VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
FINANSŲ IR DRAUDIMO MATEMATIKA

Magistro baigiamasis darbas

Weibull skirstinių sandaugos uodegos asimptotinė formulė

Asymptotical Formula of the Tail of the Product of Weibull Distributions

Tautvydas Imbrasas

Darbo vadovas: Prof. dr. (HP) Jonas Šiaulys

Vilnius
2025

Weibull skirstinių sandaugos uodegos asimptotinė formulė

Santrauka

Tarkime, kad $\xi_1, \xi_2, \ldots$ yra nepriklausomi, vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai, tokie, kad kiekvienam k, ξ_k yra pasiskirstę pagal Weibull skirstinį ir tegul $\Pi_n := \prod_{k=1}^{n} \xi_k$ yra šių atsitiktinių dydžių sandauga. Šiame darbe pateikiamos ir įrodomos dvi teoremos Weibull skirstinių sandaugos uodegos asimptotinei formulei.

Raktiniai žodžiai: Weibull skirstinys, skirstinių sandauga, sandaugos uodega, asimptotinė formulė, matematinės indukcijos principas, Monte Karlo metodas.

Asymptotical Formula of the Tail of the Product of Weibull Distributions

Abstract

Let $\xi_1, \xi_2, \ldots$ be independent identically distributed random variables such that, for each k, ξ_k is distributed according to the Weibull distribution and let $\Pi_n := \prod_{k=1}^{n} \xi_k$ be the product of the random variables. Two theorems for the asymptotical formula of the tail of the product of Weibull distributions are presented and proved in this paper.

Key words: Weibull distribution, product of the distributions, tail of the product, asymptotical formula, principle of mathematical induction, Monte Carlo method.

Turinys

1 Įvadas

Weibull skirstinys tikimybių teorijoje ir matematinėje statistikoje yra plačiai naudojamas modeliuojant įvairius duomenis ir yra pritaikomas įvairiose srityse tiek teorijoje, tiek praktikoje. Minėtąjį skirstinį atrado ir detaliai aprašė švedų inžinierius, matematikas Waloddi Weibull [1][2]:

Sakome, kad atsitiktinis dydis ξ yra pasiskirstęs pagal Weibull skirstinį, jeigu jo tankis įgyja tokį pavidalą:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\alpha-1} e^{-(x/\lambda)^\alpha}, & kai\ x \geq 0, \\ 0, & kai\ x < 0, \end{cases}$$

kur

$\alpha > 0$ *yra skirstinio formos parametras, o* $\lambda > 0$ *yra skirstinio skalės parametras.*

Tada atsitiktinio dydžio ξ (pasiskirsčiusio pagal Weibull skirstinį) pasiskirstymo funkcija yra:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 1 - e^{-(x/\lambda)^\alpha}, & kai\ x \geq 0, \\ 0, & kai\ x < 0. \end{cases}$$

Kaip jau buvo minėta, Weibull skirstinys turi platų panaudojimo spektrą. Wahed, Luong, Jeong [3] Weibull skirstinio pagrindu sudarė kelis modelius, kuriuos pritaikė tam tikriems sergamumo krūties vėžiu duomenims ir priėjo prie išvadų, jog Weibull skirstinys gali atlikti svarbų vaidmenį modeliuojant išgyvenamumo duomenis.

Weibull skirstinys taip pat yra plačiai sutinkamas patikimumo teorijoje vertinant, jog tam tikras įrenginys, komponentas ar sistema (ne)sugebės atlikti savo funkcijas tam tikromis sąlygomis, tam tikrą laiko tarpą. Pavyzdžiui, Li, Fang, Liu, Tang [4] naudodamiesi Weibull skirstiniu bandė prognozuoti tam tikrų betoninių komponentų lūžimo tikimybę esant daugiaašiams įtempimams.

Dar vienas gan populiarus Weibull skirstinio naudojimo būdas yra vėjo greičio analizė. Mikuláš, Sedliačková, Pobočíková, Michalková, Jurášová [5] panaudojo Weibull skirstinį vėjo greičio duomenų modeliavimui vienam iš Slovakijos miestų. Darbo rezultatai parodė, jog metiniai, sezoniniai ir mėnesiniai vėjo greičio duomenys Weibull dėsnio pagalba buvo atspindėti patenkinamai, todėl skirstinys gali būti naudojamas ateities vėjo greičio prognozėms.

Tai tik keletas iš daugelio Weibull skirstinio pritaikymo būdų. Mes, savo ruožtu, šiame darbe išvesime Weibull skirstinių sandaugos uodegos asimptotinę formulę. Tai atliksime pasinaudodami Marek Arendarczyk ir Krzysztof Debicki [6] pasiūlyta teorema, Wong [7] lema, skirta specialiosios formos integralo vertinimui bei išraiškų teisingumą suformuluotose teoremose įrodysime matematinės indukcijos principu.

Nagrinėjant mokslinius šaltinius darosi akivaizdu, jog Weibull skirstinių sandaugos nėra plačiai išnagrinėtos. Didesnis dėmesys yra skiriamas dviejų skirtingų skirstinių sandaugos arba santykio analizei. Pavyzdžiui, Hassan, Nasar, Hadad [8] išvedė tikimybinio tankio bei pasiskirstymo funkcijos išraiškas dviejų nepriklausomų Weibull ir Lindley atsitiktinių dydžių sandaugai ir santykiui. Nadarajah ir Kotz [9] sudaugino ir padalino gama ir Weibull skirstinius ir išreiškė pasiskirstymo funkcijas sandaugos ir dalybos atveju. Tačiau Lomnicki [10] moksliniame darbe yra nurodoma dviejų nepriklausomų Weibull atsitiktinių dydžių sandaugos tankio funkcija:

$$f_{\xi_1\xi_2}(x) = 2\alpha x^{\alpha-1} K_0\left(2x^{\alpha/2}\right),$$

kur $K_0(\cdot)$ yra modifikuota trečiosios rūšies nulinės eilės Beselio funkcija.

Taip pat remdamiesi literatūra (pvz.: [11], [12]) galime teigti, jog Weibull skirstinių sumos analizė yra populiaresnė nagrinėjimo prasme. Vadinasi, išvesdami Weibull skirstinių sandaugos uodegos asimptotinę formulę atliksime reikšmingą darbą.

