ŠIAULIŲ UNIVERSITETAS
TECHNOLOGIJOS, FIZINIŲ IR BIOMEDICINOS MOKSLŲ FAKULTETAS
INFORMATIKOS IR MATEMATIKOS KATEDRA

Viktorija Kuneikaitė

Matematikos studijų programos studentė

Reguliariai išsigimstančios ketvirtos eilės diferencialinės lygties sprendinių struktūros tyrimas

Magistro darbas

Darbo vadovas
prof. D. Jurgaitis

Šiauliai 2017

Patvirtinu, kad magistro darbas yra originalus, neturintis plagiato požymių.

....	....	....
(Parašas)	(Vardas Pavardė)	(Data)

Turinys

Įvadas 4
2. Uždavinio formulavimas 5
3. Bakalauro darbo rezultatas 6
4. Faktorizacijos metodo taikymas 8
5. Sprendinių struktūra 21
Išvados 22
Literatūros sąrašas 25
Regular degenerating fourth – order differential equations solutions structure study 26

Įvadas

Nagrinėdami realius mus supančius reiškinius, dažnai norime juos ne tik suprasti kokybiškai, bet ir išsiaiškinti kiekybinius dėsningumus – gauti tam tikrų dydžių skaitines vertes. Tam neretai kokybinio modelio nepakanka – dar reikia sugalvoti, kokiu būdu analizines lygtis paversti skaitinio išvedimo rezultatais. Statiniais (pusiausvyriniais) atvejais, kada nėra priklausomybės nuo laiko, tai padaryti paprasta. Visai kitokia padėtis yra su realiomis situacijomis, kai fizikiniai (mechaniniai, elektriniai ar net biologiniai) dydžiai keičiasi proceso eigoje. Tada šių dydžių priklausomybę galima atvaizduoti diferencialinių lygčių pagalba, jas išsprendus diferencialinių lygčių sprendinių, t.y. funkcijų grafikais. Palyginti, nedaug diferencialinių lygčių galima išspręsti analiziškai, t.y. jų sprendinius užrašyti formulėmis.

Diferencialine lygtimi vadinama lygtis, siejanti nepriklausomą kintamąjį t, nežinomą funkciją $x = x(t)$ ir jos įvairių eilių išvestines. Diferencialinės lygties eilę nusako lygtyje esančios nežinomos funkcijos išvestinės aukščiausia eilė. Pirmos eilės diferencialinės lygties bendrasis pavidalas yra pavyzdžiui $F(t, x, x') = 0$ arba $x' = f(t, x)$. Išsprendę tiriamojo vyksmo matematinį modelį – diferencialinę lygtį, ir atsižvelgę į pradinius duomenis, randame to vyksmo kitimo dėsnį. [2]

Paprastosios *n*-tos eilės diferencialinės lygties bendrasis sprendinys priklauso apskritai nuo *n* laisvų konstantų. Akivaizdu, kad realų procesą ar reiškinį nusako konkreti funkcija arba atskirasis diferencialinės lygties sprendinys, kuris gaunamas iš bendrojo sprendinio parinkus konstantų reikšmes. Konstantų parinkimui formuluojamos pradinės ir (arba) kraštinės sąlygos ir pradiniai, kraštiniai ir mišrieji uždaviniai. [3]

Magistro darbe nagrinėjama 4-os eilės paprastoji diferencialinė lygtis, kuri taške $x=0$ išsigimsta. Taške $x=0$ 4-os eilės diferencialinė lygtis virsta algebrine lygtimi.

Darbo tikslas – rasti išsigimstančios paprastosios diferencialinės lygties sprendinių analizines išraiškas, taikant faktorizacijos metodą, kada ieškomoji funkcija išdėstoma dviejų funkcijų sandauga, viena iš kurių prilauso tik nuo nepriklausomo kintamojo, o kitos funkcijos kintamasis yra specifinė funkcija (potencialas), beje taip pat priklausanti nuo nepriklausamo kintamojo (potencialas laikomas antrosios ieškomosios funkcijos nepriklausomu kintamuoju), bei ištirti tų sprendinių elgseną kada $x \to 0$ ir jų priklausomybę nuo specialiosios funkcijos vadinamos potencialu.

Darbe nagrinėjama diferencialinė lygtis svarbi kieto kūno fizikoje. Ji gauta kaip Šredingerio lygties radialinės dalies apibendrinimas.

2. Uždavinio formulavimas

Magistro darbe nagrinėsime ketvirtos eilės diferencialinę lygtį

$$u^{IV} + \left(\alpha - \frac{2l(l+1)}{x^2}\right)u'' + \frac{4l(l+1)}{x^3}u' + \left(\frac{l^2(l+1)^2 - 6l(l+1)}{x^4} - \frac{l(l+1)}{x^2}\right)u$$
$$+ \beta x V'(x)\left(\frac{u}{x}\right)' + \gamma V(x)u + \delta W(x)u + Eu = 0, \quad (2.1)$$

kurioje $\alpha, \beta, \gamma, \delta -$ realieji skaičiai, $E -$ nežinomas parametras, $l = 0,1,2, \dots$, $V(x)$ $-$ potencialas, kuris yra tokio pavidalo

$$V(x) = \frac{V_0}{1 + e^{\alpha x}},$$

čia V_0 ir α yra fizikinės konstantos, o funkcija $W(x)$ su potencialu $V(x)$ susieta tokia lygybe

$$W(x) = \frac{V'(x)}{x}.$$

(2.1) diferencialinę lygtį spresime faktorizacijos ir laipsninių eilučių metodais. Ieškosime sprendinių analizine forma, tirsime sprendinių struktūrą ir jų elgseną kada $x \to 0$.

3. Bakalauro darbo rezultatas

Bakalauro darbe gavome, kad (2.1) sprendinys gali būti užrašomas laipsnine eilute [1]

$$u(x)=\sum_{k=0}^{\infty} x^{k+\rho}u_k \tag{2.2}$$

kurioje ρ yra parametras, kuris įgyja reikšmes $-l, l+2, l+1, l+3$ ir, kurios koeficientai yra tokie

u_0 - bet koks $|u_0|<1$, $u_1=0$,

$$u_2=-\frac{(\alpha\rho(\rho-1)-r)u_0-\delta\frac{V_0\alpha}{2^2}u_0}{(\rho+2)(\rho+1)\rho(\rho-1)-2r(\rho+2)(\rho+1)+4r(\rho+2)+(r^2-6r)},$$

$$u_3=-\frac{-\beta\frac{V_0\alpha}{2^2}(\rho-1)u_0}{(\rho+3)(\rho+2)(\rho+1)\rho-2r(\rho+3)(\rho+2)+4r(\rho+3)+(r^2-6r)},$$

