijos sistemoje.

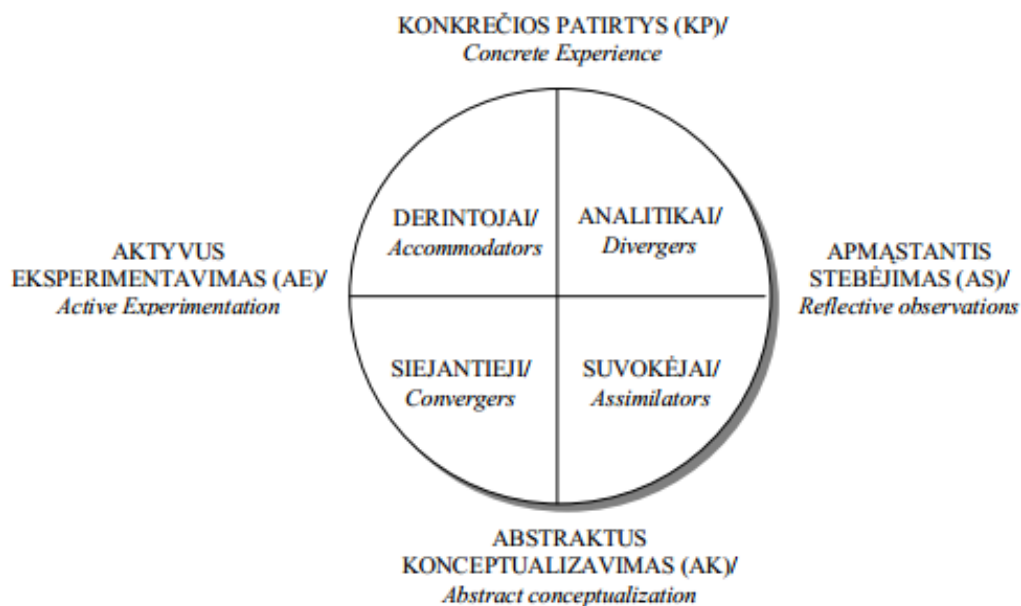
Pagal Baytak modelį konstrukcionistiniame mokymusi pateiktą 7 paveiksle mokinsys yra aktyvus kūrėjas, kuris dalijasi savo sukurtais brėžiniais su kitais mokiniais. Modelyje išskiriami keturi žingsniai: 1) planavimas – mokinsys gauna užduotį ir planuoja jos realizaciją naudodamasis galimais šaltiniais bei mokytojo pagalba; 2) scenarijus – mokinsys mąsto ir (arba) rašo scenarijų, pagal kurį bus konstruojamas brėžinys, t. y. algoritmą, kaip nubraižomas geometrinis brėžinys naudojant skriestuvą ir liniuotę, naudodamasis savo geometrijos gebėjimais bei dinaminės geometrijos sistemos naudojimo žiniomis; 3) braižymas – mokinsys sukonstruoja brėžinį ir analizuoja bei testuoja jį tempdamas laisvus taškus; 4) dalijimasis – mokinsys pristato ir paaiškina sukurtą brėžinį kitiems mokiniams ir gauna grįžtamąjį ryšį, kaip buvo galima kitaip nubraižyti brėžinį ir pan.



7 pav. *Baytak* modelis konstrukcionistiniame mokymusi kurti dinaminis brėžinius

Darbe naudojamas Kolb [Kol05] patirtimi grįstas mokymosi ciklas aiškinant konstrukcionistinę matematikos mokymąsi grįstą dinamine geometrija. Kolb mokymosi ciklas paremtas patirtimi. Mokymasis su dinamine geometrija taip pat remiamas mokinio patirtimi ir praktika. Mokymosi cikle yra keturios stadijos: konkrečioji patirtis, refleksyvus stebėjimas, abstraktus konceptualizavimas ir aktyvus eksperimentavimas. Šios keturios stadijos yra susietos su keturiais besimokančiojo mokymosi stiliais: derintojai, analitikai, siejantieji ir suvokėjai (8 pav.).

Paprastai klasėje yra kelių mokymosi stilių mokiniai. Todėl mokytojas ruošdamas medžiagą pamokai turėtų stengtis numatyti įvairius mokymosi stilius. Dėl šios priežasties integruojamas Kolb mokymosi ciklas į matematikos mokymąsi. Tokiu būdu praplečiamas 7 paveiksle aprašytas *Baytak* modelis susiejant jį su Kolb mokymosi ciklu (9 pav.).



8 pav. Kolb mokymosi ciklas [Kol75]



9 pav. Konstrukcionistinio mokymosi su dinamine geometrija modelis

Praplėstas modelis turi penkis žingsnius: 1) analizavimas – mokinys naudojami jau sukurtais interaktyviais brėžiniais, stebi ir analizuoja veiksmus ir rezultatus; 2) formulavimas – mokinys formuluoja konceptus, savybes, aksiomas, teoremas remdamasis savo stebėjimais ir analize; 3) brėžinio braižymas – mokinys jau turėdamas pradinį gebėjimą, gautus analizuojant ir stebint sukurtus brėžinius, gali pradėti kurti brėžinius pats pagal 7 paveiksle aprašytus žingsnius; 4) dalijimasis – mokinys dalijasi ir diskutuoja su kitais mokiniais; 5) modelio kūrimas – mokinys gauna užduotį ir (arba) planuoja sukurti realų objektą (dėžutę, baldą, kambario ar sodo planą ir t.t.) ir sukuria šio objekto modelį (išklotinę, planą ir pan.) dinaminėje geometrijoje ir toliau dalijasi ir diskutuoja su kitais mokiniais. Visuose žingsniuose mokinys konstruoja savo vidines žinias bendraudamas ir bendradarbiaudamas su išorinėmis priemonėmis (mokytojais, mokiniais, literatūra, programine įranga ir kt.). Visos procesas susietas su IT, mūsų atveju, su dinamine geometrija. Visi penki žingsniai susiejami su Kolb mokymosi ciklu ir stiliais (4 lentelė).

4 lentelė. Kolb mokymosi ciklo ir konstrukcionistinio mokymosi ryšys

	Aktyvus eksperimentavimas	Reflektyvus stebėjimas
Konkreči patirtis	braižymas (jaučia ir daro)	analizavimas, modeliavimas (jaučia ir stebi)
Abstraktus konceptualizavimas	modeliavimas, dalijimasis (mąsto ir daro)	analizavimas, formulavimas (mąsto ir stebi)

4 lentelėje matome, kad kiekvienas Kolb stilius atitinka vieną ar kelis 9 paveiksle pavaizduoto modelio žingsnius.

Šis modelis gali padėti mokytojams apmąstyti, kaip adaptuoti mokymo ir mokymosi medžiagą (interaktyvius brėžinius) skirtingo mokymosi stiliaus mokiniams.

Šiame darbe aprašomas tyrimas apima pirmuosius du modelio žingsnius: analizavimą ir formulavimą (9 pav.). Todėl reikia parengti interaktyvius brėžinius efektyviam mokymui ir mokymuisi.

Kitame skyriuje aprašomi kriterijai, kuriuos turėtų tenkinti kuriami interaktyvūs mikropasauliai naudojami mokant konstrukcionistiniais mokymo metodais.

3.3. Reikalavimai modeliui

Modeliui keliami trys pagrindiniai reikalavimai:

- 1) Turi tenkinti technologinius ir vartotojo ISO standarto kriterijus.
- 2) Turi būti pritaikomas bet kurioje dinaminės geometrijos sistemoje.
- 3) Turi būti susietas su Lietuvos ugdymo programomis.

3.4. Interaktyvaus vizualizavimo kriterijai

Kokybės kriterijų numatymas ir pritaikymas ankstesnėse produkto kūrimo stadijose padeda sukurti kokybiškesnį produktą [ISO09]. Produkto kokybės valdymas numatant kokybės kriterijus kūrimo metu yra vienas iš svarbių kokybiško produkto kūrimo žingsnių [Gil05]. Todėl pirmiausia išskiriami ir

nusakomi esminiai geometrijos vizualizavimo dinaminėje geometrijoje kokybės kriterijai.

Kadangi galutinis produktas yra interaktyvių mikropasaulių rinkinys – skaitmeninė mokymosi priemonė, tai keliant kriterijus priemonei remiamasi Sistemų ir programinės įrangos kokybės reikalavimų ir vertinimo standartu [ISO12]. Standarte išskiriami vartojimo ir technologiniai (vidiniai ir išoriniai) kokybės kriterijai. Vartojimo kokybės kriterijai nusako, koku laipsniu vertinamas produktas (skaitmeninė mokymo(si) priemonė) atitinka tam tikro vartotojo tikslus atsižvelgiant į efektyvumą, saugumą, kontekstą [ISO09]. Išoriniai produkto kokybės kriterijai siejami su veiksmy atlikimu kompiuteryje ir operacinėje sistemoje. Vidiniai kokybės kriterijai siejami su statinėmis produkto savybėmis, kurios paprastai prieinamos produkto kūrimo metu. Vidiniai kokybės kriterijai gali būti pritaikomi (vertinami) produkto kūrimo procese numatant išorinius produkto kriterijus [ISO09]. Vidinė kokybė daro įtaką išorinei kokybei, todėl šie kriterijai yra neatsiejami ir pateikiami kaip viena technologinių kriterijų grupė. Standarte pateikiami kokybės kriterijai taikomi įvairiai programinei įrangai. Kadangi šis darbas siejamas su dinaminės geometrijos sistemomis ir galutinis produktas skirtas mokymui, tai bus naudojami ne visi standarte rekomenduojami kokybės kriterijai. Atmesti tie, kurių pritaikymą riboja dinaminės geometrijos sistema, t. y., kurių negalima pakeisti.

3.4.1. Technologiniai kriterijai

Remiantis šiuolaikinės didaktikos metodologija išskiriamos dvi kokybės kriterijų grupės: 1) bendruosius, taikomus visai veiklos sričiai ir atitinkančius iškeltus tikslus, turinį ir kompiuterinės sąsajos reikalavimus, t. y., interaktyviam mikropasauliui; 2) specialiuosius, taikomus dinaminiam brėžiniui, siekiant sukurti interaktyvų vizualizuojamą vaizdą, paremtą mokymo metodika. Kiekviena iš šių grupių apima technologinius ir naudotojo kriterijus (1 priedas).

Dinaminiam brėžiniui iškeliami kokybės kriterijai atsižvelgiant į technologinius kokybės kriterijus [ISO09] bei remiantis Casselman [Cas00] keliamais reikalavimais statiniam brėžiniui:

- *tikslumas*: dinamiškai keičiant brėžinį, dinamiškai keičiasi matavimai; keičiant parametrus, keičiasi brėžinys ir jo matavimai;
- *estetika*: reikia paryškinti esminius brėžinio elementus;
- *užbaigtumas*: brėžinys savaime turi papasakoti visą istoriją; reikia apgalvoti, kaip brėžinys bus panaudotas kontekste;
- *modifikuojamumas*: naudotis vaizduote, nes mažas pakeitimas gali pakeisti visą brėžinio perteikiamą mintį.

Pirmiausia aptariami technologiniai kriterijai kiekvienai iš grupių (1 priedo 1 lentelė):

- 1) Mikropasauliui taikomi šie kriterijai: patogumas (skaidymas į modulius, modifikuojamumas), panaudojamumas (apsauga nuo klaidų, estetika, naudojimo paprastumas), patikimumas (užbaigtumas, eksploatacinė parengtis, klaidų toleravimas, atkuriamumas), funkcionalumas (tikslumas, interaktyvumas), adaptyvumas.
- 2) Dinaminiam brėžiniui taikomi šie kriterijai ir jų grupės: naudojimo patogumas (daugiakartinis panaudojamumas), panaudojamumas (apsauga nuo klaidų, brėžinio estetika, naudojimo paprastumas), patikimumas (užbaigtumas, tinkamumas, atkuriamumas), tikslumas.

Technologinis adaptyvumas labai svarbus kriterijus. Jį sudaro trys subkriterijai:

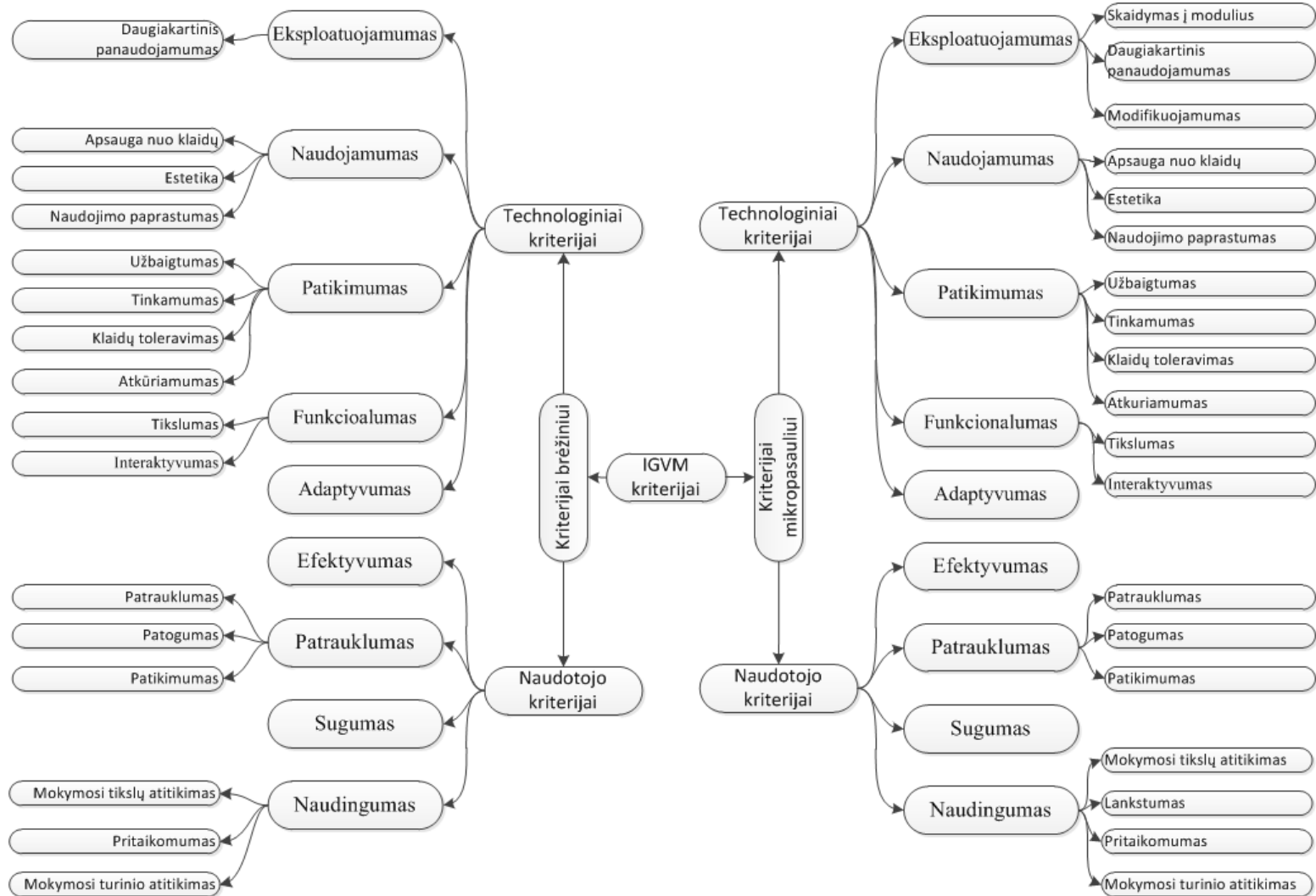
- Pritaikomumas – priemonės panaudojamumas įvairiose operacinėse sistemose priklauso nuo dinaminės geometrijos sistemos naudojimo skirtingose operacinėse sistemose.
- Diegimas – priemonės diegimo sudėtingumo laipsnis priklauso nuo dinaminės geometrijos sistemos. Paprastai reikia tik atverti failą.
- Pakeičiamumas – priemonės naudojimas, pakeitus dinaminės sistemos versiją.

Adaptyvumo subkriterijai priklauso nuo dinaminės geometrijos sistemos. Todėl šie kriterijai nekeliami, nes vienas iš modelio reikalavimų yra taikymas bet kurioje dinaminės geometrijos sistemoje.

3.4.2. Vartotojo kriterijai ir bendras kriterijų modelis

Išskiriant vartotojo kriterijus remiamasi Sistemų ir programinės įrangos kokybės reikalavimų ir vertinimo standartu [ISO12]. 1 priedo 2 lentelėje pateikiami vartotojo kokybės kriterijai SMP mikropasauiams ir dinaminiam brėžiniui.

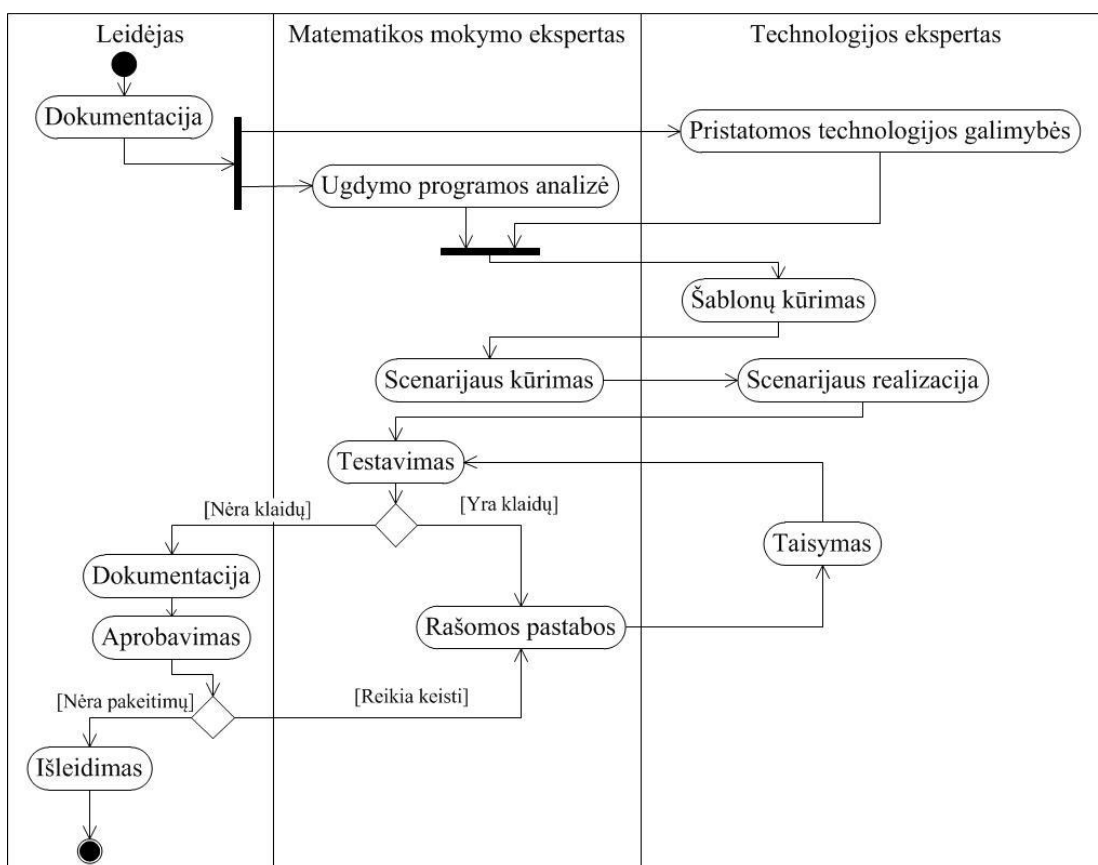
Išskyrėme technologinius ir vartotojo kokybės kriterijus. Jie apjungiami interaktyvaus geometrijos vizualizavimo su dinamine geometrija modelio kokybės kriterijų modelyje (10 pav.). Šie kriterijai bus taikomi ir pasirenkant tinkamiausią modelio realizacijai dinaminės geometrijos sistemą.



10 pav. Interaktyvaus vizualizavimo kokybės kriterijų modelis

3.5. Interaktyvaus vizualizavimo modelio veiklų diagrama

Kokybiškos skaitmeninio matematikos mokymo(si) priemonės kūrimas yra dviejų sričių sandūroje: informatikos ir matematikos mokymo (11 pav.). Kokybiškų interaktyvių matematikos mikropasaulių kūrimas reikalauja ir informatikos, ir matematikos mokymo kompetencijų. Matematikos ugdymo programai peržiūrėti ir išrinkti vizualizavimui tinkamas temas reikia matematikos mokymo kompetencijos. Scenarijų kūrimui reikia matematikos teorijos ir matematikos mokymo žinių. Technologijų išmanymas leidžia pristatyti naudojamos technologijos galimybes (šiam darbe – dinaminės geometrijos) matematikos mokymo ekspertui(-ams) ir kartu paruošti scenarijų šablonus.



11 pav. Mikropasaulių kūrimo veiklų diagrama

Scenarijus realizuojamas kurioje nors aplinkoje: dinaminės geometrijos sistemoje, Java ir kt. Realizavus scenarijų gaunamas produktas, kurį mes vadiname mikropasauliu. Mikropasaulių visuma sudaro nuoseklią skaitmeninę mokymo(si) priemonę. Sukurtus mikropasaulius testuoja scenarijaus autorius ir,

jei reikia, nurodo klaidas bei netikslumus, jei reikia. Taisymus atlieka technologijos ekspertas. Testavimas vyksta dviem lygiais: pirmiausia testuojamas kiekvienas mikropasaulis, o paskutinėje stadijoje visa skaitmeninė priemonė. Tik tuomet galima teikti aprobuoti (11 pav.).

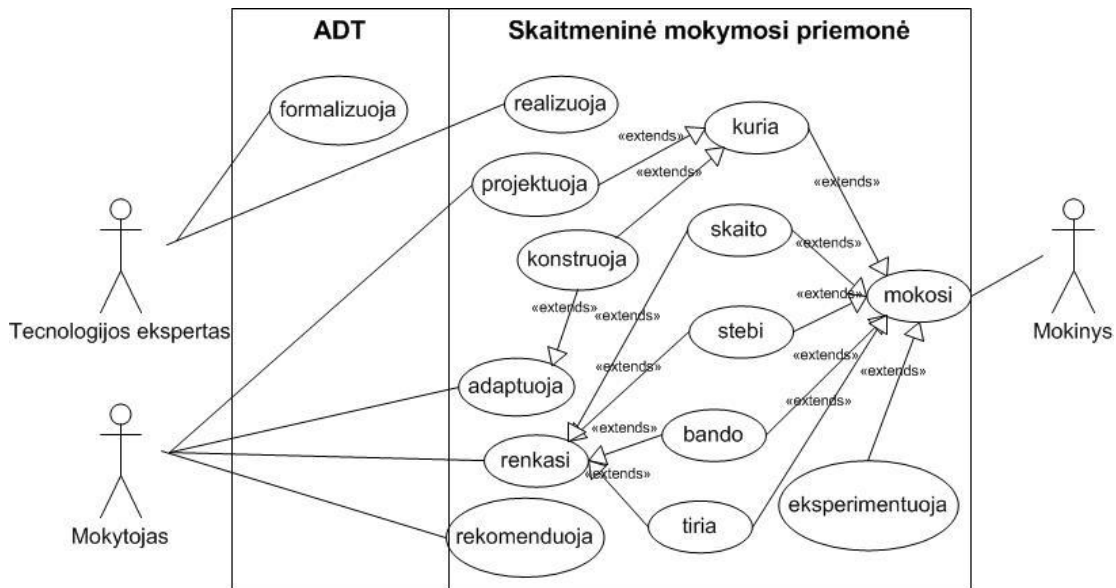
Šiame darbe pagrindinis dėmesys skiriamas scenarijų realizavimo žingsniui: formalizuojamas scenarijaus kūrimas remiantis abstrakčiais duomenų tipais.

3.6. Interaktyvaus vizualizavimo modelio situacijų diagrama

Pristatomas modelis sąveikauja su keturių naudotojų tipais: kūrėju (mokytoju, leidėju), informatiku (technologijos ekspertu), mokytoju ir mokiniu. Modelio tikslinis naudotojas yra kūrėjas, kuris gali būti fizinis (pvz. mokytojas) arba juridinis asmuo (pvz. leidykla). Bet kuriuo atveju norint sukurti skaitmeninę mokymosi priemonę reikia: 1) įvaldyti aplinką, kuri naudojama interaktyviems mikropasauliams kurti (šiuo atveju dinaminės geometrijos sistemą), ir 2) turėti pedagoginės matematikos mokymo klasėje praktikos.

Kita naudotojų grupė yra mokytojai. Parengta skaitmeninė mokymosi priemonė turi būti paprasta ir intuityvi, nuosekli ir atitinkanti matematikos ugdymo programas. Iš vienos pusės priemonė turi turėti trumpą vartotojo vadovą mokytojui, pavyzdžiui, kokius gebėjimus mokinys įgyja mokydamasis su šia priemone, ką spausti, ką stebėti, kokios tikėtinos išvados. Iš kitos pusės priemonė turi būti pakankamai lanksti, kad mokytojas galėtų pasirinkti atskirus mikropasaulius pamokai ar adaptuoti juos individualiam darbui [JD11]. Kadangi realizacija planuojama dinaminės geometrijos sistemoje, tai lieka galimybė aktyviai mokinio veiklai: galima kurti papildomus objektus ir eksperimentuoti.

Parentant mokinio veiklas situacijų modeliui buvo peržiūrėtas „European schoolnet“ žodynas [VBE] ir atrinktos mokymosi veiklos tinkančios mūsų priemonės naudojimui: skaitymas, stebėjimas, bandymas, tyrimas, eksperimentavimas, mokymasis ir kūrimas. Visų naudotojų veiklos pavaizduotos interaktyvaus vizualizavimo modelio situacijų diagramoje (12 pav.)



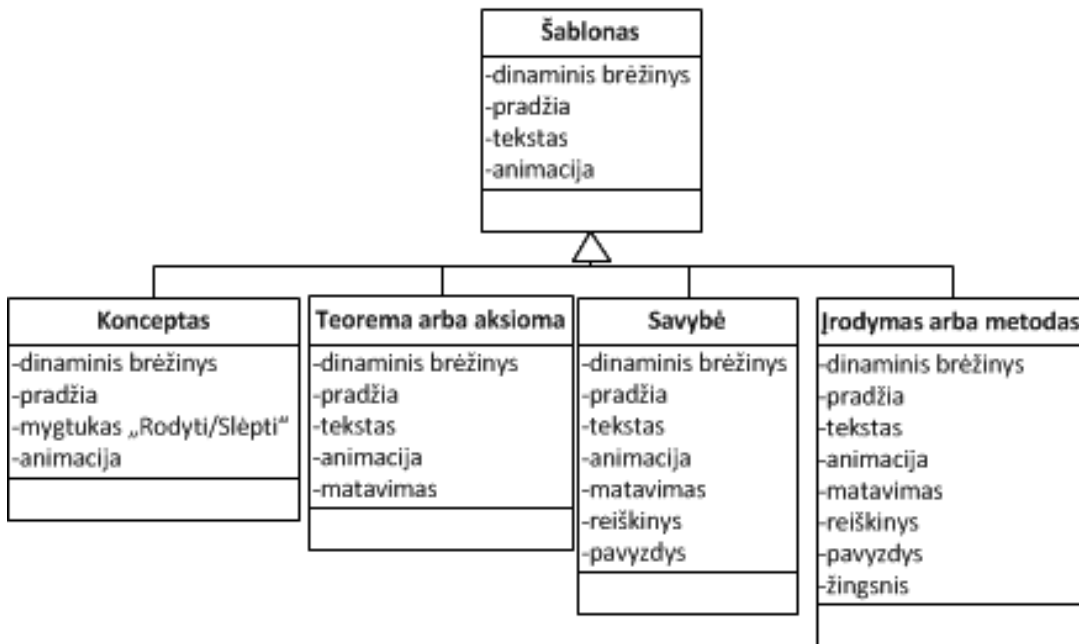
12 pav. Interaktyvaus vizualizavimo situacijų diagrama

Šis situacijų modelis leidžia numatyti galimas mokinio ir mokytojo veiklas. Visos veiklos atitinka keliamus vizualizavimo kriterijus.

3.7. Scenarijų šablonų klasifikacija

Scenarijų kūrimas yra vienas iš sudėtingesnių žingsnių, nes: 1) reikia perteikti teisingą mokymosi medžiagą, 2) parinkti interaktyvias priemones, kurios lavintų numatomus gebėjimus, 3) parenkant priemones atsižvelgti į technologines naudojamos programos (dinaminės geometrijos) galimybes, 4) numatyti galimus mokymosi metodus naudojant interaktyvų mikropasaulį. Norint bent šiek tiek palengvinti šį žingsnį siūlomi scenarijų šablonus. Šablonų klasifikacijai vaizduojama klasių diagrama (13 pav.).

Peržiūrėjus matematikos ugdymo programas [UPB08] [UPB11] išskiriamos keturios scenarijų šablonų klasės: konceptų pristatymas, teoremos arba aksiomos pristatymas, savybės pristatymas, įrodymas arba metodas (13 pav.). Numatydami požymius atsižvelgiame į objektus, kurie bus mikropasulyje. Šie objektai tenkina 3.4.2 skyrelyje iškeltus kriterijus. Pavyzdžiui, kriterijaus *patikimumo* subkriterijui *atkūriamumas* įgyvendinti reikia *pradinės padėties mygtuko*.



13 pav. Scenarijų šablonų sistema

1) *Konceptaso pristatymo* šablonų klasė. Šios klasės šablonai turi penkis požymius (objektus): dinaminis brėžinys, tekstas, mygtukas Rodyti/slėpti“ (teiginį galima paslėpti, jei jis nėra būtinas, arba parodyti, jei jis reikalingas), pradinė padėtis, animacija. Šios šablonų klasės mikropasaulyuose sąveikauja kelių rūšių objektai (dinaminis brėžinys, mygtukai, tekstas). Mikropasaulių objektų ryšius ir dinamiškumą vaizduojamas UML sekų diagramoje (14 pav.).

2) *Teoremų arba aksiomų pristatymo* šablonų klasė. Šiai klasei priklauso šablonai, kurie neturi teiginio mygtuko, nes esmė yra pats teiginys. Šios klasės mikropasauliai skirti atrasti ir įsitikinti teoremos ar aksiomos teisingumu. Todėl šiuose mikropasaulyuose atsiranda naujas požymis (objektas) – matavimai. Mikropasaulio objektų sąveika pavaizduota sekų diagramoje (15 pav.)

3) *Savybės pristatymo* šablonų klasė. Šios klasės mikropasauliai papildomi dviem požymiais (objektais): reiškiniu ir pavyzdžiu (arba atskiru atveju). Atskiras atvejis – tai savybės pavaizdavimas atskiroms figūroms, pavyzdžiui, stačiajam trikampiui, kvadratui ir pan. Mikropasaulio objektų sąveika pavaizduota sekų diagramoje (16 pav.)