2 Pagrindinis n narių sandaugos uodegos narys

Šiame skyriuje tirsime pagrindinį n narių sandaugos uodegos narį. Tai atliksime naudodamiesi Marek Arendarczyk ir Krzysztof Debicki suformuluota lema Weibull uodegų skirstinių sandaugų įvertinimui [6]:

Teorema 2.1. *Tegul ξ_1 ir ξ_2 yra du nepriklausomi, neneigiami atsitiktiniai dydžiai tokie, kad*

$$\overline{F}_{\xi_1}(x) \underset{x\to\infty}{\sim} A_1 x^{\gamma_1} \exp\Big\{-\beta_1 x^{\alpha_1}\Big\}, \quad \overline{F}_{\xi_2}(x) \underset{x\to\infty}{\sim} A_2 x^{\gamma_2} \exp\Big\{-\beta_2 x^{\alpha_2}\Big\},$$

kur $A_i > 0, \gamma_i \in \mathbb{R}, \beta_i > 0, \alpha_i > 0, i = 1, 2.$ *Tada*

$$\overline{F}_{\xi_1\xi_2}(x) \underset{x\to\infty}{\sim} A_{\xi_1\xi_2} x^{\gamma_{\xi_1\xi_2}} \exp\Big\{-\beta_{\xi_1\xi_2} x^{\alpha_{\xi_1\xi_2}}\Big\},$$

kur

$$\alpha_{\xi_1\xi_2} = \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2},$$

$$\beta_{\xi_1\xi_2} = \beta_1^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}} \beta_2^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}} \left(\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}} + \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}}\right),$$

$$\gamma_{\xi_1\xi_2} = \frac{\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1\gamma_2 + 2\alpha_2\gamma_1}{2(\alpha_1+\alpha_2)},$$

$$A_{\xi_1\xi_2} = \sqrt{2\pi} \frac{A_1A_2}{\sqrt{\alpha_1+\alpha_2}} (\alpha_1\beta_1)^{\frac{\alpha_2-2\gamma_1+2\gamma_2}{2(\alpha_1+\alpha_2)}} (\alpha_2\beta_2)^{\frac{\alpha_1-2\gamma_2+2\gamma_1}{2(\alpha_1+\alpha_2)}}.$$

Kaip vieną iš šio darbo pagrindinių rezultatų, suformuluojame 2.2. teoremą, kurią įrodysime:

Teorema 2.2. *Tegul $\xi_1, \xi_2, ...$ yra nepriklausomi, vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai, tokie, kad kiekvienam k, ξ_k yra pasiskirstę pagal Weibull dėsnį ir tegul* $\Pi_n := \prod_{k=1}^n \xi_k$. *Tada*

$$\overline{F}_{\Pi_n}(x) \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}} \lambda^{-\alpha(\frac{n-1}{2})} x^{\alpha(\frac{n-1}{2n})} \exp\Big\{-n\lambda^{-\alpha} x^{\frac{\alpha}{n}}\Big\}.$$

Įrodymas. Jeigu $n = 2$, tai

$$\overline{F}_{\xi_1}(x) = e^{-\lambda^{-\alpha}x^{\alpha}}, \qquad \overline{F}_{\xi_2}(x) = e^{-\lambda^{-\alpha}x^{\alpha}}.$$

Pagal 2.1. teoremą turime:

$$\alpha_1 = \alpha, \qquad \alpha_2 = \alpha,$$

$$\beta_1 = \lambda^{-\alpha}, \qquad \beta_2 = \lambda^{-\alpha},$$

$$\gamma_1 = 0, \qquad \gamma_2 = 0,$$

$$A_1 = 1, \qquad A_2 = 1.$$

Atliekame skaičiavimus remdamiesi 2.1. teorema:

$$\alpha_{\xi_1\xi_2} = \frac{\alpha \cdot \alpha}{\alpha + \alpha} = \frac{\alpha^2}{2\alpha} = \frac{\alpha}{2},$$

$$\beta_{\xi_1\xi_2} = (\lambda^{-\alpha})^{\frac{\alpha}{\alpha+\alpha}} (\lambda^{-\alpha})^{\frac{\alpha}{\alpha+\alpha}} \left(\left(\frac{\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\alpha}} + \left(\frac{\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\alpha}} \right) = (\lambda^{-\alpha})^{\frac{1}{2}} (\lambda^{-\alpha})^{\frac{1}{2}} \left(1^{\frac{1}{2}} + 1^{\frac{1}{2}}\right) = 2\lambda^{-\alpha},$$

$$\gamma_{\xi_1\xi_2} = \frac{\alpha \cdot \alpha + 2\alpha \cdot 0 + 2\alpha \cdot 0}{2(\alpha + \alpha)} = \frac{\alpha^2}{4\alpha} = \frac{\alpha}{4},$$

$$A_{\xi_1\xi_2} = \sqrt{2\pi} \frac{1 \cdot 1}{\sqrt{\alpha + \alpha}} (\alpha\lambda^{-\alpha})^{\frac{\alpha - 2\cdot 0 + 2\cdot 0}{2(\alpha+\alpha)}} (\alpha\lambda^{-\alpha})^{\frac{\alpha - 2\cdot 0 + 2\cdot 0}{2(\alpha+\alpha)}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\alpha}} (\alpha\lambda^{-\alpha})^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2\pi}{2\alpha}(\alpha\lambda^{-\alpha})} = \sqrt{\pi} \cdot \lambda^{-\frac{\alpha}{2}}.$$

Tad gauname:

$$\overline{F}_{\xi_1\xi_2}(x) \underset{x\to\infty}{\sim} \sqrt{\pi}\lambda^{-\frac{\alpha}{2}} x^{\frac{\alpha}{4}} \exp\Big\{-2\lambda^{-\alpha} x^{\frac{\alpha}{2}}\Big\}.$$

Analogišku būdu išnagrinėdami atvejus, kai $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$ gauname tokias uodegų asimptotikas:

$$\overline{F}_{\xi_1\xi_2\xi_3}(x) \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \lambda^{-\alpha} x^{\frac{\alpha}{4}} \exp\Big\{-3\lambda^{-\alpha} x^{\frac{\alpha}{3}}\Big\},$$

$$\overline{F}_{\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4}(x) \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{4}} \lambda^{-\frac{3}{2}\alpha} x^{\frac{3}{8}\alpha} \exp\Big\{-4\lambda^{-\alpha} x^{\frac{\alpha}{4}}\Big\},$$

$$\overline{F}_{\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4\xi_5}(x) \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{(2\pi)^2}{\sqrt{5}} \lambda^{-2\alpha} x^{\frac{2}{5}\alpha} \exp\Big\{-5\lambda^{-\alpha} x^{\frac{\alpha}{5}}\Big\}.$$

Pagal gautus rezultatus, atliekame prielaidą (kuri yra teisinga, kai $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$):

$$\overline{F}_{\Pi_n}(x) \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}} \lambda^{-\alpha(\frac{n-1}{2})} x^{\alpha(\frac{n-1}{2n})} \exp\Big\{-n\lambda^{-\alpha} x^{\frac{\alpha}{n}}\Big\}.$$

Tarkime, kad prielaida teisinga, kai $n = m$. Patikrinsime, ar ji yra teisinga, kai $n = m+1$.

