



VILNIAUS UNIVERSITETAS

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

FINANSŲ IR DRAUDIMO MATEMATIKOS MAGISTRO STUDIJŲ PROGRAMA

Magistro baigiamasis darbas

**Atsitiktinio efekto transformacija trimis reguliarumo
klasėms**

The Random Effect Transformation for Three Regularity Classes

Sylwia Lewkiewicz

Darbo vadovas : Prof., Dr. (HP) Jonas Šiaulys

**Vilnius
2024**

Padėka

Nuoširdžiai dėkoju Prof., Dr. (HP) Jonui Šiauliui už visapusišką pagalbą rašant magistro darbą, už kantrybę, įžvalgas ir kryptingą vadovavimą. Taip pat reiškiu didžiulę padėką visai Vilniaus universiteto, o ypač Matematikos ir informatikos fakulteto bendruomenei, už suteiktas žinias, profesionalų dėmesį ir galimybę praleisti studijų metus įdomiai, prasmingai ir naudingai.

Santrauka

Šiame darbe analizuojama kaip atsitiktinio efekto transformacija įtakoja pasiskirstymo funkcijų priklausomybę tam tikroms reguliarumo klasėms. Darbe nagrinėjamos trys reguliarumo klasės: sunkiauodegių pasiskirstymų klasė $\mathcal{H}$, pasiskirstymo funkcijų su nuosekliai kintančiomis uodegomis klasė $\mathcal{C}$ ir eksponentinio tipo klasė $\mathcal{L}_\gamma$, $\gamma > 0$. Taikoma atsitiktinio efekto transformacija pirminėms šių klasių pasiskirstymo funkcijoms ir tiriama, ar gautoji pasiskirstymo funkcija išlieka toje pačioje klasėje. Nustatyta, jog atsitiktinio efekto transformacija turi didžiausią įtaką eksponentinio tipo pasiskirstymo funkcijų uodegoms. Gauti teoriniai rezultatai iliustruojami keliais pavyzdžiais.

Raktiniai žodžiai: atsitiktinis efektas, pasiskirstymo funkcija, pasiskirstymo funkcijos transformacija, sunkiauodegė, nuosekliai kintanti uodega, eksponentinio tipo pasiskirstymo funkcija, reguliarumo klasės

Summary

This paper analyzes the influence of the random effect transformation on the regularity of distribution functions. The paper considers three regularity classes: heavy-tailed distributions (class $\mathcal{H}$), distributions with consistently varying tails (class $\mathcal{C}$), and exponential-like-tailed distributions (class $\mathcal{L}_\gamma, \gamma > 0$). We apply the random effect transformation to the primary distribution functions from these classes and investigate whether the resulting distribution function remains in the same class. We find that the random effect transformation has the greatest impact on exponential-like-tailed distributions. We illustrate the derived theoretical results with several examples.

Keywords: random effect, distribution function, distribution transformation, heavy tail, consistent variation, exponential-like-tailed distribution, regularity classes

Iliustracijų sąrašas

1	Santykiai tarp sunkiauodegių pasiskirstymo klasių.	11
2	Pasiskirstymo funkcijų uodegų $\overline{F}$ ir $\overline{F^{(Z)}}$ iš 1 Pavyzdžio palyginimas.	14
3	Pasiskirstymo funkcijų uodegų $\overline{F}$ ir $\overline{F^{(Z)}}$ iš 2 Pavyzdžio palyginimas.	16
4	Pasiskirstymo funkcijų uodegų $\overline{F}$ ir $\overline{F^{(Z)}}$ iš 3 Pavyzdžio palyginimas.	18
5	Pasiskirstymo funkcijų uodegų $\overline{F}$ ir $\overline{F^{(Z)}}$ iš 4 Pavyzdžio palyginimas.	19
6	Pasiskirstymo funkcijų uodegų $\overline{F}$ ir $\overline{F^{(Z)}}$ iš 5 Pavyzdžio palyginimas.	20

Turinys

Santrauka	3
Summary	4
Iliustracijų sąrašas	5
Įvadas	7
1. Reguliarumo klasės	10
2. Žinomi rezultatai	11
3. Pagrindiniai darbo rezultatai	12
3.1. Sunkiauodegės pasiskirstymo funkcijos transformacija	12
3.2. Nuosekliai kintančios pasiskirstymo funkcijos transformacija	12
3.3. Eksponentinio tipo pasiskirstymo funkcijos transformacija	16
4. Teoremų įrodymai	21
4.1. 1 Teoremos įrodymas	21
4.2. 2 Teoremos įrodymas	22
4.3. 3 Teoremos įrodymas	24
4.4. 4 Teoremos įrodymas	25
5. Išvados	28
Literatūra	29
1 priedas. Programos kodas	32

