VILNIAUS UNIVERSITETAS

SONDRA ČERNIGOVA

MOMENTŲ PROBLEMA PERIODINEI DZETA FUNKCIJAI

Daktaro disertacijos santrauka
Fiziniai mokslai, matematika (01P)

Vilnius, 2014

Disertacija rengta 2010-2014 metais Vilniaus universitete

Mokslinis vadovas:

Prof. habil. dr. Antanas Laurinčikas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P)

Disertacija ginama Vilniaus universiteto Matematikos mokslo krypties mokslo taryboje:

Pirmininkas:

Prof. habil. dr. Artūras Dubickas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P)

Nariai:

Prof. dr. Vasily Ivanovich Bernik (Baltarusijos mokslų akademijos matematikos institutas, fiziniai mokslai, matematika - 01P)

Prof. dr. Aleksandras Krylovas (Mykolo Romerio universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P)

Prof. habil. dr. Remigijus Leipus (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P)

Prof. dr. Jonas Šiaulys (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P)

Disertacija ginama viešame Matematikos mokslo krypties tarybos posėdyje 2014 m. spalio 28 d. 15 val. Vilniaus universiteto matematikos ir informatikos fakultete.
Adresas: Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius, Lietuva.

Disertacijos santrauka išsiuntinėta 2014 m. rugsėjo 26 d.
Disertaciją galima peržiūrėti Vilniaus universiteto bibliotekoje.

VILNIUS UNIVERSITY

SONDRA ČERNIGOVA

MOMENT PROBLEM FOR THE PERIODIC ZETA-FUNCTION

Summary of doctoral dissertation
Physical sciences, mathematics (01P)

Vilnius, 2014

The scientific work was carried out in 2010-2014 at Vilnius University

Scientific supervisor:

Prof. habil. dr. Antanas Laurinčikas (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics - 01P)

The thesis is defined in the council of Mathematics of Vilnius University:

Chairman:

Prof. habil. dr. Artūras Dubickas (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics - 01P)

Members:

Prof. dr. Vasily Ivanovich Bernik (Institute of Mathematics of Academy of Science of Belarus, Physical sciences, Mathematics - 01P)

Prof. dr. Aleksandras Krylovas (Mykolas Romeris University, Physical sciences, Mathematics - 01P)

Prof. habil. dr. Remigijus Leipus (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics - 01P)

Prof. dr. Jonas Šiaulys (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics - 01P)

The dissertation will be defended at the public meeting of the council on October 28, 2014, in Vilnius University, Department of Mathematics and Informatics at 3 p.m.
Address: Naugarduko st. 24, LT-03225 Vilnius, Lithuania.

The summary of dissertation was distributed on September 26, 2014.
The dissertation is available at the Library of Vilnius University.

DISERTACINIO DARBO APRAŠYMAS

Tyrimo objektas ir mokslinė problema. Disertacijos tyrimo objektas yra periodinė dzeta funkcija. Mokslinė problema - šios funkcijos momentų problema.

Periodinė dzeta funkcija $\zeta_\lambda(s)$, $s = \sigma + it$, pusplokštumėje $\sigma > 1$, yra apibrėžiama paprastąja Dirichlė eilute su koeficientais $e^{2\pi i\lambda m}$, čia λ yra fiksuotas parametras.

Tikslas ir uždaviniai. Darbo tikslas - įrodyti asimptotines formules funkcijos $\zeta_\lambda(s)$ momentams bei kai kuriems objektams, susijusiems su šios funkcijos momentais. Darbo uždaviniai yra šie:

1. Įrodyti Atkinsono tipo formulę su korektišku liekamuoju nariu kritinėje juostoje periodinei dzeta funkcijai su racionaliuoju parametru.

2. Įrodyti Atkinsono tipo formulės periodinei dzeta funkcijai kritinėje tiesėje vidurkio formulę liekamojo nario modulio kvadratui.

3. Įrodyti Atkinsono tipo formulės periodinei dzeta funkcijai kritinėje juostoje vidurkio formulę liekamojo nario modulio kvadratui.

4. Gauti asimptotinę formulę periodinės dzeta funkcijos ketvirtajam momentui.

Aktualumas. Funkcijų reikšmių pasiskirstymas yra charakterizuojamas įvairiais būdais. Vienas iš populiariausių būdų dzeta funkcijų teorijoje yra šių funkcijų momentų tyrimas. Tai motyvuojama tuo, jog įvairiuose uždaviniuose individualios dzeta funkcijų reikšmės, kurias sunku apskaičiuoti, gali būti pakeičiamos tų reikšmių vidurkiais. Be to, gerai žinoma, kad kai kuriais atvejais iš dzeta funkcijų momentų asimptotikos išplaukia tikimybinės ribinės teoremos. Todėl dauguma analizinės skaičių teorijos tyrinėtojų yra susiję su dzeta funkcijų momentų problema. Pirmieji reikšmingi rezultatai šioje srityje priklauso G. H. Chardžiui (Hardy) ir J. E. Litlvudui (Littlewood) (asimptotinė formulė Rymano dzeta funkcijos kvadrato vidurkiui) ir A. E. Ingamui (Ingham) (asimptotinė formulė Rymano dzeta funkcijos ketvirtajam momentui). Momentų problemą Rymano dzeta funkcijai išvystė D. R. His-Braunas (Heath-Brown), M. Jutila (Jutila), A. Ivičius (Ivič), A. Selbergas (Selberg). Svarius rezultatus gavo F. V. Atkinsonas (Atkinson), K. Ramančandra (Ramachandra), K. Macumotas (Matsumoto), T. Miormanas (Meurman), J. B. Konris (Conrey), J. Štoidingas (Steuding) ir kiti žinomi matematikai. Neseniai K. Saundararajanas (Soundararajan) momentų problemos sprendime pasiūlė naujas idėjas ir patikslino keletą rezultatų [17].