Akivaizdu, jog $\prod_{k=1}^{m+1} \xi_k = (\prod_{k=1}^{m} \xi_k) \cdot \xi_{m+1}$. Tegul $\Pi_m := \prod_{k=1}^{m} \xi_k$ ir $\Pi_{m+1} := \prod_{k=1}^{m+1} \xi_k$. Tada naudodamiesi 2.1. teorema turime:

$$\overline{F}_{\Pi_m}(x) \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}}{\sqrt{m}} \lambda^{-\alpha(\frac{m-1}{2})} x^{\alpha(\frac{m-1}{2m})} \exp\Big\{-m\lambda^{-\alpha} x^{\frac{\alpha}{m}}\Big\}, \quad \overline{F}_{\xi_{m+1}}(x) = e^{-\lambda^{-\alpha} x^{\alpha}},$$

kur

$$\alpha_1 = \frac{\alpha}{m}, \qquad \alpha_2 = \alpha,$$

$$\beta_1 = m\lambda^{-\alpha}, \qquad \beta_2 = \lambda^{-\alpha},$$

$$\gamma_1 = \alpha\left(\frac{m-1}{2m}\right), \qquad \gamma_2 = 0,$$

$$A_1 = \frac{(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}}{\sqrt{m}}\lambda^{-\alpha(\frac{m-1}{2})}, \qquad A_2 = 1.$$

Atliekame skaičiavimus remdamiesi 2.1. teorema:

$$\alpha_{\Pi_{m+1}} = \frac{\frac{\alpha}{m}\cdot\alpha}{\frac{\alpha}{m}+\alpha} = \ldots = \frac{\alpha}{m+1},$$

$$\beta_{\Pi_{m+1}} = (m\lambda^{-\alpha})^{\frac{\alpha}{\frac{\alpha}{m}+\alpha}}(\lambda^{-\alpha})^{\frac{\frac{\alpha}{m}}{\frac{\alpha}{m}+\alpha}}\left(\left(\frac{\frac{\alpha}{m}}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\frac{\alpha}{m}+\alpha}} + \left(\frac{\alpha}{\frac{\alpha}{m}}\right)^{\frac{\frac{\alpha}{m}}{\frac{\alpha}{m}+\alpha}}\right) = \ldots = (m+1)\lambda^{-\alpha},$$

$$\gamma_{\Pi_{m+1}} = \frac{\frac{\alpha}{m}\cdot\alpha + 2\cdot\frac{\alpha}{m}\cdot 0 + 2\alpha\cdot\alpha\left(\frac{m-1}{2m}\right)}{2\left(\frac{\alpha}{m}+\alpha\right)} = \ldots = \frac{\alpha m}{2(m+1)},$$

$$A_{\Pi_{m+1}} = \sqrt{2\pi}\frac{\left(\frac{(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}}{\sqrt{m}}\lambda^{-\alpha(\frac{m-1}{2})}\right)\cdot 1}{\sqrt{\frac{\alpha}{m}+\alpha}}\cdot\left(\frac{\alpha}{m}m\lambda^{-\alpha}\right)^{\frac{\alpha-2\alpha(\frac{m-1}{2m})+2\cdot 0}{2(\frac{\alpha}{m}+\alpha)}}\cdot(\alpha\lambda^{-\alpha})^{\frac{\frac{\alpha}{m}-2\cdot 0+2\alpha(\frac{m-1}{2m})}{2(\frac{\alpha}{m}+\alpha)}}$$

$$= \ldots = \frac{(2\pi)^{\frac{m}{2}}}{\sqrt{m+1}}\cdot\lambda^{-\frac{\alpha m}{2}}.$$

Tad gauname:

$$\overline{F}_{\Pi_{m+1}}(x) \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{(2\pi)^{\frac{m}{2}}}{\sqrt{m+1}}\lambda^{-\frac{\alpha m}{2}}x^{\frac{\alpha m}{2(m+1)}}\exp\left\{-(m+1)\lambda^{-\alpha}x^{\frac{\alpha}{m+1}}\right\}.$$

Šis rezultatas parodo, jog atlikta prielaida yra teisinga, kai $n = m+1$. Remiantis matematinės indukcijos principu, išraiška yra teisinga, kai n yra bet kuris natūralusis skaičius.

3 Patikslinta n narių sandaugos uodegos asimptotika

Šiame skyriuje išvesime tikslesnę Weibull skirstinių sandaugos uodegos asimptotinę formulę. Pateikiame teoremą 3.1.:

Teorema 3.1. *Tegul $\xi_1, \xi_2, \ldots$ yra nepriklausomi, vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai, tokie, kad kiekvienam k, ξ_k yra pasiskirstę pagal Weibull dėsnį ir tegul $\Pi_n := \prod_{k=1}^{n}\xi_k$. Tada*

$$\overline{F}_{\Pi_n}(x) = \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}}\lambda^{-\alpha(\frac{n-1}{2})}x^{\alpha(\frac{n-1}{2n})}\exp\left\{-n\lambda^{-\alpha}x^{\frac{\alpha}{n}}\right\}(1+O_n(x^{-\frac{\alpha}{n}})).$$

Norėdami įrodyti šią teoremą, pasinaudosime kinų mokslininko Roderick S. C. Wong lema [7], kuri yra suformuluota taikant balno taško metodą specialiosios formos realiajam integralui:

Lema 3.2. *Tegul h ir g yra dvi realiosios funkcijos, apibrėžtos intervale $[a, b)$ (b gali būti baigtinis arba begalinis), tokios, kad:*

(a) $$h(z) = h(a) + \sum_{k=0}^{N} a_k (z-a)^{k+\mu} + o\Big((z-a)^{N+\mu}\Big),$$

$$g(z) = \sum_{k=0}^{N} b_k (z-a)^{k+\alpha-1} + o\Big((z-a)^{N+\alpha-1}\Big),$$

$$h'(z) = \sum_{k=0}^{N} (k+\mu) a_k (z-a)^{k+\mu-1} + o\Big((z-a)^{N+\mu-1}\Big)$$

kai $z \searrow a$ *visiems* $N \geq 1$, *kur* $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0, \mu > 0$, *ir* $\alpha > 0$*;*

(b) $h(z) > h(a)$, *kai* $z \in (a, b)$ *ir* $\inf\limits_{z \in [a+\delta, b)} (h(z) - h(a)) > 0$ *kiekvienam* $\delta > 0$;

(c) h' *ir* g *yra tolydžios taško* a *aplinkoje.*

Jei integralas $\int_a^b g(z) e^{-xh(z)} dz$ *konverguoja absoliučiai visiems pakankamai dideliems* x, *tada*

$$\int_a^b g(z) e^{-xh(z)} dz = e^{-xh(a)} \left(\sum_{k=0}^{N} \Gamma\left(\frac{k+\alpha}{\mu}\right) d_k x^{-(k+\alpha)/\mu} + O\left(x^{-(N+\alpha+1)/\mu}\right) \right)$$

visiems $N \in \mathbb{N}$, *kur* $\Gamma(\cdot)$ *žymi gamą funkciją ir koeficientai* d_k *yra išreiškiami per koeficientus* a_k *and* b_k.

Wong [7] pateikė pirmuosius tris d_k *koeficientus šiomis išraiškomis:*

$$d_0 = \frac{b_0}{\mu a_0^{\alpha/\mu}}, \quad d_1 = \left(\frac{b_1}{\mu} - \frac{(\alpha+1) a_1 b_0}{\mu^2 a_0} \right) \frac{1}{a_0^{(\alpha+1)/\mu}},$$

$$d_2 = \left(\frac{b_2}{\mu} - \frac{(\alpha+2) a_1 b_1}{\mu^2 a_0} + \Big((\alpha+\mu+2) a_1^2 - 2\mu a_0 a_2 \Big) \frac{(\alpha+2) b_0}{2\mu^3 a_0^2} \right) \frac{1}{a_0^{(a+2)/\mu}}.$$

Teoremos 3.1. įrodymas*.*

Kai $n = 1$, iš teoremos 3.1. asimptotinės formulės gauname:

$$\overline{F}_{\Pi_1}(x) = \exp\Big\{-\lambda^{-\alpha} x^{\alpha}\Big\}(1 + O(x^{-\alpha})).$$