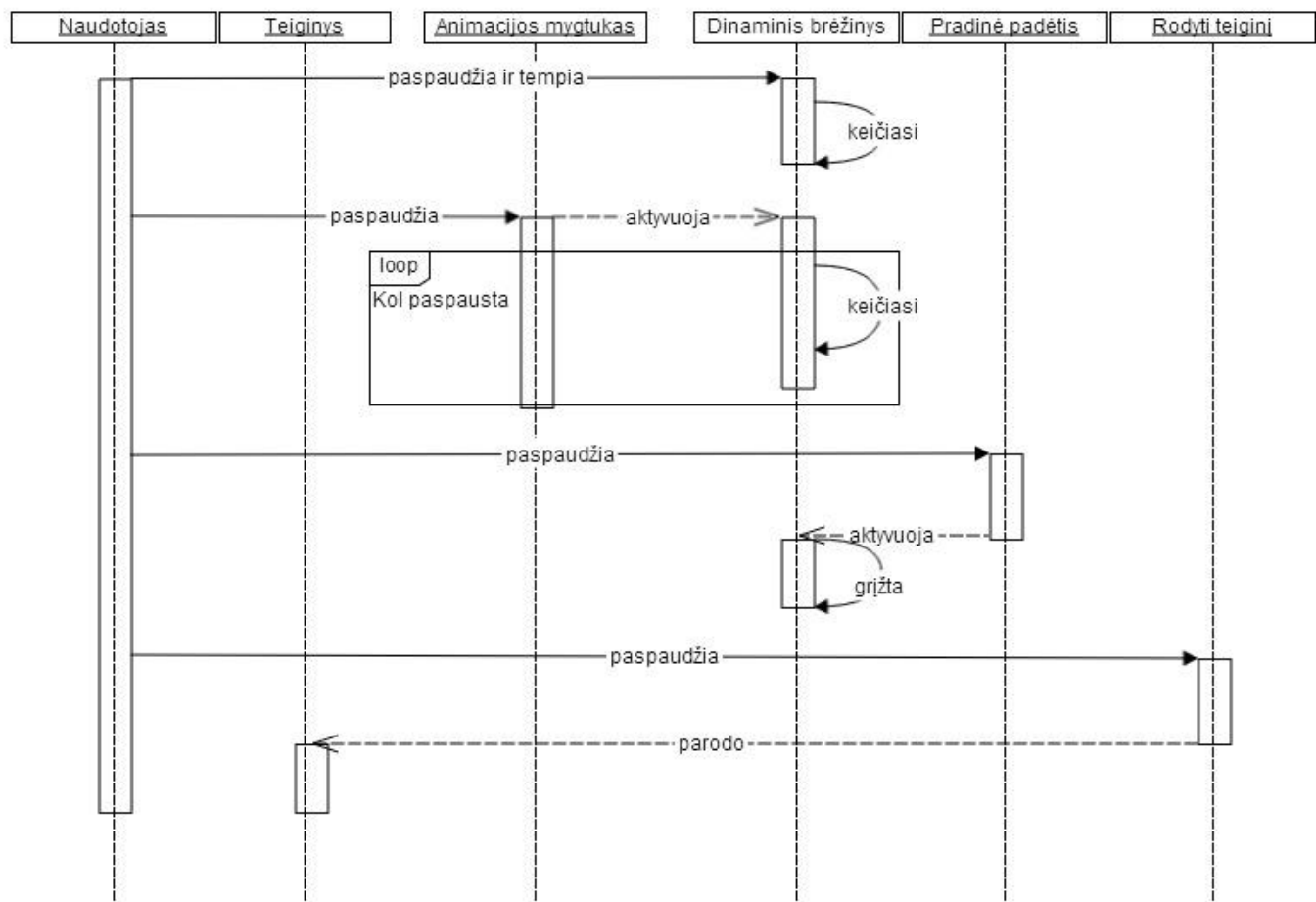
4) *Įrodymo arba metodo* šablonų klasė. Šie šablonai naudojami, kai norima parodyti fenomeną pažingsniui, pavyzdžiui, įrodymo žingsnius,

sprendimo žingsnius ir pan. Šie šablonai turi panašius požymius, bet realizacija skiriasi ir yra daug sudėtingesnė už anksčiau išvardytus mikropasaulius. Papildomai atsiranda tik vienas požymis (objektas) – žingsnis, kuris keičia visą konstravimo procesą. Mikropasaulio objektų sąveika pavaizduota sekų diagramoje (17 pav.).

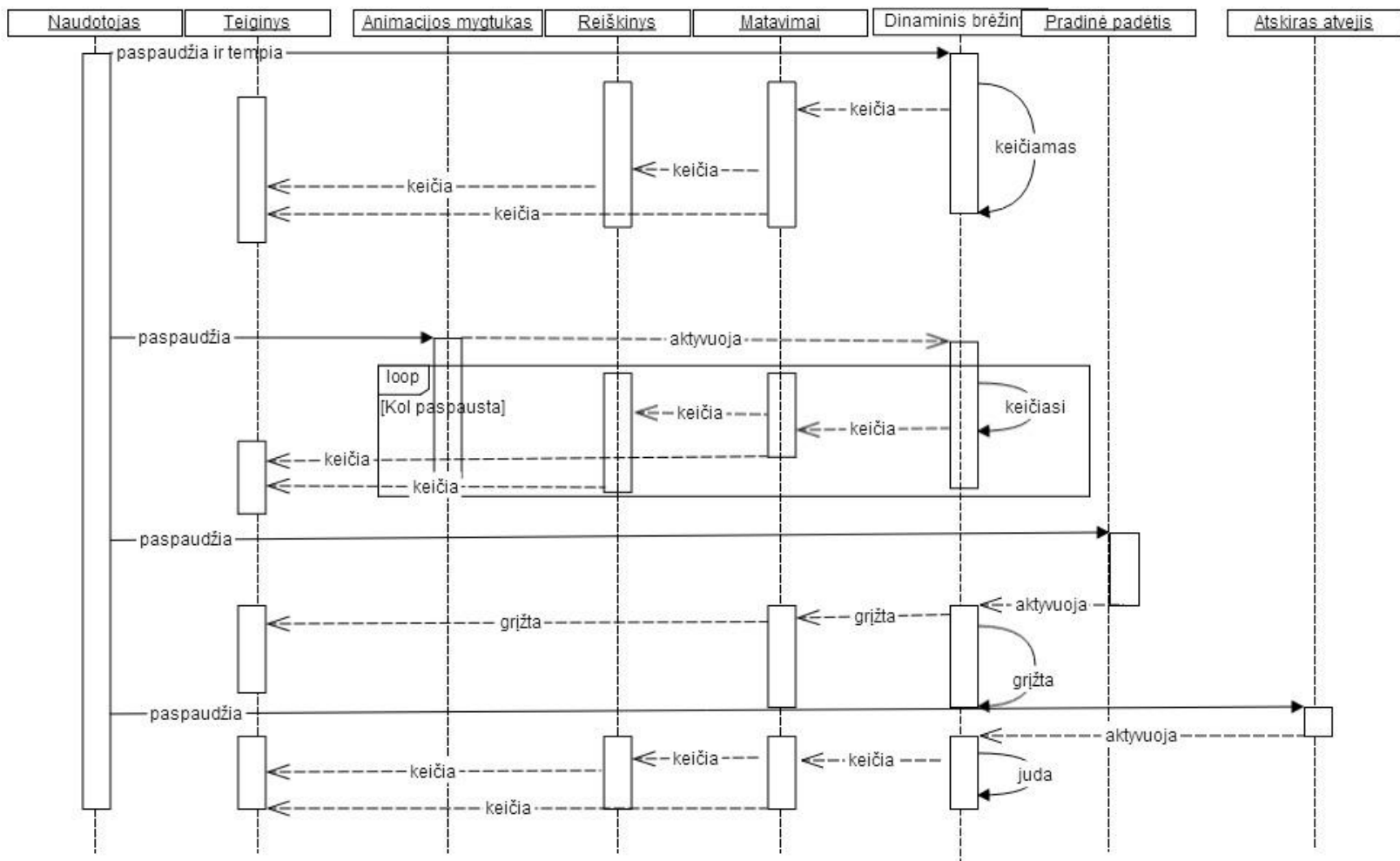
Galima būtų išskirti dar vieną šablonų klasę – *aktyvių užduočių* šablonų klasę. Kiekviena užduotis gali turėti skirtingus sprendimus ir tam reikia skirtingų šablonų. Daugelį užduočių galima realizuoti naudojant aprašytus šablonus.

Pateiktos sekų diagramos matematikos mokytojui gali būti sunkiai skaitomos, nors jos parodo visus mikropasaulyje galimus veiksmus. Dėl šios priežasties mokytojui pateikiami paprasti šablonai su tuščiais laukais, kuriuos jis turi užpildyti tekstu arba piešiniu (ranka ar kompiuteriu, priklausomai nuo mokytojo patirties). Šablonai pritaikyti vartotojui pateikti 2 priede.

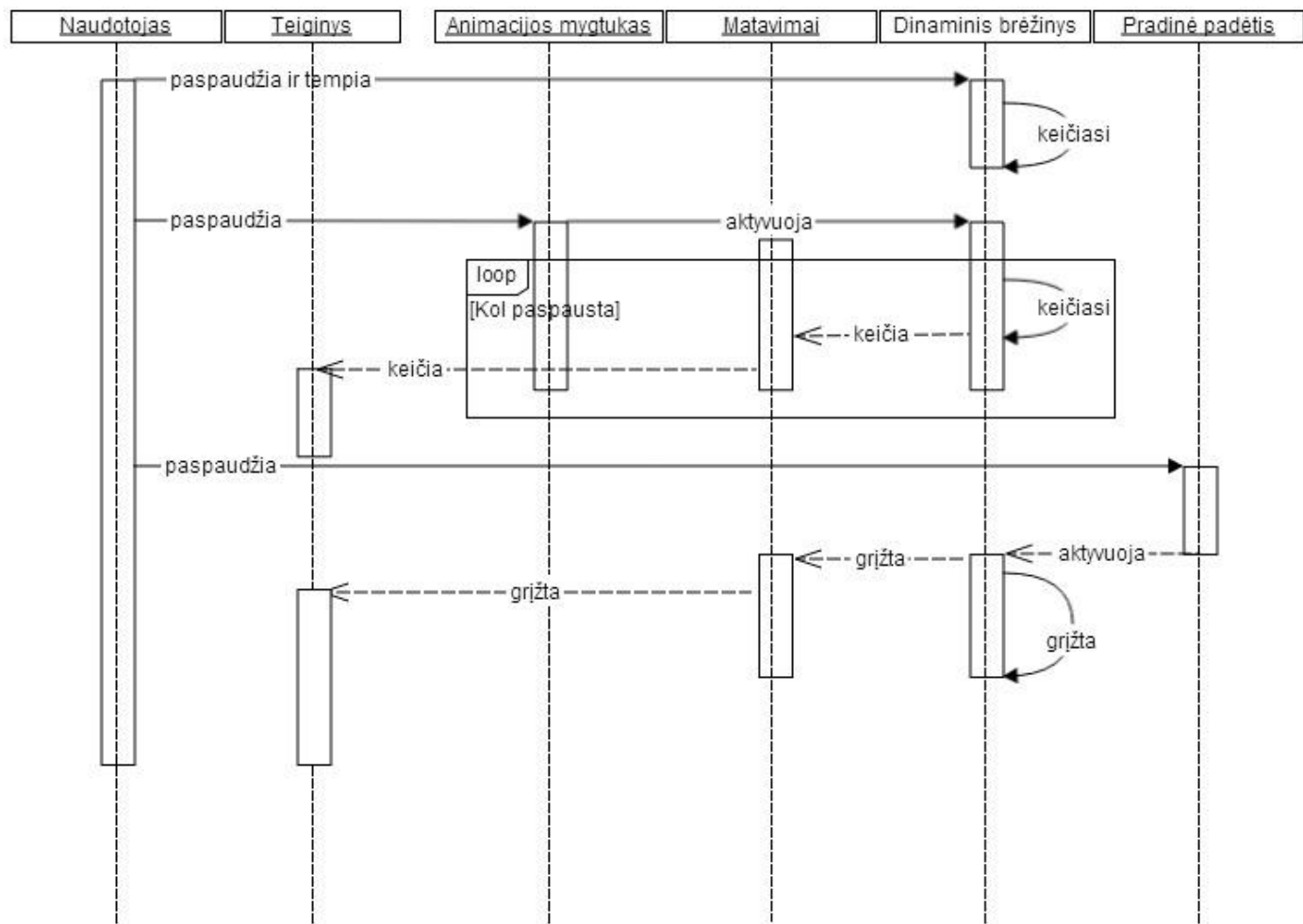
Kitas žingsnis – naudojant aprašytus šablonus rašyti interaktyvių mikropasaulių kūrimo scenarijus. Čia reikia taikyti abstrakčiųjų duomenų tipų teoriją.



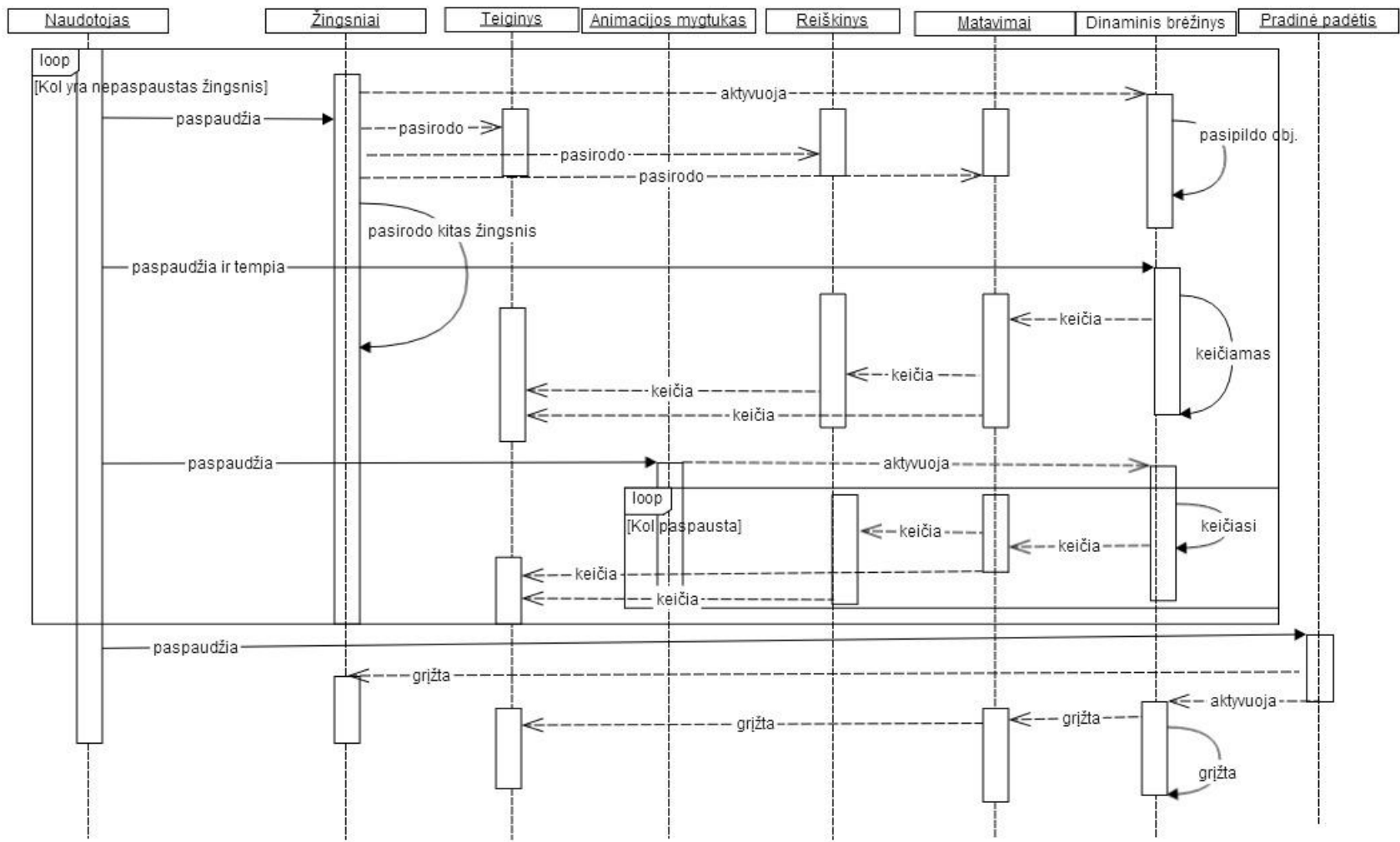
14 pav. Koncepto pristatymo sekų diagrama



15 pav. Savybės pristatymo sekų diagrama



16 pav. Teoremos arba aksiomos pristatymo sekų diagrama;



17 pav. Pažingsninio šablono sekų diagrama

3.8. ADT realizacija interaktyvių geometrijos mikropasaulių scenarijuose

Įgyvendinant antrąjį interaktyvaus vizualizavimo modelio sudarymo reikalavimą (žr. 3.3 skyrių), reikia parinkti tokį informatikos metodą, kuris leistų įgyvendinti modelį bet kurioje dinaminės geometrijos sistemoje. Šiame skyriuje pateikiamas scenarijaus aprašymo metodas abstrakčiuoju duomenų tipu naudojant heterogeninę algebrą.

Dinaminę geometriją galima būtų apibrėžti kaip aplinką, kurioje sąveikaujant keliems duomenų tipams (geometriniams objektams, tekstams ir matavimams) kuriami interaktyvūs mikropasauliai [JD14]. Duomenų tipams dinaminėje geometrijoje apibrėžti naudojami abstraktieji duomenų tipai.

Naudojant dažnai informatikoje taikomu principu „skaldyk ir valdyk“, pirmiausia aprašomi abstraktieji duomenų tipai, kurie naudojant heterogeninę algebrą sujungiami į duomenų tipą *din.geom*. ADT aprašymui naudojami formalūs heterogeninės algebras aprašymo metodai, kurie paremti specifikacijomis [EM84].

Nagrinėjant dinaminės geometrijos aplinkas išskiriami trys galimi duomenų tipai: *geom.obj*, *measurement*, *text.blocks*. Jie visi aprašomi kaip abstraktieji duomenų tipai.

Naujų duomenų tipų specifikacijas galima sudaryti sistemingai, pateikiant operacijų rezultatus lentelėse. Kiekvienai transformuojančiai ir atspindinčiai operacijai rašoma tiek aksiomų, kiek yra generuojančių operacijų su tai (apibrėžiamai) operacijai tinkamomis reikšmėmis.

3.8.1. Abstraktusis duomenų tipas *geom.obj*

Pirmiausia aprašomas pagrindinis ir plačiausias abstraktusis duomenų tipas – *geom.obj* (geometriniai objektai). Homogeninė algebra naudojama geometrijos objektams, kuriuos galima sukurti dinaminėje geometrijoje, aprašyti.

Daugelis šio tipo operacijų yra geometrinių objektų konstravimo komandos, taigi jo specifikacijai naudojamas homogeninės algebros aksiomatinis metodas.

Reikšmių aibę sudaro begalinė geometrinių objektų aibė, kurios visos reikšmės sukonstruojamos naudojant generuojančias operacijas. Kadangi konstravimas pagrįstas „tėvų-vaikų“ saitais, tai aprašomo duomenų tipo reikšmę sudaro visi geometriniai objektai, kurių pagalba jis buvo sukonstruotas (visi tėvai ir protėviai). Todėl reikšmių aibę sudaro objektai nuo taško iki sudėtingos geometrinės konstrukcijos (pavyzdžiui, trikampio pusiauakraštinės, dviejų apskritimų liestinės ir t. t.). Aprašoma keletas šio tipo konstantų iš aibės R_1 , kurios padeda aprašyti šio tipo operacijas ir aksiomas. Konstantų vardai atspindi sukonstruotą geometrinį objektą:

```
no, A, segment_AB, ray_AB, line_AB, vector_AB, arc_AB,
arc_ABC, circle_AB, circle.sector_ABC,
circle.segment_ABC, circle.sector_AB, circle.segment_AB,
circ.interior_AB, pol.interior_Ak.
```

Šios konstantos bus naudojamos ir kituose aprašomuose ADT.

Kadangi šis duomenų tipas turi be galo daug reikšmių, tai naudojami kintamieji $r, l: \text{geom.obj}$. Kintamieji sumažina aksiomų skaičių. Operacijos suskirstomos į dvi klases F_1 , kur aprašomos generuojančios operacijos ir F_2 – transformuojančios ir atspindinčios operacijos. Suskirstymas į šias dvi klases padės surašyti aksiomas.

Operacijų sintaksė (18 pav.):

```
F1= {op_point: →geom.obj
select: geom.obj →geom.obj
hide: geom.obj → geom.obj
t_set.mirror: geom.obj → geom.obj
t_set.centre: geom.obj → geom.obj
op_segment: geom.obj × geom.obj → geom.obj
```

```

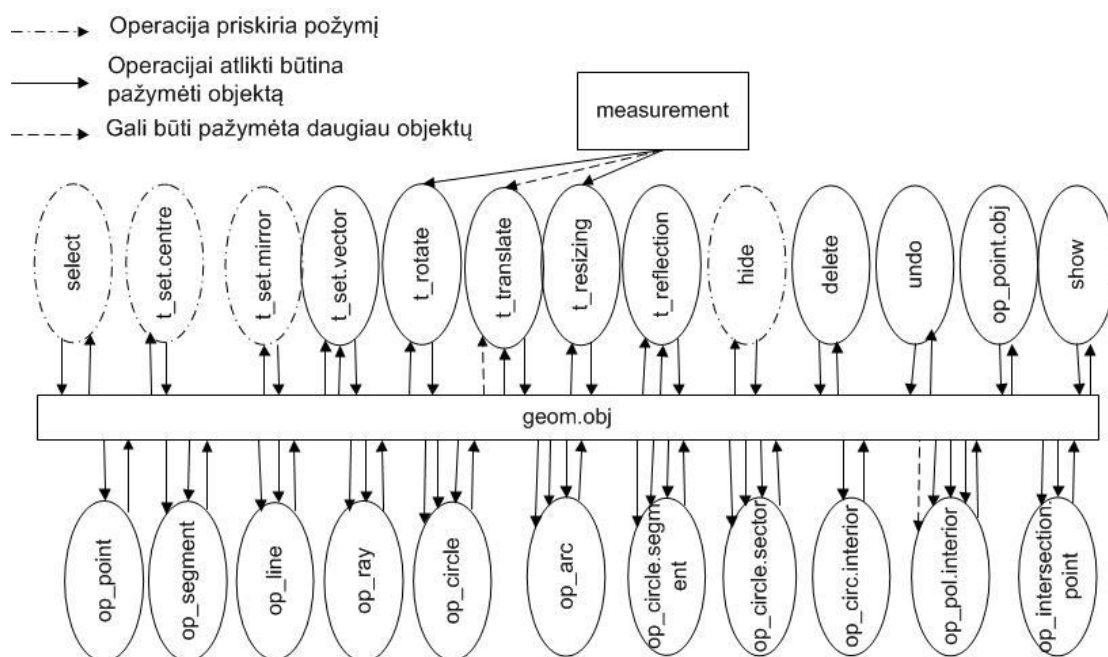
op_ray: geom.obj × geom.obj → geom.obj
op_line: geom.obj × geom.obj → geom.obj
op_circle: geom.obj × geom.obj → geom.obj
op_arc: geom.obj × geom.obj × geom.obj → geom.obj
op_circle.sector: geom.obj × geom.obj × geom.obj →
geom.obj
op_circle.segment: geom.obj × geom.obj × geom.obj →
geom.obj
op_circ.interior: geom.obj → geom.obj
op_pol.interior: geom.obj × geom.obj × ... × geom.obj →
geom.obj
t_set.vector: geom.obj × geom.obj → geom.obj
t_translate: geom.obj × ... × geom.obj → geom.obj
t_reflection: geom.obj × geom.obj → geom.obj
t_resizing: geom.obj × measurement → geom.obj
t_rotate: geom.obj × measurement → geom.obj
t_translate: geom.obj × measurement → geom.obj}
F2={undo: geom.obj → geom.obj
op_point.obj: geom.obj → geom.obj
op_intersection.point: geom.obj × geom.obj → geom.obj
delete: geom.obj → geom.obj}

```

Kai kurios iš F1 klasės operacijų nesugeneruoja naujų reikšmių, o tik priskiria jiems požymius:

- Operacija *select* sukuria naują duomenų tipo reikšmę su požymiu „pasirinkta“. Visas kitas operacijas galima atlikti tik su reikšmėmis, turinčiomis šį požymį. Šios operacijos rezultatas žymas su viršutiniu indeksu 1.
- Operacija *hide* sukuria naują reikšmę su požymiu „paslėptas“. Rezultatas žymimas su viršutiniu indeksu 2.

- Operacija `show` sukuria naują reikšmę su požymiu „rodoma“, t. y. matoma reikšmė. Ši operacija yra atvirkščia operacijai `hide`.
- Operacija `t_set.mirror` sukuria naują reikšmę su požymiu „simetrijos tiesė“. Šios operacijos rezultatas naudojamas atspindėtam objektui kurti. Operacijos rezultatą žymėsime viršutiniu indeksu 3.
- Operacija `t_set.centre` sukuria naują reikšmę su požymiu „posūkio centras“. Šios operacijos rezultatas naudojamas pasuktam objektui gauti. Operacijos rezultatą žymėsime viršutiniu indeksu 4.



18 pav. ADT *geom.obj* sintaksės grafinis vaizdavimas

Naudojant generuojančias operacijas iš F1 klasės sukuriami visi duomenų tipo *geom_obj* reikšmių aibė. Kai kurios F1 klasės operacijos yra generuojančios nors naudoja kito tipo reikšmes: `t_rotate`, `t_resizing`, `t_translate`.

Kai kurios operacijos sukuria transformuotą (pasuktą, pastumtą, atspindėtą ar ištemptą) objektą, kuris kartu su pirmavaizdžiu sudaro naują duomenų tipo *geom.obj* reikšmę. Naujoji konstrukcija yra susieta „tėvų-vaikų“ ryšiais. Keičiant tėvus, keičiasi ir vaikai. Tokiu atveju gaunama gana sudėtinga *geom.obj* duomenų tipo reikšmė – geometrinė konstrukcija.

Operacija `t_set.vector` yra generuojanti, nes sukuria naują duomenų tipo reikšmę – kryptinę atkarpą, vektorių su požymiu „paslėptas“.

Operacijų F2 klasėje aprašomos transformuojančios ir atspindinčios operacijos. Operacija `op_intersection.point` yra transformuojanti, nes nesukuria naujos duomenų tipo reikšmės, o dviejų objektų sankirtą fiksuoja jau turima duomenų tipo reikšme – tašku. Be to, šią operaciją galima pakeisti generuojančia operacija `op_tasikas`. Kiekvienai transformuojančiai operacijai surašytos lentelės su visomis generuojančiomis operacijomis pateikiamos 3 priede.

Iš transformuojančių operacijų lentelių surašomos aksiomos termiais. Aprašyme naudosime *geom.obj* tipo kintamąjį *r*.

ADT geom.obj semantika:

```
op_intersection.point(no,no)=no
op_intersection.point(no, op_point(A))=?
op_intersection.point(op_point(A), op_point(B))=?
op_intersection.point(op_point(A), r1)=?
op_intersection.point(r1, l1)=E
undo(select(r))=r
undo(select(hide(r)))=select(r)
undo(select(op_point(A)))=select(r)
undo(select(op_segment(A,B)))=select((A,B))
undo(select(op_line(A,B)))=select((A,B))
undo(select(op_ray(A,B)))=select((A,B))
undo(select(op_circle(O,B)))=select((O,B))
undo(select(op_circle(O,B)))=select((O, segment_AB1))
undo(select(op_arc(A,B,C)))=select((A,B,C))
undo(select(op_arc(A,B)))=select((A,B))
undo(select(circle.sector_ABC))=select(arc_ABC)
undo(select(circle.sector_AB))=select(arc_AB)
undo(select(circle.segment_ABC))=select(arc_ABC)
undo(select(circle.segment_ABC))=select(arc_AB)
```

```

undo(select(op_circ.interior (O,B)))=select(circle_OB)
undo(select(op_pol.interior (Ak)))=select((Ak))
undo(select(r2))=select(r)
undo(select(delete (r1))=select(r)
undo(select(t_set.vector(A,B)=select(A,B)
undo(select(t_set.mirror(A,B))=select(segment_AB)
undo(select(t_set.mirror(A,B))=select(line_AB)
undo(select(t_set.mirror(A,B))=select(ray_AB)
undo(select(t_set.centre (A))=select(A)
undo(select(t_translate (r))=select(r)
undo(select(t_reflection (r,ray_AB))= select(r)
undo(select(t_reflection (r,line_AB))= select(r)
undo(select(t_reflection (r,segment_AB))= select(r)

op_point.obj(no)=no
op_point.obj(A1)=A1
op_point.obj(segment_AB1)=A1
op_point.obj(ray_AB1)=A1
op_point.obj(line_AB1)=A1
op_point.obj(circle_AB1)=A1
op_point.obj(arc_ABC1)=A1
op_point.obj(arc_AB1)=A1

delete(no)=no
delete(r1)=no

```

ADT *geom.obj* realizacijos pavyzdžiai

Pateiksime keletą realizacijų termiais pavyzdžių.

1) Atkarpos vidurio taško M konstravimas:

```

op_intersection.point(op_segment(op_intersection.point(op
_circle(A1, B1), circle(B1, A1))), op_segment(A1, B1))=M

```

2) Atkarpos vidurio statmens konstravimas:

```
op_segment(op_intersection.point(op_circle(A1, B1),  
circle(B1, A1)))=segment_CD
```

3) Lygiakraščio trikampio konstravimas:

```
op_segment(op_intersection.point(op_circle(A1, B1),  
op_circle(B1, A1), A1), A1, B1)= triangle_ABC
```

4) Trikampio kraštinės pusiauakraštinės konstravimas:

```
op_segment(op_intersection.point(op_segment(op_intersecti  
on.point(op_circle(A1, B1), circle(B1, A1))),  
op_segment(A1, B1), C1)=segment_CM
```

Pateiksime keletą realizacijos pavyzdžių dinaminėje geometrijoje Geometer's Sketchpad (19 pav.). Kadangi duomenų tipo *geom.obj* reikšmės yra objektai, kurių konstravimas (operacijos) pagrįstas „tėvų-vaikų“ ryšiais ir atliekamų žingsnių eiliškumu, tai realizaciją aprašysime žingsniais.

(i) atkarpa

1. `op_point(no)=A`
2. `op_point(no)=B`
3. `select(A) = A1`
4. `select(B) = B1`
5. `op_segment(A1,B1) = segment_AB`

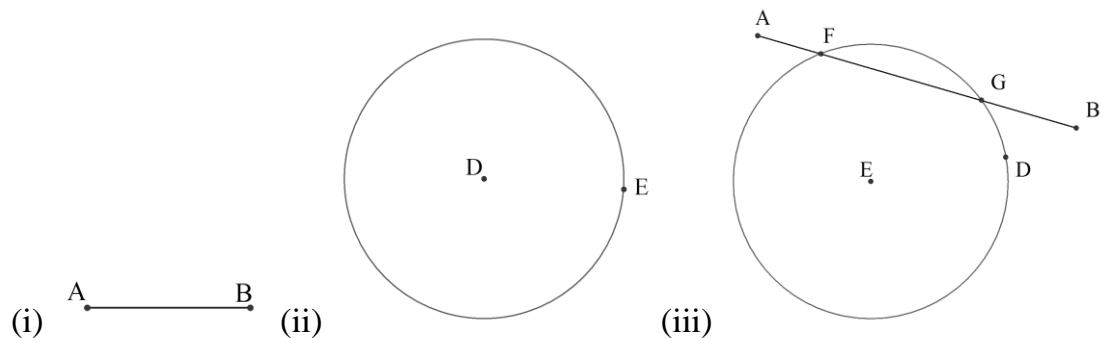
(ii) apskritimas

1. `op_point(no)=E`
2. `op_point(no)=D`
3. `select(E) = E1`
4. `select(D) = D1`
5. `op_circle(E,D) = circle_ED`

(iii) tiesės ir apskritimo sankirtos taškas

1. `op_point(no)=A`

2. $op_point(no) = B$
3. $select(A) = A^1$
4. $select(B) = B^1$
5. $op_segment(A^1, B^1) = segment_AB$
6. $op_point(no) = E$
7. $op_point(no) = D$
8. $select(E) = E^1$
9. $select(D) = D^1$
10. $op_circle(E, D) = circle_ED$
11. $op_intersection.point(segment_AB, circle_ED) = (F, G)$



19 pav. Atkarpos, apskritimo, susikirtimo taško scenarijų realizacijų pavyzdžiai.

3.8.2. Abstraktusis duomenų tipas *measurement*

Šiame skyrelyje apibrėžiamas abstraktusis duomenų tipas *measurement*. Jo reikšmių aibę sudaro parametrai, ilgio ir kampo matavimai be arba su matavimo vienetais. Iš esmės tai realiųjų skaičių aibė su jiems priskirtais matavimų vienetų žymenimis:

$$R2 = \{ \{real\} \times \{no, cm, inches, pixel, degree, direct degree\} \}$$

Formalizuodami pažymėkime baigtinės aibės $\{no, cm, inches, pixel, degree, direct degree\}$ elementus e_j , kai $j = 1, \dots, 7$. Taigi,

$R2 = \{ \{real\} \times \{e_j, i=1 \dots 7\} \}$, o gautus aibių Dekarto sandaugos rezultatus pažymėsime m_{ij} , $i=1, 2, \dots, j=1, \dots, 7$. Tuomet, $R = \{m_{ij}, i=1, 2, \dots, j=1, \dots, 7\}$.

Operacijų aibė išskiriama į dvi klases: F3 – generuojančių ir F4 – transformuojančių ir atspindinčių operacijų. Generuojančių operacijų aibę sudaro unarinės ir binarinės operacijos. Dalis (*sign'+' , sign'-' , add, subtract, divide, multiply*) jų yra tokios pačios, kaip ir realiųjų skaičių duomenų tipo. Atspindinčios F4 klasės operacijos sugeneruoja *measurement* tipo reikšmes iš *geom.obj* tipo reikšmių.