Dzeta funkcijų momentų problema turi gražias tradicijas ir Lietuvoje. J. Kubilius, M. Maknys, A. Bulota, A. Matuliauskas nagrinėjo algebrinių kūnų dzeta funkcijų momentus. A. Laurinčikas ir jo mokiniai R. Garunkštis, D. Šiaučiūnas, S. Zamarys, J. Karaliūnaitė, R. Ivanauskaitė tyrinėjo Rymano dzeta funkcijas, Dirichlė L-funkcijų, parabolinių formų, Dirichlė eiliučių su periodiniais koeficientais ir kitų dzeta funkcijų momentus ir taikė gautus rezultatus. Visą tai rodo dzeta funkcijos momentų problemos svarbą.

Metodai. Atkinsono tipo formulės įrodimui yra taikomos Atkinsono, Macumoto ir Miormano metodų modifikacijos. Vidurkių formulėms įrodyti yra išvystomi His-Brauno ir Ivičiaus metodai. Ketvirtojo momento tyrimui yra naudojama artutinė funkcinė lygtis.

Naujumas. Visi disertacijos rezultatai yra nauji. Atkinsono tipo formulę kritinėje juostoje periodinei dzeta dunkcijai nagrinėjo J. Karaliūnaitė, tačiau disertacijoje ši formulė pateikta su pataisytu liekamuoju nariu parametro atžvilgiu.

Darbas yra teorinis. Gauti rezultatai gali būti naudojami tolimesniems periodinės dzeta funkcijos tyrimams.

Problemos apžvalga ir pagrindiniai rezultatai. Momentų problema analizinėje skaičių teorijoje visų pirma yra siejama su Rymano dzeta funkcijos $\zeta(s)$ reikšmių pasiskirstymo tyrimais. Primename, kad $\zeta(s)$ funkcija pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra apibrėžiama Dirichlė eilute

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s},$$

ir yra analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą, išskyrus paprastąjį polių taške $s = 1$ su reziduumu 1. Funkcijos $\zeta(s)$ momentų problemos esmė yra rasti asimptotiką arba bent įverčius dydžiams

$$I_k(\sigma, T) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^T |\zeta(\sigma + it)|^{2k} dt, \ \sigma \geq \frac{1}{2}, \ k \geq 0,$$

kai $T \to \infty$. Kai kuriuose uždaviniuose informacija apie $I_k(\sigma, T)$ sėkmingai pakeičia individualias funkcijos $\zeta(s)$ reikšmes. Tai aiškiai parodo momentų problemos sąryšis su Lindeliofo (Lindelöf) hipoteze, tvirtinančia, kad su kiekvienu $\varepsilon > 0$,

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) = O_\varepsilon(|t|^\varepsilon), \ |t| \geq t_0.$$

Nėra sudėtinga parodyti, žr., pavyzdžiui, [18], kad Lindeliofo hipotezė yra ekvivalenti įverčiui

$$I_k\left(\frac{1}{2}, T\right) = O_\varepsilon(T^{1+\varepsilon}), \ k \in \mathbb{N},$$

su kiekvienu $\varepsilon > 0$. Iš kitos pusės, dzeta funkcijų momemtų tyrimas yra labai sudėtinga, tačiau įdomi analizinės skaičių teorijos problema. Funkcijos $\zeta(s)$ teorijoje yra žinoma hipotezė, kad

$$I_k\left(\frac{1}{2}, T\right) \sim c(k) T (\log T)^{k^2}, \tag{1}$$

kai $T \to \infty$, su kuriomis nors konstantomis $c(k)$, tačiau ji yra įrodyta tik kelioms k treikšmėms. 1918 m. Chardis su Litlvudu gavo, kad $c(1) = 1$, o 1926 m. Ingamas įrodė, jog $c(2) = \frac{1}{2\pi^2}$. Be to, 1996 m. Laurinčikas pastebėjo, kad (1) sąryšis yra teisingas su

$$k = \frac{a}{\sqrt{\log \log T}}$$

kai $c(k) = 1$ ir a yra aprėžtas teigiamas dydis.

Yra žinomi ir įvairūs dydžių $I_k(\frac{1}{2}, T)$ įverčiai. Labai tikslūs tokio tipo rezultatai priklauso His-Braunui. Jis įrodė [4], kad nelygybė

$$I_k\left(\frac{1}{2}, T\right) \geq c_k T (\log T)^{k^2} \tag{2}$$

su kuriuo nors $c_k > 0$ yra teisinga su visais racionaliais k. (2) nelygybę anksčiau jau buvo gavęs Ramačandra [16] visiems $k > 0$, kai teisinga Rymano hipotezė (RH) $\left(\zeta(s) \neq 0, \text{ kai } \sigma > \frac{1}{2}\right)$. Taip pat tame pačiame darbe His-Braunas įrodė ir nelygybę iš viršaus

$$I_k\left(\frac{1}{2}, T\right) \le c_k T (\log T)^{k^2}$$

su $k = \frac{1}{m}$, $m \in \mathbb{N}$, o su RH - su visais $0 < k < 2$. Su RH Konris (Conrey) su A. Gošu (Ghosh) gavo nelygybę [2]

$$I_k\left(\frac{1}{2}, T\right) \ge (\hat{c}(k) + o(1)) T (\log T)^{k^2}$$

su išreikštiniu $\hat{c}(k)$, $k > 0$, pavidalu, o His-Braunas [5] pateikė nelygybę

$$I_k\left(\frac{1}{2}, T\right) \le \left(\frac{2}{(k^2+1)(2-k)}\hat{c}(k) + o(1)\right) T (\log T)^{k^2}$$

su $0 < k < 2$. Konstantų $c(k)$ išraiškos nėra žinomos. Egzistuoja hipotezės, kad

$$c(3) = \frac{42}{9!} \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^4 \left(1 + \frac{4}{p} + \frac{1}{p^2}\right)$$

ir

$$c(4) = \frac{24024}{14!} \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^9 \left(1 + \frac{9}{p} + \frac{9}{p^2} + \frac{1}{p^3}\right),$$

bei bendra hipotezė, jog

$$c(k) = \frac{1}{\Gamma(1+k^2)} \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{k^2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{d_k^2(p^j)}{p^j} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{j!}{(j+k)!},$$