Ši formulė yra akivaizdžiai teisinga, nes:

$$\overline{F}_{\Pi_1}(x) = \overline{F}_{\xi_1}(x) = \exp\Big\{-\lambda^{-\alpha} x^{\alpha}\Big\}.$$

Tarkime, kad $n = 2$. Jeigu $x > 0$, tai:

$$\begin{aligned}
\overline{F}_{\xi_1\xi_2}(x) &= \mathbb{P}(\xi_1\xi_2 > x) = \int_0^\infty \mathbb{P}\left(\xi_2 > \frac{x}{y}\right) dF_{\xi_1}(y) \\
&= \int_0^\infty \exp\left\{-\left(\frac{x}{y\lambda}\right)^\alpha\right\} d\left(1 - \exp\left\{-\left(\frac{y}{\lambda}\right)^\alpha\right\}\right) \\
&= \int_0^\infty \exp\left\{-\left(\frac{x}{y\lambda}\right)^\alpha\right\} \frac{\alpha}{\lambda^\alpha} \exp\left\{-\left(\frac{y}{\alpha}\right)^\alpha\right\} y^\alpha \frac{dy}{y} \\
&= \frac{\alpha}{\lambda^\alpha} \int_0^\infty \exp\left\{-\frac{1}{\lambda^\alpha}\left(\left(\frac{x}{y}\right)^\alpha + y^\alpha\right)\right\} y^{\alpha-1} dy \\
&= \frac{\alpha}{\lambda^\alpha} \left(\int_0^{3^{\frac{1}{\alpha}} x^{\frac{1}{2}}} + \int_{3^{\frac{1}{\alpha}} x^{\frac{1}{2}}}^\infty\right) \exp\left\{-\frac{1}{\lambda^\alpha}\left(\left(\frac{x}{y}\right)^\alpha + y^\alpha\right)\right\} y^{\alpha-1} dy \\
&:= I_1 + I_2.
\end{aligned} \tag{1}$$

Tada:

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{\alpha}{\lambda^\alpha} \int_{3^{\frac{1}{\alpha}} x^{\frac{1}{2}}}^\infty \exp\left\{-\frac{1}{\lambda^\alpha}\left(\left(\frac{x}{y}\right)^\alpha + y^\alpha\right)\right\} y^{\alpha-1} dy \\
&\leq \frac{\alpha}{\lambda^\alpha} \int_{3^{\frac{1}{\alpha}} x^{\frac{1}{2}}}^\infty \exp\left\{-\frac{1}{\lambda^\alpha} y^\alpha\right\} y^{\alpha-1} dy \quad [y^\alpha = z] \\
&= \frac{1}{\lambda^\alpha} \int_{3x^{\frac{\alpha}{2}}}^\infty \exp\left\{-\frac{1}{\lambda^\alpha} z\right\} dz \\
&= \frac{1}{\lambda^\alpha} \int_{3x^{\frac{\alpha}{2}}}^\infty \exp\left\{-\frac{1}{\lambda^\alpha}\left(\frac{5}{6}z + \frac{1}{6}z\right)\right\} dz \\
&\leq \frac{1}{\lambda^\alpha} \int_{3x^{\frac{\alpha}{2}}}^\infty \exp\left\{-\frac{1}{\lambda^\alpha}\frac{5}{2}x^{\frac{\alpha}{2}} - \frac{1}{6\lambda^\alpha} z\right\} dz \\
&= \frac{1}{\lambda^\alpha} \exp\left\{-\frac{5}{2\lambda^\alpha} x^{\frac{\alpha}{2}}\right\} \int_{3x^{\frac{\alpha}{2}}}^\infty \exp\left\{-\frac{1}{6\lambda^\alpha} z\right\} dz \\
&\leq C_{11} \exp\left\{-\frac{5}{2\lambda^\alpha} x^{\frac{\alpha}{2}}\right\},
\end{aligned} \tag{2}$$

čia C_{11} yra konstanta, priklausanti nuo α ir λ.

Pasinaudodami kintamųjų pakeitimu $y = x^{\frac{1}{2}} u^{\frac{1}{\alpha}}$ sprendžiame integralą I_1:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{\alpha}{\lambda^\alpha} \int_0^{3^{\frac{1}{\alpha}} x^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{\lambda^\alpha}\left(\left(\frac{x}{y}\right)^\alpha + y^\alpha\right)\right\} y^{\alpha-1} dy \\
&= \frac{x^{\frac{\alpha}{2}}}{\lambda^\alpha} \int_0^3 \exp\left\{-\frac{x^{\frac{\alpha}{2}}}{\lambda^\alpha}\left(\frac{1}{u} + u\right)\right\} du \\
&= \frac{x^{\frac{\alpha}{2}}}{\lambda^\alpha} \left(\int_0^1 + \int_1^3\right) \exp\left\{-\frac{x^{\frac{\alpha}{2}}}{\lambda^\alpha}\left(\frac{1}{u} + u\right)\right\} du \\
&= I_{11} + I_{12}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Naudodamiesi 3.2. lema gauname, jog

$$\mu = 2, \quad \alpha = 1, \quad a_0 = b_0 = 1,$$
$$a_1 = -1, \quad b_1 = 0, \quad d_0 = d_1 = \frac{1}{2}.$$

Todėl integralui I_{12} turime:

$$I_{12} = \frac{x^{\frac{\alpha}{2}}}{\lambda^\alpha} \int_1^3 \exp\left\{-\frac{x^{\frac{\alpha}{2}}}{\lambda^\alpha}\left(\frac{1}{u} + u\right)\right\} du$$
$$= \frac{x^{\frac{\alpha}{2}}}{\lambda^\alpha} \exp\left\{-\frac{2x^{\frac{\alpha}{2}}}{\lambda^\alpha}\right\} \left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}\left(\frac{x^{\frac{\alpha}{2}}}{\lambda^\alpha}\right)^{-\frac{1}{2}} + \Gamma(1)\frac{1}{2}\left(\frac{x^{\frac{\alpha}{2}}}{\lambda^\alpha}\right)^{-1} + O\left(\left(\frac{x^{\frac{\alpha}{2}}}{\lambda^\alpha}\right)^{-\frac{3}{2}}\right)\right)$$
$$= \frac{x^{\frac{\alpha}{2}}}{\lambda^\alpha} \exp\left\{-\frac{2x^{\frac{\alpha}{2}}}{\lambda^\alpha}\right\} \left(\sqrt{\pi}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{x^{\frac{\alpha}{2}}}{\lambda^\alpha}\right)^{-\frac{1}{2}} + 1\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{x^{\frac{\alpha}{2}}}{\lambda^\alpha}\right)^{-1} + O\left(\left(\frac{x^{\frac{\alpha}{2}}}{\lambda^\alpha}\right)^{-\frac{3}{2}}\right)\right),$$

nes

$$u + \frac{1}{u}|_{u=1} = 2$$

ir

$$u + \frac{1}{u} = 2 + \sum_{k=0}^{N}(-1)^{k+2}(u-1)^{k+2} + o\left((u-1)^{N+2}\right)$$

visiems $N \geq 1$ dėl Teiloro formulės.