$$u_4=-\frac{(\alpha(\rho+2)(\rho+1)-r)u_2-\beta\frac{V_0\alpha^2 2}{2^3}(\rho-1)u_0+\gamma\frac{V_0}{2}u_0-\delta\frac{V_0\alpha^3 3}{2^4}u_0+Eu_0}{(\rho+4)(\rho+3)(\rho+2)(\rho+1)-2r(\rho+4)(\rho+3)+4r(\rho+4)+(r^2-6r)},$$

$$u_5=-\frac{(\alpha(\rho+3)(\rho+2)-r)u_3-\beta\frac{V_0\alpha^3 3}{2^4}(\rho-1)u_0-\gamma\frac{V_0\alpha}{2^2}u_0+\delta\frac{V_0\alpha^4 4}{2^6}u_0}{(\rho+5)(\rho+4)(\rho+3)(\rho+2)-2r(\rho+5)(\rho+4)+4r(\rho+5)+(r^2-6r)}$$

ir apskritai

$$u_k=-\frac{S_k}{T_k}, \qquad k=6,7,\ldots,$$

čia

$$\begin{aligned}S_k&=(\alpha(\rho+k-2)(\rho+k-3)-r)u_{k-2}\\&+\beta\sum_{\substack{m+n=k-3\\0\le n\le m}}(-1)^{m+1}\frac{V_0\alpha^{m+1}(m+1)}{2^{m+2}}(n+\rho-1)u_n\\&+\gamma\sum_{\substack{m+n=k-4\\0\le n\le m}}(-1)^{m}\frac{V_0\alpha^{m}(m+1)}{2^{m+1}}u_n\\&+\delta\sum_{\substack{m+n=k-2\\0\le n\le m}}(-1)^{m}\frac{V_0\alpha^{m+1}(m+1)}{2^{m+2}}u_n+Eu_{k-4},\end{aligned}$$

o

$$T_k=(\rho+k)(\rho+k-1)(\rho+k-2)(\rho+k-3)-2r(\rho+k)(\rho+k-1)+4r(\rho+k)+(r^2-6r),$$

čia

$$r=l(l+1).$$

Bakalauro baigiamajame darbe taip pat įrodyta, kad formulė (2.2) laipsnine eilute konverguoja absoliučiai ir tolygiai intervale

$$-\frac{1}{M} < x < \frac{1}{M},$$

čia *M* yra skaičius, kuris parenkamas taip

$$\frac{|A|}{M^2} \leq 1,$$

kur

$$A = -\frac{\alpha(\rho+k-2)(\rho+k-3)}{\rho(\rho+k-1)(\rho+k-2)(\rho+k-3)-2r(\rho+k)(\rho+k-1)+4r(\rho+k)+r^2-6r}.$$

4. Faktorizacijos metodo taikymas

Pasinaudoję potencialo

$$V(x) = \frac{V_0}{1 + e^{\alpha x}}$$

išraiška nesunkiai gauname potencialo išvestinės išraišką per jį patį

$$v' = -\frac{\alpha e^{\alpha x}}{v_0} v^2$$

ir funkcijos *W(x)* išraišką per potencialą, kuri yra tokia

$$W(x) = -\frac{\alpha e^{\alpha x}}{v_0 x} v^2$$

be to gauname, kad

$$\beta x v'(x) \left(\frac{u}{x}\right)' = -\frac{\beta \alpha e^{\alpha x}}{v_0} v^2 u' + \frac{\beta \alpha e^{\alpha x}}{v_0 x} v^2 u.$$

Surašę viską į (2.1) lygtį turime, kad

$$u^{IV} + \left(\alpha - \frac{2l(l+1)}{x^2}\right) u'' + \left(\frac{4l(l+1)}{x^3} - \frac{\beta \alpha e^{\alpha x}}{v_0} v^2\right) u' + \left(\frac{l^2(l+1)^2 - 6l(l+1)}{x^4} - \frac{l(l+1)}{x^2} + \frac{\beta \alpha e^{\alpha x}}{v_0 x} v^2 + \gamma V - \frac{\delta \alpha e^{\alpha x}}{v_0 x} v^2 + E\right) u = 0$$

ir (2.1) lygtį sutrumpintai perrašome taip

$$u^{IV} + au'' + bu' + cu = 0, \tag{2.1.2}$$

čia

$$a = \left(\alpha - \frac{2l(l+1)}{x^2}\right), b = \left(\frac{4l(l+1)}{x^3} - \frac{\beta \alpha e^{\alpha x}}{v_0} v^2\right), c = \left(\frac{l^2(l+1)^2 - 6l(l+1)}{x^4} - \frac{l(l+1)}{x^2} + \frac{\beta \alpha e^{\alpha x}}{v_0 x} v^2 + \gamma V - \frac{\delta \alpha e^{\alpha x}}{v_0 x} v^2 + E\right).$$

Faktorizacijos metodas taikomas ieškomąją funkciją išreiškiant kitų dviejų nežinomų funkcijų sandauga. Todėl funkciją *u(x)* užrašėme taip

$$u = U(x) T\big(V(x)\big). \tag{*}$$

Faktorizacijos metodo taikymui ir lygties (2.1.2) sprendimui reikalingos funkcijos *u(x)* išvestinės. Rasime šios funkcijos keturias išvestines.

Diferencijuojame (*) pagal *x* ir turime, kad

$$u' = U'T + UT'_V V'_x$$

Pastarosios lygybės diferencijavimas dar kartą kintamojo *x* atžvilgiu atveda į funkcijos *u(x)* antrosios išvestinės išraišką, kuri yra tokia:

$$u'' = U''T + 2U'T'_V V'_x + UT''_V (V'_x)^2 + UT'_V V''_x$$

Funkcijos *u(x)* trečiosios ir ketvirtosios eilės išvestinių išraiškos yra tokios:

$$u''' = U'''T + 3U''T'_V V'_x + 3U'T''_V (V'_x)^2 + 3U'T'_V V''_x + 3UT''_V V'_x V''_x + UT'''_V (V'_x)^3 + UT'_V V''_x$$

$$\begin{aligned} u^{IV} = U^{IV}T &+ 4U'''T'_V V'_x + 6U''T''_V (V'_x)^2 + 6U''T'_V V''_x + 4U'T'''_V (V'_x)^3 + 12U'T''_V V'_x V''_x \\ &+ 4U'T'_V V'''_x + 6UT'''_V (V'_x)^2 V''_x + 3UT''_V (V''_x)^2 + 4UT''_V V'_x V'''_x + UT'_V V^{IV}_x \\ &+ UT^{IV}_V (V'_x)^4 \end{aligned}$$