čia

$$d_k(p^j) = \frac{k(k+1)...(k+j-1)}{j!}.$$

Analogiškus rezultatus dydžiams $I_k\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{l_T}, T\right)$ su $l_T \to \infty$ gavo A. Laurinčikas. Jis taip pat iškėlė hipotezę, kad

$$\int_0^T \left|\zeta\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{l_T} + it\right)\right|^{2k} dt = b(k) \min(l_T, \log T)^{k^2} (1 + o(1)),$$

kai $T \to \infty$, su kuriomis nors konstantomis $b(k)$.

Daug dėmesio yra skiriama antrajam momentui $I_1\left(\frac{1}{2}, T\right)$. Tegul γ_0 yra Oilerio konstanta, t.y.,

$$\gamma_0 = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{m\le n}\frac{1}{m} - \log n\right) = 0,577215...,$$

ir

$$E(T) = I_1\left(\frac{1}{2}, T\right) - T\log\frac{T}{2\pi} - (2\gamma_0 - 1)T.$$

Klasikinis [18] monografijos rezultatas tvirtina, kad su kiekvienu $\varepsilon > 0$ galioja įvertis $E(T) = O(T^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$. Tiksliausias žinomas įvertis

$$E(T) = O\left(T^{\frac{131}{416}}(\log T)^{\frac{32587}{8320}}\right)$$

buvo gautas [19] darbe. Hipotezė tvirtina, kad $O(T^{\frac{1}{4}+\varepsilon})$ su kiekvienu $\varepsilon > 0$.

Funkciją $E(T)$ nagrinėjo daugelis autorių. Tai galima paaiškinti ne tik pačios funkcijos $E(T)$ įdomumu, bet ir jos sąryšiu su garsia Dirichlė daliklių problema apie dydžių

$$\Delta(x) = \sum_{m\le x} d(m) - x(\log x + 2\gamma_0 - 1)$$

įvertį. Čia, kaip visada,

$$d(m) = \sum_{d|m} 1, \ m \in \mathbb{N},$$

yra daliklių funkcija. Daug rezultatų šia tema galima rasti darbuose [6], [7].

Yra žinomi įvairūs funkcijos $E(T)$ tyrinėjimo metodai. F. V. Atkinsonas pasiūlė [1] naują būdą, kuris atvedė prie išreikštinės funkcijos $E(T)$ formulės su mažu liekamuoju nariu. Tegul $c_1 < c_2$ yra teigiamos konstantos, $c_1 T < N < c_2 T$, ir

$$N_1 = N_1(T, N) = \frac{T}{2\pi} + \frac{N}{2} - \sqrt{\frac{N^2}{4} + \frac{NT}{2\pi}}.$$

Apibrėžiame funkcijas

$$\operatorname{arsinh}(x) = \log(x + \sqrt{1 + x^2}),$$

$$f(T, m) = 2T\operatorname{arsinh}\left(\sqrt{\frac{\pi m}{2T}}\right) + \sqrt{2\pi m T + \pi^2 m^2} - \frac{\pi}{4}.$$

Tuomet Atkinsono teorema turi pavidalą.

A teorema. *Yra teisinga formulė*

$$\begin{aligned} E(T) \quad &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{m\le N}\frac{(-1)^m d(m)}{\sqrt{m}}\left(\operatorname{arsinh}\left(\sqrt{\frac{\pi m}{2\pi}}\right)\right)^{-1}\left(\frac{T}{2\pi m} + \frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{4}}\cos(f(T, m)) \\ &-2\sum_{m\le N_1}\frac{d(m)}{\sqrt{m}}\left(\log\frac{T}{2\pi m}\right)^{-1}\cos\left(T\log\frac{T}{2\pi m} - T + \frac{\pi}{4}\right) + O(\log^2 T). \end{aligned}$$

A teoremos įrodymas su nedideliais pataisymais yra duotas ir [6] monografijoje. Matome, kad Atkinsono formulė išreiškia liekamąjį narį $E(T)$ gana paprastomis elementariomis funkcijomis. Tai leidžia atlikti tikslesnius funkcijos $E(T)$ tyrimus.

Yra žinomos įvairios A teoremos modifikacijos. Laurinčikas 1992, 1993 m. įrodė Atkinsono formulės variantą šalia kritinės tiesės $\sigma = \frac{1}{2}$.

Miormanas 1986 m. gavo Atkinsono formulės apibendrinimą Dirichlė L-funkcijoms. H. Išikava (Ishikawa) ir Macumotas 2011 m. įrodė Atkinsono tipo formulę funkcijos $\zeta(s)$ ir Dirichlė polinomo sandaugai. Pastebime, kad Atkinsono formulė yra gana naudingas rezultatas Rymano dzeta funkcijos teorijoje. Ši formulė naudojama įvairiems dydžio $I_1(\sigma, T)$ formulės liekamojo nario įverčiams gauti bei aukštesniųjų momentų $I_k(\sigma, T)$ tyrimui. Pavyzdžiui, His-Braunas pritaikė [3] A teoremą gauti įverčiui

$$I_6\left(\frac{1}{2}, T\right) = O(T^2 (\log T)^{17}).$$

Daugiau informacijos apie Rymano dzeta funkcijos vidurkius galima rasti [14] ir [8] darbuose.