Naudodamiesi 3.2. lema integralui I_{11} gauname, jog

$$\mu = 2, \quad \alpha = 1, \quad a_0 = b_0 = 1, \quad a_1 = -1,$$
$$b_1 = -2, \quad d_0 = \frac{1}{2}, \quad d_1 = -\frac{1}{2}.$$

Todėl

$$I_{11} = \frac{x^{\frac{\alpha}{2}}}{\lambda^\alpha} \int_0^1 \exp\left\{-\frac{x^{\frac{\alpha}{2}}}{\lambda^\alpha}\left(\frac{1}{u} + u\right)\right\} du = \frac{x^{\frac{\alpha}{2}}}{\lambda^\alpha} \int_1^\infty \exp\left\{-\frac{x^{\frac{\alpha}{2}}}{\lambda^\alpha}\left(\frac{1}{v} + v\right)\right\} \frac{1}{v^2} dv$$
$$= \frac{x^{\frac{\alpha}{2}}}{\lambda^\alpha} \exp\left\{-\frac{2x^{\frac{\alpha}{2}}}{\lambda^\alpha}\right\} \left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}\left(\frac{x^{\frac{\alpha}{2}}}{\lambda^\alpha}\right)^{-\frac{1}{2}} + \Gamma(1)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{x^{\frac{\alpha}{2}}}{\lambda^\alpha}\right)^{-1} + O\left(\left(\frac{x^{\frac{\alpha}{2}}}{\lambda^\alpha}\right)^{-\frac{3}{2}}\right)\right)$$
$$= \frac{x^{\frac{\alpha}{2}}}{\lambda^\alpha} \exp\left\{-\frac{2x^{\frac{\alpha}{2}}}{\lambda^\alpha}\right\} \left(\sqrt{\pi}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{x^{\frac{\alpha}{2}}}{\lambda^\alpha}\right)^{-\frac{1}{2}} + 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{x^{\frac{\alpha}{2}}}{\lambda^\alpha}\right)^{-1} + O\left(\left(\frac{x^{\frac{\alpha}{2}}}{\lambda^\alpha}\right)^{-\frac{3}{2}}\right)\right),$$

nes

$$u + \frac{1}{u}|_{u=1} = 2,$$

$$u + \frac{1}{u} = 2 + \sum_{k=0}^{N}(-1)^{k+2}(u-1)^{k+2} + o\left((u-1)^{N+2}\right)$$

ir

$$\frac{1}{v^2} = \sum_{k=0}^{N}(-1)^k(k+1)(v-1)^k + o\left(v-1)^N\right).$$

Gautas I_{11} ir I_{12} išraiškas įstatome į (3). Gauname:

$$I_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{\lambda^{\frac{\alpha}{2}}} x^{\frac{\alpha}{4}} \exp\left\{-\frac{2x^{\frac{\alpha}{2}}}{\lambda^{\alpha}}\right\}\left(1 + O(x^{-\frac{\alpha}{2}}\right). \tag{4}$$

Įsistatome (2) ir (4) išraiškas į (1) ir turime:

$$\overline{F}_{\xi_1\xi_2}(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{\lambda^{\frac{\alpha}{2}}} x^{\frac{\alpha}{4}} \exp\left\{-\frac{2x^{\frac{\alpha}{2}}}{\lambda^{\alpha}}\right\}\left(1 + O\left(x^{-\frac{\alpha}{2}}\right)\right).$$

Tad teorema 3.1. yra tenkinama, kai $n = 2$.

Tarkime, kad teorema 3.1. yra tenkinama, kai $n = m$ $(m \geq 2)$:

$$\overline{F}_{\Pi_m}(x) = \frac{(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}}{\sqrt{m}} \lambda^{-\alpha(\frac{m-1}{2})} x^{\alpha(\frac{m-1}{2m})} \exp\Big\{-m\lambda^{-\alpha} x^{\frac{\alpha}{m}}\Big\}(1 + O_m(x^{-\frac{\alpha}{m}})). \tag{5}$$

Tada:

$$\begin{aligned}
\overline{F}_{\Pi_{m+1}}(x) &= \int_0^{\infty} \overline{F}_{\Pi_m}\left(\frac{x}{y}\right) dF_{\xi_{m+1}}(y) \\
&= \frac{\alpha}{\lambda^{\alpha}} \int_0^{\infty} \overline{F}_{\Pi_m}\left(\frac{x}{y}\right) y^{\alpha-1} \exp\left\{-\left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\alpha}\right\} dy \\
&= \frac{\alpha}{\lambda^{\alpha}} \left(\int_0^{(m+2)^{\frac{1}{\alpha}} x^{\frac{1}{m+1}}} + \int_{(m+2)^{\frac{1}{\alpha}} x^{\frac{1}{m+1}}}^{\infty}\right) \overline{F}_{\Pi_m}\left(\frac{x}{y}\right) y^{\alpha-1} \exp\left\{-\left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\alpha}\right\} dy \\
&=: J_1 + J_2.
\end{aligned} \tag{6}$$

Nagrinėjame J_2:

$$\begin{aligned}
J_2 &= \frac{\alpha}{\lambda^{\alpha}} \int_{(m+2)x^{\frac{\alpha}{(m+1)}}}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{\lambda^{\alpha}} y^{\alpha}\right\} y^{\alpha-1} dy \quad [y^{\alpha} = z] \\
&= \frac{1}{\lambda^{\alpha}} \int_{(m+2)x^{\frac{\alpha}{(m+1)}}}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{\lambda^{\alpha}} z\right\} dz \\
&= \frac{1}{\lambda^{\alpha}} \int_{(m+2)x^{\frac{\alpha}{(m+1)}}}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{\lambda^{\alpha}}\left(\frac{m+\frac{3}{2}}{m+2} z + \frac{\frac{1}{2} z}{m+2}\right)\right\} dz \\
&\leq \frac{1}{\lambda^{\alpha}} \int_{(m+2)x^{\frac{\alpha}{(m+1)}}}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{\lambda^{\alpha}}\left(m + \frac{3}{2}\right) x^{\frac{\alpha}{m+1}} - \frac{1}{2\lambda\alpha} \cdot \frac{z}{m+2}\right\} dz \\
&\leq \frac{1}{\lambda^{\alpha}} \exp\left\{-\frac{1}{\lambda^{\alpha}}\left(m + \frac{3}{2}\right) x^{\frac{\alpha}{m+1}}\right\} \cdot C_{22} \\
&= o\left(x^{\frac{\alpha(m-2)}{2(m+1)}} \exp\left\{-\frac{1}{\lambda^{\alpha}}(m+1) x^{\frac{\alpha}{m+1}}\right\}\right),
\end{aligned}$$

čia C_{22} yra teigiama konstanta, priklausanti nuo λ, α ir m.