Gautąsias išvestinių išraiškas rašome į (2.1.2) lygtį ir gauname, kad:

$$\begin{aligned} U^{IV}T &+ 4U'''T'V' + 6U''T''(V')^2 + 6U''T'V'' + 4U'T'''(V')^3 + 12U'T''V'V'' + 4U'T'V''' \\ &+ 6UT'''(V')^2V'' + 3UT''(V'')^2 + 4UT''V'V''' + UT'V^{IV} + UT^{IV}(V')^4 + U''T \\ &+ 2U'T'V' + UT''(V')^2 + UT'V'' + U'T + UT'V' + UT = 0 \end{aligned}$$

Pastarojoje lygtyje grupuojame narius prie vienodų funkcijos *U(x)* išvestinių:

$$\begin{aligned} U^{IV}T &+ 4U'''T'V' + U''(6T''(V')^2 + 6T'V'' + T) \\ &+ U'(4T'''(V')^3 + 12T''V'V'' + 4T'V''' + 2T'V' + T) \\ &+ U(6T'''(V')^2V'' + 3T''(V'')^2 + 4T''V'V''' + T'V^{IV} + T^{IV}(V')^4 + T''(V')^2 \\ &+ T'V'' + T'V' + T) = 0 \end{aligned}$$

Sugrupavę narius, visą paprastąją lygtį padalinkime iš funkcijos *T(V(x))*, kuri nėra tapatingai lygi nuliui. Turime tokią lygtį ieškomajai funkcijai *U(x)* rasti:

$$U^{IV} + U'''\frac{4T'V'}{T} + U''\left(\frac{6T''(V')^2 + 6T'V'' + T}{T}\right)$$

$$+ U'\left(\frac{4T'''(V')^3 + 12T''V'V'' + 4T'V''' + 2T'V' + T}{T}\right)$$

$$+ U\left(\frac{6T'''(V')^2V'' + 3T''(V'')^2 + 4T''V'V''' + T'V^{IV} + T^{IV}(V')^4 + T''(V')^2 + T'V'' + T'V' + T}{T}\right)$$

$$= 0$$

Pagal faktorizaijos metodą reiškinį prie funkcijos *U(x)* pažymėkime atskyrimo konstanta λ. Turime

$$\frac{T^{IV}(V')^4 + 6T'''(V')^2V'' + T''(3(V'')^2 + 4V'V''' + (V')^2) + T'(V^{IV} + V'' + V') + T}{T} = \lambda$$

ir gauname lygtį ieškomajai funkcijai *T(V(x))* rasti, kuri yra tokia:

$$T^{IV}(V')^4 + 6T'''(V')^2V'' + T''(3(V'')^2 + 4V'V''' + (V')^2) + T'(V^{IV} + V'' + V') + T - T\lambda = 0 \tag{2.4}$$

Norėdami gauti funkcijos *T(V(x))* analizinę išraišką, t.y., išspręsti (2.4) lygtį, jos sprendinio ieškosime laipsninės eilutės

$$T(V(x)) = \sum_{k=0}^{\infty} V^{k+\mu} T_k$$

pavidalu.

Laipsninę eilute diferencijuojame keturis kartus potencialo *V* atžvilgiu ir gauname:

$$T'(V(x)) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+\mu) V^{k+\mu-1} T_k$$

$$T''(V(x)) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+\mu)(k+\mu-1) V^{k+\mu-2} T_k$$

$$T'''(V(x)) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+\mu)(k+\mu-1)(k+\mu-2) V^{k+\mu-3} T_k$$

$$T^{IV}(V(x)) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+\mu)(k+\mu-1)(k+\mu-2)(k+\mu-3) V^{k+\mu-4} T_k$$

Gautas funkcijos *T(V(x))* išvestines įrašome į (2.4) lygtį ir sumos ženklą parašę prieš skliaustus, turime

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\Big((k+\mu)(k+\mu-1)(k+\mu-2)(k+\mu-3)V^{k+\mu-4}T_k(V')^4 \\ + 6(k+\mu)(k+\mu-1)(k+\mu-2)V^{k+\mu-3}T_k(V')^2V'' \\ + (k+\mu)(k+\mu-1)v^{k+\mu-2}T_k(3(V'')^2 + 4V'V''' + (V')^2) \\ + (k+\mu)V^{k+\mu-1}T_k(V^{IV} + V'' + V') + V^{k+\mu}T_k - \lambda V^{k+\mu}T_k\Big) = 0\end{aligned} \tag{2.5}$$

Norint rasti funkcijos *T(V(x))* išraišką laipsnine eilute, surinkime reiškinių esančių prie vienodų funkcijos *V(x)* laipsnių bei prilyginę juos nuliui gausime rekurentines formules laipsninės eilutės *T(V(x))* koeficientams $T_k, k = 0,1,2,$ .. rasti.

Į (2.5) lygtį įeina potencialo išvestinės, todėl tam, kad galėtume atlikti aukščiau aprašytą procedūrą, turime funkcijos *V(x)* išvestines išreikšti per pačią funkciją *V(x)*. Randame funkcijos *V(x)* išvestinę. Turime

$$V(x) = \frac{V_0}{1 + e^{\alpha x}}$$

Eksponentės išraišką pakeisime atlikę tokius veiksmus:

$$1 + e^{\alpha x} = \frac{V_0}{V} => e^{\alpha x} = \frac{V_0 - V}{V}$$

Tuomet

$$V' = -\frac{\alpha}{V_0} \cdot \frac{V_0 - V}{V} \cdot V^2$$

$$V' = \frac{\alpha}{V_0}(V^2 - V_0 V) \tag{2.6}$$

Toliau antros – ketvirtos eilės funkcijos *V(x)* išvestinių ieškosime naudojantis nauja gauta išraiška (2.6). Gauname, kad

$$V'' = -\frac{\alpha^2}{V_0^2}(2V - V_0)(V_0 - V)V$$

$$V''' = \left(\frac{\alpha}{V_0}\right)^3 (V_0 V - V^2)(V^2(2V_0 - 4) + 4V_0 V - 2V^3 - V_0^2)$$

$$V^{IV} = -\left(\frac{\alpha}{V_0}\right)^4 (V_0 V - V^2)\big((V_0 - 2V)(V^2(2V_0 - 4) + 4V_0 V - 2V^3 - V_0^2) + (V_0 V - V^2)(2(2V_0 - 4)V + 4V_0 - 6V^2)\big)$$