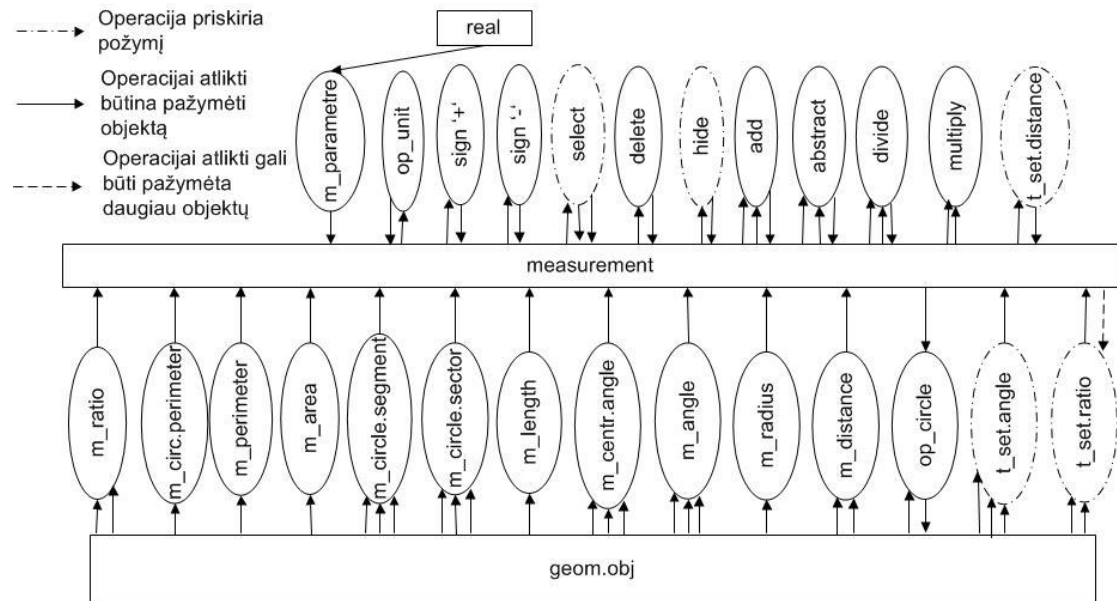
Operacijų sintaksė (20 pav.):

```
F3 = { m_parametre: → real
op_unit: real → measurement
t_set.distance: measurement →measurement
delete: measurement → measurement
select: measurement → measurement
hide: measurement → measurement
sign'+': measurement → measurement
sign'-': measurement → measurement
add: measurement × measurement → measurement
subtract: measurement × measurement → measurement
multiply: measurement × measurement → measurement
divide: measurement × measurement → real}
F4 = {undo: measurement → measurement
m_length: geom.obj → measurement
m_distance: geom.obj × geom.obj → measurement
m_ray: geom.obj → measurement
m_angle: geom.obj × geom.obj × geom.obj → measurement
m_central.angle: geom.obj × geom.obj × geom.obj →
measurement
m_circle.sector: geom.obj → measurement
m_circle.segment: geom.obj → measurement
m_area: geom.obj → measurement
```

```

m_perimeter: geom.obj × geom.obj → measurement
m_circ.perimeter: geom.obj → measurement
m_ratio: geom.obj × geom.obj → measurement
t_set.angle: geom.obj × geom.obj × geom.obj → measurement
t_set.ratio: geom.obj × geom.obj → measurement}

```



20 pav. ADT *measurement* sintaksės grafinis vaizdavimas

Visos *measurement* tipo reikšmės gali būti sugeneruojamos F3 klasės operacijomis bei daugumos F4 klasės atspindinčiomis operacijomis: Generuojančioms operacijoms priklauso ir operacijos, priskiriančios požymius:

- *select*, *hide* sukuria naujas šio tipo reikšmes su atitinkamais požymiais „pasirinktas“ ir „paslėptas“. Jų rezultatus atitinkamai žymėsime su viršutiniu indeksu 1 ir 2.
- *t_set.angle* ir *t_set.ratio* yra generuojančios *measurement* tipo operacijos, bet yra atspindinčios *geom.obj* tipo operacijos. Jos sukuria *measurement* tipo reikšmes iš *geom.obj* tipo reikšmių su atitinkamais požymiais „nustatytas kampas“ ir „nustatytas santykis“. Šių operacijų rezultatus atitinkamai žymėsime su viršutiniu indeksu 5 ir 6.
- *t_set.distance*. Operacijos *t_set.distance* rezultatą žymėsime su viršutiniu indeksu 7.

Lentelė transformuojančiai F4 klasės operacijai undo pateikiama 3 priede. Lentelėi ir aksiomoms surašyti naudojamos jau išrašytos *geom.obj* tipo konstantos A, B, C ir O bei generuojančios operacijos, *measurement* tipo kintamieji m, n, x, y ir *real* tipo kintamasis a.

```

undo(m_parametre(no))=no
undo(op_unit(a))=a
undo(sign'+'(m))=m
undo(sign'-'(m))=m
undo(t_set.distance(m1))=m1
undo(select(m))=m
undo(hide(m))=m
undo(m_length(op_segment(A,B)))=op_segment(A,B)
undo(m_distance(op_point(A),op_point(B)))=op_point(A),op_
point(B)
undo(m_distance(op_point(A),op_segment(AB)))=op_point(A),
op_segment(AB))
undo(m_distance(op_point(A),op_ray(AB)))=op_point(A),
op_ray(AB)
undo(m_distance(op_point(A),op_line(AB)))=op_point(A),
op_line(AB)
undo(m_radius(op_circle(OB)))=op_circle(OB)
undo(m_angle(op_point(A),op_point(B),
op_point(C)))=op_point(A),op_point(B),op_point(C)
undo(m_centr.angle(op_point(A),op_point(B),op_circle(O,C)
))=op_point(A),op_point(B),op_point(C)
undo(m_circle.sector(op_point(A),op_point(B),op_circle(O,
C)))=op_point(A),op_point(B),op_circle(O,C)
undo(m_circle.segment(op_point(A),op_point(B),op_circle(O
,C)))=op_point(A),op_point(B),op_circle(O,C)
undo(m_area(op_circle(O,C)))=op_circle(O,C)

```

```

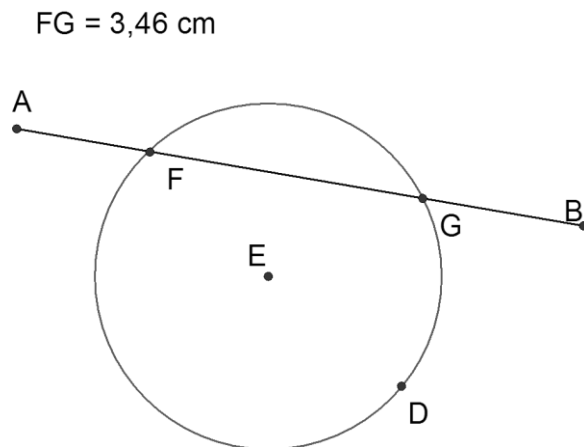
undo(m_area(op_circ.interior(O,C)))=op_circ.interior(O,C)
undo(m_area(op_pol.interior(Ak)))=op_pol.interior(Ak)
undo(m_perimeter(op_pol.interior(Ak)))=op_pol.interior(Ak)
undo(m_circl.perimeter(op_circle(O,C)))=op_circle(O,C)
undo(m_circ.perimeter(op_circ.interior(O,C)))=op_circ.int
erior(O,C)
undo(m_ratio(op_segment(A,B),op_segment(C,D)))=op_segment
(A,B)
undo(t_set.angle(op_point(A),op_point(B),op_point(C)))=op
_point(A),op_point(B),op_point(C)
undo(t_set.ratio(divide(x,y)))=divide(x,y)

```

ADT *measurement* realizacijos pavyzdžiai

Realizaciją pateikiame „Gepmeter Sketchpad“ programoje. Šio tipo realizacija glaudžiai susieta su *geom.obj* tipo realizacija (21 pav.). Norint išmatuoti, reikia sukurti, ką išmatuoti. Tarkime, reikia išmatuoti stygos, kuri susidaro, kai apskritimas ir atkarpa, aprašyti ankstesniame pavyzdyje, susikerta:

1. `op_point(no)=A`
2. `op_point(no)=B`
3. `select (A) = A1`
4. `select (B) = B1`
5. `op_segment (A1,B1) = segment_AB`
6. `op_point(no)=E`
7. `op_point(no)=D`
8. `select (E) = E1`
9. `select (D) = D1`
10. `op_circle(E,D) = circle_ED`
11. `op_intersection.point(segment_AB, circle_ED) = (F,G)`
12. `m_distance(F,G)=m`



21 pav. Stygos ilgio matavimo realizacijos „Geometer’s Sketchpad“ pavyzdys

3.8.3. Abstraktusis duomenų tipas *text.block*

Literatūroje aprašomi simbolinis (*char*) ir eilutės (*string*) tekstiniai duomenų tipai. Tačiau dinaminėje geometrijoje patogiau aprašyti naują abstraktųjį duomenų tipą *text.block*, nes vartotojui nėra svarbu, kaip simboliai koduojami ir įrašomi kompiuteryje. Vartotojui svarbu tik galutinis rezultatas – tekstinis objektas, išreiškiantis mintį.

Žiūrėdami į tekstą kaip į objektą ir atsižvelgdami į abstrakčiojo duomenų tipo reikalavimus, aprašysime duomenų tipą, kuris apima reikšmes, išreiškiančias informaciją žodžiais, frazėmis, sakiniais, matematiniais žymenimis ir reiškiniiais. Toks tekstas yra renkamas klaviatūra ar papildomomis kompiuterio (programos) priemonėmis. Aprašant šį tipą nesigilinama į kiekvieno teksto, kiekvieno simbolio kodavimą. Tiesiog į teksto vienetą žiūrima kaip į vientisą objektą. Jų operacijos aprašomos kaip operacijos tarp tokių tekstinių objektų. Pavyzdžiui, frazės „lygybė“, „ $a = a$ “, „yra teisinga“ yra objektai, kuriuos galima pašalinti, pažymėti (pasirinkti, jei norime atlikti operacijas su jais), paslėpti ir sujungti. Pastaroji operacija yra įdomesnė: pažymėję minėtame pavyzdyje pateiktus tekstinius objektus ir pritaikę operaciją sujungi, gausime vieną naują objektą „lygybė $a = a$ yra teisinga“. Tačiau frazė „lygybė“ taip pat turi iš kažkur atsirasti. Kadangi galima surinkti bet kokią simbolių seką klaviatūra tekstiniame objekte, tai

naudojamas duomenų tipas *char* su dviem operacijom *c_add*, *c_delete*, *c_select*. Operacija *c_add* yra atspindinti *char* tipo operacija, kuri šio tipo reikšmes atspindi į naują duomenų tipo *text.block* reikšmę.

Taigi abstraktusis duomenų tipas *text.block* aprašomas naudojant heterogeninės algebros metodus, nes sujungiami du tipai su generuojančiomis ir atspindinčiomis operacijomis.

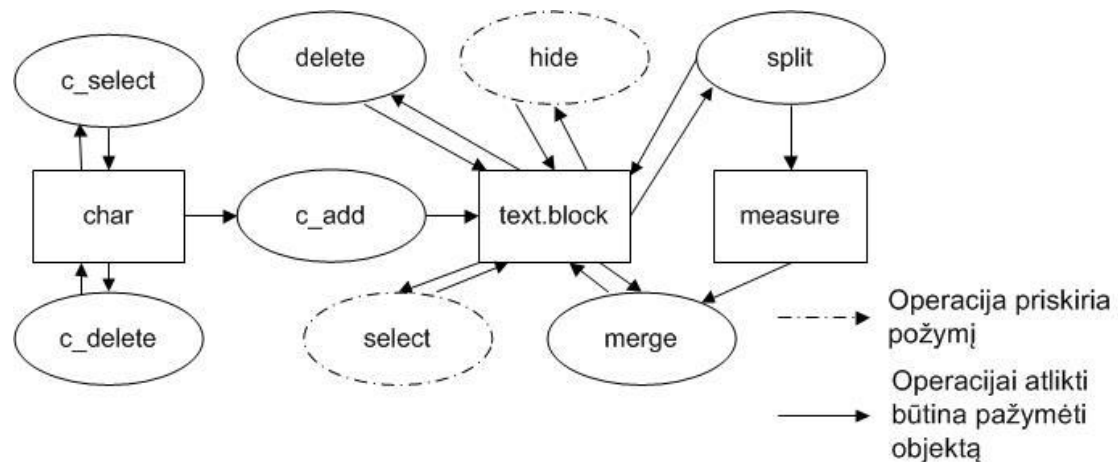
Tekstų duomenų tipo reikšmių aibė yra begalinė aibė, sudaryta iš tekstinių objektų: $R3 = \{no, empty, t1, t2, \dots\}$, o operacijų aibė yra baigtinė. Turime dvi klases operacijų: *F5* – generuojančių ir *F6* – transformuojančių ir atspindinčių operacijų. Aksiomoms aprašyti naudosime *text.block* tipo kintamąjį *t*, *measurement* tipo kintamąjį *m*.

Operacijų sintaksė (22 pav.):

```

F5={empty: → text.bock
c_add: char → text.bock
select: text.bock → text.bock
hide: text.bock → text.bock
merge: measurement × text.bock × text.bock→ text.bock
F6={split: text.bock → mesurement × text.bock
delete: text.bock → text.bock
undo: text.bock → text.bock }

```



22 pav. ADT *text.block* ryšių su ADT *measurement* grafinis vaizdavimas

F5 klasės operacijos `select` ir `hide` aprašytos prie *geom.obj* tipo ir priskiria reikšmėms požymius. Kitos šios klasės operacijos sugeneruoja visas *text.block* tipo reikšmes.

F6 klasės operacijos yra transformuojančios ir atspindinčios. Tokias turime tik dvi operacijas `split` ir `undo`. Jų semantikai aprašyti naudojamas *measurement* tipo kintamasis `m` ir *text.block* kintamasis `t`. Operacijų lentelės pateikiamos 3 priede (8, 9 lentelės). Iš lentelių aprašomos aksiomos:.

```
split(merge(m,t))=m,t
undo(empty)=?
undo(c_add(t))=empty
undo(select(t))=t
undo(hide(t))=t
undo(split(merge(m,t)))=merge(m,t)
undo(delete(t))=t
```

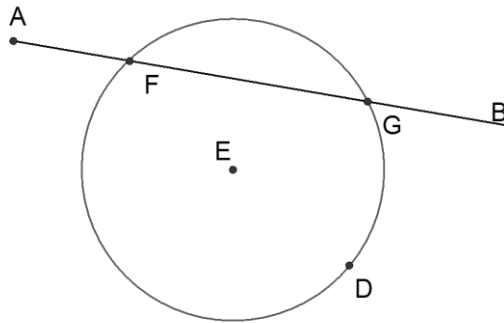
ADT *text.block* realizacijos pavyzdys

Sujungimo operacijos `merge` realizacijos pavyzdys „Geometer’s Sketchpad“. Pasinaudojama anksčiau nagrinėtu pavyzdžiu. Tarkime, reikia užrašyti paaiškinimą: „Stygos GF ilgis yra m cm“, kur m kinta keičiant brėžinį (23 pav.).

1. `op_point(no)=A`
2. `op_point(no)=B`
3. `select(A) = A1`
4. `select(B) = B1`
5. `op_segment(A1,B1) = segment_AB`
6. `op_point(no)=E`
7. `op_point(no)=D`
8. `select(E) = E1`
9. `select(D) = D1`
10. `op_circle(E,D) = circle_ED`

11. `op_intersection.point(segment_AB, circle_ED) = (F,G)`
12. `m_distance(F,G)=m`
13. `c_add(empty)= „Stygos GF ilgis yra“`
14. `merge („Stygos GF ilgis yra“, m)= „Stygos GF ilgis yra m cm“`

Stygos ilgis yra 3,46 cm

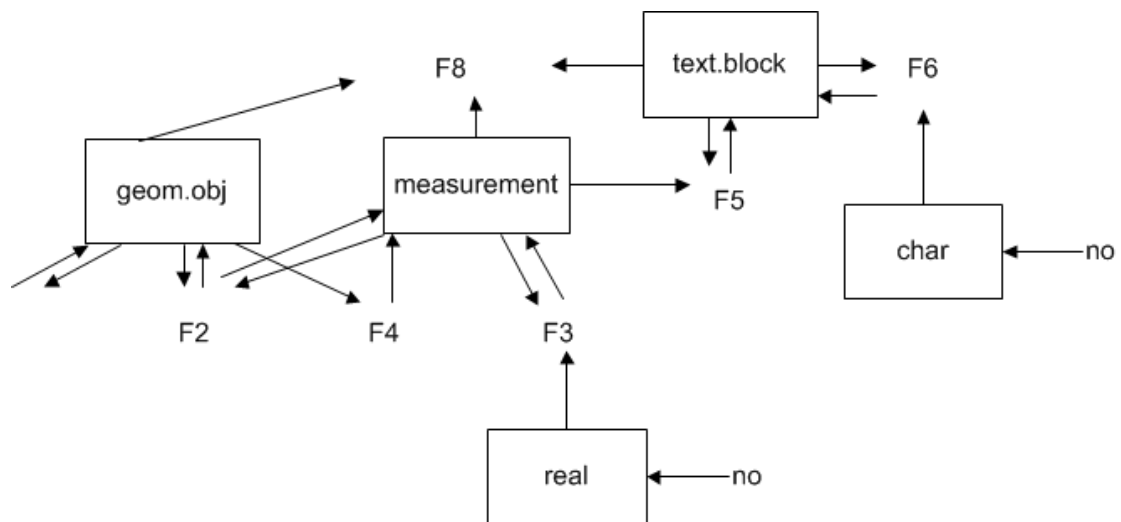


23 pav. Operacijos `merge` realizacijos „Geometer’s Sketchpad“ pavyzdys.

3.8.4. Dinaminės geometrijos duomenų tipų ryšiai

Din_geom tipui apibrėžti nebeužtenka homogeninės algebros metodų, nes *geom.obj*, *measurement* ir *text.block* siejami įvairiais ryšiais. Šis duomenų tipas aprašomas naudojant heterogeninės algebros metodą, dažnai taikomą informatikoje.

Taigi, *din_geom* tipo reikšmių aibę sudaro šių anksčiau aprašytų tipų reikšmių aibės. $R = \{R1, R2, R3\}$, kur $R1 = \{geom.obj\}$, $R2 = \{measurement\}$, $R3 = \{text.block\}$. Operacijų aibę taip pat sudaro visų anksčiau aprašytų tipų operacijos: $F = \{F1, F2, F3, F4, F5, F6\}$. Visos operacijos išrašytos prie atitinkamų duomenų tipų. Ryšiai tarp šių duomenų tipų vaizduojami diagramoje (24 pav.).



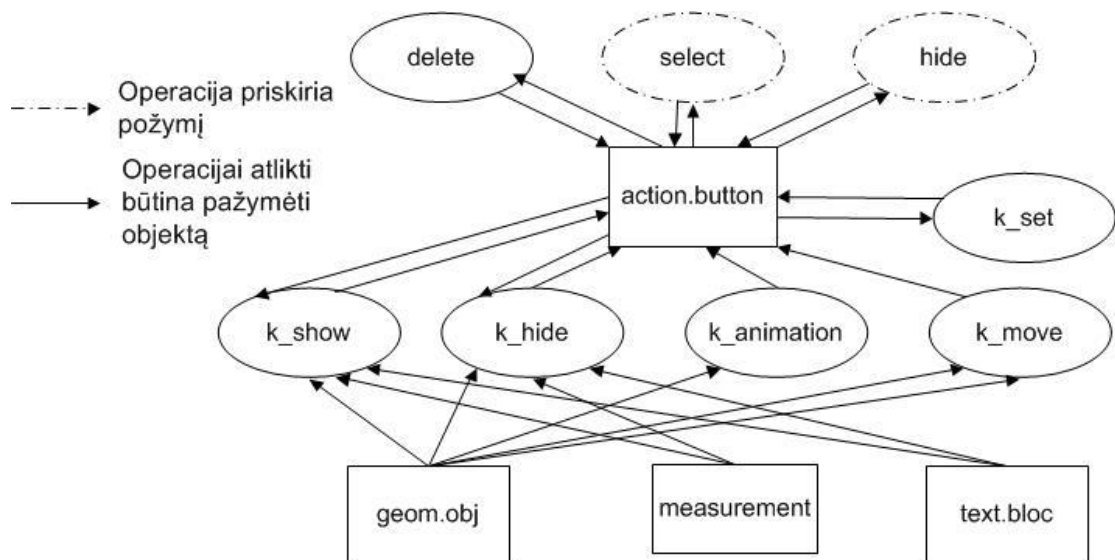
24 pav. ADT *din.geom* grafinis vaizdavimas

Aprašytasis duomenų tipas gali būti realizuojamas daugumoje dinaminės geometrijos sistemų. Tačiau kiekviena jų gali turėti priemones ir galimybes, kurių kitos neturi. Todėl, jei reikia, aprašytąjį ADT galima papildyti nauju abstrakčiuoju duomenų tipu.

3.8.5. ADT praplėtimas nauju abstrakčiuoju duomenų tipu *action.buttons*

Šiame skyrelyje aprašomas *din.geom* tipo papildymas nauju tipu *action.buttons*. Šis tipas buvo pasirinktas, nes viena iš nagrinėjamų dinaminės geometrijos sistemų „Geometer’s Sketchpad“ turi papildomų priemonių, kurios leidžia kurti patrauklesnį ir prasmingesnį interaktyvų mikropasaulį.

Pirmiausia aprašomas naujasis duomenų tipas, o po to jis integruojamas į *din.geom* tipą. Duomenų tipas *action.buttons* turi baigtinę reikšmių aibę: $R4 = \{no, bhide, bshow, banimation, bmove, bsequence\}$. Šias reikšmes sugeneruoja operacijos, kurios yra atspindinčios *din.geom* tipo operacijos.



25 pav. ADT *action.buttons* sintaksės grafinis vaizdavimas

Operacijų sintaksė (25 pav.):

F7={delete:action.button → action.button

select:action.button → action.button

hide:action.button → action.button

k_sequence:action.button → action.button

undo: action.button → action.button}

F8={k_hide: geom.obj × measurement × text.bock ×
action.button→action.button

k_show: geom.obj × matai × tekstai × action.button →
action.button

k_animation: geom.obj→ action.button

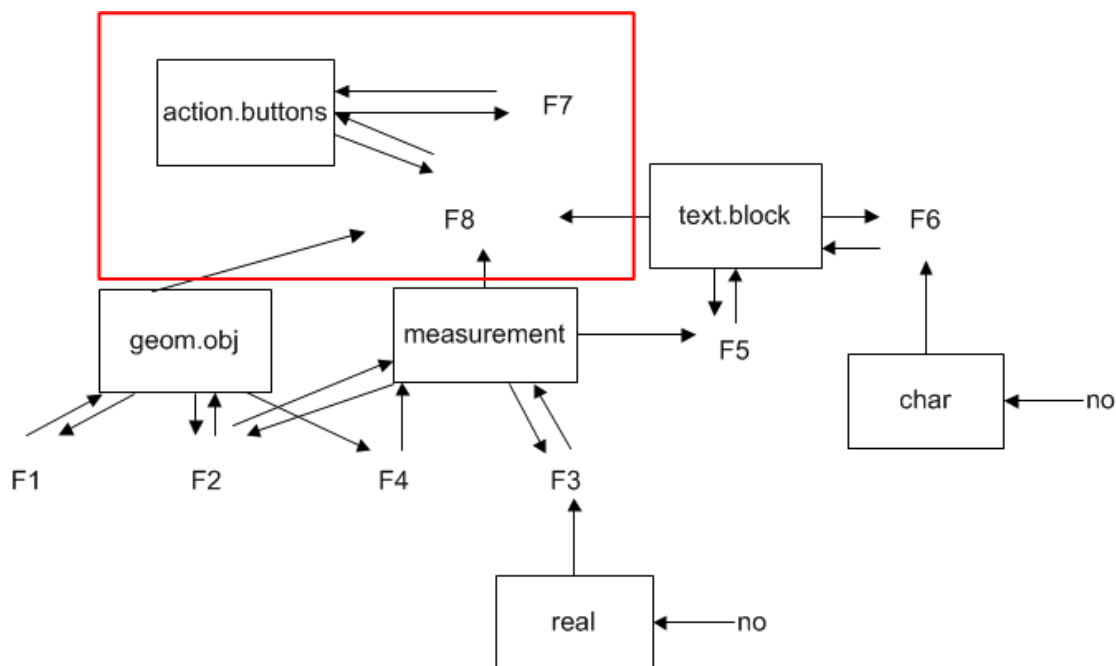
k_action: geom.obj × geom.obj → action.button}

Šio tipo operacijas suskirstysime į dvi klases šiek tiek kitaip: F7 klasei priklauso operacijos, kurios naudoja tik to tipo reikšmes, o F8 klasei priklauso operacijos, kurios naudoja kito tipo reikšmes. Operacijos iš F7 *select* ir *hide* priskiria reikšmėms požymius ir jų rezultatas atitinkamai žymimas viršutiniu indeksu 1 ir 2.

Atspindinčios anksčiau aprašytų tipų operacijos sugeneruoja šio tipo reikšmes. o tipo aksiomos naudoja operacijas iš kitų aprašytų tipų. Naudosime kintamuosius ir konstantas

```
r,A,B,C,D: geom.obj,  
t: text.bock,  
m: measurement  
a,b,c,d: action.button  
undo(k_show(a, t, m, r)) =a,t,m,r  
undo(k_hide(a, t, m, r)) =a,t,m,r  
undo(k_animation(r,no)) =r  
undo(k_animation  
(op_point(A),op_segment(B,C)))=op_point(A),op_segment(B,C  
)  
undo(k_animation (op_point(A),op_ray(B,C)))  
=op_point(A),op_ray(B,C)  
undo(k_animacija  
(op_point(A),op_line(B,C)))=op_point(A),op_line(B,C)  
undo(k_animacija  
(op_point(A),op_circle(O,B)))=op_point(A),op_circle(O,B)  
undo(k_animacija  
(op_point(A),op_arc(B,C,D)))=op_point(A),op_arc(B,C,D)  
undo(k_action (op_point(A), op_point(B))) =op_point(A),  
op_point(B)  
undo(k_sequence(a,b,c,d)) =a,b,c,d
```

Papildytą duomenų tipą pavadiname *din.geom.GS* (26 pav.).



26 pav. Praplėsto ADT *din.geom.GS* grafinis vaizdavimas

3.9. Konceptinis interaktyvaus vizualizavimo modelis

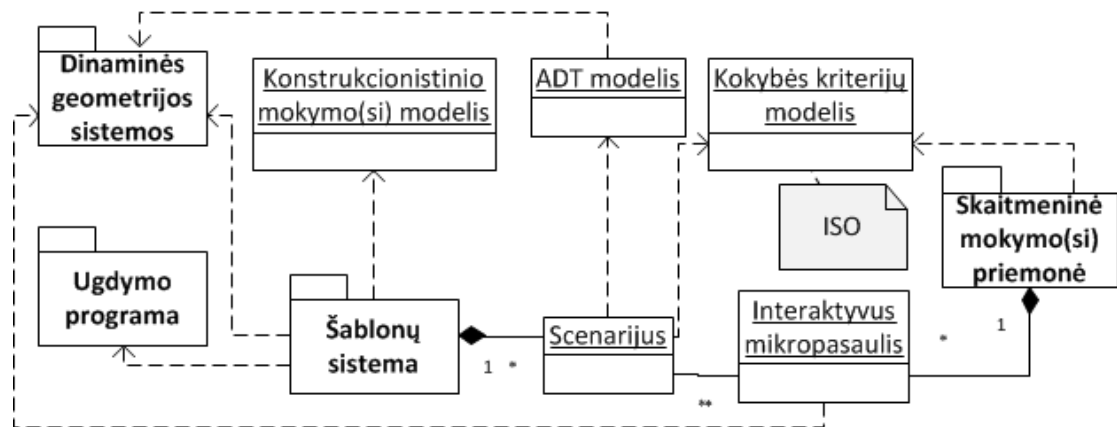
Šiame skyriuje pateikiamas bendras interaktyvaus geometrijos vizualizavimo modelis, kuris padeda kurti interaktyvius mikropasaulius atsižvelgiant į naudojamos dinaminės geometrijos sistemos technologines galimybes ir matematikos mokymo didaktiką. Šiame bendrame modelyje parodoma kiekvieno iš ankstesniuose skyriuose detalizuotų ir aprašytų modelių (konstrukcionistinio mokymosi – 3.2., kokybės kriterijų – 3.4. ir abstrakčiųjų duomenų tipų – 3.8.) vieta ir ryšiai.

Kokybiškos skaitmeninės mokymosi priemonės kūrimo procesas apima tris pagrindines fazes (27 pav.):

1) *šablonų sisteminimas*: atliekama matematikos ugdymo programų analizė, išrenkamos tinkamos vizualizuoti veiklos sritys ir sudaromas interaktyvių mikropasaulių sąrašas; atsižvelgiant į šių veiklos sričių mokymosi metodus (konstrukcionistinio mokymosi modelis), dinaminės geometrijos sistemų technologines galimybes bei vizualizavimo kriterijus (kriterijų modelis) sudaromi šablonai;

2) *formalizavimas ir scenarijai*: numatant naudojamus mokymosi metodus kiekvienos veiklos mikropasauliui pasiremiant ADT modeliu rašomas scenarijus (algoritmas), kuriame nurodoma, kas turi būti pavaizduota, koks parašytas tekstas, kas turi būti interaktyvu ir t.t.;

3) *realizacija*: scenarijus realizuojamas dinaminė geometrijos sistemoje; sukuriami mikropasauliai, kurie sujungiami į sistemą (skaitmeninę mokymo(si) priemonę).



27 pav. Interaktyvaus geometrijos vizualizavimo modelis

Modelio įgyvendinimas pavaizduotas Mikropasaulių kūrimo veiklų diagrama, kuri aprašoma ir pateikiama 3.5 skyriuje.

3.10. Skyriaus išvados ir apibendrinimas

Šiame skyriuje formalizuota ADT paremtų DGS priemonėmis sintaksė ir semantika. Pasiūlytas ADT modelis, kuris leido aprašyti interaktyviojo vizualizavimo scenarijus. Pasiūlytas interaktyvaus vizualizavimo modelis konstrukcionistiniame geometrijos mokymui(si), kuris padeda kurti interaktyvius mikropasaulius atsižvelgiant į naudojamos dinaminės geometrijos sistemos technologines galimybes ir didaktines matematikos mokymo ypatybes.

Remiantis skaitmeninių mokymosi priemonių ir mokymosi objektų kokybės vertinimo standartu sudarytas ir pasiūlytas interaktyvaus vizualizavimo kokybės kriterijų modelis, kuris leidžia valdyti interaktyvios skaitmeninės priemonės kokybę jos kūrimo procese kas leidžia pastebėti

klaidas ankstyvoje mikropasaulių projektavimo stadijoje; gali būti panaudotas vertinant jau sukurtą skaitmeninę mokymo(si) priemonę geometrijos ir kitų matematikos temų mokymui ir mokymuisi.

Išplėstas ir adaptuotas *Baytak* modelis konstrukcionistiniam geometrijos mokymui ir mokymuisi, kuris padeda integruoti dinaminės geometrijos sistemą į edukacinį procesą

4. Modelio realizavimas ir vertinimas

4.1. Įvadas

Sudaryto modelio validavimas atliekamas keliais etapais: pirma, parodoma, kad modelio realizavimas įmanomas keturiuose mokslininkų bendruomenėje populiariausiose dinaminės geometrijos sistemose; antra, naudojant T. L. Saaty sukurtą AHP metodą [Saa80] išrenkama tinkamiausia iš pateiktų populiariausių sistemų; trečia, pasirenkama viena iš bendrojo lavinimo ugdymo programos [UP10] temų ir realizuojama išrinktoje dinaminės geometrijos sistemoje; ketvirta, atliekamas edukologinis eksperimentas su vienos mokyklos 13–14 metų mokiniais. Šis validavimo planas turėtų atskleisti modelio kokybės įvertinimą.