Remdamiesi (5) ir atlikdami kintamųjų pakeitimą $y = u^{\frac{1}{\alpha}} x^{\frac{1}{m+1}}$ turime:

$$\begin{aligned}
J_1 &= \frac{\alpha}{\lambda^\alpha} \int_0^{(m+2)^{\frac{1}{\alpha}} x^{\frac{1}{(m+1)}}} \overline{F}_{\Pi_m}\left(\frac{x}{y}\right) y^{\alpha-1} \exp\left\{-\left(\frac{y}{\lambda}\right)^\alpha\right\} dy \\
&= \frac{\alpha}{\lambda^\alpha} \int_0^{(m+2)^{\frac{1}{\alpha}} x^{\frac{1}{(m+1)}}} \frac{(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}}{\sqrt{m}} \lambda^{\frac{-\alpha(m-1)}{2}} \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{\alpha(m-1)}{2m}} \exp\left\{-m\lambda^{-\alpha}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{\alpha}{m}}\right\} \\
&\quad \times \left(1 + O_m\left(\frac{x}{y}\right)^{-\frac{\alpha}{m}}\right) y^{\alpha-1} \exp\left\{-\lambda^{-\alpha} y^\alpha\right\} dy \\
&= \alpha\lambda^{\frac{-\alpha(m+1)}{2}} \frac{(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}}{\sqrt{m}} x^{\frac{\alpha(m-1)}{2m}} \int_0^{(m+2)^{\frac{1}{\alpha}} x^{\frac{1}{(m+1)}}} y^{\frac{-\alpha(m-1)}{2m}+\alpha-1} \\
&\quad \times \exp\left\{-m\lambda^{-\alpha}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{\alpha}{m}} - \lambda^{-\alpha} y^\alpha\right\} \left(1 + O_m\left(\frac{x}{y}\right)^{-\frac{\alpha}{m}}\right) dy \\
&= \alpha\lambda^{\frac{-\alpha(m+1)}{2}} \frac{(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}}{\sqrt{m}} x^{\frac{\alpha(m-1)}{2m}} \int_0^{(m+2)^{\frac{1}{\alpha}} x^{\frac{1}{(m+1)}}} y^{\frac{\alpha(m+1)}{2m}-1} \\
&\quad \times \exp\left\{-\lambda^{-\alpha}\left(m\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{\alpha}{m}} + y^\alpha\right)\right\} \left(1 + O_m\left(\frac{x}{y}\right)^{-\frac{\alpha}{m}}\right) dy \\
&= \lambda^{\frac{-\alpha(m+1)}{2}} \frac{(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}}{\sqrt{m}} x^{\frac{\alpha}{2}} \int_0^{m+2} u^{\frac{1-m}{2m}} \\
&\quad \times \exp\left\{-\lambda^{-\alpha} x^{\frac{\alpha}{m+1}}\left(mu^{-\frac{1}{m}} + u\right)\right\} \left(1 + O_m\left(u^{\frac{1}{m}} x^{-\frac{\alpha}{m+1}}\right)\right) du \\
&\le \lambda^{\frac{-\alpha(m+1)}{2}} \frac{(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}}{\sqrt{m}} x^{\frac{\alpha}{2}} \left(1 + O_m\left(x^{-\frac{\alpha}{m+1}}\right)\right) \\
&\quad \times \left(\int_0^1 + \int_1^{m+2}\right) u^{\frac{1-2m}{2m}} \exp\left\{-\lambda^{-\alpha} x^{\frac{\alpha}{m+1}}\left(mu^{-\frac{1}{m}} + u\right)\right\} du \\
&=: J_{11} + J_{12}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Naudodamiesi 3.2. lema gauname, jog

$$\begin{aligned}
&\mu = 2, \quad \alpha = 1, \quad a_0 = \frac{m+1}{2m}, \quad b_0 = 1, \quad a_1 = -\frac{(m+1)(2m+1)}{6m^2}, \\
&b_1 = \frac{1-m}{2m}, \quad d_0 = \sqrt{\frac{m}{2(m+1)}}, \quad d_1 = \frac{m+5}{6(m+1)}.
\end{aligned}$$

Todėl integralui J_{12} turime:

$$\begin{aligned}
J_{12} &= \lambda^{\frac{-\alpha(m+1)}{2}} \frac{(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}}{\sqrt{m}} x^{\frac{\alpha}{2}} \left(1 + O_m\left(x^{-\frac{\alpha}{m+1}}\right)\right) \int_1^{m+2} u^{\frac{1-2m}{2m}} \exp\left\{-\lambda^{-\alpha} x^{\frac{\alpha}{m+1}}\left(mu^{-\frac{1}{m}} + u\right)\right\} du \\
&= \lambda^{\frac{-\alpha(m+1)}{2}} \frac{(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}}{\sqrt{m}} x^{\frac{\alpha}{2}} \left(1 + O_m\left(x^{-\frac{\alpha}{m+1}}\right)\right) \exp\left\{-\lambda^{-\alpha} x^{\frac{\alpha}{m+1}}(m+1)\right\} \\
&\quad \times \left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{m}{2(m+1)}}\left(\lambda^{-\alpha} x^{\frac{\alpha}{m+1}}\right)^{-\frac{1}{2}} + \Gamma(1)\left(\frac{m+5}{6(m+1)}\right)\left(\lambda^{-\alpha} x^{\frac{\alpha}{m+1}}\right)^{-1} + O\left(x^{-\frac{3\alpha}{2(m+1)}}\right)\right),
\end{aligned}$$

nes

$$mu^{-\frac{1}{m}} + u|_{u=1} = m+1,$$

$$u + mu^{-\frac{1}{m}} = m+1+\sum_{k=0}^{N}(-1)^k\frac{\prod_{l=1}^{k+1}(1+lm)}{(k+2)!m^{k+1}}(u-1)^{k+2}+o\left((u-1)^{N+2}\right)$$

ir

$$u^{\frac{1-m}{2m}} = 1+\sum_{k=1}^{N}(-1)^k\frac{\prod_{l=1}^{k}((2l-1)m-1)}{k!(2m)^k}(u-1)^k+o\left((u-1)^N\right)$$

visiems $N \geq 1$ dėl Teiloro formulės.

Norint suskaičiuoti J_{11}, atliekame kintamųjų pakeitimą $u = \frac{1}{v}$:

$$\begin{aligned} J_{11} &= \lambda^{\frac{-\alpha(m+1)}{2}}\frac{(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}}{\sqrt{m}}x^{\frac{\alpha}{2}}\left(1+O_m\left(x^{-\frac{\alpha}{m+1}}\right)\right)\int_0^1 u^{\frac{1-2m}{2m}}\exp\left\{-\lambda^{-\alpha}x^{\frac{\alpha}{m+1}}\left(mu^{-\frac{1}{m}}+u\right)\right\}du \\ &= \lambda^{\frac{-\alpha(m+1)}{2}}\frac{(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}}{\sqrt{m}}x^{\frac{\alpha}{2}}\left(1+O_m\left(x^{-\frac{\alpha}{m+1}}\right)\right)\int_1^\infty v^{-\frac{3m+1}{2m}}\exp\left\{-\lambda^{-\alpha}x^{\frac{\alpha}{m+1}}\left(mv^{\frac{1}{m}}+\frac{1}{v}\right)\right\}dv. \end{aligned}$$

Tada pasinaudojus 3.2. lema gauname, jog

$$\begin{aligned} &\mu = 2, \quad \alpha = 1, \quad a_0 = \frac{m+1}{2m}, \quad b_0 = 1, \quad a_1 = -\frac{(4m-1)(m+1)}{6m^2}, \\ &b_1 = -\frac{3m+1}{2m}, \quad d_0 = \sqrt{\frac{m}{2(m+1)}}, \quad d_1 = -\frac{m+5}{6(m+1)}. \end{aligned}$$