Toliau potencialo išvestinės išreiškiame potencialo *V* laipsniais. Gauname, kad tos išraiškos yra tokios:

$$V' = \frac{\alpha}{V_0}(V^2 - V_0 V)$$

$$V'' = \left(\frac{\alpha}{V_0}\right)^2 (2V^3 - 3V^2 V_0 + V V_0^2)$$

$$V''' = \left(\frac{\alpha}{V_0}\right)^3 (2V^5 - 4V^4(V_0 - 1) + 2V^3(V_0^2 - 4V_0) + 5V^2 V_0^2 - V V_0^3)$$

$$V^{IV} = \left(\frac{\alpha}{V_0}\right)^4 (10V^6 - V^5(26V_0 - 16) + V^4(22V_0^2 - 40V_0) - V^3(6V_0^3 - 34V_0^2) - 11V^2 V_0^3 + V V_0^4)$$

Gautas išvestinių ir jų laipsnių išraiškas rašome į (2.5) lygtį ir turime, kad

$$(V')^4 = \left(\frac{\alpha}{V_0}\right)^4 (V^8 - 4V^7 V_0 + 8V^6 V_0^2 - 4V^5 V_0^3 + V^4 V_0^4)$$

$$(V')^2 = \left(\frac{\alpha}{V_0}\right)^2 (V^4 - 2V^3 V_0 + V^2 V_0^2)$$

$$(V'')^2 = \left(\frac{\alpha}{V_0}\right)^4 (4V^6 - 12V^5 V_0 + 13V^4 V_0^2 - 6V^3 V_0^3 + V^2 V_0^4)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Bigg((k+\mu)(k+\mu-1)(k+\mu-2)(k+\mu$$

$$-3)V^{k+\mu-4}T_k\left(\left(\frac{\alpha}{V_0}\right)^4(V^8-4V^7V_0+8V^6V_0^2-4V^5V_0^3+V^4V_0^4)\right)$$

$$+6(k+\mu)(k+\mu-1)(k+\mu$$

$$-2)V^{k+\mu-3}T_k\left(\left(\frac{\alpha}{V_0}\right)^2(V^4-2V^3V_0+V^2V_0^2)\left(\frac{\alpha}{V_0}\right)^2(2V^3-3V^2V_0+VV_0^2)\right)$$

$$+(k+\mu)(k+\mu$$

$$-1)V^{k+\mu-2}T_k\Bigg(3\left(\frac{\alpha}{V_0}\right)^4(4V^6-12V^5V_0+13V^4V_0^2-6V^3V_0^3+V^2V_0^4)$$

$$+4\left(\frac{\alpha}{V_0}\right)(V^2-V_0V)\left(\frac{\alpha}{V_0}\right)^3(2V^5-4V^4(V_0-1)+2V^3(V_0^2-4V_0)+5V^2V_0^2$$

$$-VV_0^3)+\left(\frac{\alpha}{V_0}\right)^2(V^4-2V^3V_0+V^2V_0^2)\Bigg)$$

$$+(k$$

$$+\mu)V^{k+\mu-1}T_k\Bigg(\left(\frac{\alpha}{V_0}\right)^4(10V^6-V^5(26V_0-16)+V^4(22V_0^2-40V_0)$$

$$-V^3(6V_0^3-34V_0^2)-11V^2V_0^3+VV_0^4)+\left(\frac{\alpha}{V_0}\right)^2(2V^3-3V^2V_0+VV_0^2)$$

$$+\left(\frac{\alpha}{V_0}\right)(V^2-V_0V)\Bigg)+V^{k+\mu}T_k-\lambda V^{k+\mu}T_k\Bigg)=0$$

Gautoje lygybėje sutraukiame panašius narius ir turime

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Bigg((k+\mu)(k+\mu-1)(k+\mu-2)(k+\mu$$

$$-3)V^{k+\mu-4}T_k\left(\left(\frac{\alpha}{V_0}\right)^4(V^8-4V^7V_0+8V^6V_0^2-4V^5V_0^3+V^4V_0^4)\right)$$

$$+6(k+\mu)(k+\mu-1)(k+\mu$$

$$-2)V^{k+\mu-3}T_k\Bigg(\left(\frac{\alpha}{V_0}\right)^4(2V^7-3V^6V_0+V^5V_0^2-4V^6V_0+6V^5V_0^2-2V^4V_0^3$$

$$+2V^5V_0^2-3V^4V_0^3+V^3V_0^4)\Bigg)+(k+\mu)(k+\mu-1)V^{k+\mu-2}T_k\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{\alpha}{V_0}\right)^4\Big((12V^6-36V^5V_0+39V^4V_0^2-18V^3V_0^3+3V^2V_0^4)$$

$$+(4V^2-4V_0V)(2V^5+4V^4-4V^4V_0+2V^3V_0^2-8V^3V_0+5V^2V_0^2-VV_0^3)\Big)$$

$$++\left(\frac{\alpha}{V_0}\right)^2(V^4-2V^3V_0+V^2V_0^2)\Bigg)$$

$$+(k$$

$$+\mu)V^{k+\mu-1}T_k\left(\left(\frac{\alpha}{V_0}\right)^4(10V^6-26V^5V_0+16V^5+22V^4V_0^2-40V^4V_0-6V^3V_0^3\right.$$

$$+34V^3V_0^2-11V^2V_0^3+VV_0^4)+\left(\frac{\alpha}{V_0}\right)^2(2V^3-3V^2V_0+VV_0^2)$$

$$\left.+\left(\frac{\alpha}{V_0}\right)(V^2-V_0V)\right)+V^{k+\mu}T_k-\lambda V^{k+\mu}T_k\Bigg)=0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}((k+\mu)(k+\mu-1)(k+\mu-2)(k+\mu-3)V^{k+\mu-4}T_k\left(\frac{V^8\alpha^4}{V_0^4}-\frac{4V^7\alpha^4}{V_0^3}+\frac{8V^6\alpha^4}{V_0^2}\right.$$

$$\left.-\frac{4V^5\alpha^4}{V_0}+V^4\alpha^4\right)+6(k+\mu)(k+\mu-1)(k+\mu-2)V^{k+\mu-3}T_k\left(\frac{2V^7\alpha^4}{V_0^4}-\frac{7V^6\alpha^4}{V_0^3}+\frac{9V^5\alpha^4}{V_0^2}\right.$$

$$\left.-\frac{5V^4\alpha^4}{V_0}+V^3\alpha^4\right)+(k+\mu)(k+\mu-1)V^{k+\mu-2}T_k\left(\frac{2V^7\alpha^4}{V_0^4}+\frac{28V^6\alpha^4-24V^6V_0\alpha^4}{V_0^4}\right.$$

$$-\frac{84V^5\alpha^4-24V^5V_0\alpha^4}{V_0^3}+\frac{91V^4\alpha^4-8V^4V_0\alpha^4+V^4\alpha^2}{V_0^2}$$

$$\left.-\frac{42V^3\alpha^4+2V^3\alpha^2}{V_0}+7V^2\alpha^4+V^2\alpha^2\right)$$