4.2. ADT realizavimas keturiuose dinaminės geometrijos sistemose

Šioje dalyje parodoma, kad sukurtas modelis, kai scenarijai rašomi naudojant ADT *din.geom* semantiką, yra universalus ir jį galima realizuoti praktiškai bet kurioje dinaminės geometrijos sistemoje. Tam atliekamas tyrimas – nustatomas esamų dvimačių dinaminių geometrinių sistemų populiarumas mokslininkų bendruomenėje tiriant mokslinių straipsnių duomenų bazėse pateikiamus straipsnius apie dinaminių geometrijos sistemų naudojimą. Mokslininkai aprašo daugiau nei 40 dvimačių dinaminių geometrijos sistemų [Nar07] [AEB10] [LAS08] [JQ07] [AEB07]. Įvairių sričių mokslinės literatūros bazėse patikrinamas straipsnių apie šias sistemas skaičius (4 priedas). Atlikus šį tyrimą išskiriamos keturios populiariausios dinaminės geometrijos sistemos, kurios dažniausiai minimos psichologijos ir edukologijos

mokslinėje literatūroje: „Geometer’s sketchpas“ (minima 671 straipsniuose), „Geogebra“ (minima 284 straipsniuose), „Cabri“ (minima 1395 straipsniuose) ir „Cinderella“ (minima 202 straipsniuose). Kai kurie autoriai lygina šių programų galimybes, efektyvumą mokymui bei sudėtingumą [QJT08] [Mac11] [HHL09]. ADT *din.geom* realizacijai naudojamos: „Geometer’s Sketchpad“ 4-a versija, kurios licencija leidžia naudoti šią programą visose Lietuvos mokyklose nemokamai; „Geogebra“ 4.4 – naujausia šiai dienai versija; „Cabri II Plus“ 1.4 ir „Cinderella“ 2 versija.

Vizualizuojamos temos pasirinkimui nėra nurodoma jokių reikalavimų, kadangi teoriškai pagal modelį galima vizualizuoti bet kurią geometrijos (planimetrijos, iš dalies ir stereometrijos) temą. Realizacijai atsitiktinai pasirenkame temą iš bendrosios matematikos programos:

Trikampio ploto skaičiavimas, kai žinomos dvi kraštinės ir kampo tarp jų sinusas.

Nagrindėdamas šią temą mokinys turi „*mokėti naudotis trikampio ploto formule $S = 1/2 a b \sin \gamma$ trikampio ir keturkampio elementams ir plotui rasti*“ ir gebėti „*taikyti trigonometrijos žinias sprendžiant paprastus praktinius ir matematinius uždavinius, Naudoti turimas IKT priemones.*“ [VUBP11]

Atsižvelgdami į tikslus, keliamus bendrosiose programose, sukonstruosime interaktyvų mikropasaulį, kuris turėtų padėti įgyvendinti keliamus tikslus.

Galutinis rezultatas yra mikropasaulis, kuriame yra dinaminis brėžinys (trikampis), brėžinio paaiškinimas, formulė su dinamiškais matavimais ir formulės paaiškinimas.

Naudodami *din.geom* tipo žymėjimus aprašysime scenarijų šiai vizualizacijai.

Pirma aprašomas scenarijus kampo žymėjimui (lankeliui) sukurti. Šį scenarijų pritaikysime tris kartus – kiekvienam trikampio kampui pažymėti.

Name: angle.arc

1. `op_point(no) = A1`
2. `op_point(no) = B1`
3. `op_point(no) = C1`
4. `op_segment(A1, B1) = segment_AB1`
5. `op_segment(B1, C1) = segment_BC1`
6. `t_translate(B1, 0, 3) = B1`
7. `op_circle(B1, B1) = circle_B1B1`
8. `op_intersection.point(segment_AB1, circle_B1B1)=E`
9. `op_intersection.point(segment_AB1, circle_B1B1)=F`
10. `op_arc(E, F, circle_B1B1)= arc_EF`

Mikropasaulio vizualizavimo scenarijus termiais pateikiamas žemiau:

Name: `area.trinagle.trig`

1. `op_point(no) = A1 {geom.obj→geom.obj}`
2. `op_point(no) = B1`
3. `op_point(no) = C1`
4. `op_segment(A1, B1) = segment_AB1`
5. `op_segment(B1, C1) = segment_BC1`
6. `op_segment(A1, C1) = segment_AC1`
7. `angle.arc(A1, B1, C1) = arc_EF {script}`
8. `angle.arc(B1, A1, C1) = arc_EF {script}`
9. `angle.arc(A1, C1, B1) = arc_EF {script}`
10. `m_segment(AB1) = a {geom.obj→measurement}`
11. `m_segment(BC1) = b`
12. `m_segment(AC1) = c`
13. `m_angle(A1, B1, C1)=β`
14. `m_angle(A1, C1, B1)=γ`
15. `m_angle(C1, A1, C1)=α`
16. `c_add(empty) = t1 {char→text.block}`
17. `c_add(empty) = t2 {char→text.block}`

```

18. c_add(empty) = t3{char→text.block}
19. c_add(empty) = t4{char→text.block}
20. m_area(op_pol.interrior( $A_3^1$ )) = S
    {geom.obj→measurement}
21. merge(t1,b,t2,c,t3, $\alpha$ ,t4,S) = t7
    {text.block→text.block}
22. merge(t1,a,t2,b,t3, $\gamma$ ,t4,S) = t7
23. merge(t1,a,t2,c,t3, $\beta$ ,t4,S) = t7
24. c_add(empty) = t8 {char→text.block}
25. c_add(empty)=t9 {char→text.block}

```

4.2.1. ADT realizacija „Geometer‘ Sketchpad“

Eksperimente naudojame lokalizuotą „Geometer‘*s* Sketchpad“ (<http://www.dynamicgeometry.com/>) sistemą.

Šis scenarijus įvykdomas „Geometer‘*s* Sketchpad“ programos komandomis:

Priemonė: kampo.lankas (x, y, z)
taškas A
taškas B
taškas C
atkarpa AB
atkarpa BC
pastumti b atstumo 0,3 cm
apskritimas su centru B ir spinduliu 0,3
atkarpas AB ir apskritimo BB' sankirtos taškas E
atkarpas cB ir apskritimo BB' sankirtos taškas F
lankas ant apskritimo BB' per taškus E ir F
slėpti taškus, apskritimą ir atkarpas

Scenarijaus žingsniai „Geometer‘*s* Sketchpad“:

taškas A
taškas B
taškas C

atkarpa AB

atkarpa BC

atkarpa AC

užpildytas daugiakampis ABC

kampo lankas ABC

kampo lankas BAC

kampo lankas ACB

ilgis AB

ilgis BC

ilgis AC

kampas ABC

kampas ACB

kampas BAC

tekstas $(S = \frac{1}{2} \cdot c \cdot b \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot \cdot)$

tekstas $(S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} \cdot \cdot)$

tekstas $(S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma = \frac{1}{2} \cdot \cdot)$

tekstas (·)

tekstas (sin)

tekstas (=)

apjungti tekstą $(S = \frac{1}{2} \cdot c \cdot b \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot \cdot, b, \cdot, c, \cdot, \sin, \alpha, =, S)$

apjungti tekstą $(S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma = \frac{1}{2} \cdot \cdot, a, \cdot, b, \cdot, \sin, \gamma, =, S)$

apjungti tekstą $(S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} \cdot \cdot, a, \cdot, c, \cdot, \sin, \beta, =, S)$

tekstas (Keisdami trikampį stebėkite, kaip galima apskaičiuoti jo plotą, remiantis dviejų kraštinių ilgiais ir kampo tarp tų kraštinių sinusų)

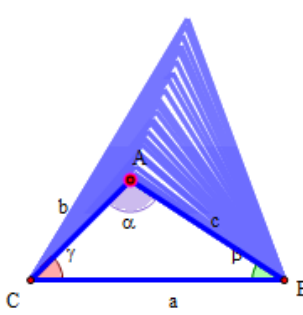
tekstas (Trikampio plotas lygus dviejų kraštinių ilgių ir kampo tarp jų sinuso sandaugos pusei)

Atliktų žingsnių rezultatas pateikiamas 28 paveiksle.

Keisdami trikampį stebėkite, kaip galima apskaičiuoti jo plotą, remiantis dvių kraštinių ilgiais ir kampo tarp tų kraštinių sinusu

$a = 4,0$ $\alpha = 102^\circ$
 $b = 2,2$ $\beta = 33^\circ$
 $c = 2,9$ $\gamma = 45^\circ$

$S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot 2,2 \cdot 2,9 \cdot \sin 102^\circ = 3,1$
 $S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot a \cdot \sin \gamma = \frac{1}{2} \cdot 2,2 \cdot 4,0 \cdot \sin 45^\circ = 3,1$
 $S = \frac{1}{2} \cdot c \cdot a \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} \cdot 2,9 \cdot 4,0 \cdot \sin 33^\circ = 3,1$



Trikampio plotas lygus dvių kraštinių ilgių ir kampo tarp jų sinuso sandaugos pusei

28 pav. ADT *din.geom* realizacijos „Geometer’s Sketchpad“ pavyzdys

4.2.2. ADT realizacija „Geogebra“

Eksperimente naudojame „Geogebra“ 4 (<http://www.geogebra.org/>). Sistema yra atviro kodo, todėl eksperimentą gali pakartoti bet kuris vartotojas. Šis scenarijus įvykdomas „Geogebra“ programos komandomis:

```

point A
point B
point C
segment a
segment b
segment c
poligon ABC
angle  $\alpha$ 
angle  $\beta$ 
angle  $\gamma$ 
text a
text b
text c
text  $\beta$ 
text  $\gamma$ 

```

text α

text $(S = 1/2 \cdot b \cdot c \cdot \sin \alpha = 1/2 \cdot \cdot \cdot \sin = \text{pol1})$

text $(S = 1/2 \cdot b \cdot a \cdot \sin \gamma = 1/2 \cdot \cdot \cdot \sin = \text{pol1})$

text $(S = 1/2 \cdot c \cdot a \cdot \sin \beta = 1/2 \cdot \cdot \cdot \sin = \text{pol1})$

text (Trikampio plotas lygus jo dviejų kraštinių ilgių ir kampo tarp jų sinuso sandaugos pusei.)

text (Keisdami trikampį stebėkite, kaip galima apskaičiuoti jo plotą, remiantis dviejų kraštinių ilgiais ir kampo tarp tų kraštinių sinusu)

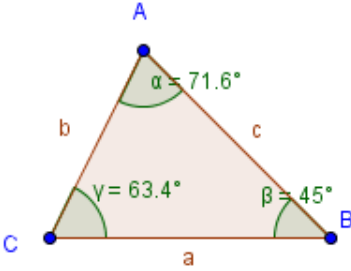
Atliktų žingsnių rezultatas pateikiamas 29 paveiksle.

Keisdami trikampį stebėkite, kaip galima apskaičiuoti jo plotą, remiantis dviejų kraštinių ilgiais ir kampo tarp tų kraštinių sinusu.

$a = 3$
 $b = 2.2$
 $c = 2.8$

$\alpha = 71.6^\circ$
 $\beta = 45^\circ$
 $\gamma = 63.4^\circ$

$S = 1/2 \cdot b \cdot c \cdot \sin \alpha = 1/2 \cdot 2.2 \cdot 2.8 \cdot \sin 71.6^\circ = 3$
 $S = 1/2 \cdot b \cdot a \cdot \sin \gamma = 1/2 \cdot 2.2 \cdot 3 \cdot \sin 63.4^\circ = 3$
 $S = 1/2 \cdot c \cdot a \cdot \sin \beta = 1/2 \cdot 2.8 \cdot 3 \cdot \sin 45^\circ = 3$



Trikampio plotas lygus jo dviejų kraštinių ilgių ir kampo tarp jų sinuso sandaugos pusei.

29 pav. ADT *din.geom* realizacijos „Geogebra“ pavyzdys

4.2.3. ADT realizacija „Cabri“

Ekspimente naudojame „Cabri II Plus“ (<http://www.cabri.com/>). Sistema yra komercinė, tačiau galima įsidiegti pilną jos versiją testavimui. Dėl šios priežasties eksperimentą gali pakartoti bet kuris vartotojas. Šis scenarijus įvykdomas „Cabri II Plus“ programos komandomis:

add point A

add point B


```

add point C
draw a segment AB
draw a segment BC
draw a segment Ac
define a poligon ABC
measure area of a poligon ABC
mark an angle (BAC)
mark an angle (ABC)
mark an angle (BCA)
measure distance AB =c
measure distance BC =a
measure distance AC =b
measure angle ABC
measure angle BCA
measure angle BAC
add text (S=1/2*b*c*sinBAC=1/2*b*c*sinBAC=area)
add text (S=1/2*a*c*sinABC=1/2*a*c*sinABC=area)
add text (S=1/2*a*b*sinBCA=1/2*a*b*sinBCA=area)
add text (Trikampio plotas lygus jo dviejų kraštinių
ilgių ir kampo tarp jų sinuso sandaugos pusei)
add text (Keisdami trikampį stebėkite, kaip galima
apskaičiuoti jo plotą, remiantis dviejų kraštinių ilgiais
ir kampo tarp tų kraštinių sinusu.)

```

Atliktų žingsnių rezultatas pateikiamas 30 paveiksle.

Keisdami trikampį stebėkite, kaip galima apskaičiuoti jo plotą, remiantis dviejų jo kraštinių ilgiais ir kampo tarp tų kraštinių sinusu.

$$CB = a = 5.04 \text{ cm}$$

$$AC = b = 5.45 \text{ cm}$$

$$AB = c = 3.60 \text{ cm}$$

$$\angle BAC = 63.9^\circ$$

$$\angle ABC = 76.2^\circ$$

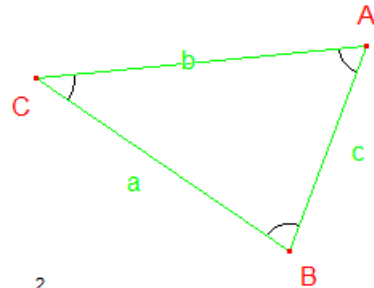
$$\angle BCA = 39.9^\circ$$

$$S = \frac{1}{2} * b * c * \sin \angle BAC = \frac{1}{2} * 5.45 \text{ cm} * 3.60 \text{ cm} * \sin 63.9^\circ = 8.80 \text{ cm}^2$$

$$S = \frac{1}{2} * a * c * \sin \angle ABC = \frac{1}{2} * 5.04 \text{ cm} * 3.60 \text{ cm} * \sin 76.2^\circ = 8.80 \text{ cm}^2$$

$$S = \frac{1}{2} * a * b * \sin \angle BCA = \frac{1}{2} * 5.04 \text{ cm} * 5.45 \text{ cm} * \sin 39.9^\circ = 8.80 \text{ cm}^2$$

Trikampio plotas lygus jo dviejų kraštinių ilgių ir kampo tarp jų sinusų sandaugos pusei.



30 pav. ADT *din.geom* realizacijos „Cabri II Plus“ pavyzdys

4.2.4. ADT realizacija „Cinderella“

Ekspirimente naudojame „Cinderella“ 2 (<http://www.cinderella.de/>). Sistema yra komercinė, tačiau galima įsidiesti pilną jos bandomąją versiją testavimui. Dėl šios priežasties eksperimentą gali pakartoti bet kuris vartotojas. Šis scenarijus įvykdomas „Cabri II Plus“ programos komandomis:

point A

point B

point C

segment BC

segment AC

segment AB

poligon ABC

area S

mark angle ABC

mark angle BAC

mark angle CAB

distance or length a

distance or length b

distance or length c

angle α

angle β

angle γ

text $(S = \frac{1}{2} \cdot c \cdot b \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin \alpha = S)$

text $(S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma = S)$

text $(S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin \beta = S)$

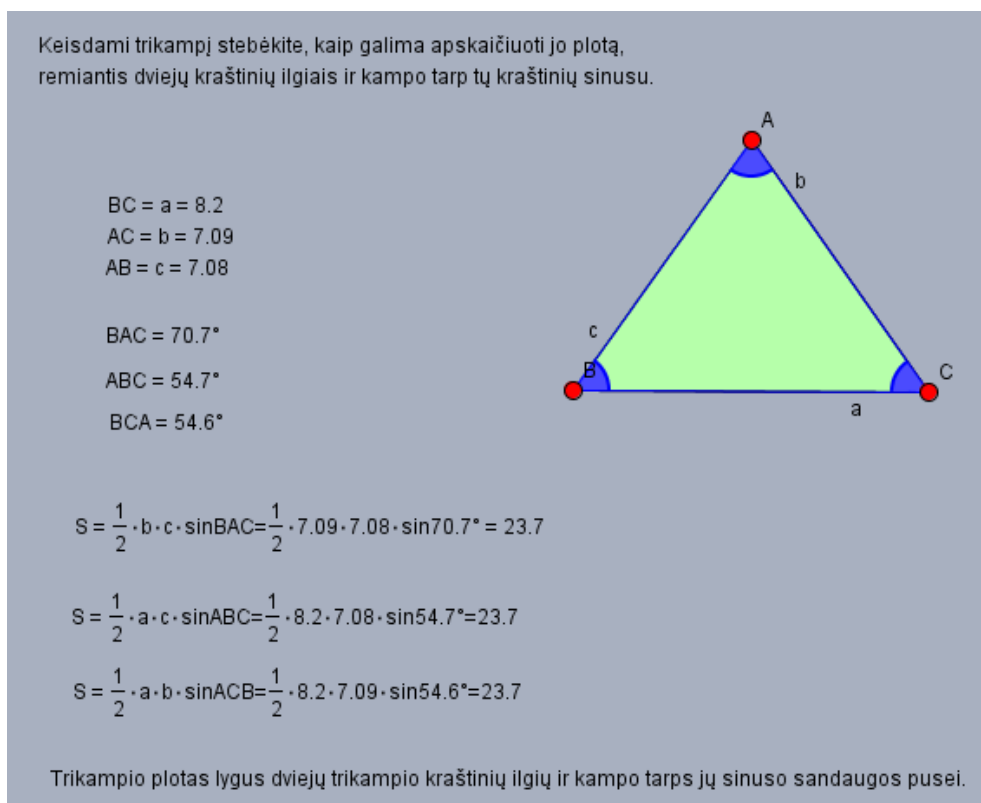
text (Trikampio plotas lygus jo dviejų kraštinių ir kampo tarp jų sinuso sandaugos pusei.)

text (Keisdami trikampį stebėkite, kaip galima apskaičiuoti jo plotą, remiantis dviejų kraštinių ilgiais ir kampo tarp tų kraštinių sinusų.)

Atliktų žingsnių rezultatas pateikiamas 31 paveiksle.

4.2.5. Realizacijų lyginamoji analizė

Kaip matoma, 4.2. skyriuje aprašytą scenarijų galima realizuoti visose keturiose dinaminės geometrijos sistemose. Visus elementus pavyko realizuoti visose sistemose. Sistemoje, kurioje nėra kurio nors elemento, jį galima sukonstruoti parašius papildomą scenarijų. „Geometer’s Sketchpad“ 4 nėra kampo žymėjimo (lankelio) priemonės, tačiau galima parašyti scenarijų ir jį naudoti kaip priemonę visada, kai prireikia. 5 priede pateikiama palyginamoji scenarijaus ir vykdomų komandų kiekvienoje iš keturių aptariamų dinaminės geometrijos sistemų lentelė.



31 pav. ADT *din.geom* realizacijos „Cinderella“ 2 pavyzdys

4.3. Sistemos pasirinkimas vizualizavimui

Modelio įgyvendinimui pasirinksiame vieną iš keturių populiariausių dinaminės geometrijos sistemų: „Geometer“s Sketchpad“, „Geogebra“, „Cabri“, „Cinderella“. Naudosime Hierarchinės analizės metodą (angl. analytic hierarchy process, AHP), kuris paremtas daugiakriteriniu vertinimu ir skirtas pasirinkti iš kelių alternatyvų [Saa94] [Lia03] [IL11].

AHP metodą sudaro penki pagrindiniai etapai [Saa80] [Saa94]:

- 1) hierarchinės struktūros projektavimas;
- 2) kriterijų nustatymas poriniam lyginimui;
- 3) įvertinimų nuoseklumo tikrinimas;
- 4) vektorinio metodo taikymas lyginamajam kiekvienos alternatyvos svoriui apskaičiuoti;
- 5) alternatyvų rangavimas pagal jų lyginamuosius svorius.

Pirmieji du etapai skirti parinkti vertinimo srities kriterijus, toliau kriterijai palyginami poromis.

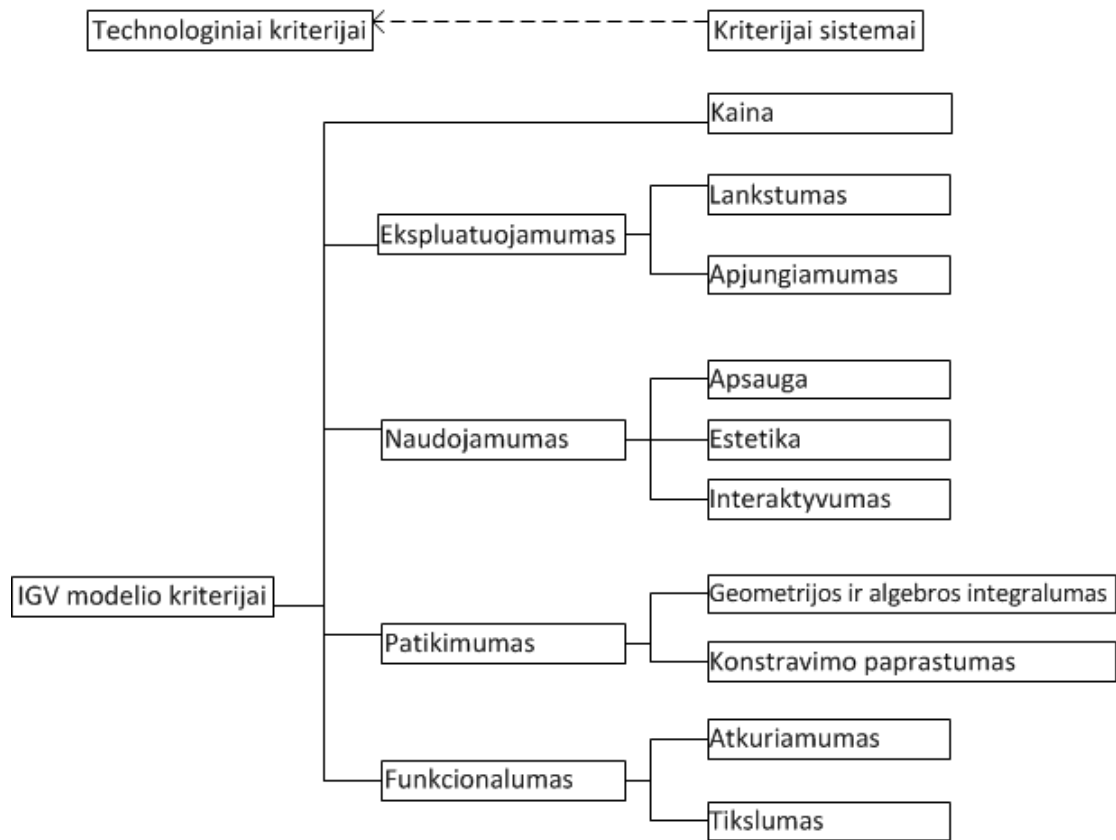
Kadangi mus domina tik tos sistemos galimybės, kurios padėtų pasiekti interaktyvaus geometrijos vizualizavimo modelio kriterijų aprašytą 3.4 skyriuje tenkinimą, tai vertinimo metodo pirmasis ir antrasis žingsniai supaprastėja. Pasirinkimui alternatyvų yra nedaug, nes sistema turi arba neturi reikiamą galimybę. Kai kuriuos kriterijus galima įgyvendinti tiesiog suskaičiavus sistemoje esamas priemones. Taigi sistemų vertinimas parinkus tinkamus kriterijus tampa tikslus ir aiškus.

3.4 skyriuje yra suformuoti interaktyvaus vizualizavimo modelio kriterijai. Peržiūrėjus šio modelio kriterijus atrenkami tie, kurie padėtų pasirinkti tinkamiausią dinaminės geometrijos sistemą interaktyvaus geometrijos vizualizavimo modelio įgyvendinimui. Sistemai pasirinkti naudojami technologiniai kriterijai.

Kai kurie iš kriterijų dinaminės geometrijos sistemos požiūriu persidengia, t. y. įgyvendinami naudojant tas pačias sistemos galimybes, pavyzdžiui, eksploatacinė parengtis ir naudojimo paprastumas reikalauja tos pačios savybės – naudojimo paprastumo; klaidų toleravimas ir apsauga nuo klaidų taip pat gali būti įgyvendinama tomis pačiomis sistemos galimybėmis – apsauga, kai sistema turi galimybę nekeičiamus objektus padaryti neprieinamus vartotojui paliekant galimybę keisti tik galimus objektus, kurie nepakeičia brėžinio ideologijos; subkriterijai interaktyvumas ir naudojimo paprastumas įgyvendinami tomis pačiomis priemonėmis – interaktyvumas, kai yra galimybė įdėti veiksmų mygtukus (animacijos, judėjimo), stebėti pažingsninį vykdymą, parodyti ar paslėpti paaiškinimus ir objektus. Persidengiančius kriterijus sujungsime.

Svarbus kriterijus ir kaina. Sistema gali būti atviro kodo, licencijos nupirkto visoms Lietuvos mokyklos ar mokama.

Taigi dinaminės geometrijos sistemos pasirinkimo kriterijų modelis pateikiamas 32 paveiksle.



32 pav. DGS pasirinkimo kriterijai

Sistemos sąsaja taip pat turi įtakos pasirenkant sistemą, tačiau tai labai individualu. Šiame darbe darome prielaidą, kad sistema, tai tik modelio įgyvendinimo terpė, todėl svarbu tik realios galimybės, kurios padeda pasiekti tikslą.

Kriterijų reikšmės yra dviejų rūšių: vienos turi tris pasirinkimo galimybes (tenkina, tenkina iš dalies, netenkina), kitoms reikia įrašyti reikšmę (6 priedo 12 lentelė). Pastarosios yra dvi: kainos nustatymo ir automatinių konstravimo priemonių skaičius. Automatinės konstravimo priemonės palengvina brėžinių konstravimą. Šios priemonės leidžia iškart sukonstruoti apskritimą, atkarpą, tiesę, spindulį, kvadratą, statų trikampį ir t.t. Apsiribojame pagrindinio ir vidurinio ugdymo geometrijos kurse nagrinėjamomis geometrinėmis figūromis. Peržiūrėję minėtąsias bendrąsias ugdymo programas,

suskaičiavome, kad nagrinėjamos 23 skirtingos dvimatės figūros. Vadinasi, kuo daugiau figūrų galima sukurti automatiškai sistemoje, tuo didesnis kriterijaus reikšmės svoris.

Galime pastebėti, kad tokių reikšmių kaip taško, atkarpos konstravimo ir panašiai nėra šiame modelyje. Pastebėjome, kad dalis priemonių visose sistemose yra vienodos, tik skirtingai vykdomos. Mums nėra svarbu, kaip jos vykdomos, konstruojamos, svarbu tik tai, kad apskritai galima įgyvendinti tam tikras galimybes.

Sudaryti 10 kriterijų nėra lygiaverčiai. Pavyzdžiui, estetika yra svarbiau už atkuriamumą, kuris gali būti apeinamas, tiesiog atvėrus brėžinį iš naujo. Todėl šiuos kriterijus palygina technologijų ekspertas, kuris gali įvertinti, kurią galimybę galima apeiti ar, priešingai, įgyvendinti sudėtingesnėmis priemonėmis. Tas pats technologijų ekspertas vėliau įgyvendins darbe aprašytą modelį išrinktoje dinaminės geometrijos sistemoje.

AHP metodas paremtas porinio palyginimo matrica. Ekspertas (-ai) lygina tarpusavyje poromis visus kriterijus. Palyginimo rezultatai sudaro kvadratinę matricą $A = \|a_{ij}\|$. Šio metodo pradininkas T. L. Saaty pasiūlė taikyti 5-ių dalių skalę su tarpinėmis reikšmėmis (6 priedo 13 lentelė). Ši skalė turi devynias reikšmes.

Sakykime, turime n kriterijų $a_i = 1..n$ ir eksperto įvertinimus pagal T. L. Saaty skalę $w_j, j=1..n$.

Taigi palyginimo matrica atrodo taip

$$A = \|a_{ij}\| = \begin{pmatrix} w_1/w_1 & w_1/w_2 & \dots & w_1/w_n \\ w_2/w_1 & w_2/w_2 & \dots & w_2/w_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_n/w_1 & w_n/w_2 & \dots & w_n/w_n \end{pmatrix} \quad (1)$$

Patikrinama, ar matrica suderinta. Suderinimui tikrinti nustatomi suderinamumo indeksas ir santykis. Teoriniu atveju ši matrica yra suderinta, t.y. $a_{ij} = 1/a_{ji}$, nes $a_{ij} = w_i/w_j$ ir $a_{ji} = w_j/w_i$.

Labai svarbu užtikrinti palyginimo matricos suderinamumą, nes jei alternatyva a yra dukart reikšmingesnė už alternatyvą b , o alternatyva b yra tris kart reikšmingesnė už alternatyvą c , tai alternatyva turėtų būti šešis kart reikšmingesnė už alternatyvą a . Realiai lyginant daug kriterijų, sudėtinga gauti visišką suderinamą. Matrica bus suderinta, jei iš matricos būtinų minimalių elementų kiekio galima gauti likusius. Suderintos matricos stulpelių (ir eilučių) elementai bus proporcingi [IL11]. Mokslinėje literatūroje randama daug metodų matricai suderinti [Goe13] [KŽ13]. T. L. Saaty pateikia metodą, pagrįstą suderinamumo indeksu (6 priedo 14 lentelė) ir tikrine reikšme λ_{max} .

$SI = (\lambda_{max} - m) / (m - 1)$, kur m - matricos A eilė, λ_{max} – maksimali matricos tikrinė reikšmė.

Matricos suderinamumo indekso ir indekso vidurkio santykis vadinamas suderinamumo santykiu ir nurodo matricos suderinamumo laipsnį $SS = SI/SA$. Suderinamumo santykio S reikšmė mažesnė arba lygi 0,1 laikoma priimtina, t. y. matrica laikoma suderinta. T. L. Saaty palyginimo svoriai yra tikrinio vektoriaus, atitinkančio didžiausią tikrinę reikšmę λ_{max} normalizuotos komponentės.

Suderinamumo santykis S duoda galimybę nustatyti kiekvieno atskiro eksperto įvertinimo neprieštaringumą. Bet atskirų ekspertų nuomonės gali būti prieštaringos. Jiems suderinti naudojami kiti metodai. Šiame etape tai nenagrinėjama, nes DG sistemos vertinimo kriterijų svoriams nustatyti naudosimės vieno eksperto nuomone.

Sudarėme kriterijų anketą su aprašymu ir paprašėme technologijos eksperto įvertinti, kurios DG sistemos galimybės yra reikšmingesnės (6 priedo 11 ir 12 lentelės). Vertintojo palyginimų matrica pateikia 6 priedo 15 lentelėje.

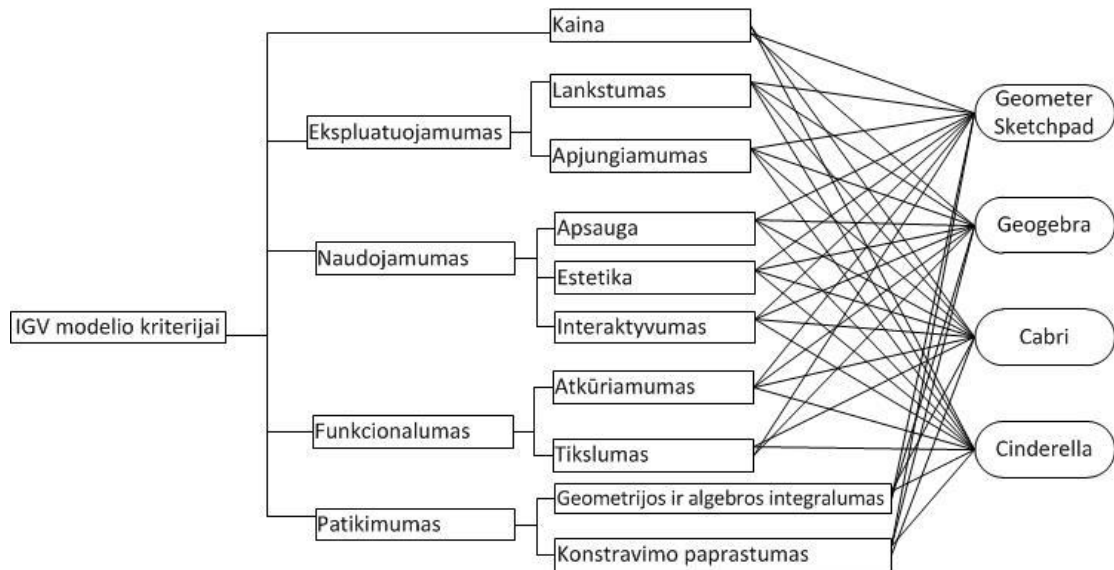
Apskaičiuota maksimali tikrinė reikšmė $\lambda_{max} = 11,316$, o suderinamumo indeksas $SI = 0,35$, suderinamumo santykis: $SS = 0,099$. Taigi matrica yra suderinta.