Vadinasi,

$$\begin{aligned} J_{11} = {} & \lambda^{\frac{-\alpha(m+1)}{2}}\frac{(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}}{\sqrt{m}}x^{\frac{\alpha}{2}}\left(1+O_m\left(x^{-\frac{\alpha}{m+1}}\right)\right)\exp\left\{-\lambda^{-\alpha}x^{\frac{\alpha}{m+1}}(m+1)\right\} \\ & \times\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{m}{2(m+1)}}\left(\lambda^{-\alpha}x^{\frac{\alpha}{m+1}}\right)^{-\frac{1}{2}}+\Gamma(1)\left(-\frac{m+5}{6(m+1)}\right)\left(\lambda^{-\alpha}x^{\frac{\alpha}{m+1}}\right)^{-1}+O\left(x^{-\frac{3\alpha}{2(m+1)}}\right)\right), \end{aligned}$$

nes

$$mv^{\frac{1}{m}} + \frac{1}{v}|_{v=1} = m+1,$$

$$\frac{1}{v} + mv^{\frac{1}{m}} = m+1+\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{\prod_{l=1}^{k+1}(1-lm)}{(k+2)!m^{k+1}}+(-1)^k\right)(v-1)^{k+2}+o\left((v-1)^{N+2}\right)$$

ir

$$v^{-\frac{3m+1}{2m}} = 1+\sum_{k=1}^{N}\frac{(-1)^k\prod_{l=1}^{k}((2l+1)m+1)}{k!(2m)^k}(v-1)^k+o\left((v-1)^N\right),$$

su kiekvienu $N \geq 1$ dėl Teiloro formulės.

J_{11}, J_{12} išraiškas įstatome į (7) norint gauti J_1. Tada pagal (6) turime:

$$\overline{F}_{\Pi_{m+1}}(x) = \frac{(2\pi)^{\frac{m}{2}}}{\sqrt{m+1}}\lambda^{-\alpha(\frac{m}{2})}x^{\alpha\left(\frac{m}{2(m+1)}\right)}\exp\left\{-(m+1)\lambda^{-\alpha}x^{\frac{\alpha}{m+1}}\right\}(1+O_m(x^{-\frac{\alpha}{m+1}})).$$

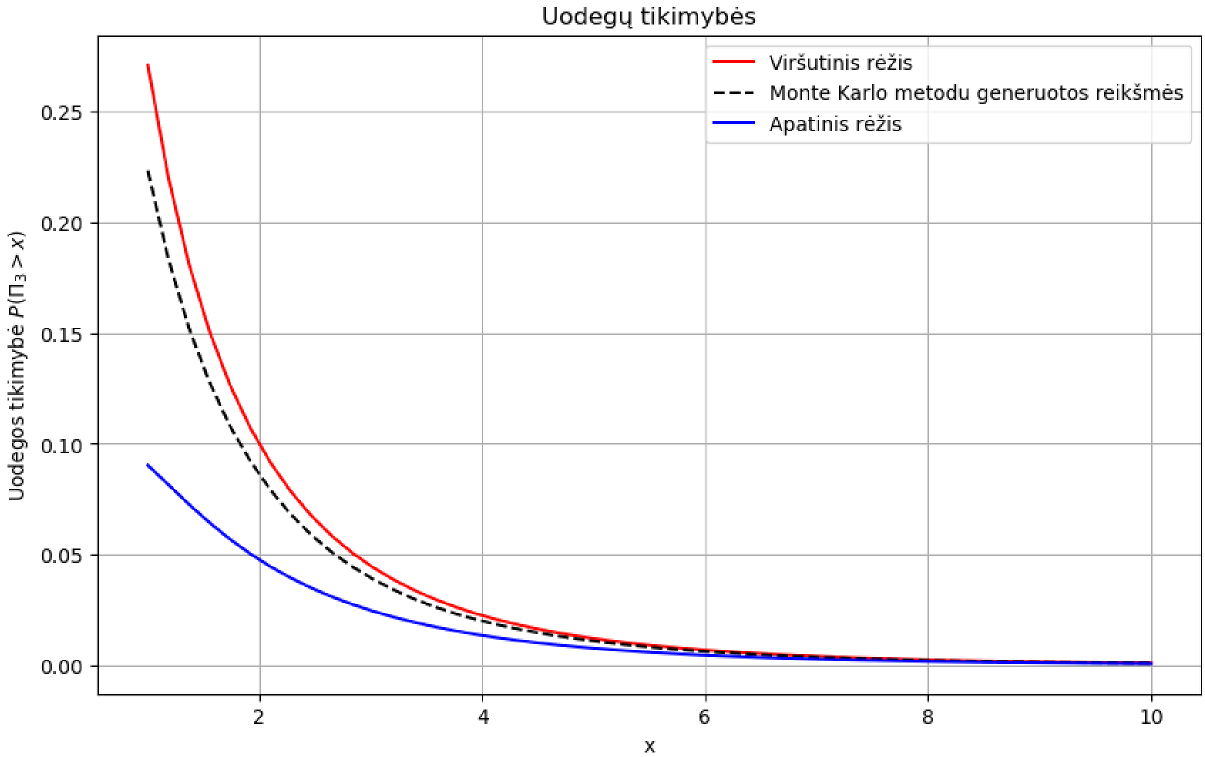
Šis rezultatas parodo, jog išraiška yra teisinga, kai $n = m+1$. Remiantis matematinės indukcijos principu, išraiška yra teisinga, kai n yra bet kuris natūralusis skaičius.

4 Gautų teorinių rezultatų iliustracija

Šiame skyriuje palyginsime gautus teorinius uodegos tikimybės rezultatus su uodegos tikimybėmis, generuojamomis Monte Karlo metodu.

Tegul Π_3 yra trijų nepriklausomų atsitiktinių dydžių ξ_1, ξ_2, ξ_3, pasiskirsčiusių pagal Weibull dėsnį su parametrais $\lambda = 1$, $\alpha = \frac{3}{2}$, sandauga. Tuomet, pagal teoremą 3.1., egzistuoja teigiamos konstantos D_1 ir D_2, tokios, kad su $x \geq D_2$:

$$\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\sqrt{x} \cdot e^{-3\sqrt{x}}\left(1 - \frac{D_1}{\sqrt{x}}\right) \leq \mathbb{P}\left(\prod_3 > x\right) \leq \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\sqrt{x} \cdot e^{-3\sqrt{x}}\left(1 + \frac{D_1}{\sqrt{x}}\right). \tag{8}$$



1 pav. Uodegos tikimybės Π_3 asimptotiniai rėžiai ir Monte Karlo būdu generuotos reikšmės

Viršuje (1 pav.) pateikiamos Monte Karlo būdu generuotos uodegos tikimybės bei uodegos tikimybės režiai. Iš iliustracijos (1 pav.) matome, kad nelygybė (8) teisinga su skirtingais konstantų D_1 ir D_2 rinkiniais. Pavyzdžiui, galima parinkti $D_1 = 0.5$ ir $D_2 = 1$.

Matome, jog Monte Karlo būdu generuotos reikšmės patenka tarp viršutinio ir apatinio rėžio. Tai patvirtina šiame darbe išvestos Weibull skirstinių sandaugos uodegos asimptotinės formulės korektiškumą.