Disertacijoje Atkinsono tipo formulė yra gaunama periodinei dzeta funkcijai $\zeta_\lambda(s)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Ši funkcija pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra apibrėžiama Dirichlė eilute

$$\zeta_\lambda(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \lambda m}}{m^s}.$$

Kai $\lambda \in \mathbb{Z}$, funkcija $\zeta_\lambda(s)$ tampa Rymano dzeta funkcija. Iš kitos pusės, funkcija $\zeta_\lambda(s)$ yra artimai susijusi su Lercho dzeta funkcija

$$L(\lambda, \alpha, s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \lambda m}}{(m+\alpha)^s}, \ \sigma > 1,$$

čia α, $0 < \alpha \leq 1$, yra fiksuotas parametras. Nesunku matyti, kad

$$\zeta_\lambda(s) = e^{2\pi i \lambda} L(\lambda, 1, s), \ \sigma > 1. \tag{3}$$

Kadangi funkcija $L(\lambda, 1, s)$ su $\lambda \notin \mathbb{Z}$ yra sveikoji, tai (3) lygybė duoda funkcijos $\zeta_\lambda(s)$ su $\lambda \notin \mathbb{Z}$ analizinį pratęsimą į visą kompleksinę plokštumą. Iš koeficientų $e^{2\pi i \lambda m}$ periodiškumo išplaukia, jog nemažindami bendrumo galime laikyti, kad $0 < \lambda \leq 1$.

Funkcija $\zeta_\lambda(s)$ nėra tokia svarbi analizinėje skaičių teorijoje kaip, tarkime, $\zeta(s)$. Tačiau ji yra pakankamai įdomus analizinis objektas, priklausantis nuo parametro λ ir pasirodantis įvairiuose uždaviniuose. Pavyzdžiui, $\zeta_\lambda(s)$ įeina į funkcijos $L(\lambda, \alpha, s)$ kvadrato vidurkio parametro α atžvilgiu formulę [11].

B teorema. *Tarkime, kad* $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ *yra fiksuotas ir* $t > 1$. *Tuomet su kiekvienu* $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \int_0^1 |L(\lambda, \alpha, \sigma + it) - \alpha^{-\sigma - it}|^2 d\alpha \quad &= \frac{1}{2\sigma - 1} + 2\Gamma(2\sigma - 1) Re\left(\zeta_\lambda(2\sigma - 1)\frac{\Gamma(1 - \sigma + it)}{\Gamma(\sigma + it)}\right) \\ &-2Re\left(e^{-2\pi i \lambda}\zeta_\lambda(\sigma + it) - 1\right) + O(t^{-1}). \end{aligned}$$

Analogiška formulė yra teisinga [11] ir atvejais kai $\sigma = \frac{1}{2}$, $\sigma = 1$.

Iš (3) lygybės turime, kad funkcijos $\zeta_\lambda(s)$ momentai sutampa su funkcijos $L(\lambda, 1, s)$ momentais. Todėl iš monografijos [11] 4.2 skyrelio teoremų išplaukia tokie rezultatai. Tegul $\zeta(s, \alpha)$, $0 < \alpha \le 1$, yra Hurvico dzeta funkcija, t.y., $\zeta(s, \alpha) = L(\lambda, \alpha, s)$ su $\lambda \in \mathbb{Z}$.

C teorema. *Tarkime, kad* $0 < \lambda < 1$ *ir* $\frac{1}{2} < \sigma < 1$. *Tada, kai* $T \to \infty$,

$$\begin{aligned}\int_0^T |\zeta_\lambda(\sigma+it)|^2 dt \quad &= \zeta(2\sigma)T + \frac{(2\pi)^{2\sigma-1}}{2-2\sigma}\zeta(2-2\sigma, \lambda)T^{2-2\sigma} \\ &+O(T^{1-\sigma}\log T) + O(T^{\frac{\sigma}{2}}).\end{aligned}$$

Konstantą $c(\lambda)$ apibrėžiame formule

$$\sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m+\lambda} = \log n + c(\lambda) + O\left(\frac{1}{n}\right), \ n \to \infty,$$

o $c(1)$ yra Oilerio konstanta γ_0.

D teorema. *Tarkime, kad* $0 < \lambda < 1$. *Tuomet, kai* $T \to \infty$,

$$\int_0^T \left|\zeta_\lambda\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 dt = T\log T + T(c(\lambda) + \gamma - 1 - \log 2\pi) + O(T^{\frac{1}{2}}\log T).$$

C ir D teoremų įrodymui naudojama Lercho dzeta funkcijos artutinė funkcinė lygtis.

Įdomesnė ir sudėtingesnė kvadrato vidurkio problema funkcijai $\zeta_\lambda(s)$ yra ši. Tarkime, kad λ yra racionalusis skaičius, t.y., $\lambda = \frac{a}{q}$ su sveikaisiais a ir q, $1 \le a \le q$. Analogiškai Dirichlė L-funkcijų atvejui galima nagrinėti kvadratų vidurkį

$$\sum_{a=1}^{q} \int_0^T |\zeta_{\frac{a}{q}}(\sigma+it)|^2 dt. \tag{4}$$

Pastaroji problema su $\sigma = \frac{1}{2}$ buvo pradėta nagrinėti darbe [10] ir buvo gautas A teoremos analogas. Apibrėžiame

$$E(q,T) = \sum_{a=1}^{q} \int_0^T \left|\zeta_{\frac{a}{q}}\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 dt - qT\left(\log\frac{qT}{2\pi} + 2\gamma_0 - 1\right).$$

Tegul c_1 and c_2 yra dvi tokios teigiamos konstantos, $c_1 < c_2$, kad $c_1 T < N < c_2 T$, ir

$$N_1 = N_1(q,T,N) = q\left(\frac{T}{2\pi} + \frac{qN}{2} - \left(\left(\frac{qN}{2}\right) + \frac{qNT}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