$$+(k+\mu)V^{k+\mu-1}T_k\left(\frac{10V^6\alpha^4}{V_0^4}+\frac{16V^5\alpha^4-26V^5V_0\alpha^4}{V_0^4}+\frac{22V^4V_0\alpha^4-40V^4\alpha^4}{V_0^3}\right.$$

$$\left.+\frac{34V^3V_0\alpha^4-6V^3\alpha^4+2V^3\alpha^2}{V_0^2}-\frac{11V^2\alpha^4+3V^2\alpha^2-V^2\alpha}{V_0}+V\alpha^4+V\alpha^2-V\alpha\right)$$

$$+V^{k+\mu}T_k-\lambda V^{k+\mu}T_k)=0$$

Surenkame koeficientus prie vienodų *V* laipsnių ir gauname lygtį

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Bigg(\Big(\alpha^4(k+\mu)(k+\mu-1)(k+\mu-2)(k+\mu-3)-6\alpha^4(k+\mu)(k+\mu-1)(k+\mu-2)$$

$$+(7\alpha^4+\alpha^2)(k+\mu)(k+\mu-1)+(\alpha^4+\alpha^2-\alpha)(k+\mu)+1-\lambda\Big)V^{k+\mu}T_k$$

$$+\Bigg(-\frac{4\alpha^4}{V_0}(k+\mu)(k+\mu-1)(k+\mu-2)(k+\mu-3)$$

$$-\frac{30\alpha^4}{V_0}(k+\mu)(k+\mu-1)(k+\mu-2)-\frac{42\alpha^4+2\alpha^2}{V_0}(k+\mu)(k+\mu-1)$$

$$-\frac{11\alpha^4+3\alpha^2-\alpha}{V_0}(k+\mu)\Bigg)V^{k+\mu+1}T_k$$

$$+\Bigg(\frac{8\alpha^4}{V_0^2}(k+\mu)(k+\mu-1)(k+\mu-2)(k+\mu-3)$$

$$+\frac{54\alpha^4}{V_0^2}(k+\mu)(k+\mu-1)(k+\mu-2)$$

$$+\frac{91\alpha^4-8V_0\alpha^4+\alpha^2}{V_0^2}(k+\mu)(k+\mu-1)$$

$$+\frac{34V_0\alpha^4-6\alpha^4+2\alpha^2}{V_0^2}(k+\mu)\Bigg)V^{k+\mu+2}T_k$$

$$+\Bigg(-\frac{4\alpha^4}{V_0^3}(k+\mu)(k+\mu-1)(k+\mu-2)(k+\mu-3)$$

$$-\frac{42\alpha^4}{V_0^3}(k+\mu)(k+\mu-1)(k+\mu-2)$$

$$+\frac{-84\alpha^4+24V_0\alpha^4}{V_0^3}(k+\mu)(k+\mu-1)+\frac{22V_0\alpha^4-40\alpha^4}{V_0^3}(k+\mu)\Bigg)V^{k+\mu+3}T_k$$

$$+\Bigg(\frac{\alpha^4}{V_0^4}(k+\mu)(k+\mu-1)(k+\mu-2)(k+\mu-3)$$

$$+\frac{12\alpha^4}{V_0^4}(k+\mu)(k+\mu-1)(k+\mu-2)+\frac{28\alpha^4-24V_0\alpha^4}{V_0^4}(k+\mu)(k+\mu-1)$$

$$+\frac{16V^4-26V_0\alpha^4}{V_0^4}(k+\mu)\Bigg)V^{k+\mu+4}T_k\Bigg)=0 \qquad (2.7)$$

Gavome pagrindinę lygybę (2.7), iš kurios gausime funkcijos *T(V(x))* išraiškos laipsnine eilute koeficientus.

Iš (2.7) lygybės matome, jog mažiausias laipsnis yra V^{μ}, kai *k=0*. Tuomet gauname, kad koeficientas prie V^{μ} yra toks:

$$(\alpha^4\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)-6\alpha^4\mu(\mu-1)(\mu-2)+(7\alpha^4+\alpha^2)\mu(\mu-1)+(\alpha^4+\alpha^2-\alpha)\mu + 1-\lambda)T_0=0$$

Tarkime, kad koeficientas T_0 yra bet koks ir iš šios lygties išplaukia, kad galimos parametro μ reikšmės yra tokios:

$$\mu_1=l,\mu_2=l+1,\mu_3=-l,\mu_4=-l+2$$

Jeigu T_0 pasirinktume lygiu nuliui, tai nesunku įsitikinti, kad visi funkcijos *T(V)* skleidinio laipsnine eilute koeficientai bus lygūs nuliui.

Rasime T_1 išraišką. Tokiu atveju surenkame koeficientus prie daugiklio $V^{\mu+1}$ laipsnio ir gauname:

$$(\alpha^4(\mu+1)\mu(\mu-1)(\mu-2)-6\alpha^4(\mu+1)\mu(\mu-1)+(7\alpha^4+\alpha^2)(\mu+1)\mu + (\alpha^4+\alpha^2-\alpha)(\mu+1)+1-\lambda)T_1 + \left(\frac{-4\alpha^4}{V_0}\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)-\frac{30\alpha^4}{V_0}\mu(\mu-1)(\mu-2) - \frac{42\alpha^4+2\alpha^2}{V_0}\mu(\mu-1)+\frac{11\alpha^4+3\alpha^2-\alpha}{V_0}\mu\right)T_0=0$$

Tarkime, kad koeficientai T_0 ir T_1 yra bet kokie ir iš šios lygties išplaukia, kad galimos parametro μ reikšmės yra tokios:

$$\mu_1=l,\mu_2=l+1,\mu_3=-l,\mu_4=-l+2$$

Jeigu T_0 ir T_1 pasirinktume lygius nuliui, tai nesunku įsitikinti, kad visi funkcijos *T(V)* skleidinio laipsnine eilute koeficientai bus lygūs nuliui.