5 Išvados

Suformulavę ir įrodę 2.2. bei 3.1. teoremas, pastebime, jog dauginant Weibull skirstinius vėl gauname Weibull pavidalo skirstinį. Svarbu paminėti, jog kuo daugiau skirstinių dauginame, tuo jo uodega tampa sunkesnė. Pagal 3.1. teoremą turime:

$$\overline{F}_{\Pi_n}(x) = \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}} \lambda^{-\alpha(\frac{n-1}{2})} x^{\alpha(\frac{n-1}{2n})} \exp\Big\{-n\lambda^{-\alpha} x^{\frac{\alpha}{n}}\Big\}(1 + O_n(x^{-\frac{\alpha}{n}})).$$

Be to, kai $n \geq 2$ formulėje atsiranda nuo x priklausantis narys $x^{\alpha\left(\frac{n-1}{2n}\right)}$. Akivaizdu, jog:

$$x^{\alpha\left(\frac{n-1}{2n}\right)} \longrightarrow x^{\frac{\alpha}{2}}, \ kai\ n \longrightarrow \infty.$$

Tad šis narys dideliems x daro nedidelę įtaką uodegos sunkėjimui.

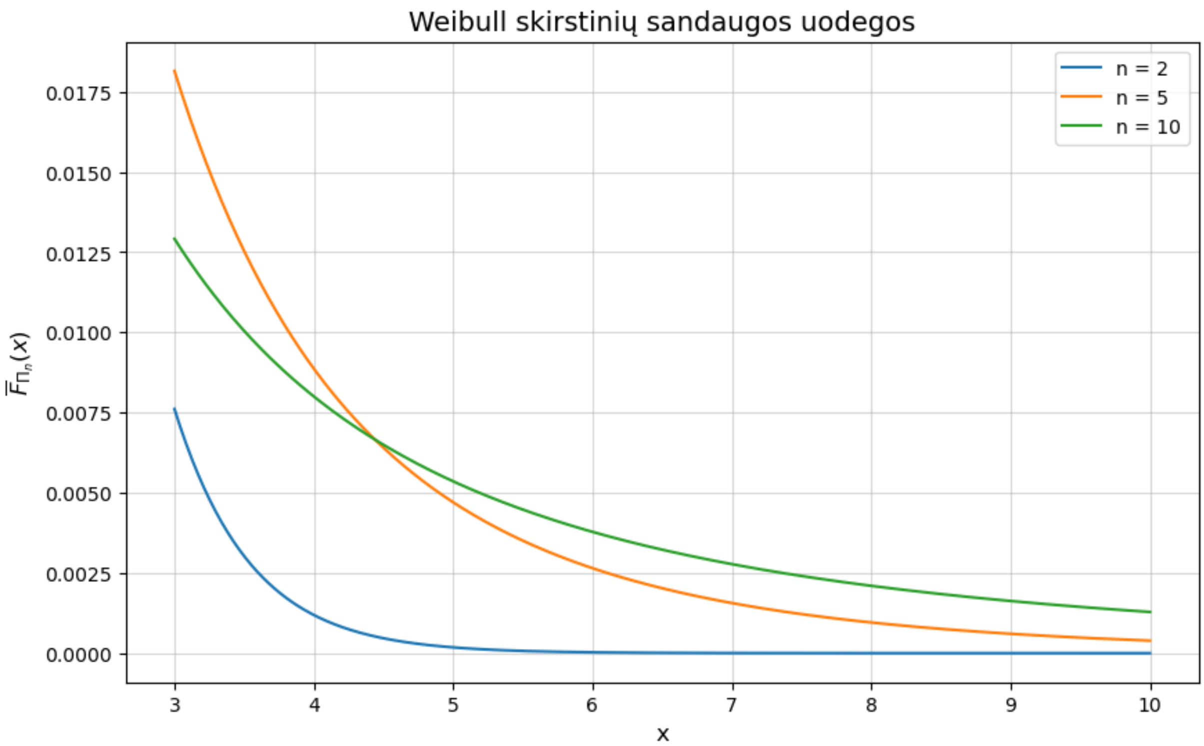
Nagrinėkime eksponentinį narį $\exp\Big\{-n\lambda^{-\alpha} x^{\frac{\alpha}{n}}\Big\}$. Pastebime, kad:

$$\frac{n+1}{\lambda^\alpha} x^{\frac{\alpha}{n+1}} < \frac{n}{\lambda^\alpha} x^{\frac{\alpha}{n}},$$

tai

$$x > \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{n(n+1)}{\alpha}}.$$

Tad akivaizdu, jog didėjant n sandaugos skirstinio uodega tampa sunkesnė.



2 pav. Weibull skirstinių sandaugos uodegos ($\lambda = 1$, $\alpha = 2$), kai $n = 2$, $n = 5$, $n = 10$.

2 pav. iliustruoja, jog dauginant didesnį kiekį skirstinių, gauname skirstinį su sunkesne uodega.

6 Literatūra

[1] Weibull, W.: The Statistical Theory of the Strength of Materials. *Ingeniors Vetenskaps Academy Handlingar(151).*, Stockholm: Generalstabens Litografiska Anstalts Förlag, 1939 m., p. 1–45.

[2] Weibull, W.: A Statistical Distribution Function of Wide Applicability. *Journal of Applied Mechanics 18*, 1951 m., p. 293-297.

[3] Wahed, A. S., Luong, T. M., Jeong, J. H.: A new generalization of Weibull distribution with application to a breast cancer data set. *Statistics in medicine, 28(16)*, 2009 m., p. 2077-2094.

[4] Li, Q. S., Fang, J. Q., Liu, D. K., Tang, J.: Failure probability prediction of concrete components. *Cement and concrete research, 33(10)*, 2003 m. p. 1631-1636.

[5] Sedliačková, Z., Pobočíková, I., Michalková, M., Jurášová, D.: (2022). Wind speed modeling using Weibull distribution: A case of Liptovský Mikuláš, Slovakia. *In MATEC Web of Conferences (Vol. 357, p. 08005)*, EDP Sciences., 2022 m.

[6] Arendarczyk, M., Debicki, K.:, Asymptotics of supremum distribution of a Gaussian process over a Weibullian time. *Bernoulli 17*, 2011 m., p. 194-210.

[7] Wong, R.: Asymptotic Approximations of Integrals. *Academic Press*, Boston, 1989 m.

[8] Hassan, N. J., Nasar, A. H., Hadad, J. M.: Distributions of the ratio and product of two independent Weibull and Lindley random variables. *Journal of Probability and Statistics, 2020(1)*, 2020 m., Article ID: 5693129.

[9] Nadarajah, S., Kotz, S.: On the product and ratio of Gamma and Weibull random variables. *Econometric Theory, 22(2)*, 2006 m., p. 338-344.

[10] Lomnicki, Z. A.: On the distribution of products of random variables. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological), 29(3)*, 1967 m., p. 513-524.

[11] Yacoub, M. D.: Simple precise approximations to Weibull sums. *IEEE communications letters*, 10(8), 2006 m., p. 614-616.

[12] García, F. D. A., Parente, F. R. A., Fraidenraich, G., Santos Filho, J. C. S.: Light exact expressions for the sum of Weibull random variables. *IEEE Wireless Communications Letters, 10(11)*, 2021 m., p. 2445-2449.