Be to, tegul

$$f(T,m,q) = 2T\operatorname{arsinh}\left(\sqrt{\frac{\pi q m}{2T}}\right) + \sqrt{2\pi q m T + \pi^2 q^2 m^2} - \frac{\pi}{4}$$

ir

$$g(T,m,q) = T\log\left(\frac{qT}{2\pi m}\right) - T + \frac{\pi}{4}.$$

Matome, kad $f(T,m,q) = f(T,mq)$ ir $g(T,m,q) = g(T,\frac{m}{q})$ naudojant A teoremos žymenis. Apibrėžiame dvi sumas

$$\begin{aligned}\sum\nolimits_1(q,T) \quad &= \frac{1}{\sqrt{2q}}\sum_{m\le N}\frac{(-1)^{qm}d(m)}{\sqrt{m}}\left(\operatorname{arsinh}\left(\sqrt{\frac{\pi qm}{2T}}\right)\right)^{-1}\left(\frac{T}{2\pi qm}+\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{4}}\\ &\times\cos f(T,m,q)\end{aligned}$$

ir

$$\sum\nolimits_2(q,T) = -\frac{2}{\sqrt{q}}\sum_{m\le N_1}\frac{d(m)}{\sqrt{m}}\left(\log\frac{qT}{2\pi m}\right)^{-1}\cos g(T,m,q).$$

Tada galioja toks A teoremos analogas [10].

E teorema. *Tarkime, kad $q \le T$. Tuomet*

$$E(q,T) = q\left(\sum\nolimits_1(q,T) + \sum\nolimits_2(q,T)\right) + O(\sqrt{q}\log^2 T) + O(qT^{-1}).$$

Pastebime, kad, atveju $q = 1$, E teorema pilnai sutampa su A teorema. Be to, E teoremos įrodymo kelias reikalauja, kad galiotų nelygybė $q \le T$.

K. Macumotas gavo [13] Atkinsono formulės analogą su fiksuotu σ, $\frac{1}{2} < \sigma < \frac{3}{4}$. Jis rado išreikštinę formulę dydžiui

$$E_\sigma(T) = I_1(\sigma,T) - \zeta(2\sigma)T - (2\pi)^{2\sigma-1}\frac{\zeta(2-2\sigma)}{2-2\sigma}T^{2-2\sigma}.$$

Šioje formulėje daliklių funkcijos $d(m)$ vaidmenį atlieka apibendrintoji daliklių funkcija

$$\sigma_a(m) = \sum_{d|m} d^a, a \in \mathbb{C}.$$

Tegul N ir N_1, bei $f(T,m)$ ir $g(T,m)$ yra tokie kaip A teoremoje. Apibrėžiame dvi sumas

$$\begin{aligned}\sum\nolimits_{1,\sigma}(T) &= 2^{\sigma-1}\left(\frac{\pi}{T}\right)^{\sigma-\frac{1}{2}}\sum_{m\le N}\frac{(-1)^m\sigma_{1-2\sigma}(m)}{m^{1-\sigma}}\\ &\times\left(\operatorname{arsinh}\left(\sqrt{\frac{\pi m}{2T}}\right)\right)^{-1}\left(\frac{T}{2\pi m}+\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{4}}\cos(f(T,m))\end{aligned}$$

ir

$$\sum\nolimits_{2,\sigma}(T) = -2\left(\frac{2\pi}{T}\right)^{\sigma-\frac{1}{2}}\sum_{m\le N_1}\frac{\sigma_{1-2\sigma}(m)}{m^{1-\sigma}}\left(\log\frac{T}{2\pi m}\right)^{-1}\cos(g(T,m)).$$

Tuomet minėta Macumoto teorema turi pavidalą.

F teorema. *Tarkime, kad* $\frac{1}{2} < \sigma < \frac{3}{4}$*. Tuomet*

$$E_\sigma(T) = \sum\nolimits_{1,\sigma}(T) + \sum\nolimits_{2,\sigma}(T) + R(T),$$

čia $R(T) = O(\log T)$ *su* O*-konstanta, priklausančia tik nuo* σ*.*

Darbe [15] F teoremos formulė buvo išplėsta į visą intervalą $\frac{1}{2} < \sigma < 1$. Tam buvo išvystytas labai sudėtingas metodas, skirtingas nuo Atkinsono metodo.

J. Karaliūnaitė taip pat nagrinėjo [9] E teoremos analogą su fiksuotu σ, $\frac{1}{2} < \sigma < 1$. Atkinsono tipo formulės įrodyme dydžio liekamajam nariui iškyla kai kurios naujos problemos, kadangi į tą dydį įeina parametras q, kuris gali augti kartu su T. Deja, krupščiau nagrinėjant [9] darbo formulės priklausomybę nuo parametro q, buvo pastebėta, jog ši formulė nėra korektiška q atžvilgiu. Todėl pirmasis disertacijos darbo uždavinys buvo iš naujo įrodyti E teoremos analogą su fiksuotu σ, $\frac{1}{2} < \sigma < \frac{3}{4}$. Šiam darbui yra skirtas pirmasis disertacijos skyrius. Tegul

$$E_\sigma(q,T) = \sum_{a=1}^{q} \int_0^T |\zeta_{\frac{a}{q}}(\sigma+it)|^2 dt - q\zeta(2\sigma)T - \frac{\zeta(2\sigma-1)\Gamma(2\sigma-1)\sin(\pi\sigma)}{1-\sigma}(qT)^{2-2\sigma}.$$

Naudodami E teoremos žymenis, apibrėžkime dvi sumas

$$\sum\nolimits_{1,\sigma}(T) = 2^{\sigma-1} q^{1-\sigma} \left(\frac{T}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}-\sigma} \sum_{m\le N} \frac{(-1)^{qm}\sigma_{1-2\sigma}(m)}{m^{1-\sigma}}$$
$$\times \left(\operatorname{arsinh}\left(\sqrt{\frac{\pi q m}{2T}}\right)\right)^{-1} \left(\frac{T}{2\pi q m} + \frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{4}} \cos(f(T,m,q))$$

ir

$$\sum\nolimits_{2,\sigma}(T) = -2q^{1-\sigma}\left(\frac{T}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}-\sigma} \sum_{m\le N_1} \frac{\sigma_{1-2\sigma}(m)}{m^{1-\sigma}} \left(\log\left(\frac{qT}{2\pi m}\right)\right)^{-1} \cos(g(T,m,q)).$$

Toliau formuluojame pirmojo disertacijos skyriaus pagrindinę teoremą.