Galutinė funkcijos *T(V(x))* išraiška yra tokia:

$$T\big(V(x)\big)=\sum_{k=0}^{\infty}V^{k+\mu_i}\,\mathrm{T_k},\mathrm{i}=1{,}2{,}3{,}4 \tag{2.8}$$

čia parametras μ įgyja reikšmes *l, l+1, -l, -l+2,* o (2.8) eilutės koeficientai randami pagal laisvai pasirenkamą T_0 iš tokios rekurentinės formulės

$$t_1T_k+t_2T_{k-1}+t_3T_{k-2}+t_4T_{k-3}+t_5T_{k-4}=0, kai\ k>1, k=1{,}2{,}3,\ldots$$

$$t_1=(\alpha^4(k+\mu)(k+\mu-1)(k+\mu-2)(k+\mu-3)-6\alpha^4(k+\mu)(k+\mu-1)(k+\mu-2) + (7\alpha^4+\alpha^2)(k+\mu)(k+\mu-1)+(\alpha^4+\alpha^2-\alpha)(k+\mu)+1-\lambda)$$

$$t_2=\Bigg(-\frac{4\alpha^4}{V_0}(k+\mu)(k+\mu-1)(k+\mu-2)(k+\mu-3)$$
$$-\frac{30\alpha^4}{V_0}(k+\mu)(k+\mu-1)(k+\mu-2)-\frac{42\alpha^4+2\alpha^2}{V_0}(k+\mu)(k+\mu-1)$$
$$-\frac{11\alpha^4+3\alpha^2-\alpha}{V_0}(k+\mu)\Bigg)$$

$$t_3=\Bigg(\frac{8\alpha^4}{V_0^2}(k+\mu)(k+\mu-1)(k+\mu-2)(k+\mu-3)$$
$$+\frac{54\alpha^4}{V_0^2}(k+\mu)(k+\mu-1)(k+\mu-2)$$
$$+\frac{91\alpha^4-8V_0\alpha^4+\alpha^2}{V_0^2}(k+\mu)(k+\mu-1)+\frac{34V_0\alpha^4-6\alpha^4+2\alpha^2}{V_0^2}(k+\mu)\Bigg)$$

$$t_4=\Bigg(-\frac{4\alpha^4}{V_0^3}(k+\mu)(k+\mu-1)(k+\mu-2)(k+\mu-3)$$
$$-\frac{42\alpha^4}{V_0^3}(k+\mu)(k+\mu-1)(k+\mu-2)$$
$$+\frac{-84\alpha^4+24V_0\alpha^4}{V_0^3}(k+\mu)(k+\mu-1)+\frac{22V_0\alpha^4-40\alpha^4}{V_0^3}(k+\mu)\Bigg)$$

$$t_5=\Bigg(\frac{\alpha^4}{V_0^4}(k+\mu)(k+\mu-1)(k+\mu-2)(k+\mu-3)+\frac{12\alpha^4}{V_0^4}(k+\mu)(k+\mu-1)(k+\mu-2)$$
$$+\frac{28\alpha^4-24V_0\alpha^4}{V_0^4}(k+\mu)(k+\mu-1)+\frac{16\alpha^4-26V_0\alpha^4}{V_0^4}(k+\mu)\Bigg)$$

Dabar ieškosime funkcijos *U(x)* išraiškos laipsnine eilute. Tam tikslui grįšime prie lygties

$$U^{IV}T+4U'''T'V'+U''(6T''(V')^2+6T'V''+T)$$
$$+U'(4T'''(V')^3+12T''V'V''+4T'V'''+2T'V'+T)$$
$$+U(6T'''(V')^2V''+3T''(V'')^2+4T''V'V'''+T'V^{IV}+T^{IV}(V')^4+T''(V')^2$$
$$+T'V''+T'V'+T)=0$$

ir jos sprendinių ieškosime tokiu pavidalu

$$U(x)=\sum_{k=0}^{\infty}x^{k+\rho}u_k$$

Norėdami išspręsti šią lygtį pagal *U(x)*, randame funkcijos *T(V(x)) ir T(V(0))* išvestines ir šių išvestinių reikšmes iki ketvirtos eilės. Tos išraiškos yra tokios:

turime:

$$T'V' = T'_x(V)$$

tuomet:

$$F(x) = \frac{T'_x}{T} = (lnT)'_x, F(0) = F_1$$

$$F'(x) = (lnT)''_x, F'(0) = F_2$$

$$F''(x) = (lnT)'''_x, F''(0) = F_3$$

$$F^{(k)}(x) = (lnT)_x^{(k+1)}, F^{(k)}(0) = F_k$$

$$lnT(V) = \left(ln\sum_{k=0}^{\infty} V^{k+\mu}T_k\right)'_x, T(V(0)) = \sum_{k=0}^{\infty} V(0)^{k+\mu}T_k = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{V}{2}\right)^{k+\mu} T_k$$

tada išvestinės ir jų reikšmės nulyje bus tokios:

$$T'(x) = T'_v V'_x = \sum_{k=0}^{\infty}(k+\mu)V^{k+\mu-1}T_k V'_x,$$

$$T'(0) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+\mu)\left(\frac{V_0}{2}\right)^{k+\mu-1} T_k\left(-\frac{V_0\alpha}{2^2}\right)$$

$$T''(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+\mu)(k+\mu-1)V^{k+\mu-2}T_k V''_x,$$

$$T''(0) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+\mu)(k+\mu-1)\left(-\frac{V_0\alpha}{2^2}\right)^{k+\mu-2} T_k\left(\frac{V_0\alpha^2}{2^3}\right)$$

$$T'''(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+\mu)(k+\mu-1)(k+\mu-2)V^{k+\mu-3}T_k V'''_x,$$

$$T'''(0) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+\mu)(k+\mu-1)(k+\mu-2)\left(\frac{V_0\alpha^2}{2^3}\right)^{k+\mu-3} T_k\left(-\frac{V_0\alpha^3}{2^4}\right)$$

$$T^{IV}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+\mu)(k+\mu-1)(k+\mu-2)(k+\mu-3)V^{k+\mu-4}T_k V_x^{IV},$$

$$T^{IV}(0) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+\mu)(k+\mu-1)(k+\mu-2)(k+\mu-3)\left(-\frac{V_0\alpha^3}{2^4}\right)^{k+\mu-4} T_k\left(\frac{V_0\alpha^4}{2^5}\right)$$

Grįžtame prie lygties

$$U^{IV} + U''' \frac{4T'V'}{T} + U'' \left(\frac{6T''(V')^2 + 6T'V'' + T}{T} \right)$$
$$+ U' \left(\frac{4T'''(V')^3 + 12T''V'V'' + 4T'V''' + 2T'V' + T}{T} \right)$$
$$+ U \left(\frac{6T'''(V')^2V'' + 3T''(V'')^2 + 4T''V'V''' + T'V^{IV} + T^{IV}(V')^4 + T''(V')^2 + T'V'' + T'V' + T}{T} \right)$$
$$= 0$$

Pasinaudoję ką tik išdėstyta metodika galime šioje lygtyje koeficientus prie *U(x)* išvestinių išdėstyti Makloreno eilutėmis.