Apskaičiuojame svorius pagal aprašytą T. L. Saaty metodą [Saa87]:

$W = (0,0491; 0,1075; 0,05910; 0,1378; 0,0419; 0,0879; 0,1847; 0,1552; 0,0884; 0,0884)$

Pagal gautus svorius, matome, kad svarbiausi kriterijai yra estetika ir interaktyvumas, o mažiau svarbu yra kaina ir geometrijos bei algebros integralumas.

Toliau vertinsime keturias DG sistemas pagal schema.



33 pav. DGS vertinimo schema

Sudaromas kriterijų ir subkriterijų modelis (33 pav.). Buvo nuspręsta anketas pateikti atitinkamų programų ekspertams – kūrėjams arba atitinkamos programos ekspertams Lietuvoje. Programos ekspertui keliami reikalavimai: lokalizavo ir prižiūri sistemą, skaito seminarus mokytojams apie sistemos naudojimą arba yra parengęs sistemos naudojimo metodinę medžiagą. Ekspertai negali naudoti porinio palyginimo, nes labai gerai išmano tik savo sistemą. Todėl porinį sistemų palyginimą atliko šio darbo autorė analizuodama atsakytas anketas bei konsultuodamasi su sistemų ekspertais. Tokiu būdu vyko grupinis ekspertų bendradarbiavimas siekiant bendros nuomonės, nes ekspertų grupės suderinamumas įmanomas, jeigu visa grupė kompromisų būdu suderina savo nuomones ir pristato vieną vienintelę suderintą palyginimo matricą.

Kiekviena DG sistema palyginama pagal kiekvieną kriterijų poromis (6 priedo 16–25 lentelės). Palyginimo rezultatai parodė, kad realizacijai tinkamiausia yra „Geometer’s Sketchpad“ ir „Geogebra“ (5 lentelė). Jų rezultatai skiriasi labai mažai.

5 lentelė. DG sistemų palyginimo rezultatai

	Vertinimas
„Geometer’s Sketchpad“	0,592
„Geogebra“	0,582
„Cabri“	0,188
„Cinderella“	0,172

Visos nagrinėtos dinaminės geometrijos sistemos turi beveik visas galimybes, kurios padėtų įgyvendinti interaktyvaus geometrijos vizualizavimo modeliui keliamus reikalavimus. Kai kurios sistemos neturi tiesioginių priemonių, tačiau rezultatas gali būti gautas pasitelkus kitas programavimo priemones. Tai turėjo įtakos vertinant. Sistema, kurioje įgyvendinimas atliekamas tiesioginėmis priemonėmis gavo aukštesnį įvertinimą lyginant su ta, kurioje reikia pasitelkti kitas priemones. Pasirinkimą galėtų nulemti sistemos kaina, nes „Geometer’s Sketchpad“ yra komercinė sistema. Tačiau mūsų pasirinkimą nulėmė priežastys, išvardyto skyriuje: 1) Lietuvos mokyklos turi licenciją naudoti „Geometer’s Sketchpad“ mokymo tikslams nemokamai; 2) „Geometer’s Sketchpad“ Lietuvoje naudojama jau daugiau nei 10 metų.

4.4. Eksperimentinis tyrimas

4.4.1. Hipotezės

Norėdami išsiaiškinti, ar iš anksto paruošti mikropasauliai pagal interaktyvų geometrijos vizualizavimo modelį padeda tobulinti mokinių matematinius gebėjimus, pasirinkome tiriamąją imtį, numatėme lavinamus gebėjimus, pasirinkome eksperimentinius veiksnius, iškelėme hipotezes, atlikome eksperimentą, palyginome rezultatus.

Dažniausiai mokslininkai tiria dinaminės geometrijos naudojimo efektyvumą mokant ir mokantis keliais aspektais: 1) dinaminės geometrijos naudojimas mokant ir mokantis įrodymų [HJ98] [Jon00]; 2) dinaminės geometrijos naudojimas mokant ir mokantis geometrinių konceptų [GV10]. Tyrimuose dažniausiai naudojami metodai, kai mokiniai pamokos metu konstruoja patys dinaminis brėžinius pagal mokytojo iš anksto numatytus nurodymus. Tokių mokymosi metodų efektyvumas nekelia abejonių ir yra pagrįstas daugeliu eksperimentu. Tačiau daugeliui matematikos mokytojų naudoti dinaminę geometriją ar kitą IT yra gana sudėtinga [SK11]. Todėl buvo paruošti interaktyvūs mikropasauliai pagal lavinamus gebėjimus su dinamine geometrija ir naudojami mokant pasirinktos grupės mokinius. Visa tiriamoji imtis buvo padalinta į dvi grupes: eksperimentinę, kurioje mokiniai buvo mokomi naudojant interaktyvius mikropasaulius, ir kontrolinę, kurioje mokiniai mokomi naudojant statinius brėžinius braižomus lentoje. Eksperimentinė grupė buvo padalinti į dvi grupes E1 ir E2 pagal tai, kokie metodai buvo taikomi eksperimento metu (plačiau aprašyta 4.4.2. skyriuje). Eksperimento metu norėta išsiaiškinti:

- Ar iš anksto paruošti interaktyvūs mikropasauliai daro reikšmingą teigiamą įtaką mokinių geometriniams gebėjimams?
- Kokie gebėjimai yra lavinami labiausiai naudojant iš anksto paruoštus mikropasaulius?

Iškeliamos nulinės ir alternatyvios hipotezės:

H_{00} : Nėra skirtumo tarp eksperimentinės grupės E pradinio ir baigtinio testo vidurkių.

H_{01} : Eksperimentinės grupės E pradinio ir baigtinio testo vidurkiai skiriasi.

H_{10} : Nėra skirtumo tarp eksperimentinės grupės E1 pradinio testo ir baigtinio testo vidurkių.

H_{11} : Eksperimentinės grupės E1 pradinio ir baigtinio testo vidurkiai skiriasi.

H₂₀: Nėra skirtumo tarp eksperimentinės grupės E2 pradinio testo ir baigtinio testo vidurkių.

H₂₁: Eksperimentinės grupės E2 pradinio ir baigtinio testo vidurkiai skiriasi.

H₃₀: Nėra skirtumo tarp kontrolinės grupės K pradinio testo ir baigtinio testo vidurkių.

H₃₁: Kontrolinės grupės K pradinio ir baigtinio testo vidurkiai skiriasi.

Lyginant eksperimentinių grupių rezultatus su kontrolinės grupės rezultatais keliami šie klausimai:

- Ar iš anksto paruošti interaktyvūs mikropasauliai daro reikšmingą teigiamą įtaką mokinių geometriniam gebėjimams mokantis savarankiškai arba mokytojui naudojant juos demonstravimui lyginant su kontroline grupe?
- Kokie gebėjimai eksperimentinėse grupėse yra lavinami labiausiai naudojant iš anksto paruoštus mikropasaulius lyginant su kontroline grupe?

Eksperimentinio tyrimo metu buvo iškeltos nulinės ir alternatyvios hipotezės:

H₄₀: Nėra skirtumo tarp eksperimentinės grupės E bei kontrolinės grupės vidurkių.

H₄₁: Eksperimentinės grupės E ir kontrolinės grupės vidurkiai skiriasi.

H₅₀: Nėra skirtumo tarp eksperimentinės grupės E1 ir kontrolinės grupės vidurkių.

H₅₁: Eksperimentinės grupės E1 ir kontrolinės grupės vidurkiai skiriasi.

H₆₀: Nėra skirtumo tarp eksperimentinės grupės E2 ir kontrolinės grupės vidurkių.

H₆₁: Eksperimentinės grupės E2 ir kontrolinės grupės vidurkiai skiriasi.

4.4.2. Eksperimentinio tyrimo eiga

Eksperimentiniai veiksniai (nepriklausomi kintamieji) – pagal modelį sukurtų interaktyvių mikropasaulių naudojimas taikant du mokymo ir mokymosi metodus: demonstravimą ir savarankišką tyrinėjimą.

Atliekant tyrimą pirmiausia pasirinkta tiriamoji imtis. Siekiant kuo tikslesnių eksperimento rezultatų imtis buvo pasirinkta atsižvelgiant į keletą kriterijų: 1) visus tyrimo dalyvius turi mokyti tas pats mokytojas; 2) dalyviai anksčiau nebuvo (arba visi buvo) mokomi matematikos naudojant dinaminę geometriją; 3) visi dalyviai turi priklausyti tai pačiai amžiaus grupei, 4) turi būti panašus mergaičių ir berniukų skaičius; 5) visų dalyvių matematinis pasirengimas turėtų būti panašus. Atsižvelgiant į imties pasirinkimo kriterijus, eksperimentas buvo atliekamas su 13-14 metų (7 kl.) mokiniais miesto mokykloje. Visa imtis buvo dalinta į dvi grupes (6 lentelė):

- Eksperimentinę grupę E, kai mokiniai buvo mokomi naudojant interaktyvius mikropasaulius, sukurtus pagal modelį: 1 eksperimentinė (E1), kurioje pamokos vyko kompiuterių klasėje – kiekvienas mokinys atliko užduotis naudodamas iš anksto paruoštus interaktyvius vaizdus individualiai prie kompiuterio; 2 eksperimentinė (E2), kai mokytojas naudojo iš anksto paruoštus interaktyvius vaizdus aiškinimui ir demonstravimui (vienas kompiuteris ir projektorius).
- Kontrolinę grupę (K), kurioje pamokos vyko įprastai, be kompiuterių ir interaktyvių vaizdų, naudojant kitus mokymo metodus – aiškinimas lentoje, klausinėjimas, savarankiškas sprendimas, aptarimas ir pan.

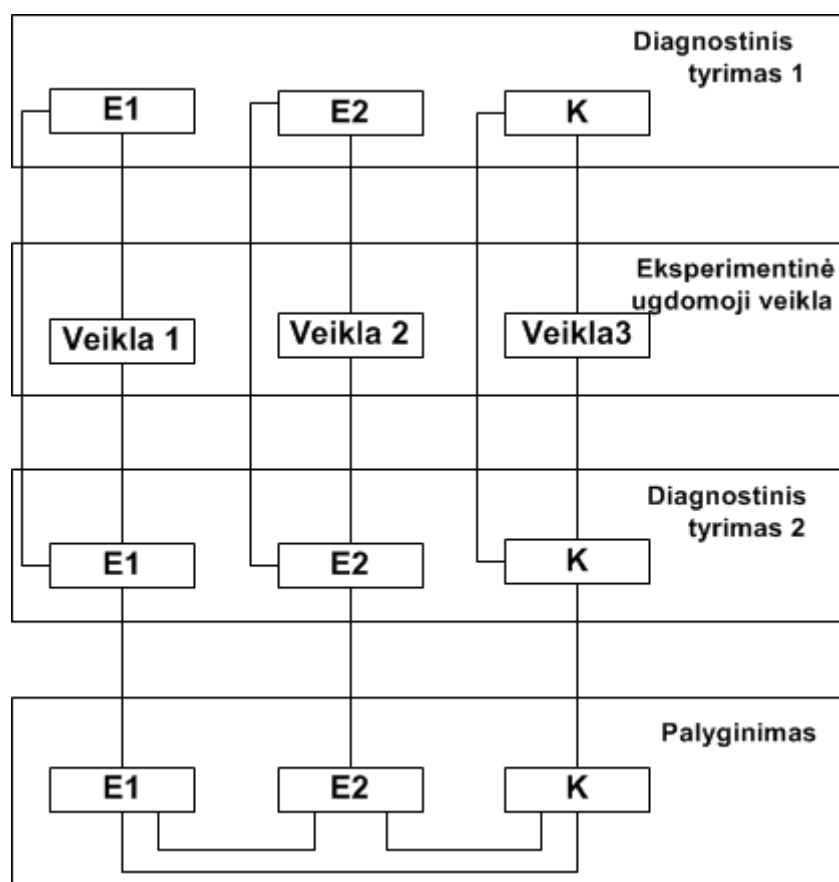
6 lentelė. Imties dydis ir paskirstymas

Grupė	Mokinių skaičius	Berniukų skaičius	Mergaičių skaičius
E	44	17	27
E1	22	8	14
E2	22	9	13
K	23	10	13

Eksperimentui buvo pasirinkta pagrindinės mokyklos kurso tema „Tiesės ir kampai“. Tai pirmoji mokoma geometrijos tema tais mokslo metais. Atsižvelgiant į interaktyvaus vizualizavimo modelį atrinkti vizualizuoti tinkami geometriniai konceptai, savybės, metodai ir sukurta 16 interaktyvių mikropasaulių su dinamine geometrija „Geometer’s Sketchpad“ (8 priedo 6 pav.).

Atsižvelgiant į išskirtus interaktyvaus vizualizavimo technologinius ir vartotojo kriterijus sukurti dinaminiai brėžiniai su nurodymais, kas yra juose nagrinėjama, ką reikia keisti ir ką stebėti bei pasiūlyti mokytojui. Mokytojas numatė nukreipiančius klausimus ir užduotis: grupei E1 paruošė užduočių lapus, grupei E2 pasiruošė brėžinius demonstravimui (padidino tekstą, pašalino paaiškinimus, kurie nėra reikalingi demonstravimo metu ir pan.).

Eksperimentinis tyrimas ir rezultatų analizė vyko pagal schemą, pavaizduotą 34 paveiksle.



34 pav. Eksperimentinio tyrimo schema

Visi eksperimento dalyviai (trys grupės) atliko pradinį testą. Eksperimentinė ugdomoji veikla vyko mėnesį. Kiekvienai eksperimente dalyvaujančiai grupei buvo vesta po 14 pamokų. Eksperimentinėse grupėse E1 ir E2 septyniose iš šių pamokų buvo naudojamos informacinės technologijos (sukurti nuoseklūs interaktyvūs mikropasauliai). Eksperimento pabaigoje mokiniai atliko baigtinį testą.

4.4.3. Pradinio ir baigtinio testų sudarymas

Eksperimento metu buvo tikimasi ne tik iširti, ar pagal interaktyvaus vizualizavimo modelį sukurti mikropasauliai daro reikšmingą įtaką mokinių gebėjimų lavinimui, bet ir norėta išsiaiškinti, kokie gebėjimai lavinami labiausiai. Todėl pradinis ir baigiamasis testai buvo sudaromi atsižvelgiant į lavinamus mokinių gebėjimus (7 lentelė). Naudojantus matematikos ugdymo programa buvo išskirtos gebėjimų grupės ir numatyti vertinimo taškai už šiuos gebėjimus kiekvienoje testo užduotyje (7 priedo 27 ir 28 lentelės). Ir pradinis, ir baigiamasis testai turėjo 10 užduočių ir 46 maksimalų taškų skaičių.

7 lentelė. Eksperimento metu tiriami gebėjimai

Kodas	Gebėjimai ir žinios
G1	Gebėjimas taikyti algebrinius skaičiavimus geometrinuose uždaviniuose
G2	Gebėjimas spręsti lygis
G3	Gebėjimas skaityti brėžinius
G4	Gebėjimas suprasti matematinį tekstą
G5	Gebėjimas naudoti matlankį
G6	Gebėjimas braižyti scheminius ir tikslus brėžinius
G7	Gebėjimas atpažinti ir taikyti kampų savybes įvairiems uždaviniams spręsti
G8	Gebėjimas atpažinti geometrines figūras
G9	Gebėjimas naudoti geometrinius žymėjimus

Užduočių ir gebėjimų ryšių diagramos pateiktos 7 priedo 7 pav. Kiekviena užduotis buvo įvertinta tam tikru taškų skaičiumi, kuris atitiko lavinamų gebėjimų skaičių. Pavyzdžiui, pirmoji užduotis įvertinamas 2 taškais,

nes ji atskleidžia 2 gebėjimus: G6 ir G8. Kiti gebėjimai taip pat gali būti atskleidžiami, tačiau į juos vertinant šią užduotį neatsižvelgiama.

4.4.4. Eksperimento rezultatai

Duomenų apdorojimui buvo naudojama duomenų analizės programa SPSS. Imčių duomenims palyginti pritaikytas t-testas imtims su skirtingais standartiniais nuokrypiais, kai lyginami skirtingų grupių rezultatai, ir porinis t-testas, kai lyginami tos pačios grupės rezultatai. Kadangi imtis yra nedidelė, t. y. $n < 25$, kiekvienos grupės testų rezultatų normalusis pasiskirstymas tikrintas pagal Anderson-Darling normaliojo pasiskirstymo testą (YY07).

$$AD = -n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (2i-1) [\ln F(X_i) + \ln(1-F(X_{n-i+1}))] \quad (2)$$

n – imties dydis, $F(X)$ – kumuliatyvinė pasiskirstymo funkcija ir i – ojo imties dydžio numeris, kai dydžiai išrikiuoti didėjančiai. Formulė (3) pritaikoma mažoms imtims:

$$AD^* = AD \left(1 + \frac{0,75}{n} + \frac{2,25}{n^2} \right) \quad (3)$$

Imties pasiskirstymas yra artimas normaliajam, jei $p > 0,05$. Visų imčių pradinių ir baigtinių testų rezultatai yra artimi normaliajam pasiskirstymui, nes $p > 0,05$ (7 priedo 29 lentelė). Kiekvienos grupės pradinio ir baigiamojo testų rezultatų vidurkiai palyginami naudojant vienpusį porinį t-testą (angl. one tailed paired t-test) ir reikšmingumo koeficientą 0,05. (8 lentelė). Pagal gautus duomenis visų trijų imčių pradinių ir baigtinių testų $p < 0,05$, todėl atmetamos hipotezės H_{00} , H_{10} , H_{20} , H_{30} ir priimamos alternatyvios hipotezės, t. y. yra reikšmingas skirtumas tarp visų grupių pradinio ir baigiamojo testų vidurkių.

8 lentelė. Pradinio ir baigtinio testų rezultatų palyginimas

		N	Vidurkis	St. Nuokrypis	t	p
E	Pradinis	44	27,909	8,653	6,033	0,0004
	Baigiamasis	44	34,114	6,039		
E1	Pradinis	22	27,478	5,923	4,484	0,0001
	Baigiamasis	22	32,739	5,643		

E2	Pradinis	22	28,696	10,581	4,231	0,00024
	Baigiamasis	22	35,826	6,104		
K	Pradinis	23	33,261	5,216	2,286	0,03222
	Baigiamasis	23	35,652	4,877		

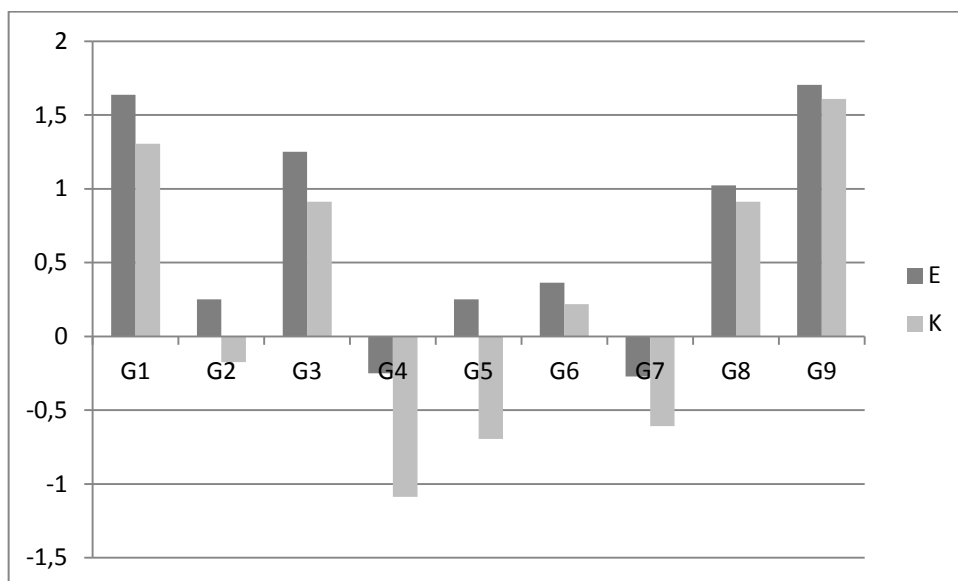
Pradinio ir baigiamojo testų rezultatai parodė, kad visų grupių dalyvių gebėjimai ir žinios eksperimento metu reikšmingai pasikeitė. Galima būtų teigti, kad interaktyvių mikropasaulių naudojimas nėra esminis fenomenas reikšmingam mokinių rezultatų pokyčiui. Tačiau patikrinus hipotezes H_{40} , H_{50} ir H_{60} , matoma, kad eksperimentinių grupių E, E1 ir E2 pradinio ir baigiamojo testų vidurkių pokytis reikšmingai skiriasi nuo kontrolinės grupės vidurkių pokyčio (9 lentelė). Grupių pradinio ir baigiamojo testų vidurkių pokyčiai buvo palyginti naudojant dvipusį nepriklausomą t-testą (angl. two tailed independent t-test).

9 lentelė. Vidurkių skirtumų palyginimas

	N	Vidurkis	St. Nuokrypis	Lyginama su	t	df	2p
E	44	6,205	6,822	K	2,590	65	0,012
E1	22	5,227	5,468	E2	0,948	42	0,358
E2	22	7,182	7,962	K	2,382	43	0,022
K	23	2,391	5,016	E1	1,810	43	0,077

Pažvelgus giliau ir ištyrus, kurie gebėjimai buvo lavinami labiau, matoma, kad eksperimentinėse grupėse patobulėjo daugiau gebėjimų nei kontrolinėje grupėje (7 priedo 8–10 pav.).

Eksperimentinės grupės E gebėjimų pokyčių vidurkiai lyginant su kontrolinės grupės gebėjimų pokyčių vidurkiais yra didesni (35 pav.). Tai reiškia, kad grupės, kurioje buvo mokoma naudojant interaktyvius mikropasaulius, mokinių gebėjimai patobulėjo labiau nei kontrolinės grupės.



35 pav. Eksperimentinės ir kontrolinės grupių gebėjimų palyginimas

Tyrimas parodė, kad nė vienoje grupėje nepatobulėjo gebėjimai G7 (gebėjimas atpažinti ir taikyti kampų savybes) ir G4 (gebėjimas suprasti matematinį tekstą). Nors eksperimentinėje grupėje šių gebėjimų vidurkių pokyčiai yra didesni.

Atskirų gebėjimų imtys nėra normaliai pasiskirsčiusios, todėl tolesnei jų analizei naudojame Kruskal-Wallis ranginį kriterijų nepriklausomoms imtims, kuris taikomas dviem ar daugiau nepriklausomoms imtims, kai imčių pasiskirstymai nėra normalieji [CZ11]. Šis kriterijus patvirtina arba atmeta nulinę hipotezę – lyginami kintamųjų skirstiniai yra vienodi.

10 lentelė. Mokinių gebėjimų vidurkių pokyčių palyginimų p reikšmės

	E su K	E1 su K	E2 su K
Gebėjimas taikyti algebrinius skaičiavimus geometriniuose uždaviniuose.	0,388	0,899	0,001
Gebėjimas spręsti lygis.	0,103	0,457	0,369
Gebėjimas skaityti brėžinius.	0,305	0,15	0,019
Gebėjimas suprasti matematinį tekstą.	0,002	0,000	0,039
Gebėjimas naudoti matlankį.	0,000	0,003	0,714
Gebėjimas braižyti scheminius ir tikslius brėžinius.	0,341	0,825	0,618

Gebėjimas atpažinti ir taikyti kampų savybes įvairiems uždaviniams spręsti.	0,267	0,797	0,065
Gebėjimas atpažinti geometrines figūras.	0,995	0,754	0,635
Gebėjimas naudoti geometrinius žymėjimus.	0,685	0,542	0,000

Paryškintos p reikšmės 10 lentelėje yra mažesnės už 0,05. Joms nulinė hipotezė atmetama. Tai reiškia, kad visos eksperimentinės grupės E gebėjimų suprasti matematinį tekstą ir naudoti matlankį pokyčiai skiriasi nuo kontrolinės grupės šių gebėjimų pokyčių. Eksperimentinės grupės E2 gebėjimų skaityti brėžinius, suprasti matematinį tekstą ir naudoti geometrinius žymėjimus pokyčiai skiriasi nuo kontrolinės grupės.

4.4.5. Išvados ir diskusijos

Interaktyvių geometrinių vaizdų naudojimas daro reikšmingą įtaką mokinių gebėjimų lavinimui. Naudojant iš anksto paruoštus interaktyvius mikropasaulius mokymo procese mokinių gebėjimai reikšmingai patobulėjo abiejose eksperimentinėse grupėse. Mokymo procese kontrolinės grupės rezultatai taip pat padidėjo reikšmingai, ir tai rodo, kad tradiciniai mokymo metodai taip pat yra veiksmingi. Tačiau tolimesnė duomenų analizė parodė, kad naudojant interaktyvius mikropasaulius mokant mokinių gebėjimai reikšmingai tobulėja lyginant su kontroline grupe.

Palyginus grupių baigiamojo testo vidurkius, galima teigti, kad dalyviai, kurių pamokose buvo naudojami interaktyvūs vaizdai demonstravimui, pasiekė geresnių rezultatų nei grupė, kuri mokėsi savarankiškai su interaktyviais mikropasauliais, ar grupė, kurioje nebuvo naudojami interaktyvūs mikropasauliai. Pasaulyje atliekami tyrimai, kai dinaminė geometrija naudojama žinių ir gebėjimų konstravimui, t. y. mokiniai savarankiškai konstruoja brėžinius ir ieško atsakymų, parodo gana didelį atotrūkį nuo kontrolinių grupių. Šio tyrimo rezultatai galėjo nulemti ir tai, kad nė vienos grupės mokiniai iki eksperimento nebuvo naudoję dinaminės geometrijos ir

grupė, pamokos metu savarankiškai tyrinėjanti interaktyvius mikropasaulius, galėjo patirti diskomfortą ar pritrūkti laiko aiškinantis temas, nes reikėjo priprasti ir prie naujos technologijos naudojimo. Rezultatui įtakos galėjo turėti ir tai, kad visos trys grupės galėjo būti nevysiškai vienodo akademinio lygio.

Daugumos mokinių, naudousių interaktyvius mikropasaulius, gebėjimai tobulėjo. Todėl galima teigti, kad iš anksto paruošti interaktyvūs mikropasauliai lavina ir geometrinius, ir matematinius mokinių gebėjimus: taikyti algebrinius skaičiavimus geometriniuose uždaviniuose, spręsti lygtis, skaityti brėžinius, naudoti matlankį, braižyti scheminius ir tikslus brėžinius, atpažinti geometrines figūras, naudoti geometrinius žymėjimus. Antra vertus, mokinių gebėjimas suprasti matematinį tekstą ir atpažinti bei taikyti kampų savybes nepatobulėjo nė vienoje grupėje. Tokį rezultatą galėjo nulemti pradinio ir baigiamojo testų sudėtingumo neatitikimas: pradiame teste buvo naudojamos kelios kampų savybės, įsisavintos anksčiau, o eksperimento metu mokiniai susipažino su daugiau sudėtingesnių savybių ir baigiamajame teste buvo naudojamos visos žinomos jiems savybės. Vis dėlto ryškus skirtumas yra matomas tarp eksperimentinės ir kontrolinės grupės mokinių gebėjimų. Mokinių, kurie buvo mokomi naudojant interaktyvius mikropasaulius, gebėjimai atpažinti ir taikyti kampų savybes bei suprasti matematinį tekstą keitėsi mažiau nei kontrolinės grupės mokinių.

Eksperimentas parodė, kad iš anksto paruošti interaktyvūs mikropasauliai padeda lavinti mokinių matematinius gebėjimus. Deja, kai kurie klausimai lieka neatsakyti: kodėl gebėjimai atpažinti ir taikyti geometrines savybes nepatobulėjo, kodėl demonstruojant interaktyvius mikropasaulius mokinių gebėjimai augo labiau nei tada, kai mokiniai patys juos tyrinėjo, kokią įtaką pradinio ir baigiamojo testų pasirinkimas turėjo eksperimento rezultatams ir t.t.. Šie klausimai reikalauja gilesnių tyrinėjimų ir tolimesnių eksperimentų.

4.5. Interaktyvaus vizualizavimo modelio pagrindimas

Interaktyvaus geometrijos vizualizavimo dinaminėje geometrijoje modelis sėkmingai pritaikytas vizualizuojant 9–10 klasių plokštumos

geometrijos kursą. Sukurta 190 interaktyvių geometrijos mikropasaulių: 9 klasės trikampių panašumui – 78, apskritimui, skrituliui – 90, uždaviniams – 151; 10 klasės smailiojo kampo funkcijoms – 83, trikampio sprendimui – 74, uždaviniams – 101.

Pagal modelį vizualizuotos dar kelios 9–10 klasės matematikos veiklos sritys: funkcijos tiesinių lygčių sistemos, tiesinės ir kvadratinės lygtys. Šioms veiklų sritims iš viso sukurti 394 interaktyvūs mikropasauliai, vizualizuojantys teoriją ir uždavinius. Visi interaktyvūs mikropasauliai sudėti į skaitmenines mokymosi priemones. Priemonės išleistos dviem atskiramis kompaktinėmis plokštelėmis su vartotojo instrukcija ir trumpomis metodinėmis rekomendacijomis. Jos išdalintos visoms Lietuvos mokykloms. Mokytojai jas bando savo pamokose.

4.6. Skyriaus išvados ir apibendrinimas

Šiame skyriuje parodyta interaktyvaus geometrijos vizualizavimo modelio realizacija keturiose dinaminės geometrijos sistemose: „Geometer’s Sketchpad“, „Geoegbra“, „Cabri“ ir „Cinderella“. Naudojant AHP vertinimą pagrįstas „Geometer’s Sketchpad“ pasirinkimas pilnam modelio realizavimui Lietuvoje. Atliktas ir aprašytas eksperimentas pagal modelį sukurtų interaktyvių mikropasaulių įtakai mokinių geometriniams gebėjimams nustatyti.

Literatūroje minimos daugiau nei 40 dinaminės geometrijos sistemų. Peržvelgus mokslinių publikacijų duomenų bazes buvo atrinktos keturios dažniausiai aprašomos sistemos. Atliktas scenarijaus realizavimo eksperimentas parodė, kad pagal modelį parašytą scenarijų galima realizuoti visose keturiose išrinktose dinaminės geometrijos sistemose. Tačiau visų sistemų priemonės yra skirtingos, todėl sistemoje, kurioje nėra kurios nors priemonės, buvo galima ją sukurti parašius papildomą scenarijų naudojant ADT semantiką. Pavyzdžiui, „Geometer’s Sketchpad“ 4 nėra kampo žymėjimo (lankelio) priemonės, tačiau buvo galima parašyti scenarijų ir jį naudoti kaip priemonę visada, kai prireikia.

Išrinktų sistemų AHP vertinimas parodė, kad tinkamiausios sistemos, t. y. papildomo programavimo ar papildomų išorinių priemonių nereikalaujančios, pagal modelį interaktyviems mikropasauliams kurti yra „Geometer’s Sketchpad“ ir „Geogebra“. Išvardytos kelios papildomos prielaidos leido pasirinkti „Geometer’s Sketchpad“ bendrojo lavinimo geometrijos kurso interaktyviam vizualizavimui Lietuvoje. Interaktyvaus geometrijos vizualizavimo dinaminėje geometrijoje modelis sėkmingai pritaikytas vizualizuojant 9–10 klasių plokštumos geometrijos, funkcijų, tiesinių lygčių sistemų, tiesinių ir kvadratinių lygčių kursą.