1.1. teorema. *Tarkime, kad* $\frac{1}{2} < \sigma < \frac{3}{4}$ *ir* $q \le T$*. Tuomet*

$$E_\sigma(q,T) = \sum\nolimits_{1,\sigma}(q,T) + \sum\nolimits_{2,\sigma}(q,T) + R(q,T),$$

čia $R(q,T) = O(q^{\frac{7}{4}-\sigma}\log T)$ *su* O*-konstanta priklausančia tik nuo* σ*.*

Antrasis disertacijos skyrius yra skirtas funkcijos $E(q,T)$ kvadrato vidurkiui. Analogišką problemą Rymano dzeta funkcijai 1978 m. sprendė His-Braunas ir, kai $T \to \infty$, gavo formulę

$$\int_2^T E^2(t)dt = \frac{2T^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{2\pi}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d^2(m)}{m^{\frac{3}{2}}} + O(T^{\frac{5}{4}}\log^4 T). \tag{5}$$

Antrame disertacijos skyriuje, remiantis E teorema, yra gautas toks (5) formulės apibendrinimas.

2.1. teorema. *Tegul $T \to \infty$ ir $q \le \frac{1}{8}T$. Tuomet*

$$\int_2^T E^2(q,t)dt = \frac{2\sqrt{q}T^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{2\pi}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d^2(m)}{m^{\frac{3}{2}}} + O(T^{\frac{5}{4}} q^{\frac{3}{4}} \log^4 T).$$

Kai $q = o(\frac{T}{\log^{16} T})$, ši formulė yra asimptotinė.

Jei $q = 1$, tada $E(q,t) = E(t)$. Taigi, 2.1 teorema yra (5) formulės apibendrinimas.

Trečiame disertacijos skyriuje yra nagrinėjamas funkcijos $E_\sigma(q,T)$ kvadrato vidurkis. Čia yra pateikiamas Macumoto formulės [13] funkcijos $E_\sigma(t)$ kvadrato vidurkiui

$$\begin{aligned}\int_2^T E_\sigma^2(t)dt \quad &= \frac{2}{5-4\sigma}(2\pi)^{2\sigma-\frac{3}{2}} \frac{\zeta^2(\frac{3}{2})}{\zeta(3)} \zeta\left(\frac{5}{2}-\sigma\right)\zeta\left(\frac{1}{2}+2\sigma\right) T^{\frac{5}{2}-2\sigma} \\ &+O\left(T^{\frac{7}{4}-\sigma}\log T\right)\end{aligned}$$

apibendrinimas. Macumotas savo formulę vėlesniuose darbuose tikslino, liekamojo nario įvertį pakeitė įverčiu $O(T)$. Be to, buvo įrodyta, kad

$$\int_2^T E_{\frac{3}{4}}^2(t)dt = \frac{\zeta^2(\frac{3}{2})\zeta(2)}{\zeta(3)} T\log T + O(T(\log T)^{\frac{1}{2}}),$$

ir, kai $\frac{3}{4} < \sigma < 1$,

$$\int_2^T E_\sigma^2(t)dt = O(T).$$

3.1. teorema. *Tegul σ yra fiksuotas, $\frac{1}{2} < \sigma < \frac{3}{4}$. Tada, kai $T \to \infty$ ir $q \le T^{1-\frac{4\sigma}{3}-\varepsilon}$, su kiekvienu $\varepsilon>0$,*

$$\begin{aligned}\int_2^T E_\sigma^2(q,t)dt \quad &= 2(5-4\sigma)^{-1}(2\pi)^{2\sigma-\frac{3}{2}} q^{\frac{3}{2}-2\sigma} T^{\frac{5}{2}-2\sigma} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sigma_{1-2\sigma}^2(m)}{m^{\frac{5}{2}-2\sigma}} \\ &+O(q^{\frac{11}{4}-2\sigma} T^{\frac{7}{4}-\sigma}\log T).\end{aligned}$$

3.1 teoremos formulė yra asimptotinė, kai $q \le T^{\frac{3}{5}-\frac{4\sigma}{5}-\varepsilon}$ su kiekvienu $\varepsilon > 0$.

Jei $q = 1$, tai gauname Macumoto rezultatą.

Paskutiniame, ketvirtame disertacijos skyriuje yra gaunamos asimptotinės formulės ketvirtajam periodinės dzeta funkcijos momentui kritinėje juostoje. Formulės priklauso nuo parametro λ. Yra nagrinėjaimi iracionalaus ir racionalaus parametro λ atvejai.

Monografijos [18] septintame skyriuje yra gauta tokia ribinė teorema

G teorema. *Tegul $\frac{1}{2} < \sigma < 1$. Tuomet*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_1^T |\zeta(\sigma+it)|^4 dt = \frac{\zeta^4(2\sigma)}{\zeta(4\sigma)}.$$

G teorema buvo apibendrinta [12] funkcijai $\zeta_\lambda(s)$.