Tarkime, kad $\frac{4T'V'}{T}$ galime išdėstyti laipsnine eilute $\sum_{k=0}^{\infty} F_k x^k$, koeficientų prie $U''(x)$ $\frac{6T''(V')^2+6T'V''+T}{T}$ dėstinys laipsnine eilute yra toks $\sum_{k=0}^{\infty} G_k x^k$, o trupmenos $\frac{4T'''(V')^3+12T''V'V''+4T'V'''+2T'V'+T}{T}$ dėstinys laipsnine eilute yra $\sum_{k=0}^{\infty} H_k x^k$, o reiškinį prie *U(x)* pagal faktorizacijos metodą žymime atskyrimo konstanta λ. Gauname diferencialinę lygtį ieškomąjai funkcijai *U(x)* rasti ir ji yra tokia:

$$U^{IV} + \sum_{k=0}^{\infty} F_k x^k U''' + \sum_{k=0}^{\infty} G_k x^k U'' + \sum_{k=0}^{\infty} H_k x^k U' + \lambda U = 0 \tag{2.9}$$

(2.9) lygties sprendinio ieškosime laipsninės eilutės

$$U(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+\rho} U_k \tag{2.10}$$

pavidalu.

Skaičiuojame funkcijos *U(x)* keturias išvestines ir jos yra tokios:

$$U'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+\rho) x^{k+\rho-1} U_k$$

$$U''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+\rho)(k+\rho-1) x^{k+\rho-2} U_k$$

$$U'''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+\rho)(k+\rho-1)(k+\rho-2) x^{k+\rho-3} U_k$$

$$U^{IV}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+\rho)(k+\rho-1)(k+\rho-2)(k+\rho-3) x^{k+\rho-4} U_k$$

Surašę (2.10), gautas *U(x)* išvestinių reikšmes į (2.9) lygtį turime:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left((k+\rho)(k+\rho-1)(k+\rho-2)(k+\rho-3)x^{k+\rho-4}U_k\right.$$
$$+\sum_{l=0}^{k}\Big((l+\rho)(l+\rho-1)(l+\rho-2)x^{k+\rho-2}U_lF_{k-l}$$
$$\left.+(l+\rho)(l+\rho-1)x^{k+\rho-1}U_lG_{k-l}+(l+\rho)x^{k+\rho}U_lH_{k-l}\Big)+x^{k+\rho}U_k\lambda\right)=0 \tag{2.12}$$

Lyginame (2.12) lygybėje koeficientus prie vienodų *x* laipsnių.
Koeficientas prie x^0 yra toks

$$\big(\rho(\rho-1)(\rho-2)(\rho-3)\big)U_0=0$$

Tam, kad sprendinys nebūtų tapatingai lygus nuliui, tarkime, jog $U_0\neq 0.$ tuomet gaunamw, kad

$$\rho(\rho-1)(\rho-2)(\rho-3)=0$$

Iš čia randame parametro ρ reikšmes, kurios yra tokios $\rho_1=-l, \rho_2=-l+2,\ \rho_3=l+1,\ \rho_4=l+3$ ir turime, kad $U_0-\ yra\ bet\ koks.$

Sulyginę koeficientus prie *x* gauname

$$\big((\rho+1)\rho(\rho-1)(\rho-2)\big)U_1=0$$

iš čia turime, kad $U_1=0.$

Pratesę šį procesą ir sulyginę koeficientus prie x^k gauname rekurentinę formulę laipsninės eilutės (2.10) koeficientams $U_k, k=1{,}2{,}3, \ldots$ rasti.

$$\big((\rho+2)(\rho+1)\rho(\rho-1)+(\rho+2)(\rho+1)\rho F_k\big)U_2+\rho(\rho-1)G_kU_0$$

iš čia gauname, kad

$$U_2=-\frac{\rho(\rho-1)G_kU_0}{\big((\rho+2)(\rho+1)\rho(\rho-1)+(\rho+2)(\rho+1)\rho F_k\big)}$$

$$U_3=-\frac{\rho(\rho-1)G_kU_0}{\big((\rho+3)(\rho+2)(\rho+1)\rho+(\rho+3)(\rho+2)(\rho+1)F_k+(\rho+3)(\rho+2)G_k\big)}$$

$$U_4=-\frac{\big((\rho+2)(\rho+1)\rho F_k\big)U_2+(\rho H_k+\lambda)U_0}{\big((\rho+4)(\rho+3)(\rho+2)(\rho+1)+(\rho+4)(\rho+3)(\rho+2)F_k+(\rho+4)(\rho+3)G_k\big)}$$

$$U_5=-\frac{\big((\rho+3)(\rho+2)(\rho+1)F_k\big)U_3+(\rho+2)(\rho+1)G_kU_2+(\rho+1)H_kU_0}{\big((\rho+5)(\rho+4)(\rho+3)(\rho+2)+(\rho+5)(\rho+4)(\rho+3)F_k+(\rho+5)(\rho+4)G_k\big)}$$

Ši rekurentinė formulė yra tokia:

$$(k+\rho)(k+\rho-1)(k+\rho-2)(k+\rho-3)U_k = -\sum_{l=0}^{k-2}(l+\rho)(l+\rho-1)(l+\rho-2)U_l F_{k-2-l} - \sum_{l=0}^{k-3}(l+\rho)(l+\rho-1)U_l G_{k-3-l} - \sum_{l=0}^{k-4}(l+\rho)U_l H_{k-4-l} - U_{k-4}\lambda\,, k = 0,1,2,\ldots \tag{2.13}$$

Gavome ieškomosios funkcijos $U(x)$ išraišką laipsnine x laipsnių eilute ir eilutės koeficientų radimo rekurentinę formulę, iš kurios visi eilutės koeficientai randami vienareikšmiškai pagal laisvai parenkamą pirmąjį koeficientą.

5. Sprendinių struktūra

Suformuluokime gauto darbo rezultatą.

Ieškomoji funkcija *u(x)* faktorizuota ir jos išraiška tokia:

$$u = U(x)T\big(V(x)\big). \tag{*}$$

Funkcijai *U(x)* galioja dėstinys

$$U(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+\rho} u_k \tag{2.14}$$

o funkcijai *T(V(x))* galioja dėstinys

$$T\big(V(x)\big) = \sum_{k=0}^{\infty} V^{k+\mu} T_k \tag{2.15}$$

Laipsninė eilutė yra formalus sprendinys ir ji taško $x = 0$ aplinkoje gali konverguoti. Tada (2.14) taptų tikruoju sprendiniu. Jeigu (2.14) diverguotų, tai ji apie funkcijos *U(x)* elgseną pasakytų labai nedaug.

Prisiminkime potencialo *V(x)* išraišką, o ji yra tokia:

$$V(x) = \frac{V_0}{1 + e^{\alpha x}}$$

Kadangi $V(0) = \frac{V_0}{2}$, tai apie (2.15) laipsninės eilutės konvergavimą kalbėti neišeina. Kadangi V_0yra labai mažas (nykstamai mažėjantis) dydis, tai turime (2.15) ir ši išraiška yra funkcijos *T(V(x))* dėstinys mažo parametro laipsniais.