Atliktas kvazi eksperimentas su mokiniais parodė, kad nuosekliai taikant interaktyvius mikropasaulius mokant ir mokantis mokinių rezultatai reikšmingai skyrėsi nuo kontrolinės grupės, kai buvo mokoma taikant tradicinius mokymosi metodus. Tačiau eksperimentas parodė, jog ne visi mokinių gebėjimai tobulėjo ir mokant tradiciniais metodais, ir naudojant interaktyvius mikropasaulius, nors eksperimentinėse grupėse tiriami gebėjimai tobulėjo labiau nei kontrolinėje grupėje.

Atliktas modelio validavimas leidžia teigti, kad 1) sukurtas modelis gali būti naudojamas įvairiose dinaminės geometrijos sistemose; 2) modelis yra lankstus: abstrakčiųjų duomenų tipų sistemą galima papildyti naujais duomenų tipais pagal pasirinktos dinaminės geometrijos sistemos priemones. Šis lankstumas leido sukurti interaktyvius mikropasaulius ne tik plokštumos geometrijai mokyti, bet ir funkcijoms, lygtims, sistemoms. 3) pagal modelį sukurti interaktyvūs mikropasauliai yra efektyvi priemonė mokinių mokymui ir mokymuisi.

Bendrosios išvados

1. Ištyrus informatikos metodus taikomus kuriant edukacines skaitmenines priemones pasirinkta ir išanalizuota abstrakčiųjų duomenų tipų (ADT) teorija ir jų specifikacija heterogeninėje algebroje; formalizuota dinaminės

geometrijos objektų semantika abstrakčiais duomenų tipais, kuri gali padėti aprašyti scenarijus interaktyviam vizualizavimui.

2. Remiantis informatikos metodų analize, dinaminių geometrijos sistemų galimybių tyrimu, konstrukcionistinio mokymo(si) literatūros analize ir sukaupta interaktyvių vaizdų kūrimo patirtimi pasiūlytas interaktyvaus geometrijos vizualizavimo modelis, kuris
 - 2.1. leidžia kurti interaktyvius mikropasaulius atsižvelgiant į naudojamos dinaminės geometrijos sistemos technologines galimybes ir matematikos mokymo didaktiką;
 - 2.2. Leidžia kurti mikropasaulius ne tik geometrijos, bet ir kitų temų vizualizavimui.
3. Remiantis skaitmeninių mokymosi priemonių ir mokymosi objektų kokybės vertinimo standartais sudarytas ir pasiūlytas interaktyvaus vizualizavimo kokybės kriterijų modelis, kuris
 - 3.1. leidžia kontroliuoti interaktyvios skaitmeninės priemonės kokybę kūrimo procese, o tai leidžia pastebėti klaidas ankstyvoje mikropasaulių projektavimo stadijoje;
 - 3.2. gali būti panaudotas vertinant jau sukurtą skaitmeninę mokymo(si) priemonę geometrijos ir kitų matematikos temų mokymui ir mokymuisi.
4. Atliktas modelio validavimas leidžia teigti, kad pasiūlytas interaktyvaus geometrijos vizualizavimo modelis
 - 4.1. gali būti taikomas įvairiose dinaminės geometrijos sistemose;
 - 4.2. leidžia sukurti interaktyvius mikropasaulius ne tik plokštumos geometrijai mokyti, bet ir algebrinėms funkcijoms, lygtims, sistemoms.
5. Pagal interaktyvaus geometrijos vizualizavimo modelį sukurti interaktyvūs mikropasauliai lavina mokinių geometrinius gebėjimus mokantis

savarankiškai ar naudojant interaktyvius mikropasaulius demonstravimui pamokoje.

6. Atlikus konstruktyvistinio ir konstrukcionistinio mokymo(si) teorijos analizę išplėstas ir adaptuotas *Baytak* modelis konstrukcionistiniam geometrijos mokymui ir mokymuisi, kuris padeda integruoti dinaminės geometrijos sistemą į edukacinį procesą; sukuria gaires mokytojui, kaip efektyviai panaudoti dinaminės geometrijos sistemą konstrukcionistiniam mokymui(si).

Literatūra

- [AEB10] Abanades, M. A.; Escribano, J.; Botana, F. Remote Symbolic Computation of Loci. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, vol. 17, issue 3, 2010, pp. 135–140.
- [AEB07] Abánades, M. A.; Escribano, J.; Botana, F. First Steps on Using OpenMath to Add Proving Capabilities to Standard Dynamic Geometry Systems. *Towards Mechanized Mathematical Assistants. Lecture Notes in Computer Science*, vol. 4573, 2007, pp. 131–145.
- [AC10] Ackermann, E.; K. Constructivism(s). Shared roots, crossed paths, multiple legacies. *Proceedings for Constructionism 2010. The 12th EuroLogo conference, Paris, France, 16–20 August, 2010.*
- [Agu09] Aguiar, C.E. Optics and dynamic geometry. *Revista brasileira de ensino de fisica*, vol. 31, issue 3, 2009.
- [APG12] Antunes, M.; Pacheco, M. A. R.; Giovanela, M. Design and Implementation of an Educational Game for Teaching Chemistry in Higher Education. *Journal of chemical education*, vol. 89 issue 4, 2012, pp. 517–521.

- [AC10] Aranda, C; Callejo, M.L. Construction of the concept of linear dependence in a context of dynamic geometry: a case study. *Revista Latino Americana de investigacion en matematica educativa-Relime*, vol. 13, issue 2, 2010, pp. 129–158.
- [Arc03] Arcavi, A. The role of visual representations in the learning of mathematics. *Education studies in mathematics*. 2003, pp. 215–241.
- [A95] Aritmetika. 1995. Programa parengta pagal B. Balčyčio vadovėlį „Skaičių šalis“.
- [Bay11] Baytak, A. An investigation of the artifacts, outcomes, and processes of constructing computer games about environmental science in a fifth grade science classroom. Phd Thesis. *BiblioLabsII*, 2011.
- [Ben03] Bennett, D. Exploring Geometry with The Geometer's Sketchpad. Key Curriculum Press. 2003.
- [Bis88] Bishop, A. J. A review of research on visualization in mathematics education. *Proceedings of the 12th PME International Conference*, vol. 1, 1988, pp. 170–176.
- [BWP92] Bork, A.; Walker, D.; Poly, A. Applications. In *Education and Informatics Worldwide*. Jessica Kingsley Pub., UNESCO, 1992, pp. 119–172.
- [Boz05] Boz, N. Dynamic visualization and software environment. *The Turkish Online Journal of Educational Technology, TOJET* January, no 4, 2005 pp. 26–32.
- [BBD13] Brodal, G. S.; Brodrik, A.; Davoodi, P. The encoding complexity of two dimensional range minimum data

- structures. V: Bodaender, Hans L. (ur.), Italiano, Giuseppe F. (ur.). Algorithms : 21st Annual European Symposium : proceedings, Lecture Notes in Computer Science, Theoretical computer science and general issues, 8125. Berlin; Heidelberg: Springer, 2013, pp. 229-240.
- [BN03] Brodrik, A.; Nilsson, A. A static data structure for discrete advance bandwidth reservations on the internet. Preprint series, ISSN 1318-4865, 2003, vol. 41, pp. 1–14.
- [Cas00] Casselman, B. Pictures and Proofs. Notices of the AMS, 47, 2000, pp. 1257–1266.
- [CZ11] Cleophas, T. J.; Zwinderman, A. H. Non-Parametric Tests. Statistical Analysis of Clinical Data on a Pocket Calculator. 2011, pp. 9–13.
- [CC10] Constructionism 2010: Constructionism 2010. Proceedings for Constructionism 2010. The 12th EuroLogo conference, Paris, France, 16–20 August, 2010.
- [CTP12] Constructivism: Theory, Practice and Impact. Proceedings of Constructionism 2012. August 21–25, Athense, Greece, 2012. Educational Technology Lab. Dept. of Pedagogy.
- [CG97] Cuoco, A.; A., Goldenberg, E., P. Dynamic geometry as a bridge from Euclidean geometry to analysis. Geometry Turned On – Dynamic Software in Learning, Teaching, and Research. Part of Mathematical Association of America Notes. Edited by Schattschneider, D., College, M., 1997 pp. 33–46.
- [DJ06] Dagienė V.; Jasutienė E. Developing Dynamic Sketches for Teaching Mathematics in Basic Schools. The 17th ICMI (International Commission on Mathematical Instruction)

- Study: Technology Revised, Hanoi University of Technology, Vietnam, 2006, pp. 120–127.
- [DJ04] Dagienė, V.; Jasutienė, E. Matematikos mokymas panaudojant Dinaminę geometriją. Lietuvos matematikos rinkinys, T. 44, spec. nr., 2004, pp. 430–434.
- [DG83] Dagienė, V.; Grigas, G. Algebrinių duomenų tipų specifikacijų panaudojimas programavimo praktikoje. Programinė ESM įranga (pranešimų tezės). Molėtai, 1983, pp. 28–33.
- [Den13] Denner-Brosler, B. About Tracing Problems in Dynamic Geometry. *Discrete & Computational Geometry*, vol. 49, issue 2, 2013, pp. 221–246.
- [DNO07] Derntl, M.; Neumann, S.; Oberhuemer, P. Report on the Standardized Description of Instructional Models. ECP 2007 EDU 417007 ICOPER, eContentplus, 2007.
- [Dix97] Dixon, J. Computer use and visualization in students' construction of reflection and rotation concepts. *School Science and Mathematics*. Bowling Green, vol. 97, issue 7, 1997, pp. 352–359.
- [EM85] Ehrig H.; Mahr B. *Fundamentals of Algebraic Specifications. Equations and Initial Semantics*, vol. 1, Springer-Verlag, 1985.
- [EA12] Eyharabide, V.; Amandi, A. Ontology-based user profile learning. *Applied Intelligence*, vol. 36, issue 4, 2012, pp. 857–869.
- [EY11] Erbas, A.K.; Yenmez, A.A. The effect of inquiry-based explorations in a dynamic geometry environment on sixth grade students' achievements in polygons. *Computers &*

Education, vol. 57, issue 4, 2011, pp. 2462–2475.

- [Ert05] Ertmer, P. A. Teacher pedagogical beliefs: The final frontier in our quest for technology integration? *Educational Technology Research & Development*, vol. 53, issue 4, 2005, pp. 25–39.
- [EBA10] Escribano, J.; Botana, F.; Abanades, M.A. Adding remote computational capabilities to Dynamic Geometry Systems. *Mathematics and computers in simulation*, vol. 80, issue 6, 2010, pp. 1177–1184, Special Issue: SI.
- [EYI07] EuroLogo 2007: 40 Years of Influence on Education. Ivan Kalaš (ed.). *Proceedings of the 11th European Logo Conference 19–24 August 2007, Bratislava, Slovakia*. Faculty of Mathematics, Physics and Informatics Comenius University, Bratislava.
- [FAS10] Freixas, M.; Arinyo, R. J.; Soto-Riera, A. A constraint-based dynamic geometry system. In *Proceedings of Computer-Aided Design*. 2010, pp. 151–161.
- [GB94] Gage N. L.; Berliner D. C.. *Pedagoginė psichologija*. Vilnius, 1994.
- [Gal06] Galbraith, P. Students, mathematics, and technology: assessing the present –challenging the future. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 37(3), 2006, pp. 277–290.
- [GN07] Gila, H.; Nathan S. Visualisation and proof: a brief survey of philosophical. *ZDM Mathematics Education*, 39, 2007, pp. 73–78.
- [Goe13] Goepel, K. D. Implementing the analytic hierarchy process as

- a Standard method for multi-criteria decision making in corporate enterprises – a new AHP excel template with multiple inputs. Proceedings of the international symposium on the analytic hierarchy process, Kuala Lumpur, Malaysia, 2013.
- [GV10] Gomes, A., S.; Vergnaud, G. On the Learning of geometric concepts using Dynamic Geometry Software. *RENOTE - Revista Novas Tecnologias na Educação*. 2010.
- [GJ96] Gorgorio, N.; Jones, K. Elements of the Visualisation Process within a Dynamic Geometry Environment. Invited paper presented to Topic group on The Future of Geometry at the 8th International Congress on Mathematical Education, 1996, pp. 14–21.
- [GV03] Govender, R.; de Villiers, M. Constructive Evaluation of Definitions in a Dynamic Geometry Context. *Journal of the Korea Society of Mathematical Education Series. Research in Mathematical Education*, vol. 7, no. 1, March 2003, pp. 41–58.
- [GK80] Grigas, G.; Kupčiūnas, G. Абстрактные типы данных. *ESM programavimas*. Vilnius, 1980, nr. 3, pp. 9–47.
- [GM78] Grigas, G.; Markevičius, R. О реализации абстрактных типов данных с помощью макропроцессора. *Skaičiavimo technika*. Kaunas, 1978, pp. 25–27.
- [Gri97] Grigas, G. *Duomenų tipai*. Vilnius: Žuvėdra, 1997. 272 p.
- [Gut77] Guttag J.V. Abstract data types and the development of data structures. *Software pioneers*. Springer-Verlag New York, Inc. New York, NY, 1977, pp. 453–479.

- [GH78] Guttag, J.V.; Horning J.J. The Algebraic Specification of Abstract Data Types. *Acta Informatica*, vol. 10, 1978, pp. 27–52.
- [Guv12] Guven, B. Using dynamic geometry software to improve eight grade students' understanding of transformation geometry. *Australian Journal of Educational Technology*, vol. 28, issue 2, 2012, pp. 364–382.
- [GK08] Guven, B.; Kosa, T. The Effect of Dynamic Geometry Software on Student Mathematics Teachers' Special Visualization Skills. *The Turkish Online Journal of Educational Technology – TOJET* October 2008, vol. 7, issue 4.
- [HM08] Haberman, B.; Muller, O. Teaching abstraction to novices: Pattern-based and ADT-based problem-solving processes. 38th ASEE/IEEE Frontiers in Education Conference F1C-7, October 22–25, 2008, Saratoga Springs, NY.
- [Her89] Hershkowitz, R. Visualization in geometry: two sides of the coin. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, vol. 11, no. 1, pp. 61–76, 1989.
- [HHL09] Hohenwarter, J.; Hohenwarter, M.; Lavicza, Z. Introducing Dynamic Mathematics Software to Secondary School Teachers: The Case of GeoGebra. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, vol. 28, no 2, pp. 135–146, Apr 2009.
- [HHK08] Hohenwarter, M.; Hohenwarter, J; Kreis, Y.; Lavicza, Z.. (2008). Teaching and learning calculus with free dynamic mathematics software GeoGebra. 11th International Congress

on Mathematical Education, Monterrey, Nuevo Leon, Mexico.

- [HJ98] Hoyles C., Jones K. Proof in Dynamic Geometry contexts. Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century, An ICMI Study, Kluwer Academic Pub., 1998, pp. 121–128.
- [Hub00] Hubwieser, P. Didaktik der Informatik. Grundlagen, Konzepte, Beispiele, Springer, 2000.
- [IL11] Ishizaka A., Labib A. Review of the main development the analytic hierarchy process. *Expertsystems with Applications*, 38(11), pp. 14336–14345, 2011.
- [ISO12] ISO/IEC 25022: Systems and software engineering - Systems and software Quality Requirements and Evaluation (SQuaRE) – Measurement of quality in use. 2012-07-03.
- [ISO09] ISO/IEC FCD 25010: Systems and software engineering – Software product Quality Requirements and Evaluation (SQuaRE) – Quality models for software product quality and system quality in use. 13-Jul-09 JTC1/SC7/WG6. Version 1.62.
- [Yan13] Yanik, H.B. Learning Geometric Translations in a Dynamic Geometry Environment. *Egitim ve Bilim-education and science*, vol. 38, issue 168, 2013, pp. 272-287.
- [YY07] Yazici, B.; Yolacan, S. A comparison of various tests of normality. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, vol. 77, issue 2, pp. 175–183. Published: FEB 2007.
- [Jac04] Jackiw, N. Dynamic Geometry Activities at the Primary Level. *Dynamic Geometry for Young Learners conference*. 2004.

- [JN02] Jackiw, N.; Nathalie S. Dragon Play: Microworld design in a whole class context. *Journal for Educational Research in Computers*, vol. 27, 2002, pp. 111–145.
- [JW93] Jackiw, N.; William F. F. *The Geometer's Sketchpad: Programming by Geometry. Watch What I Do: Programming by Demonstration*, Cambridge, MA: The MIT Press, 1993, pp. 293–308.
- [Jan10] Jančič P. Geometry CInstructions Language. *Journal of Automated Reasoning*, vol. 44, issue 1-2, 2010, pp. 3–24.
- [JQ07] Janičić, P.; Quresma, Q. Automatic Verification of Regular Constructions in Dynamic Geometry Systems. *Automated Deduction in Geometry. Lecture Notes in Computer Science*, vol. 4869, 2007, pp. 39–51.
- [JD14] Jasutė E.; Dagienė V. Implementation of Abstract Data Types in Dynamic Sketches for Learning Geometry. *Informatics in Education*, 2014.
- [JD12] Jasutė, E.; Dagienė, V. Towards Digital competencies in mathematics education: a model of interactive geometry. *International Journal of Digital Literacy and Digital Competence*, 3(2), 2012, pp. 1–19.
- [JD11] Jasutė, E.; Dagienė, V. Interaktyviojo geometrijos vizualizavimo modelis naudojant dinaminės geometrijos paradigmą. *Informacijos mokslai*. Vilnius, Vilniaus universiteto leidykla. 2011, T. 56, pp. 31–41.
- [JS03] Jasutienė E.; Stepanauskienė L. „Dinaminės geometrijos“ taikymas matematikos pamokose. Vilnius: AB „Lietuvos

- telekomas“, 2003.
- [JSV03] Jasutienė, E.; Stepanauskienė, L.; Vanagas, V. Mokomoji kompiuterinė priemonė su kompaktine plokšte. „Matematika 9 su Dinamine geometrija“. TEV, 2003.
- [JSV05] Jasutienė, E.; Stepanauskienė, L.; Vanagas, V. Mokomoji kompiuterinė priemonė su kompaktine plokšte. „Matematika 10 su Dinamine geometrija“. TEV, 2005.
- [Jon00] Jones, K. Providing a foundation for deductive reasoning student’s interpretation when using dynamic geometry software and their evolving mathematical explanations. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 2000, pp. 55–85. Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.
- [JO97] Jouannaud, J.; Okada, M. Abstract data type systems. *Theoretical computer science*, vol. 173(2), 1997, pp. 349–391.
- [KM09] Karadag, Z.; Mcdougall, D. Visual explorative approaches to learning mathematics. *Proceedings of the 31st annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Atlanta, GA: Georgia State University, vol. 5, 2009, pp. 1630–1636.
- [Kie83] Kieburtz, R. B. Precise typing of abstract data type specifications. *Proceeding POPL '83 Proceedings of the 10th ACM SIGACT-SIGPLAN symposium on Principles of programming languages*, ACM New York, NY, USA, 1983 pp. 109–116.
- [KS97] King, R. J.; Schattschneider, D. *Geometry Turned On!: Dynamic Software in Learning, Teaching and Research*.

Mathematical Association of America. 1997.

- [Kol05] Kolb, Y., A. The Kolb Learning Style Inventory – Version 3.1 2005 Technical Specification. <http://www.whitewater-rescue.com/support/pagepics/lstechmanual.pdf> (žiūrėta 2014-07-10).
- [Kon10] Kondor, R. N. Spatial Ability, Descriptive Geometry and Dynamic Geometry Systems. *Annales Mathematicae et Informaticae*, 37, 2010, pp. 199–210.
- [Kub12] Kubilinskienė S. Išplėstas skaitmeninių mokymosi išteklių metaduomenų modelis. Daktaro disertacija. *Technologijos mokslai, informatikos inžinerija(07T)*, 2012.
- [KŽ13] Kurilovas E.; Žilinskiene I. New MCEQLS AHP Method for Evaluating Quality of Learning Scenarios. *Technological and Economic Development of Economy*, 19(1), 2013, pp. 78–92.
- [LSO08] Lemnitzer, L; Simov, K; Osenova, P; Mossel, E; Monachesi, P. Using a Domain-Ontology and Semantic Search in an E-Learning Environment. *Innovative technologies in instruction technology, e-learning, e-assessment and education*. 2008, pp. 279–284.
- [LBM13] Leung, A.; Baccaglini-Frank, A.; Mariotti, M.A. Discernment of invariants in dynamic geometry environments. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 84, issue 3, 2013, pp. 439–460.
- [LL13] Leung, A.; Lee, A.M.S. Students' geometrical perception on a task-based dynamic geometry platform. *Educational studies in Mathematics*, vol. 82, issue 3, 2013, pp. 361–377.
- [Lia03] Liang, W.Y. The analytic hierarchy process in project

- evaluation: An R&D case study in Taiwan. *Benchmarking: An International Journal*, vol. 10, issue 5, 2003, pp. 445–456.
- [LAS08] Lima, C.; Alves, G.; Soares, A. Geometric Visualization: How to Acquire It Using Dynamic Geometry Systems? *Systems, 2008. ICONS 08. Third International Conference on Digital Object Identifier: 10.1109/ICONS.2008.63 Publication Year: 2008.*
- [Lin76] Linden, T., A. The use of abstract data types to simplify program modifications. Cover Image, *Proceedings of the 1976 conference on Data : Abstraction, definition and structure archyve*, Volume 8 Issue 2, March 1976, pp. 12–23. ACM New York, NY, USA.
- [LG86] Liskov, B.; Guttag, J. *Abstraction and specification in program development*. MIT Press, 1986.
- [LZ74] Liskov, B.; Zilles, S. Programming with abstract data types. *Proceedings of the ACM SIGPLAN symposium on Very high level languages archyve*, 1974, pp. 50–59.
- [Loe87] Loeckx J. Algorithmic specifications: a constructive specification method for abstract data types. *ACM Transactions on Programming Languages and Systems*, vol. 9, issue 4, Oct. 1987, pp. 646–661.
- [Mac11] Mackrell, K. Design decisions in interactive geometry software. *ZDM*, 2011, vol. 43, issue 3, 2011, pp. 373–387.
- [MCN13] Martinez-Garza, M.; Clark, D. B.; Nelson, B. C. Digital games and the US National Research Council's science proficiency goals. *Studies in Science Education*, vol. 49, issue 2, 2013,

pp. 170–208.

- [MOG10] Mokymosi objektai gimnazijoms – interaktyvi terpè mokytis virtualiai, 2010. <http://mkp.emokykla.lt/imo/> (žiūrėta 2014-06-08).
- [MHK08] Moreno-Armella, L.; Hegedus, S. J.; Kaput, J. J. From static to dynamic mathematics: Historical and representational perspectives. *Educational Studies in Mathematics*, 68, 2008, pp. 99–111.
- [Nag10] Nagy-Kondor, R. Spatial Ability, Descriptive Geometry and Dynamic Geometry Systems. *Annales Mathematicae et Informaticae*, vol. 37, 2010, pp. 199–210.
- [Nar07] Narboux J. A Graphical User Interface for Formal Proofs in Geometry. *Journal of Automated Reasoning*, August 2007, vol. 39, issue 2, pp. 161–180.
- [Nav13] Navarrete, C. C. Creative thinking in digital game design and development: A case study. *Computer & Education*, vol. 69, 2013, pp. 320–331.
- [Nos10] Noss, R. Reconstructing Constructionism. *Constructionism 2010, Paris. CD proc.*
- [Oli00] Olive, J. Implications of Using Dynamic Geometry Technology for Teaching and Learning. *Ensino e Aprendizagem de Geometria*. Lisboa: SPCE, 2000, pp. 7–33.
- [OMH10] Olive, J.; Makar, K.; Hoyos, V.; Kor, K. L.; Kosheleva, O.; Sträßer, R. Mathematical Knowledge and Practices Resulting from Access to Digital Technologies. *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain, New ICMI Study*

Series, 2010, no. 113, 2, pp. 133–177.

- [One13] Oner, D. Analyzing group coordination when solving geometry problems with dynamic geometry software. *International Journal of Computer-supported collaborative learning*, vol. 8, issue 1, 2013, pp. 13–39.
- [Pap91] Papert, S. Preface, In: I. Harel & S. Papert (Eds), *Constructionism, Research reports and essays*, 1991, Norwood NJ.
- [Pap93] Papert, S. *Mindstorms: Children, Computers, and Powerful ideas*. Da Capo Press. 1993.
- [Pap80] Papert, S. Computer-based microworlds as incubators for powerful ideas. In R. Taylor (Ed.), *The computer in the school: Tutor, tool, tutee*. 1980 New York: Teacher's College Press. pp. 203–210.
- [Pap99] Papert, S. The Eight Big Ideas Behind the Constructionist Learning Laboratory. In Stager, G. *An Investigation of Constructionism in the Maine Youth Center*. Doctoral dissertation. The University of Melbourne. 1999.
- [Pat08] Patsiomitou, S. Custom tools and the iteration process as a referent point for the construction of meanings in a DGS environment. ATCM 2008, Thailand. http://atcm.mathandtech.org/EP2008/papers_full/2412008_15000.pdf (žiūrėta 2014-07-10)
- [Pia54] Piaget, J. *The construction of reality in the child*. New York: Ballantine, 1954.
- [PI71] Piaget, J.; Inhelder, B. *Mental imagery and the child*. London:

Routledge & Kegan Paul, 1971.

- [PŽ12] Preidys S.; Žilinskienė I. Nuotolinio mokymosi kurso personalizavimo modelis mokymosi veiklų atžvilgiu. Elektroninis mokymasis, informacija ir komunikacija: teorija ir praktika, Vilniaus universiteto Elektroninių studijų ir egzaminavimo centras, 2012, pp. 111-132.
- [Pre08] Preiner, J. Introducing Dynamic Mathematics Software to Mathematics Teachers: the Case of GeoGebra. Doctoral dissertation in Mathematics Education. Faculty of Natural Sciences, University of Salzburg, Austria, 2008.
- [Pre89] Presmeg, N. C. Visualization in high school mathematics. For the Learning of Mathematics, 6(3), 1989, pp. 42–46.
- [Pre06] Presmeg, N. C. Research on visualization in learning and teaching mathematics: Emergence from psychology. Handbook of research on the psychology of mathematics education, 2006, pp. 205–235.
- [QJT08] Quaresma P.; Janičič, P.; Tomašević, J.; Vujošević-Janičič, M.; Tošič, D. ML-based Format for Geometry. XML-based Format for Descriptions of Geometrical Constructions and Geometrical Proofs. Communicating Mathematics in the Digital Era. J . F . Rodrigues. A K Peters/CRC Press 2008. pp. 183–197.
- [Rut08] Ruthven, K. The Interpretative Flexibility, Instrumental Evolution and Institutional Adoption of Mathematical Software in Educational Practice: The Examples of Computer Algebra and Dynamic Geometry. Journal of Educational Computing Research, vol. 39(4), 2008, pp. 379–394.

- [RHD08] Ruthven, K.; Hennessy, S.; Deaney, R. Constructions of dynamic geometry: A study of the interpretative flexibility of educational software in classroom practice. *Computers and Education*, vol. 51(1), 2008, pp. 297–317.
- [Saa90] Saaty T. L. How to make a decision: The Analytic Hierarchy Process. *European Journal of Operational Research*, 48, 1990, North-Holland.
- [Saa87] Saaty T. L. The analytic hierarchy process – what it is and how it is used. *Mat/d Modelling*, vol. 9, no. 3–5, pp. 161–176, 1987 Printed in Great Britain.
- [Saa94] Saaty, T.L. *Fundamentals of Decision Making and Priority Theory with the AHP*. RWS Publication, Pittsburgh, PA, USA, 1994.
- [Saa80] Saaty, T.L. *The Analytic Hierarchy Process*. McGraw-Hill, New York. 1980.
- [Sch03] Scher, D. Dynamic visualization and proof: A new approach to a classic problem. *The Mathematics Teacher*, 2003, no. 96, 6, pp. 394–398.
- [SK03] Schorr, R., Y.; Koellneer-Clark, K. Using a Modeling Approach to Analyze the Ways in Which Teachers Consider New Ways to Teach Mathematics. *Mathematical Thinking & Learning*, vol. 5, issue 2/3, 2003, pp. 191–210.
- [Ser02] Serra, M. *Discovering Geometry*. Key Curriculum Press. 2002.
- [SJH10] Shakki, M. H.; Jamkhaneh, E. B.; Hosseini, S. M. The Comparison of Geometry Skills Learning in Dynamic Geometry Educational Places Based on Algebraic and

- Traditional (Static) Educational Places in Iran Educational System. *Applied Mathematical Sciences*, vol. 4, 2010, no. 43, pp. 2125–2134.
- [Sin04] Sinclair, M. Working with Accurate Representations: The Case of Preconstructed Dynamic Geometry Sketches. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 23(2), 2004, pp. 191–208.
- [Sin05] Sinclair, M.; Peer, P. interactions in a computer lab: reflections on results of a case study involving web-based dynamic geometry sketches. *The Journal of Mathematical Behavior*, vol. 24, issue 1, 2005, pp. 89–107.
- [Sin03] Sinclair, M., P. Some implications of the results of a case study for the design of pre-constructed, dynamic geometry sketches and accompanying materials. *Educational Studies in Mathematics*, 52(3), 2003, pp. 289–317.
- [Sta13] Stahl, G. *Translating Euclid: Designing a Human-Centered Mathematics*. Morgan & Claypool Publishers, 2013.
- [Ste05] Steinbring, H. *The construction of new mathematical knowledge in classroom interaction: An epistemological perspective*. New York: Springer, 2005.
- [SJ03] Stepanauskienė L.; Jasutienė E. „Dinaminė geometrija“ ir jos panaudojimas. *Kompiuterininkų dienos-2003*, pp. 248–254.
- [SK11] Stols, G; Kriek, J. Why don't all maths teachers use dynamic geometry software in their classrooms? *Australian Journal of educational technology*, vol. 27, issue 1, 2011, pp. 137–151.
- [Tal98] Tall, D. *Information Technology and Mathematics Education*:

- Enthusiasms, Possibilities & Realities. Proceedings of the 8th International Congress on Mathematical Education, Seville: SAEM Thales, 1998, pp. 65–82.
- [VBE] The European Schoolnet Vocabulary Bank for Education (VBE). <http://europeanschoolnet-vbe.lexaurus.net/vbe/home> (žiūrėta 2014-07-02).
- [TJS09] Trgalova, J.; Jahn, A. P.; Soury-Lavergne, S. “Analyse de ressources pédagogiques pour la géométrie dynamique et évaluation de leur qualité : le projet Intergeo ». Actes du Colloque Espace Mathématique Francophone, 2009.
- [Vil13] Villiers, M. Some Adventures in Euclidean Geometry. Dynamic Mathematics Learning. 2013.
- [War12] Ware, C. Information visualization: perception for design. Morgan Kaufmann, 2012.
- [WYY12] Wong, W. K.; Yin, S. K.; Yang, C. Z. Drawing Dynamic Geometry Figures Online with Natural Language for Junior High School Geometry. International Review of research in open and Distance learning, vol. 13, issue 5, Special Issue: SI, 2012, pp, 126–147.
- [ZC91] Zimmerman, W.; Cunningham, S. Visualization in teaching and learning mathematics. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1991.