H teorema. *Tarkime, kad parametras λ yra iracionalus, $0<\lambda<1$. Tuomet, kai $\frac{1}{2}<\sigma<1$, tai*

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_1^T|\zeta_\lambda(\sigma+it)|^4dt=\frac{\zeta^4(2\sigma)}{\zeta(4\sigma)}-2\sum_{m_1n_1=m_2n_2}\frac{\sin^2\pi\lambda(m_1+n_1-m_2-n_2)}{(m_1n_1m_2n_2)^\sigma}.$$

Disertacijos 4.1 skyriuje yra įvertintas toeremos H konvergavimo greitis.

4.1. teorema. *Tarkime, kad parametras λ yra iracionalus, $0<\lambda<1$, $\frac{1}{2}<\sigma<1$ ir $T\to\infty$. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon>0$*

$$\int_1^T|\zeta_\lambda(\sigma+it)|^4dt=T\left(\frac{\zeta^4(2\sigma)}{\zeta(4\sigma)}-2\sum_{m_1n_1=m_2n_2}\frac{\sin^2\pi\lambda(m_1+n_1-m_2-n_2)}{(m_1n_1m_2n_2)^\sigma}\right)+O(T^{\frac{3}{2}-\sigma+\varepsilon}).$$

Racionalaus parametro λ atvejis yra sudėtingesnis. Turime tokį rezultatą.

4.2. teorema. *Tarkime, kad parametras λ yra racionalus, $0<\lambda<1$, $\frac{3}{4}<\sigma<1$ ir $T\to\infty$. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon>0$*

$$\int_1^T|\zeta_\lambda(\sigma+it)|^4dt=T\left(\frac{\zeta^4(2\sigma)}{\zeta(4\sigma)}-2\sum_{m_1n_1=m_2n_2}\frac{\sin^2\pi\lambda(m_1+n_1-m_2-n_2)}{(m_1n_1m_2n_2)^\sigma}\right)+O(T^{\frac{7}{4}-\sigma+\varepsilon}).$$

Matome, kad 4.2 teorema galioja siauresnėje srityje negu 4.1 teorema.

4.1 ir 4.2. teoremų įrodymai remiasi artutine funkcine lygtimi funkcijai $\zeta_\lambda(s)$.

IŠVADOS

Disertacijoje yra gauta, kad periodinė dzeta funkcija $\zeta_\lambda(s)$ turi tokias savybes:

1. Vidurkio

$$\sum_{a=1}^{q} \int_0^T |\zeta_{\frac{a}{q}}(\sigma+it)|^2 dt$$

   formulės liekamajam nariui yra teisinga Atkinsono tipo formulė su $\frac{1}{2} < \sigma < \frac{3}{4}$.

2. Yra teisingos asimptotinės formulės funkcijų $E(q,T)$ $(E_{\frac{1}{2}}(q,t) = E(q,T))$ ir $E_\sigma(q,T)$ su $\frac{1}{2} < \sigma < \frac{3}{4}$ kvadratų vidurkiui.

3. Juostoje $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ funkcijos $\zeta_\lambda(s)$ ketvirtajam momentui galioja asimptotinės formulės.

APROBACIJA

Disertacijoje gauti rezultatai buvo pristatyti:

- tarptautinėje konferencijoje "27th Journées Arithmétiques" (2011, Vilnius, Lietuva);
- tarptautinėje konferencijoje "17th International Conference of MMA" (2012, Talinas, Estija);
- tarptautinėje konferencijoje "18th International Conference of MMA and 4th International Conference of AMOE" (2013, Tartu, Estija);
- tarptautinėje skaičių teorijos konferencijoje, skirtoje prof. A. Laurinčiko 65 metų jubiliejui (2013, Šiauliai, Lietuva);
- Lietuvos matematikų draugijos konferencijose (2008, 2011, 2012, 2013);
- Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakulteto Tikimybių teorijos ir skaičių teorijos katedros seminaruose.

PUBLIKACIJŲ DISERTACIJOS TEMA SĄRAŠAS

- S. Černigova, One estimate related to the periodic zeta-function, Liet. Matem. Rink. LMD darbai, **51**(2010), 25-30.
- S. Černigova, On the periodic zeta-function with rational parameter, Liet. Matem. Rink. LMD darbai, **52**(2011), 1-6.
- S. Černigova, The moments of the periodic zeta-function, Proceedings XII International Conference Algebra and Number Theory: Modern Problems and Application, dedicated to 80-th aniversary of Professor V. N.Latyshev, Tula, (2014), 250-253.
- S. Černigova, A. Laurinčikas. On the mean square of the periodic zeta-function, in: Anal. Probab. Methods Number Theory, Kubilius Memorial Volume, A. Laurinčikas et al (Eds), TEV, Vilnius, (2012), 91-99.
- S. Černigova, A. Laurinčikas, The Atkinson type formula for the periodic zeta-function, Chebysh sb., **XIV**(2)(46)(2013), 180-199.
- S. Černigova, A. Laurinčikas, On the mean square of the periodic zeta-function. II, Nonlinear Analysis: Modelling and Control (priimtas).

KONFERENCIJŲ PRANEŠIMŲ TEZĖS

- S. Černigova, On moments of the periodic zeta-function, Abstracts of 27th Journées Arithmétiques, 2011, p. 14.
- S. Černigova, A mean square formula for the periodic zeta-function, Abstracts of MMA2012, June 6-9, 2012, Tallinn, Tallinn University of Technology, p. 29.
- S. Černigova, The mean square of the periodic zeta-function, Abstracts of MMA2013 and AMOE2013, May 27-30, 2013, Tartu, Institute of Mathematics of the University of Tartu, p. 23.

SUMMARY

Let $s = \sigma + it$ be a complex variable, and $\lambda \in \mathbb{R}$ be a fixed parameter. The periodic zeta-function $\zeta_\lambda(s)$ is defined, for $\sigma > 1$, by the series

$$\zeta_\lambda(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \lambda m}}{m^s}.$$

If $\lambda \in \mathbb{Z}$, then $\zeta_\lambda(s)$ becomes the Riemann zeta-function. If $\lambda \notin \mathbb{Z}$, then the function $\zeta_\lambda(s)$ is entire one.