Išvados

Magistro baigiamajame darbe nagrinėjome ketvirtos eilės paprastąją diferencialinę lygtį, ieškojome jos sprendinio priklausomybės ne tik nuo *x*, bet ir nuo potencialo *V(x)*. Sprendinio ieškojome pavidalu:

$$u^{IV} + au'' + bu' + cu = 0, \tag{2.1.2}$$

čia

$$u = U(x)T\big(V(x)\big),$$

kur

$$u = U(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+\rho}\, U_k$$

ir

$$T\big(V(x)\big) = \sum_{k=0}^{\infty} V^{k+\mu}\, T_k.$$

Nustatėme, kad jos sprendinys nuo potencialo *T(V(x))* gali būti užrašomas taip:

$$T\big(V(x)\big) = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+\mu_i}\, \mathrm{T_k}, \mathrm{i} = 1{,}2{,}3{,}4 \tag{2.8}$$

čia parametras μ įgyja reikšmes *l*, *l+1*, *-l*, *-l+2*, o (2.8) eilutės koeficientai randami pagal laisvai pasirenkamą T_0 iš tokios rekurentinės formulės

$$t_1T_k + t_2T_{k-1} + t_3T_{k-2} + t_4T_{k-3} + t_5T_{k-4} = 0, kai\ k > 1, k = 1{,}2{,}3, \ldots$$

$$t_1 = (\alpha^4(k+\mu)(k+\mu-1)(k+\mu-2)(k+\mu-3) - 6\alpha^4(k+\mu)(k+\mu-1)(k+\mu-2) + (7\alpha^4+\alpha^2)(k+\mu)(k+\mu-1) + (\alpha^4+\alpha^2-\alpha)(k+\mu) + 1 - \lambda)$$

$$t_2 = \left(-\frac{4\alpha^4}{V_0}(k+\mu)(k+\mu-1)(k+\mu-2)(k+\mu-3) - \frac{30\alpha^4}{V_0}(k+\mu)(k+\mu-1)(k+\mu-2) - \frac{42\alpha^4+2\alpha^2}{V_0}(k+\mu)(k+\mu-1) - \frac{11\alpha^4+3\alpha^2-\alpha}{V_0}(k+\mu)\right)$$

$$t_3=\left(\frac{8\alpha^4}{V_0^2}(k+\mu)(k+\mu-1)(k+\mu-2)(k+\mu-3)\right.$$
$$+\frac{54\alpha^4}{V_0^2}(k+\mu)(k+\mu-1)(k+\mu-2)$$
$$\left.+\frac{91\alpha^4-8V_0\alpha^4+\alpha^2}{V_0^2}(k+\mu)(k+\mu-1)+\frac{34V_0\alpha^4-6\alpha^4+2\alpha^2}{V_0^2}(k+\mu)\right)$$

$$t_4=\left(-\frac{4\alpha^4}{V_0^3}(k+\mu)(k+\mu-1)(k+\mu-2)(k+\mu-3)\right.$$
$$-\frac{42\alpha^4}{V_0^3}(k+\mu)(k+\mu-1)(k+\mu-2)$$
$$\left.+\frac{-84\alpha^4+24V_0\alpha^4}{V_0^3}(k+\mu)(k+\mu-1)+\frac{22V_0\alpha^4-40\alpha^4}{V_0^3}(k+\mu)\right)$$

$$t_5=\left(\frac{\alpha^4}{V_0^4}(k+\mu)(k+\mu-1)(k+\mu-2)(k+\mu-3)+\frac{12\alpha^4}{V_0^4}(k+\mu)(k+\mu-1)(k+\mu-2)\right.$$
$$\left.+\frac{28\alpha^4-24V_0\alpha^4}{V_0^4}(k+\mu)(k+\mu-1)+\frac{16\alpha^4-26V_0\alpha^4}{V_0^4}(k+\mu)\right)$$

O sprendinys nuo *U(x)* gali būti užrašomas taip:

$$U(x)=\sum_{k=0}^{\infty}x^{k+\rho}U_k \tag{2.10}$$

čia parametras ρ įgyja reikšmes $-l, -l+2,\ l+1,\ l+3$, o (2.10) eilutės koeficientai randami pagal laisvai pasirenkamą U_0 iš tokios rekurentinės formulės

$$(k+\rho)(k+\rho-1)(k+\rho-2)(k+\rho-3)U_k$$
$$=-\sum_{l=0}^{k-2}(l+\rho)(l+\rho-1)(l+\rho-2)U_lF_{k-2-l}$$
$$-\sum_{l=0}^{k-3}(l+\rho)(l+\rho-1)U_lG_{k-3-l}-\sum_{l=0}^{k-4}(l+\rho)U_lH_{k-4-l}-U_{k-4}\lambda,\ k=0,1,2,\ldots \tag{2.13}$$

čia

$$U_0-\ yra\ bet\ koks$$
$$U_1=0$$

$$U_2 = -\frac{\rho(\rho-1)G_k U_0}{\big((\rho+2)(\rho+1)\rho(\rho-1) + (\rho+2)(\rho+1)\rho F_k\big)}$$

$$U_3 = -\frac{\rho(\rho-1)G_k U_0}{\big((\rho+3)(\rho+2)(\rho+1)\rho + (\rho+3)(\rho+2)(\rho+1)F_k + (\rho+3)(\rho+2)G_k\big)}$$

$$U_4 = -\frac{\big((\rho+2)(\rho+1)\rho F_k\big)U_2 + (\rho H_k + \lambda)U_0}{\big((\rho+4)(\rho+3)(\rho+2)(\rho+1) + (\rho+4)(\rho+3)(\rho+2)F_k + (\rho+4)(\rho+3)G_k\big)}$$

$$U_5 = -\frac{\big((\rho+3)(\rho+2)(\rho+1)F_k\big)U_3 + (\rho+2)(\rho+1)G_k U_2 + (\rho+1)H_k U_0}{\big((\rho+5)(\rho+4)(\rho+3)(\rho+2) + (\rho+5)(\rho+4)(\rho+3)F_k + (\rho+5)(\rho+4)G_k\big)}$$

Literatūros sąrašas

1. Bakalauro darbas
2. Golokvosčius P. Diferencialinės lygtys TEV Vilnius 2000
3. Ambrazevičius A. Matematinis modeliavimas VU 2004

Regular degenerating fourth – order differential equations solutions structure study

SUMMARY

Examined degenerative fourth – order ordinary differential equation. Get solutions expressed a formal power series line small parameter product.