Priedai

1. Priedas. Interaktyvaus geometrijos vizualizavimo modelio kriterijai

1 lentelė. Technologiniai kriterijai

Kriterijų grupė	Subkriterijus	Mikropasaulis	Dinaminis brėžinys
Patogumas	Skaidymas į modulius	Kiekvieną mikropasaulį galima naudoti atskirai pagal poreikius.	Dinaminis brėžinys yra nedalomas.
	Modifikuojamumas	Mikropasaulis modifikuojamas pagal poreikius – supaprastinamas, keičiami parametrai, dešimtainio skaičiaus skaitmenų po kablelio skaičius, paslepiami objektai ar konstruojami nauji.	Mažas pakeitimas gali pakeisti visą brėžinio perteikiamą mintį.
Panaudojamumas	Apsauga nuo klaidų	Mikropasaulis apsaugotas nuo naudotojo klaidų.	Dinaminis brėžinys apsaugotas nuo naudotojo klaidų.
	Estetika	Mikropasaulis neperkrautas papildomais objektais (tekstu, mygtukais, veiklomis, paveikslais ir pan.).	Brėžinys neperkrautas papildomais elementais, esminiai dalykai paryškinti, naudojamos spalvos.
	Naudojimo paprastumas	SMP naudojamos papildomos priemonės naudojimo paprastumui.	Brėžinys dinamiškai keičiamas vieno mygtuko paspaudimu, parametro keitimu ar vieno taško tempimu.
Patikimumas	Užbaigtas	Mikropasaulis ar jų sistema turi apimti visą	Brėžinys savaime turi perteikti visą reikiamą jo

Kri- terijų grupė	Subkrite- rijus	Mikropasaulis	Dinaminis brėžinys
	tumas	vizualizuojamą veiklos sritį; integruoti ir algebrinius, ir geometrinius, ir, jei įmanoma, realius vaizdus ir turi suteikti visą informaciją apie to mikropasaulio naudojimą.	naudojimui informaciją, turėti numatytą naudojimo kontekstą.
	Eksploatacinė parengtis	Skaitmeninė priemonė yra baigta ir tinkama pateikti galutiniam vartotojui.	Brėžinys yra baigtas ir tinkamas pateikti galutiniam vartotojui.
	Klaidų toleravimas	Nedinamiški mikropasaulio elementai apsaugoti nuo naudotojo klaidų (tekstų, mygtukų iššampymo).	Netempiami dinaminio brėžinio elementai apsaugoti nuo naudotojo veiksmų.
	Atkuriamumas	Turi būti priemonė, gražinanti mikropasaulį į pradinę padėtį, gražina vienu (ar keliais) žingsniais atgal.	Turi būti priemonė, gražinanti brėžinį į pradinę padėtį.
	Tikslumas	Tiksliai atliekamos nurodytos komandos (mygtukų paspaudimai atlieka tai, kam skirti).	Dinamiškai keičiant brėžinį, dinamiškai keičiasi matavimai; keičiant parametrus, keičiasi brėžinys ir jo matavimai.
Interaktyvumas		SMP mikropasauliai praplečiami papildomais brėžinio valdymo mygtukais, animacija, pažingsniniu braižymu, pagalba naudotojui, papildomų komandų rinkiniu (pvz., kampų, kraštinių žymėjimas,	Naudojamos papildomos priemonės brėžinio dinamiškumui atskleisti.

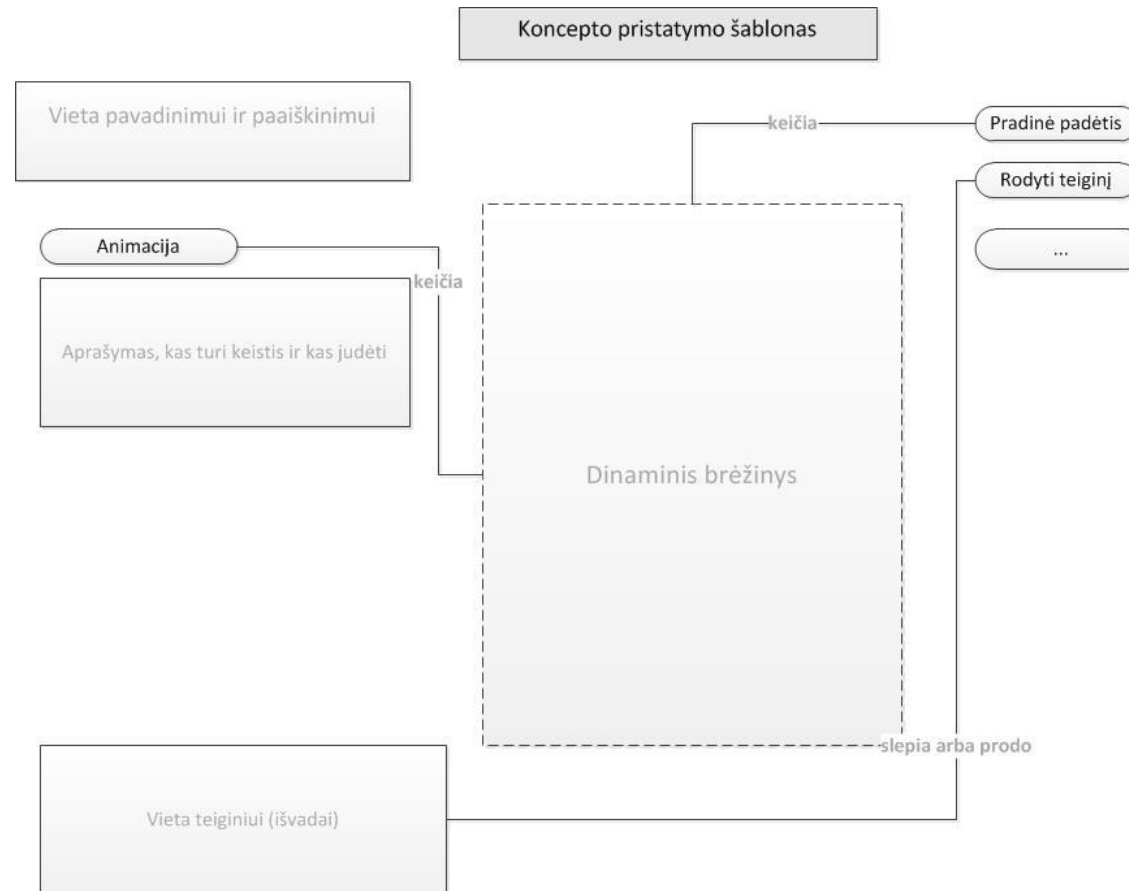
Kri- terijų grupė	Subkrite- rijus	Mikropasaulis	Dinaminis brėžinys
		taisyklingų figūrų braižymas). SMP interaktyvumas pakankamas paprastinant sistemos naudojimą.	

2 lentelė. Vartotojo kriterijai

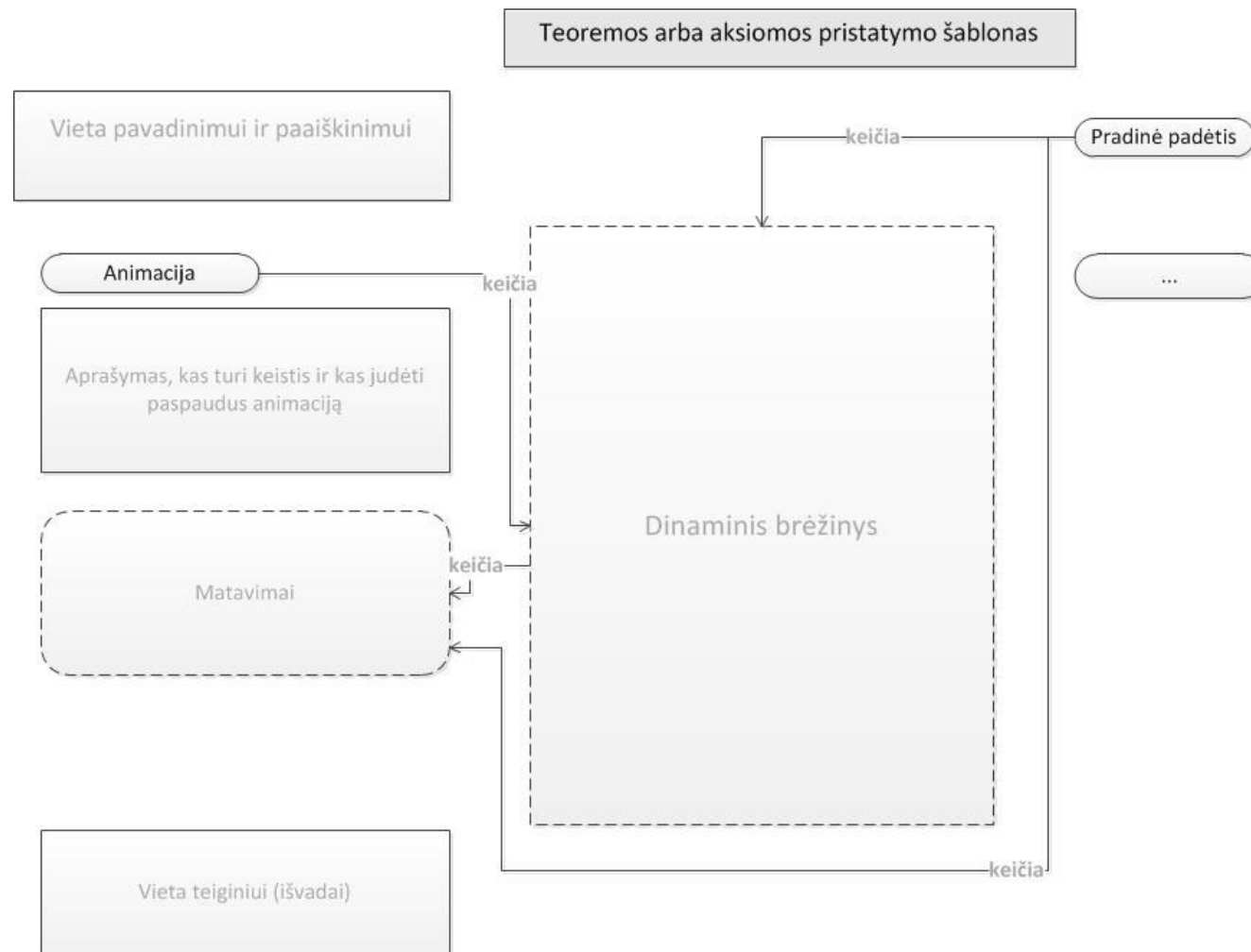
Krite- rijų grupė	Subkri- terijus	Mikropasaulis	Dinaminis brėžinys
Efektyvumas		SMP vizualizuojama informacija tiksli ir išsami, padedanti naudotojui pasiekti mokymo ar mokymosi tikslus	SMP dinaminiai brėžiniai apima visą UP vizualizuojamą turinį.
Patrauklumas	Aiškumas	SMP sąsaja patraukli ir aiški.	Patrauklus, lengvai suprantamas dinaminis brėžinys.
	Patogu- mas	SMP naudojimas patogus ir intuityvus.	Intuityvus brėžinio dinamiškumo naudojimas; aiškus brėžinys.
	Patikimu mas	SMP naudojama mokymo medžiaga, atitinka matematikos ugdymo programas ir matematikos ugdymo programose numatomus ugdymus gebėjimus.	Dinaminis brėžinys atitinka matematikos ugdymo programose numatomus lavinamus gebėjimus
Saugumas		Perteikiama patikima, matematiškai teisinga informacija.	Brėžinys matematiškai teisingas; priemonė apsaugota nuo netinkamų naudotojo veiksmų.

Krite- rijų grupė	Subkri- terijus	Mikropasaulis	Dinaminis brėžinys
Naudingumas	Mokymo ir mokymosi tikslų atitikimas	SMP padeda pasiekti ugdymo programose keliamus mokymo ir mokymosi tikslus.	Padeda pasiekti ugdymo programose keliamus mokymo ir mokymosi tikslus.
	Lankstumas	SMP lengvai adaptuojama tam tikroms mokymo(si) grupėms pagal poreikius.	Dinaminis brėžinys gali būti papildomas geometriniais objektais arba gali būti paslėpti pertekliniai geometriniai objektai.
	Pritaikomumas	Pritaikymas specialiųjų poreikių mokiniams (šrifto, žymėjimų dydžių keitimas).	Pritaikymas specialiųjų poreikių mokiniams (žymėjimų dydžių keitimas, brėžinio paryškimas, padidinimas).
	Mokymo(si) turinio atitikimas	Atitinka geometrijos mokymosi turinį. Derinamos įvairios mokymosi veiklos (stebėjimas, analizavimas, išvadų darymas).	Dinaminis brėžinys vizualizuoja tam tikrą geometrijos mokymosi turinį.

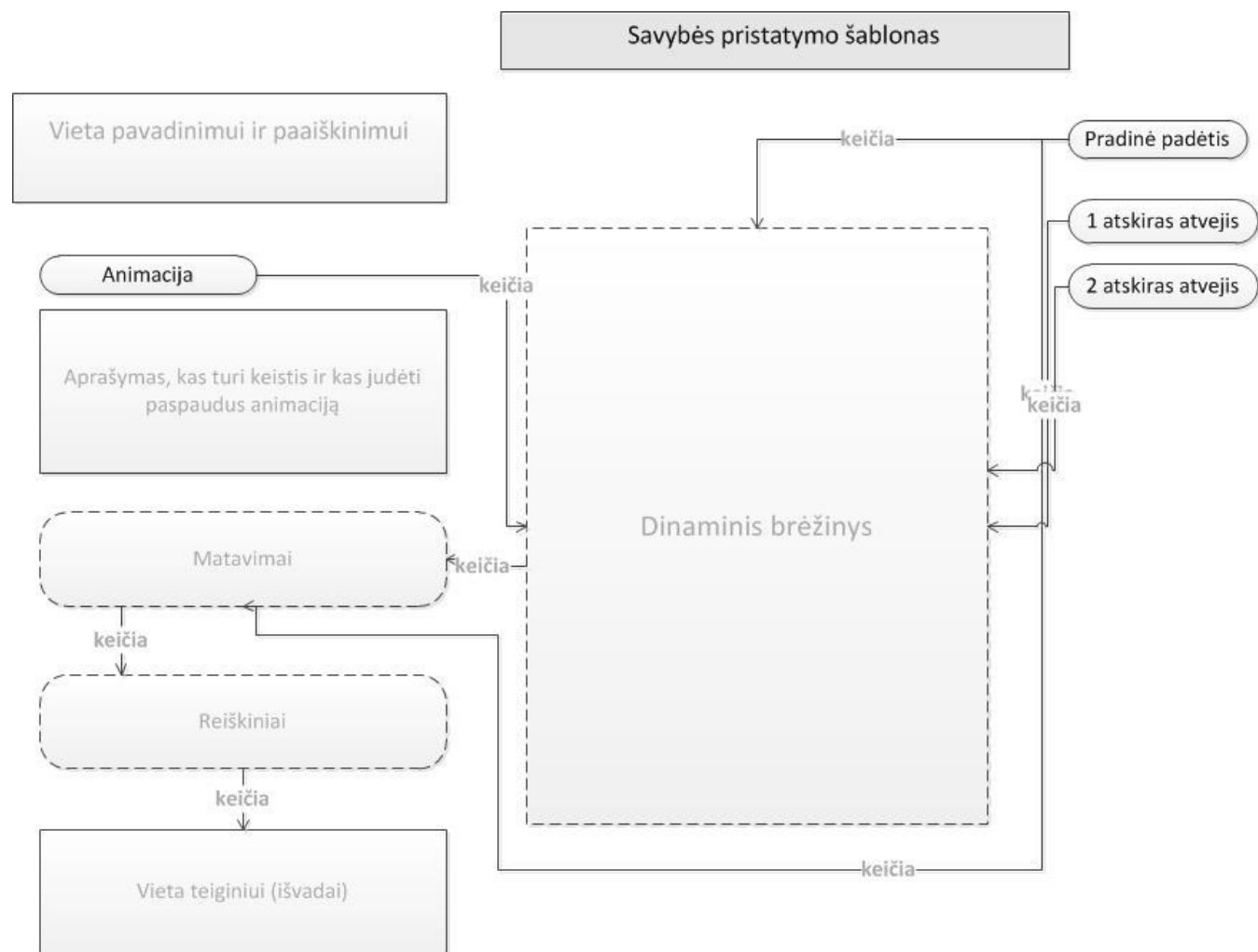
2. Priedas. Mikropasaulių šablonai



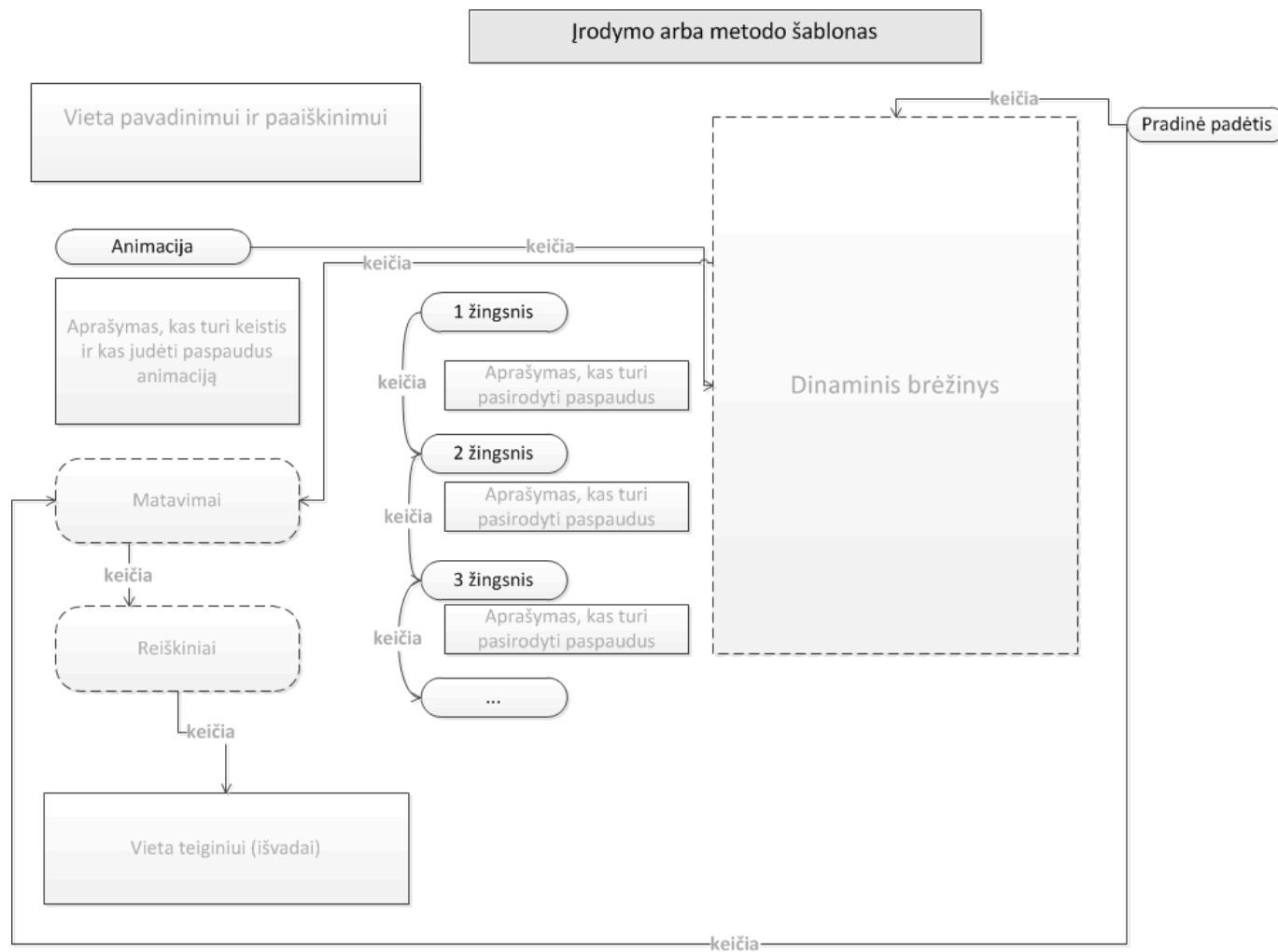
1 pav. Konceptų pristatymo šablonas



2 pav. Teoremos arba aksiomos šablonas



3 pav. Savybės šablonas



4 pav. Įrodymo arba metodo šablonas

3. Priedas. Duomenų tipų transformuojančių operacijų lentelės

3 lentelė. *Geom.obj* tipo operacija `op_intersection.point`

x	y	op_intersection.point(x,y)
no	no	no
no	A ¹	no
A ¹	B ¹	no
A ¹	segment_BC ¹	no
segment_AB ¹	segment_CD ¹	E
segment_AB ¹	line_CD ¹	E
segment_AB ¹	spindulys_C D ¹	E
line_AB ¹	line_CD ¹	E
line_AB ¹	ray_CD ¹	E
ray_AB ¹	ray_CD ¹	E
segment_AB ¹	circle_OC ¹	E
ray_AB ¹	circle_OC ¹	(E ₁ , E ₂)
line_AB ¹	circle_OC ¹	(E ₁ , E ₂)
circle_AB ¹	circle_CD ¹	(E ₁ , E ₂)
arc_ABC ¹	arc_CDH ¹	(E ₁ , E ₂)
arc_AB ¹	arc_CDH ¹	(E ₁ , E ₂)
arc_AB ¹	arc_CD ¹	(E ₁ , E ₂)
segment_AB ¹	arc_CD ¹	(E ₁ , E ₂)
line_AB ¹	arc_CD ¹	(E ₁ , E ₂)
ray_AB ¹	arc_CD ¹	(E ₁ , E ₂)
circle_AB ¹	arc_CD ¹	(E ₁ , E ₂)
segment_AB ¹	arc_CDH ¹	(E ₁ , E ₂)
line_AB ¹	arc_ABC ¹	(E ₁ , E ₂)
ray_AB ¹	arc_CDH ¹	(E ₁ , E ₂)
circle_AB ¹	arc_CDH ¹	(E ₁ , E ₂)

4 lentelė. *Geom.obj* tipo operacija undo.

x	undo (x)
r^1	r
A	no
segment_AB	(A^1, B^1)
line_AB	(A^1, B^1)
ray_AB	(A^1, B^1)
circle_OB	(O^1, B^1)
circle_OB	$(O^1, \text{segment_AB}^1)$
arc_ABC	(A^1, B^1, C^1)
arc_AB	$(A^1, B^1, \text{circle_OB}^1)$
circle.sector_ABC	arc_AB ¹
circle.sector_ABC	arc_ABC ¹
circle.segment_ABC	arc_ABC ¹
circle.segment_ABC	arc_AB ¹
circle.interior_OB	circle_OB ¹
pol.interior_A _k	(A_i^1, k)
r^2	r^1
delete (r^1)	r^1
vector_AB	(A, B)
segment_AB ³	segment_AB ¹
line_AB ³	line_AB ¹
ray_AB ³	ray_AB ¹
A ⁴	A ¹
(r, r)	r^1

5 lentelė. *Geom.obj* tipo operacija op_point.obj

x	op_point.obj (x)
----------	-------------------------

x	op_point.obj (x)
no	no
A^1	A^1
segment_AB ¹	A^1
ray_AB ¹	A^1
line_AB ¹	A^1
circle_AB ¹	A^1
arc_ABC ¹	A^1
arc_AB ¹	A^1

6 lentelė. *Geom.obj* tipo operacija delete.

x	delete (x)
no	no
r^1	no

7 lentelė. *Measurement* tipo operacija undo

x	undo (x)
m_parametre(no)	no
op_unit(a)	a
sign'+' (m)	m
sign'-' (m)	m
t_set.distance(m^1)	m^1
select(m)	m
hide(m)	m
m_length(op_segment(A,B))	op_segment(A,B)
m_distance(op_point(A), op_point(B))	op_point(A), op_point(B)
m_distance(op_point(A), op_segment(AB))	op_point(A), op_segment(AB)
m_distance(op_point(A),	op_point(A), op_ray(AB)

x	undo (x)
op_ray(AB))	
m_distance(op_point(A), op_line(AB))	op_point(A), op_line(AB)
m_radius(op_circle(OB))	op_circle(OB)
m_angle(op_point(A),op_poi nt(B), op_point(C))	op_point(A),op_point(B), op_point(C)
m_centr.angle(op_point(A), op_point(B),op_circle(O,C))	op_point(A),op_point(B), op_point(C)
m_circle.sector(op_point(A) , op_point(B), op_circle(O,C))	op_point(A), op_point(B), op_circle(O,C))
m_circle.segment(op_point(A), op_point(B), op_circle(O,C))	op_point(A), op_point(B), op_circle(O,C)
m_area(op_circle(O,C))	op_circle(O,C)
m_area(op_circ.interior(O, C))	op_circ.interior(O,C)
m_area(op_pol.interior(A _k))	op_pol.interior(A _k)
m_perimeter(op_pol.interio r(A _k))	op_pol.interior(A _k)
m_circl.perimeter(op_circl e(O,C))	op_circle(O,C)
m_circ.perimeter(op_circ.i nterior(O,C))	op_circ.interior(O,C)
m_ratio(op_segment(A,B),op _segment(C,D))	op_segment(A,B)
t_set.angle(op_point(A), op_point(B), op_point(C))	op_point(A), op_point(B), op_point(C)
t_set.ratio(divide(x,y))	divide(x,y)

8 lentelė. *text.block* tipo operacija `split`

x	split(x)
<code>merge(m, t)</code>	<code>t, m</code>

9 lentelė. *text.block* tipo operacija `undo`

x	undo(x)
<code>empty</code>	<code>no</code>
<code>c_add(t)</code>	<code>empty</code>
<code>select(t)</code>	<code>t</code>
<code>hide(t)</code>	<code>t</code>
<code>split(merge(m, t))</code>	<code>m, t</code>
<code>delete(t)</code>	<code>no</code>

10 lentelė. *action.button* tipo operacija `undo`

x	undo(x)
<code>k_show(a, t, m, r)</code>	<code>a, t, m, r</code>
<code>k_hide(a, t, m, r)</code>	<code>a, t, m, r</code>
<code>k_animation(r, no)</code>	<code>r</code>
<code>k_animation (op_point(A), op_segment(B, C))</code>	<code>op_point(A), op_segment(B, C)</code>
<code>k_animation (op_point(A), op_ray(B, C))</code>	<code>op_point(A), op_ray(B, C)</code>
<code>k_animacija (op_point(A), op_line(B, C))</code>	<code>op_point(A), op_line(B, C)</code>
<code>k_animacija (op_point(A), op_circle(O, B))</code>	<code>op_point(A), op_circle(O, B)</code>
<code>k_animacija (op_point(A), op_arc(B, C, D))</code>	<code>op_point(A), op_arc(B, C, D)</code>
<code>k_action(op_point(A), op_point(B))</code>	<code>op_point(A), op_point(B)</code>
<code>k_sequence(a, b, c, d)</code>	<code>a, b, c, d</code>

4. Priedas. DGS mokslinėse publikacijose

		ACM	ERIC	Teacher reference center	Taylor & Francis	Springer Link	PsycARTICLES (EBSCO)	Iš viso
		Kompiuterijos ir informacinių technologijų tema	JAV švietimo departamento informacijos centro (ERIC) kuriama duomenų bazė švietimo tema	Bibliografinė duomenų bazė, kurioje pateikiama informacija iš švietimui skirtų laikraščių ir žurnalų.	Mokslinė duomenų bazė, suteikianti prieigą prie daugiau nei 1320 įvairių mokslo sričių žurnalų nuo 1997 metų.	Įvairių mokslo sričių žurnalai	Moksliniai psichologijos srities žurnalai leidžiami Amerikos psichologijos asociacijos	
1	Apollonius	0	0	0	0	0	0	0
2	Baghera	11	0	0	0	8	0	19
3	Cabri	27	56	43	37	377	855	1395
5	C.a.R.	0	0	0	0	0	0	0
6	CaRMetal	0	0	0	0	0	0	0
7	Cinderella	18	3	2	8	171	0	202
9	Defi	0	0	0	0	0	0	0
10	DrGeo	0	0	0	0	3	0	3
11	Euklid DynaGeo	0	0	0	0	7	0	7
12	Euklides	0	0	0	0	4	0	4
13	Eukleides	0	0	0	0	10	0	10

		ACM	ERIC	Teacher reference center	Taylor & Francis	Springer Link	PsycARTI CLES (EBSCO)	Iš viso
14	Gambol	0	0	0	0	0	0	0
15	GCLC	0	0	0	0	0	0	0
16	GeoGebra	19	17	4	9	124	111	284
17	Geolog	0	0	0	0	80	0	80
18	Geometer's Sketchpad	22	52	15	17	221	344	671
19	Geometric Supposer	1	24	0	0	61	0	86
20	Geometrix	0	0	0	0	8	0	8
21	Geometry Expert (GEX)	0	0	0	0	0	0	0
22	Geometry Explorer	0	0	0	0	0	0	0
23	Geometry Expressions	0	4	2	0	0	0	6
24	Geometry Tutor	78	3	0	0	59	2	142
25	GeoNext	0	0	0	0	0	0	0
26	Géoplan	0	0	0	0	0	0	0
27	GeoProof	0	0	0	0	0	0	0
28	GeoView	0	0	0	0	0	0	0

		ACM	ERIC	Teacher reference center	Taylor & Francis	Springer Link	PsycARTI CLES (EBSCO)	Iš viso
29	GEUP	0	0	0	0	0	0	0
30	GRACE	0	0	0	0	0	0	0
31	iGeom	0	1	0	0	0	0	1
32	Isard	0	0	0	0	0	0	0
33	Jeometry	0	0	0	0	0	0	0
34	JSXGraph	0	1	0	0	4	0	5
35	Kig	0	0	0	0	9	0	9
36	Kgeo	0	0	0	0	2	0	2
37	KmPlot	0	0	0	0	0	0	0
38	KSEG	0	0	0	0	3	0	3
39	Live Geometry	0	0	0	0	0	0	0
40	MathKit	0	0	0	0	0	0	0
41	Mentoniezh	0	0	0	0	9	0	9
42	OpenEuclide	0	0	0	0	1	0	1
43	Tabula	0	0	0	0	0	0	0
45	WinGeom	0	0	1	0	0	0	1
46	WIRIS	0	1	0	0	0	0	1

5. Priedas. ADT *din.geom* realizacijos scenarijai DGS

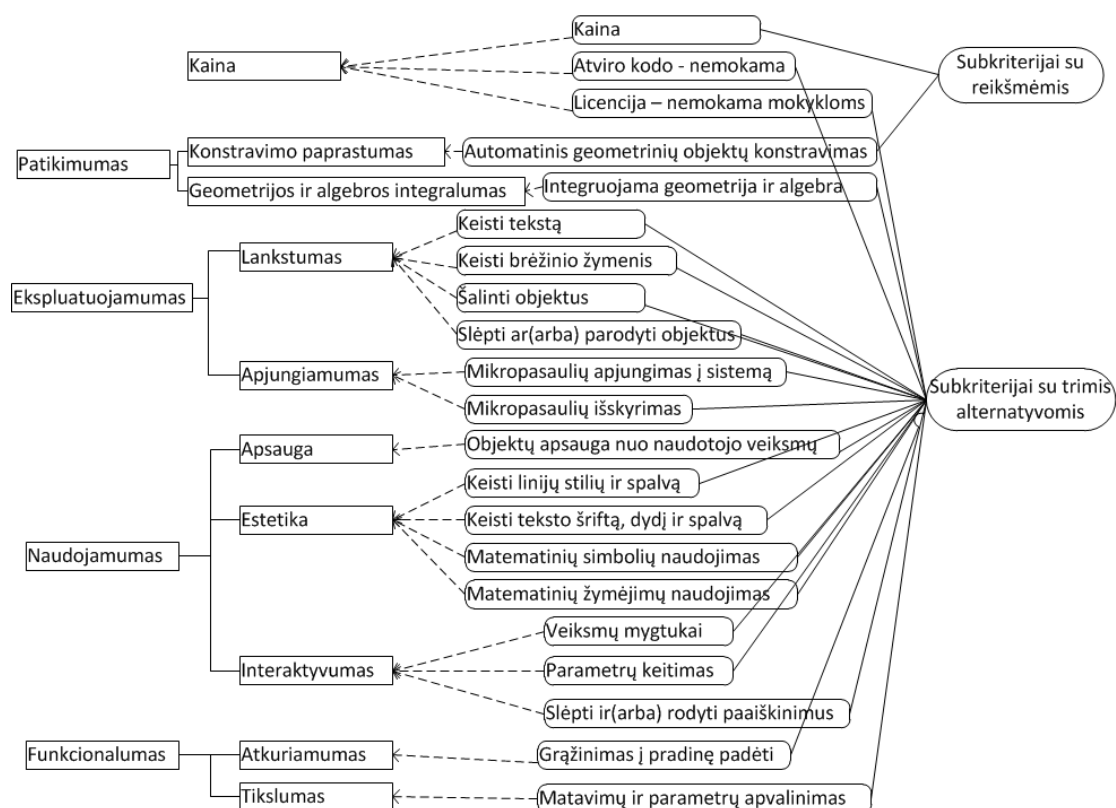
Scenarijus termais	„Geometer’s Sketchpad“ 4	„Geogebra“ 4.4	„Cinderela“ 2	„Cabri II Plus“ 1.4
$op_point(no) = A^1$	taškas A	point A	add point A	point A
$op_point(no) = B^1$	taškas B	point B	add point B	point B
$op_point(no) = C^1$	taškas C	point C	add point C	point C
$op_segment(A^1, B^1) = segment_AB^1$	atkarpa AB	segment a	draw a segment BC	segment BC
$op_segment(B^1, C^1) = segment_BC^1$	atkarpa BC	segment b	draw a segment AC	segment AC
$op_segment(A^1, C^1) = segment_AC^1$	atkarpa AC	segment c	draw a segment AB	segment AB
	užpildytas daugiakampis ABC		define a poligon ABC	poligon ABC
$m_area(op_pol.interrior(A_3^1)) = S$		poligon ABC	measure area of a poligon ABC	AArea S
$angle.arc(A^1, B^1, C^1) = arc_EF \{script\}$	kampo lankas ABC	angle α	mark an angle (BAC)	mark angle BAC
$angle.arc(B^1, A^1, C^1) = arc_EF \{script\}$	kampo lankas BAC	angle β	mark an angle (ABC)	mark angle ABC
$angle.arc(A^1, C^1, B^1) = arc_EF \{script\}$	kampo lankas ACB	angle γ	mark an angle (BCA)	mark angle BCA
$m_segment(AB^1) = a$	ilgis AB	text a	measure distance AB	distance or