In the thesis, the Atkinson type formula for the error term $E_\sigma(q, T)$ of the quantity

$$\sum_{a=1}^{q} \int_0^T |\zeta_{\frac{a}{q}}(\sigma + it)|^2 dt$$

with fixed σ, $\frac{1}{2} < \sigma < \frac{3}{4}$, is obtained. Moreover, the formulae for the mean squares

$$\int_2^T E^2(q,t)dt, \ E(q,t) = E_{\frac{1}{2}}(q,t),$$

and

$$\int_2^T E_\sigma^2(q,t)dt, \ \frac{1}{2} < \sigma < \frac{3}{4},$$

are given.

The last part of the thesis is devoted to the fourth power moment of the function $\zeta_\lambda(s)$. Here the asymptotic formulae for

$$\int_0^T |\zeta_\lambda(\sigma + it)|^4 dt$$

with $0 < \lambda < 1$ and $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ are presented. The cases of irrational and rational λ are considered separately.

CITUOTA LITERATŪRA

1. F. V. Atkinson, The mean-value of the Riemann zeta, Acta Math., **81**(1949), 353-376.
2. J. B. Conrey, A. Ghosh, On mean values of the zeta-function, Mathematica, **31**(1984), 159-161.
3. D. R. Heath-Brown, The twelfth power moment of the Riemann zeta-function, Quart. J. Math. Oxford, **29**(1978), 443-462.
4. D. R. Heath-Brown, Fractional moments of the Riemann zeta-function, J. London Math. Soc., **24**(2)(1981), 65-78.
5. D. R. Heath-Brown, Fractional moments of the Riemann zeta-function. II, Quart. J. Math. Oxford, **44**(2)(1993),185-197.
6. A. Ivič, The Riemann zeta-function: The Theory of the Riemann zeta-function with applications, New York: Wiley, (1985).
7. A. Ivič, Mean Values of the Riemann Zeta-Function, Springer-Verlag, Berlin, (1991).
8. A. Ivič, The Mean Values of the Riemann Zeta-Function on the Critical Line, in: Analytic Number Theory, Approximation Theory, and Special Functions, (2014), 3-68.
9. J. Karaliūnaitė, The Atkinson formula for the periodic zeta-function in the critical strip, in: Voronoi's Impact on Modern Science, Book 4, vol 1. Proceedings of the 4th International Conference on Analytic Number Theory and Spatial Tessellations, Institute of Mathematics NAS of Ukraine, Kyiv., (2008), 48-58.
10. J. Karaliūnaitė, A. Laurinčikas, The Atkinson formula for the periodic zeta-function, Lith. Math. J., **47**(4)(2007), 504-516.
11. A. Laurinčikas, R. Garunkštis, The Lerch Zeta-Function, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, (2002).
12. A. Laurinčikas, D.Šiaučiūnas, On the fourth power moment of the function $\zeta_\lambda(s)$, Integral Transforms Spec. Funct., **18**(9)(2007), 629-638.
13. K. Matsumoto, The mean square of the Riemann zeta-function in the critical strip, Japan J. Math., **15**(1)(1989), 1-13.
14. K. Matsumoto, Recent developments in the mean square theory of the Riemann zeta and other zeta-functions, in: Number Theory, Trends Math., Birkhäuser, Boston,(2000), 241-286.
15. K. Matsumoto, T. Meurman, The mean square of the Riemann zeta-function in the critical strip III, Acta Math., **64**(4)(1993), 357-382.
16. K. Ramachandra, Some remarks on the mean value of the Riemann zeta-function and other Dirichlet series. I, Hardy-Ramanujan J., **1**(1978), 1-15.

17. K. Soundararajan, Moments of the Riemann zeta function, Ann. Math. (2), **170**(2)(2009), 981-993.

18. E. C. Titchmarsh, The Theory of the Riemann Zeta-Function, second edition revised by D. R. Heath-Brown, Clarendon Press, Oxford (1986).

19. N. Walt, A note on the mean square of $\left|\zeta(\frac{1}{2}+it)\right|$, J. London Math. Soc. (2), **82**(2010), 279-294.

TRUMPOS ŽINIOS APIE AUTORĘ

Gymimo data ir vieta

1985 gruodžio 3 d., Vilnius

Išsilavimas

2010 Vilniaus universiteto matematikos doktorantūra

2008 - 2010 Vilniaus universiteto matematikos magistras

2004 - 2008 Vilniaus universiteto matematikos bakalauras

1992 - 2004 Vilniaus Salininkų vidurinė mokykla

Darbo patirtis

2014 Analitikė, UAB "Forbis"

2012 - 2014 Java technologijų skyriaus analitikė, UAB "Affecto Lietuva"

2011 - 2012 Naujų technologijų vystymo departamento finansinės apskaitos ir atsakomybės skyriaus veiklos procesų analitikė, AB bankas SNORAS

2008 - 2011 Technologinio vystymo departamento testuotoja, UAB "Snoro lizingas"

2007 - 2008 Buhalterė - apskaitininkė, UAB "Magnus Logistics"

SHORT INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Birth date and place

1985 December 3, Vilnius

Education

2010 Doctoral of Mathematics, Vilnius University

2008 - 2010 Master of Mathematics, Vilnius University

2004 - 2008 Bachelor of Mathematics and Applications of Mathematics, Vilnius University

1992 - 2004 Vilnius Salininkų secondary school

Expirience

2014 Analyst at Forbis

2012 - 2014 Analyst at Affecto Lietuva

2011 - 2012 Business process analyst at Snoras

2008 - 2011 Tester at Snoro lizingas

2007 - 2008 Accountant at Magnus Logistics