Ivadas

Atsitiktiniai dydžiai tai įrankiai, padedantys aprašyti ir suprasti atsitiktinius procesus draudimo, bankininkystės ar finansų srityse. Kitaip tariant, tai yra dydis, priklausantis nuo atsitiktinumo ir įgyjantis realias reikšmes. Jį galima aprašyti išmatuojama funkcija $X : \mathbf{W} \rightarrow E$, kur X yra atsitiktinis dydis, $\mathbf{W}$ - elementariųjų įvykių aibė, o $E \subset \mathbb{R}$ galimų šio atsitiktinio dydžio baigčių aibė. $\mathbf{W}$ turi priklausyti tikimybinei erdvei $(\mathbf{W}, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, kur $\mathbf{W}$ yra visų elementariųjų įvykių erdvė, $\mathcal{F}$ yra galimų įvykių σ -algebra, o $\mathbf{P}$ - tikimybių matas, apibrėžtas visiems duotos σ -algebros $\mathcal{F}$ elementams. Pasiskirstymo funkcija tai pagrindinė funkcija apibūdinanti atsitiktinio dydžio elgseną. Tarkime turime atsitiktinį dydį X . Šio atsitiktinio dydžio pasiskirstymo funkcija apibrėžiama formule:

$$F_X(x) := \mathbf{P}(w \in \mathbf{W} : X(w) \leq x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Yra gerai žinoma, kad bet kuri pasiskirstymo funkcija F turi šias savybes:

- $0 \leq F(x) \leq 1, \quad x \in \mathbb{R};$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1;$
- Funkcija $F(x)$ nemažėjanti, t.y. $F(x_1) \leq F(x_2)$ jeigu $x_1 < x_2$;
- Funkcija $F(x)$ tolydi iš dešinės $\mathbb{R}$ skaičių aibėje, t.y. $\lim_{x \rightarrow a+} F(x) = F(a)$ visiems $a \in \mathbb{R}$.

Diskrečių ir tolydžių atsitiktinių dydžių pasiskirstymo funkcijų išraiškos skiriasi. Kai atsitiktinis dydis X yra diskretus, jo pasiskirstymo funkcija užrašoma taip:

$$F_X(x) = \sum_{x_i \leq x} \mathbb{P}(X = x_i), \quad x \in \mathbb{R},$$

kur $\{x_i, i \in I\}$ yra baigtinė arba suskaičiuojama galimų X reikšmių aibė.

Atsitiktinis dydis X vadinamas absoliučiai tolydžiu, jei jo pasiskirstymo funkcija yra absoliučiai tolydi. Tokiu atveju pasiskirstymo funkcija F_X užrašoma tokia forma:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

kur f_X - integruojama neneigiama tankio funkcija.

Kartu su pasiskirstymo funkcija F taip pat šiame darbe nagrinėjama pasiskirstymo funkcijos uodega $\overline{F} = 1 - F$. Uodegos funkcijos daugiausia naudojamos draudimo verslo analizėje. Ypač gyvybės draudime uodegos funkcija vadinama išgyvenamumo funkcija. Ši funkcija matuoja tikimybę, kad asmuo išgyvens bent x metų:

$$\overline{F}_T(x) = \mathbb{P}(T > x),$$

kur T yra absoliučiai tolydus, neigiamų reikšmių neįgyjantis atsitiktinis dydis, atspindintis asmens gyvenimo trukmę. Pastebima, kad gyvybės draudime išgyvenamumo funkcija paprastai laikoma absoliučiai tolydžia, nes asmens gyvenimo trukmė T gali įgyti bet kokią teigiamą reikšmę [31]. Šiame

darbe funkcija $\overline{F}_X$ vadinama pasiskirstymo funkcijos F_X uodega arba atsitiktinio dydžio X uodegos funkcija.

Įvairios uodegų funkcijų analizės yra įdomios ir svarbios, ypač dirbantiems gyvybės draudimo srityje, nes uodegos funkcija padeda aprašyti mirtingumą ir turi didelę reikšmę vertinant draudimo įmokas, atsargas, bei kitas pagrindines gyvybės draudimo verslo charakteristikas. Išsamų aprašymą, kaip išgyvenamumo funkcijos naudojamos kitoms aktuarinėms charakteristikoms išvesti, galima rasti knygoje [5, 8, 12, 27, 40, 42].

Ne gyvybės draudime uodegos funkcija paprastai aprašo tikimybę, kad būsimas nuostolis viršys tam tikrą vertę. Ne gyvybės draudime svarbu nustatyti, kaip elgiasi bendrojo nuostolio uodega, nes nuo jos priklauso rizikos proceso, aprašančio veiklą, išlikimo ar žlugimo tikimybė. Išsamų tokio sąryšio aprašymą galima rasti knygoje [3, 10, 16, 25, 33, 37].