Scenarijus termais	„Geometer`s Sketchpad“ 4	„Geogebra“ 4.4	„Cinderela“ 2	„Cabri II Plus“ 1.4
				length a
$m_segment(BC^1) = b$	ilgis BC	text b	measure distance BC	distance or length b
$m_segment(AC^1) = c$	ilgis AC	text c	measure distance AC	distance or length c
$m_angle(A^1, B^1, C^1) = \beta$	kampas β	text β	measure angle ABC	angle β
$m_angle(A^1, C^1, B^1) = \gamma$	Kampas γ	text γ	measure angle BCA	angle γ
$m_angle(B^1, A^1, C^1) = \alpha$	kampas α	text α	measure angle BAC	angle α
$c_add(empty) = t1$	tekstas t1	text t1	text t1	text t1
$c_add(empty) = t2$	tekstas t2	text t2	text t2	text t2
$c_add(empty) = t3$	tekstas t3	text t3	text t3	text t3
$c_add(empty) = t4$	tekstas t4			
$merge(t1, b, t2, c, t3, \alpha, t4, S) = t5$	apjungti tekstą (t1, b, t2, c, t3, α , t4, S)			
$merge(t1, a, t2, b, t3, \gamma, t4, S) = t6$	apjungti tekstą (t1, a, t2, b, t3, γ , t4, S)			
$merge(t1, a, t2, c, t3,$	apjungti tekstą			

Scenarijus termais	„Geometer`s Sketchpad“ 4	„Geogebra“ 4.4	„Cinderela“ 2	„Cabri II Plus“ 1.4
$\beta, t4, S) = t7$	(t1, a, t2, c, t3, β , t4, S)			
c_add(empty) = t8	tekstas t8	text t8	add text t8	text t8
c_add(empty)=t9	Tekstas t9	text t9	add text t9	text t9
Additional scripts				
Angl.arc {sript}	kampo.lankas			
op_point(no) = A ¹	taškas A			
op_point(no) = B ¹	taškas B			
op_point(no) = C ¹	taškas C			
op_segment(A ¹ , B ¹) = segment_AB ¹	atkarpa AB			
op_segment(B ¹ , C ¹) = segment_BC ¹	atkarpa BC			
t_translate(B ¹ , 0,3) = B ¹	pastumti b atstumo 0,3 cm			
op_circle(B ¹ , B ¹) = circle_B ¹ B ¹	apskritimas su centru B ir spinduliu 0,3			
op_intersection.point(segment_AB ¹ , circle_B ¹ B ¹)=E	atkarpos AB ir apskritimo BB ¹ sankirtos taškas			

Scenarijus termais	„Geometer’s Sketchpad“ 4	„Geogebra“ 4.4	„Cinderela“ 2	„Cabri II Plus“ 1.4
	E			
<code>op_intersection.point(segment_CB¹, circle_B¹B¹)=F</code>	atkarpos cB ir apskritimo BB` sankirtos taškas F			
<code>op_arc(E,F, circle_B¹B¹)= arc_EF</code>	lankas ant apskritimo BB` per taškus E ir F			
<code>hide(A, B, C, circle BB', segment_AB, segment_BC)</code>	slėpti taškus, apskritimą ir atkarpas			

6. Priedas. Dinaminės geometrijos sistemos pasirinkimo tyrimas



5 pav. Kriterijų reikšmės

11 lentelė. DGS vertinimo anketa lietuvių kalba

Kriterijus		Tenkina	Iš dalies tenkina	Netenkina
Kaina				
	a) nemokama (atviro kodo, licencija mokymuisi);			
	b) mokama (nurodoma kaina).			
Konstravimo paprastumas				
	Automatinių (paspaudus viena mygtuką iškart konstruojama lape) geometrinių figūrų konstravimo priemonių skaičius (taškas, atkarpa, tiesė, spindulys, apskritimas, skritulys, trikampiai pagal rūšis, taisyklingas daugiakampis ir pan.).			
Geometrijos ir algebras integravimas				
	Integruoja algebrą ir geometriją.			
Lankstumas				
	a) teksto papildymo, keitimo,			

Kriterijus	Tenkina	Iš dalies tenkina	Netenkina
pridėjimo, šalinimo galimybė;			
b) galimybė keisti brėžinio žymėjimus (viršūnių, atkarpų ir kt. žymenis);			
c) galimybė šalinti objektus;			
d) galimybė paslėpti arba parodyti objektus brėžinyje.			
Apjungiamumas			
a) galimybės sujungti interaktyvius mikropasaulius į vientisą sistemą be papildomų programų (visus dinامينius brėžinius viename faile skirtinguose lapuose, kaip Excel lakštai);			
b) galimybė išskirti kiekvieną mikropasaulį kaip atskirą mokymosi objektą (kiekvienas brėžinys konstruojamas atskirame faile).			
Apsauga			
Galimybės apsaugoti brėžinio objektus nuo naudotojo veiksmų (padaryti, kad naudotojas negalėtų taisyti objektų, kurių nereikia).			
Estetika			
a) galimybė keisti linijų ir užpildo stilių ir spalvą;			
b) galimybė keisti teksto šriftą, dydį ir spalvą;			
c) galimybė įterpti matematinius simbolius į tekstą (lotyniškas raides ir kt.);			
d) galimybė įterpti matematinius žymėjimus į tekstą (kvadratinės šaknies, paprastųjų trupmenų, kampo žymėjimą, apatinį ir viršutinį indeksus ir kt.).			
Interaktyvumas			
a) galimybė pridėti mygtukus objektų valdymui, judėjimui ir animacijai;			
b) galimybė keisti parametrus			

Kriterijus	Tenkina	Iš dalies tenkina	Netenkina
(įrašant, slinkties juostoje ir pan.);			
c) galimybė paslėpti ir parodyti paaiškinimus galutiniame rezultate (galima sukurti mygtukus paslėpti ir parodyti).			
Atkūriamumas			
Galimybė sukurti pradinės padėties mygtuką, kurį paspaudus visi objektai grįžta į pradinės padėtis.			
Tikslumas			
Galimybė įvairiai apvalinti matavimus ir parametrus.			

12 lentelė. DGS vertinimo anketa anglų kalba

Dynamic geometry system: (please, specify system and its version)

Note: the criteria 1 and 2 requires numbers in the cells; the criteria 3 -10 requires to choose one of the three alternatives – supply, supply in part, not supply and to mark ‘x’ in particular cell.

System ‘supply’ possibility if it is direct in the system or ‘supply in part’ could be done with system’s features (except in criteria 2).

Criteria	Supply	Supply in part	Not supply
Price			
a) free (open source);			
b) cost (specify price).			
Constructions			
Automated (to push button and draw) construction of geometric objects (specify number of such object).			
The integration of geometry and algebra			
The integration of geometry and algebra.			
Flexible			
a) The created text can be added, corrected, changed, and deleted;			

Criteria		Supply	Supply in part	Not supply
	b) The marking of vertices, segments, lines etc. can be changed with other letters;			
	c) The possibility to delete objects;			
	d) The possibility to hide and to show separate objects.			
Systematization				
	a) The possibility to join all sketches in one file in interactive application without any additional software;			
	b) The possibility to separate sketches.			
Safeguard				
	The possibility to protect objects from user actions.			
Aesthetics				
	a) The possibility to change style and colour of line;			
	b) The possibility to change text shrift, size and colour;			
	c) The possibility to add mathematical text into sketch (Latin letters etc.);			
	d) The possibility to add all mathematical sign into sketch (square root, angle mark, algebraic operations etc).			
Interactivity				
	a) The possibility to add animation, action, control buttons;			
	b) The possibility to change parameters;			
	c) The possibility to hide or show explanations in the final sketch with hide/show buttons.			
Restore				
	The possibility to create start button which restore all sketch at any time in the start position.			
Accuracy				
	a) The possibility to round measures and parameters.			

13 lentelė. T. L. Saaty skalė su tarpinėmis reikšmėmis [Saa90]

Reikšmingumo lygis	Apibrėžtis	Paaiškinimas
$a_{ij}=1$	Vienodas reikšmingumas.	Abiejų lyginamų alternatyvų reikšmingumai yra vienodi.
$a_{ij}=3$	Viena alternatyva reikšmingesnė už kitą.	Kai alternatyva a_i yra reikšmingesnė už a_j .
$a_{ij}=5$	Viena alternatyva daug reikšmingesnė už kitą.	Kai alternatyva a_i yra reikšmingesnė už a_j .
$a_{ij}=7$	Viena alternatyva žymiai reikšmingesnė už kitą.	Suteikiamas ryškus prioritetas alternatyvai a_i .
$a_{ij}=9$	Viena alternatyva absoliučiai reikšmingesnė už kitą.	Išskiriamas alternatyvos a_i reikšmingumas.
$a_{ij}=2,4,6,8$	Tarpinės, kompromisinės reikšmės, kai eksperto nuomonė skiriasi nuo tipinės.	
Suderinamumas	Jei alternatyvai i priskiriama viena iš aukščiau išvardytų reikšmių, kai lyginama su alternatyva j , tai j turi atvirkščią reikšmę, jei yra lyginama su alternatyva i .	

14 lentelė. Atsitiktinio suderinamumo indekso reikšmės [Saa94]

Eilė	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
SA	0,58	0,9	1,12	1,24	1,32	1,41	1,45	1,49	1,51	1,48	1,56	1,57

15 lentelė. Eksperto porinio kriterijų palyginimo matrica

	kaina	konstravimo naštumas	geometrijos ir algebros integravimas	lankstumas	apjungiamumas	apsauga	estetika	interaktyvumas	atkuriamumas	tikslumas
kaina	1	1/5	1	1/3	3	1/3	1/7	1/7	1	1

	kaina	konstravimo paprastumas	geometrijos ir algebros integravimas	lankstumas	apjungiamumas	apsauga	estetika	interaktyvumas	atkuriamumas	tikslumas
konstravimo paprastumas	5	1	3	1	3	1/3	1/3	1	1	1
geometrijos ir algebros integravimas	1	1/3	1	1/3	3	1	1/5	1/3	1	1
lankstumas	3	1	3	1	5	3	1	1	1	1
apjungia- mumas	1/3	1/3	1/3	1/5	1	1	1/5	1/5	1	1
apsauga	3	3	1	1/3	1	1	1/3	1/3	1	1
estetika	7	3	5	1	5	3	1	1	1	1
Interaktyvu- mas	7	1	3	1	5	3	1	1	1	1
Atkuriamu- mas	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
tikslumas	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

16 lentelė. Sistemų palyginimas pagal *kainos* kriterijų

	Geometer's Sketchpad	Geogebra	Cabri	Cinrerella	Svoriai
Geometer's Sketchpad	1	1	7	7	0,433
Geogebra	1	1	7	7	0,433
Cabri	1/7	1/7	1	1/3	0,048
Cinrerella	1/7	1/7	3	1	0,085

$\lambda_{\max}=4,155$ $SI=0,052$ $SS=0,058$

17 lentelė. Sistemų palyginimas pagal *konstravimo* kriterijų

	Geometer's Sketchpad	Geogebra	Cabri	Cinrerella	Svoriai
Geometer's Sketchpad	1	1/5	1/7	1	0,061
Geogebra	5	1	1/3	3	0,264
Cabri	7	3	1	5	0,569
Cinrerella	2	1/3	1/5	1	0,106

$\lambda_{\max}=4,069$ SI=0,023 SS=0,026

18 lentelė. Sistemų palyginimas pagal *algebras ir geometrijos integravimo* kriterijų

	Geometer's Sketchpad	Geogebra	Cabri	Cinrerella	Svoriai
Geometer's Sketchpad	1	1/2	5	5	0,346
Geogebra	2	1	5	5	0,491
Cabri	1/5	1/5	1	1	0,081
Cinrerella	1/5	1/5	1	1	0,081

$\lambda_{\max}=4,061$ SI=0,0203 SS=0,023

19 lentelė. Sistemų palyginimas pagal *lankstumo* kriterijų

	Geometer's Sketchpad	Geogebra	Cabri	Cinrerella	Svoriai
Geometer's Sketchpad	1	1/2	5	7	0,368
Geogebra	2	1	5	5	0,481
Cabri	1/5	1/5	1	1	0,078
Cinrerella	1/7	1/5	1	1	0,073

$\lambda_{\max}=4,105$ SI=0,035 SS=0,039

20 lentelė. Sistemų palyginimas pagal *apjungiamumo* kriterijų

	Geometer's Sketchpad	Geogebra	Cabri	Cinrerella	Svoriai
Geometer's Sketchpad	1	7	9	9	0,7186
Geogebra	1/7	1	3	3	0,1554
Cabri	1/9	1/3	1	1	0,063
Cinrerella	1/9	1/3	1	1	0,063

$\lambda_{\max}=4,091$ $SI=0,0303$ $SS=0,034$

21 lentelė. Sistemų palyginimas pagal *apsaugos* kriterijų

	Geometer's Sketchpad	Geogebra	Cabri	Cinrerella	Svoriai
Geometer's Sketchpad	1	9	5	1	0,471
Geogebra	1/9	1	3	1/5	0,097
Cabri	1/5	1/3	1	1/4	0,066
Cinrerella	1	5	4	1	0,366

$\lambda_{\max}=4,326$ $SI=0,109$ $SS=0,1$

22 lentelė. Sistemų palyginimas pagal *estetikos* kriterijų

	Geometer's Sketchpad	Geogebra	Cabri	Cinrerella	Svoriai
Geometer's Sketchpad	1	3	5	3	0,505
Geogebra	1/3	1	5	3	0,288
Cabri	1/5	1/5	1	1/3	0,065
Cinrerella	1/3	1/3	3	1	0,143

$\lambda_{\max}=4,198$ $SI=0,066$ $SS=0,073$

23 lentelė. Sistemų palyginimas pagal *interaktyvumo* kriterijų

	Geometer's Sketchpad	Geogebra	Cabri	Cinrerella	Svoriai
Geometer's Sketchpad	1	3	5	5	0,538
Geogebra	1/3	1	5	5	0,305
Cabri	1/5	1/5	1	1	0,783
Cinrerella	1/5	1/5	1	1	0,783

$\lambda_{\max}=4,155$ SI=0,052 SS=0,057

24 lentelė. Sistemų palyginimas pagal *atkuriamumo* kriterijų

	Geometer's Sketchpad	Geogebra	Cabri	Cinrerella	Svoriai
Geometer's Sketchpad	1	1	3	3	0,375
Geogebra	1	1	3	3	0,375
Cabri	1/3	1/3	1	1	0,125
Cinrerella	1/3	1/3	1	1	0,125

$\lambda_{\max}=4$ SI=0 SS=0

25 lentelė. Sistemų palyginimas pagal *tikslumo* kriterijų

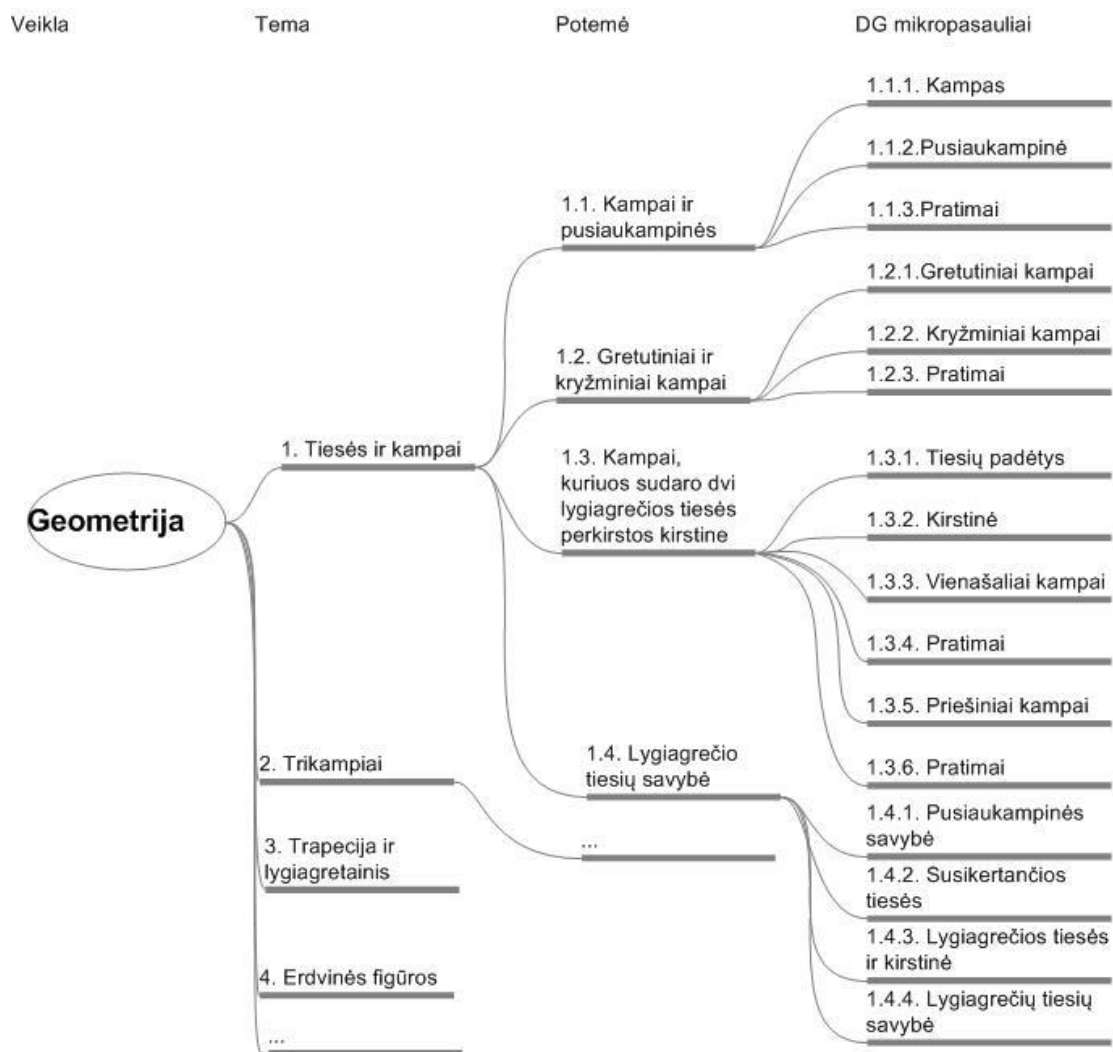
	Geometer's Sketchpad	Geogebra	Cabri	Cinrerella	Svoriai
Geometer's Sketchpad	1	1	1	3	0,309
Geogebra	1	1	1	3	0,309
Cabri	1	1	1	1	0,241
Cinrerella	1/3	1/3	1	1	0,142

$\lambda_{\max}=4,155$ SI=0,052 SS=0,057

26 lentelė. DG sistemų palyginimas

	kaina (0,049)	konstravimo paprastumas (0,108)	geometrijos ir algebros integravimas (0,591)	lankstumas (0,138)	apjungiamumas (0,042)	apsauga (0,088)	estetika (0,185)	interaktyvumas (0,155)	atkuriamumas (0,088)	tikslumas (0,088)	Vidurkis
Geometer's Sketchpad	0,433	0,061	0,347	0,368	0,719	0,471	0,505	0,538	0,375	0,309	0,592
Geogebra	0,433	0,264	0,492	0,481	0,155	0,097	0,288	0,305	0,375	0,309	0,582
Cabri	0,048	0,569	0,083	0,078	0,063	0,066	0,065	0,078	0,125	0,241	0,188
Cinrerella	0,085	0,106	0,083	0,073	0,063	0,366	0,143	0,078	0,125	0,142	0,172

7. Priedas. Eksperimentinis tyrimas



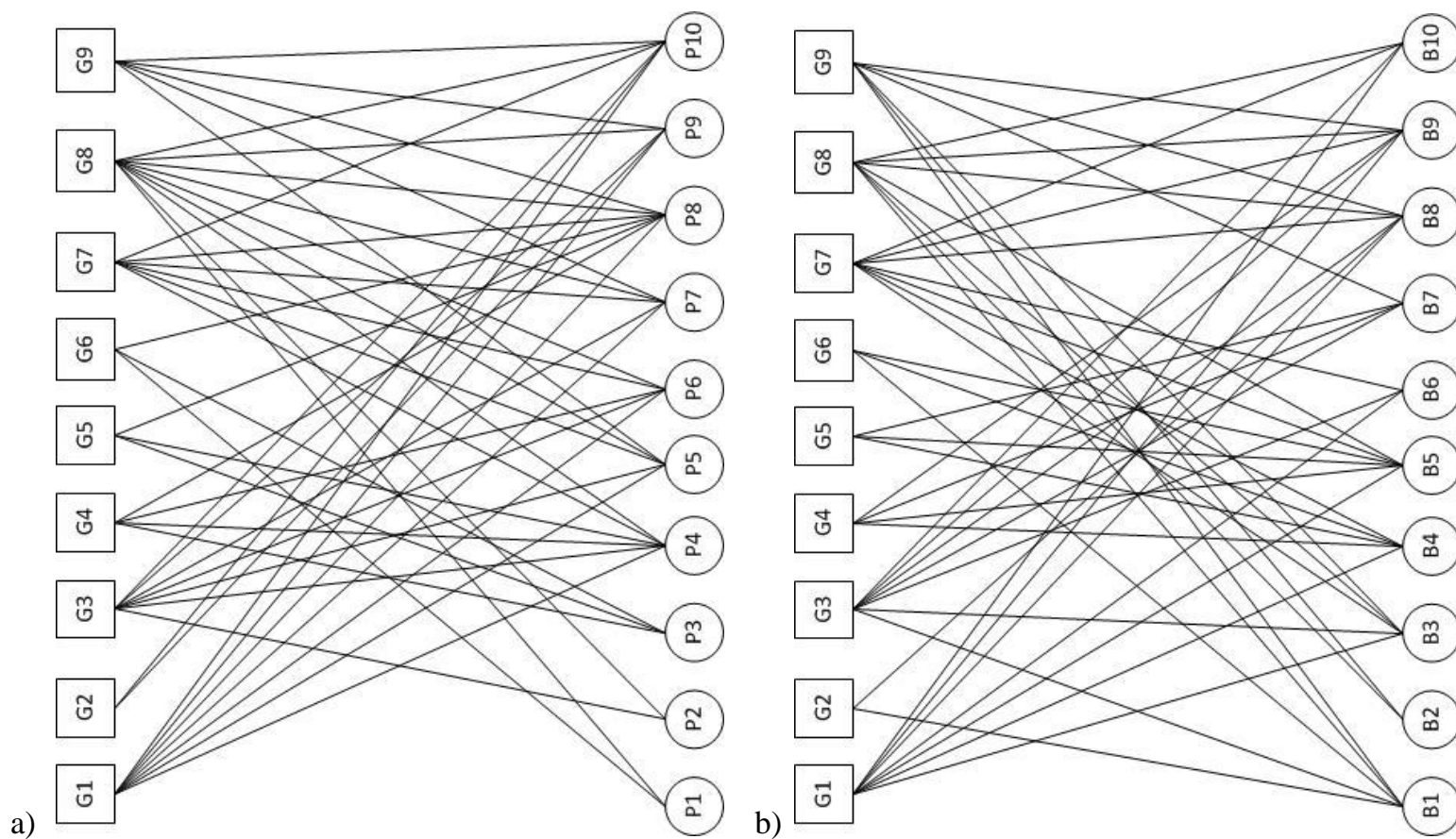
6 pav. Eksperimente naudojami interaktyvūs mikropasauliai

27 lentelė. Pradinio testo užduočių ir gebėjimų atitikimas taškais

Gebėjimai	U1	U2	U3	U4	U5	U6	U7	U8	U9	U10	
G1 Gebėjimas taikyti algebrinius skaičiavimus geometriniuose uždaviniuose.				1	1	1	1	1	1	1	7
G2 Gebėjimas spręsti lygis.									1	1	2
G3 Gebėjimas skaityti brėžinius.		1		1	1	1	1		1	1	7
G4 Gebėjimas suprasti matematinį tekstą.				1	1			1		1	4
G5 Gebėjimas naudoti matlankį.			1	1				1			3
G6 Gebėjimas braižyti scheminius ir tikslus brėžinius.	1		1					1			3
G7 Gebėjimas atpažinti ir taikyti kampų savybes įvairiems uždaviniams spręsti.				1	1	1	1	1		1	6
G8 Gebėjimas atpažinti geometrines figūras.	1	1		1	1	1	1	1	1	1	9
G9 Gebėjimas naudoti geometrinius žymėjimus.			1			1	1	1	1		5
	2	2	3	6	5	5	5	7	5	6	46

28 lentelė. Baigiamojo testo užduočių ir gebėjimų atitikimas taškais

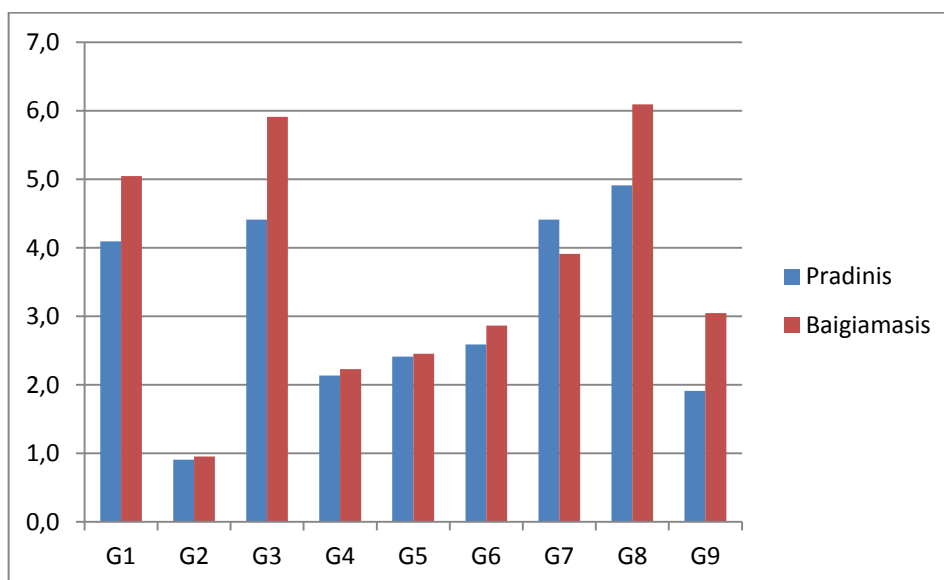
Gebėjimai		U1	U2	U3	U4	U5	U6	U7	U8	U9	U10	
G1	Geometrinių taikyti algebrinius skaičiavimus geometrinuose uždaviniuose.				1	1	1	1	1	1	1	7
G2	Gebėjimas spręsti lygis.									1	1	2
G3	Gebėjimas skaityti brėžinius.		1		1	1	1	1		1	1	7
G4	Gebėjimas suprasti matematinį tekstą.			1			1		1	1		4
G5	Gebėjimas naudoti matlankį.			1					1			3
G6	Gebėjimas braižyti scheminius ir tikslus brėžinius.	1		1					1			3
G7	Gebėjimas atpažinti ir taikyti kampų savybes įvairiems uždaviniams spręsti.					1	1	1	1	1	1	6
G8	Gebėjimas atpažinti geometrines figūras.	1	1		1	1	1	1	1	1	1	9
G9	Gebėjimas naudoti geometrinius žymėjimus.				1	1			1	1	1	5
		2	2	3	5	5	5	4	7	7	6	46



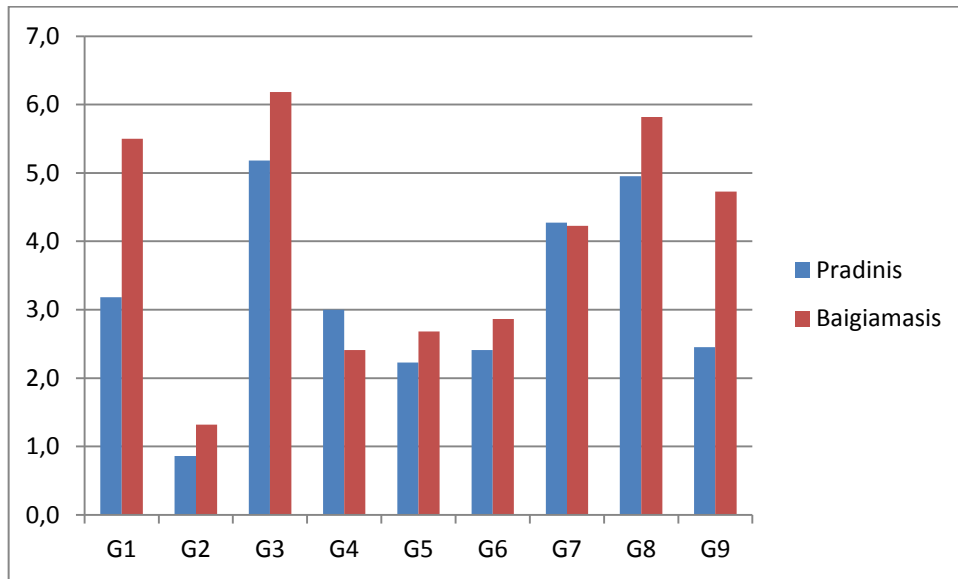
7 pav. a) Gebėjimų ir pradinio testo užduočių ryšiai, b) Gebėjimų ir baigiamojo testo užduočių ryšiai

29 lentelė. Imčių normaliojo pasiskirstymo testų rezultatai

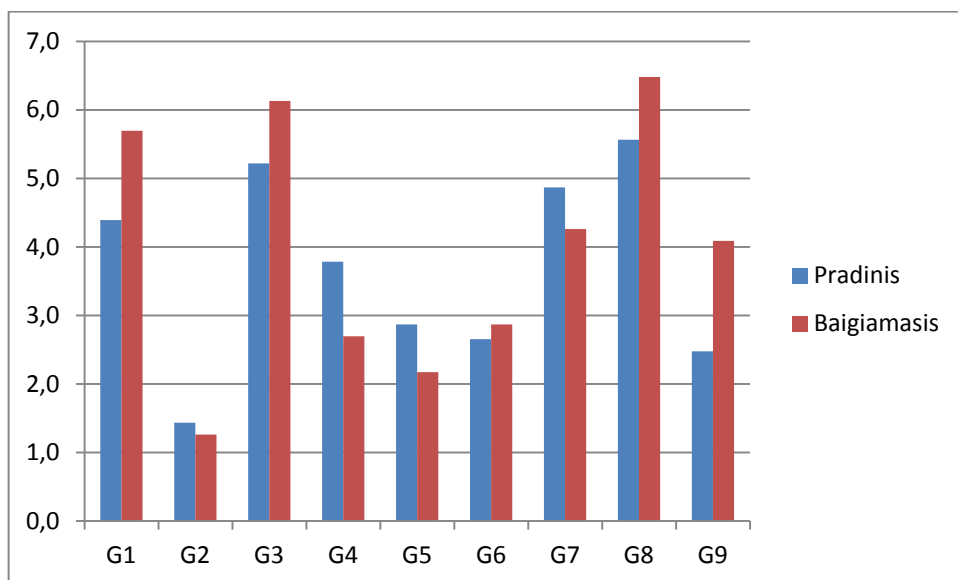
	Testas	AD	AD*	p
E	Pradinis	0,252	0,257	0,722
	Baigiamasis	0,674	0,686	0,073
E1	Pradinis	0,274	0,285	0,629
	Baigiamasis	0,282	0,293	0,603
E2	Pradinis	0,345	0,359	0,452
	Baigiamasis	0,611	0,635	0,098
K	Pradinis	0,608	0,630	0,101
	Baigiamasis	0,539	0,559	0,149



8 pav. Eksperimentinės grupės E1 gebėjimų vidurkių palyginimas



9 pav. Eksperimentinės grupės E2 gebėjimų vidurkių palyginimas



10 pav. Kontrolinės grupės gebėjimų vidurkių palyginimas