Dėl aprašytų priežasčių yra nagrinėjamos įvairios pasiskirstymo funkcijų ir uodegų funkcijų transformacijos. Šiame darbe nagrinėjamos naujos uodegos funkcijos, gautos taikant specialią transformaciją su atsitiktiniu efektu Z . Šį atsitiktinį dydį su pasiskirstymo funkcija F_Z galima apibrėžti kitoje tikimybinėje erdvėje nei pirminis atsitiktinis dydis X su pasiskirstymo funkcija $F = F_X$. Pažymėkime šią naują erdvę kaip $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Atsitiktinio efekto transformacijos idėją pirmą kartą pasiūlė Vaupel [39], o vėliau ją analizavo, be kitų, Manton ir kiti [23, 24], Yashin ir kiti [14], Moger ir Aalen [26], Hougaard [13], ir Pitacco [29, 30].

Šią uodegos funkciją su atsitiktinio efekto transformacija apibrėžia lygybė:

$$\overline{F^{(Z)}}(x) := \mathbb{E}((\overline{F}(x))^Z), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pasiskirstymo funkcija šiai uodegos funkcijai yra

$$F^{(Z)}(x) = 1 - \overline{F^{(Z)}}(x) = 1 - \mathbb{E}((\overline{F}(x))^Z), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Transformuota pasiskirstymo funkcija taip pat yra pasiskirstymo funkcija, kaip parodyta [31]. Be to, pagal 1 Teoremą iš [38], transformuota pasiskirstymo funkcija $F^{(Z)}$ yra absoliučiai tolydi, jei pirminė pasiskirstymo funkcija F taip pat yra absoliučiai tolydi. Šie rezultatai rodo, kad transformuota pasiskirstymo funkcija gali būti nagrinėjama reguliarumo atžvilgiu.

Atsitiktinio efekto transformacija yra tiesioginė transformacijos, apibrėžtos atsitiktinai sustabdyto minimumo, generalizacija. Tiksliau, jei atsitiktinis dydis Z yra teigiamas sveikasis skaičius ir nepriklauso nuo nepriklausomai ir vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių $\{X_1, X_2, \dots\}$ su pasiskirstymo funkcija F , tuomet atsitiktinai sustabdyto minimumo uodegos funkcija turi tokią išraišką:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\min\{X_1, X_2, \dots, X_Z\} > x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\min\{X_1, X_2, \dots, X_n\} > x) \mathbb{P}(Z = n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (\overline{F}(x))^n \mathbb{P}(Z = n) \\ &= \mathbb{E}((\overline{F}(x))^Z) \end{aligned}$$

Straipsniuose [15, 18, 20, 32, 36] yra išvesti įvairūs rezultatai šiam konkrečiam atsitiktinio efekto transformacijos atvejui.

Kaip matoma iš 3. skyriuje pateiktų rezultatų, dažnai funkcijos $F^{(Z)}$ reguliarumas priklauso nuo atsitiktinio dydžio Z atramos. Objekto atrama paprastai reiškia vietų aibę, kuriose šis objektas nėra nulinis. *Tiksliau, jei $Z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ yra atsitiktinis dydis tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, tada atsitiktinio dydžio Z atrama $\text{supp}\{Z\}$ yra mažiausia uždara aibė R tokia, kad $\mathbb{P}(Z \in R) = 1$.*

Toliau šis darbas pateikiamas tokia tvarka. 1. skyriuje pristatomos reguliarumo klasės. Vėliau, 2. skyriuje, aptariami kai kurie jau žinomi rezultatai. 3. skyriuje pateikiami pagrindiniai šio darbo rezultatai kartu su gautų rezultatų pavyzdžiais ir iliustracijomis. Pagrindinių rezultatų įrodymai pateikiami 4.1., 4.2., 4.3. ir 4.4. skyriuose. Paskutinis, 5. skyrius, pristato visos analizės išvadas.

1. Reguliarumo klasės

Paskirstymo funkcijos pagal jų uodegos elgseną skirstomos į įvairias grupes, paprastai vadinamas reguliarumo klasėmis. Šiame darbe aprašomos ir nagrinėjamos kelios tokios klasės. Gana išsamų reguliarumo klasių ir jų savybių aprašymą galima rasti knygoje [21]. Šiame skyriuje pristatomos klasės: $\mathcal{H}$, $\mathcal{L}_\gamma$ su $\gamma > 0$, $\mathcal{OL}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{C}$ ir $\mathcal{R}_\alpha$ su $\alpha \geq 0$. Toliau pateikti šių klasių apibrėžimai.

- Pasiskirstymo funkcija F yra sunkiauodegė, t.y. $F \in \mathcal{H}$, jei kiekvienam fiksuotam $\delta > 0$ turime

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\delta x} dF(x) = \infty.$$

Esant priešingai situacijai sakoma, kad pasiskirstymo funkcija F yra lengvauodegė, t.y. $F \in \mathcal{H}^c$.

- Pasiskirstymo funkcija F priklauso eksponentinio tipo klasei, su $\gamma > 0$, t.y. $F \in \mathcal{L}_\gamma$, jei

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} = e^{-\gamma y} \quad \text{kiekvienam } y > 0.$$

- Pasiskirstymo funkcija F priklauso klasei $\mathcal{OL}$, jei bet kuriam $y > 0$ turime

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} < \infty.$$

- Pasiskirstymo funkcija F yra subeksponentinė, t.y. $F \in \mathcal{S}$ jei

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F^+ * F^+}(x)}{\overline{F^+}(x)} = 2,$$

kur $F^+(x) = F(x) \mathbb{I}_{[0, \infty)}(x)$.

- Pasiskirstymo funkcija F yra ilgauodegė, t.y. $F \in \mathcal{L}$, jei visiems $y > 0$,

$$\overline{F}(x-y) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \overline{F}(x).$$

- Pasiskirstymo funkcija F turi dominuojančiai kintančią uodegą, t.y. $F \in \mathcal{D}$, jei kuriam nors $y \in (0, 1)$

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} < \infty.$$

- Pasiskirstymo funkcija F turi nuosekliai kintančią uodegą, t.y. $F \in \mathcal{C}$, jei

$$\lim_{y \uparrow 1} \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} = 1.$$

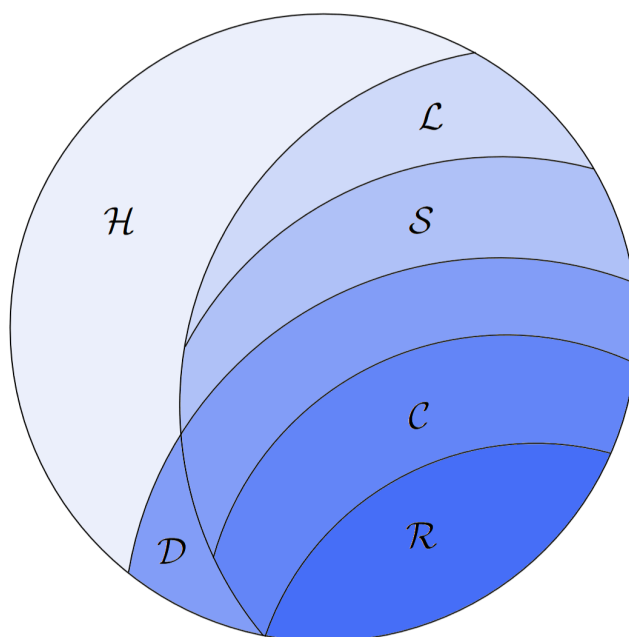
- Pasiskirstymo funkcija F turi reguliariai kintančią uodegą su $\alpha \geq 0$, t.y. $F \in \mathcal{R}_\alpha$, jei kuriam nors $y > 0$,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} = y^{-\alpha}.$$

Žinoma (žiūrėti [10, 21]), jog šios klasės tenkina sąryšius:

$$\mathcal{R} := \bigcup_{\alpha \geq 0} \mathcal{R}_\alpha \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{L} \cap \mathcal{D} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{H}, \quad \mathcal{D} \subset \mathcal{H}.$$

Šie santykiai pavaizduoti 1 paveikslėlyje.



1 pav. Santykiai tarp sunkiauodegių pasiskirstymo klasių.

Taip pat aukščiau pateikti apibrėžimai rodo, kad

$$\mathcal{L} \subset \mathcal{OL}, \quad \bigcup_{\gamma > 0} \mathcal{L}_\gamma \subset \mathcal{OL}.$$

2. Žinomi rezultatai

Straipsnyje [31], atsitiktinio efekto įtaka buvo analizuojama keturiose reguliarumo klasėse: funkcijų su reguliariai kintančia uodega klasėje $\mathcal{R}$, funkcijų su dominuojančiai kintančia uodega klasėje $\mathcal{D}$, ilgauodegių funkcijų klasėje $\mathcal{L}$ ir $\mathcal{O}$ -eksponentinėje klasėje $\mathcal{OL}$. Atsitiktinio efekto transformacija buvo taikoma pirminėms pasiskirstymo funkcijoms iš kiekvienos nagrinėjamos klasės ir gautos pasiskirstymo funkcijos buvo nagrinėjamos siekiant išsiaiškinti, ar jos toliau priklauso tai pačiai klasei. Nustatyta, jog tokia transformacija turi didžiausį poveikį reguliariai kintančioms pasiskirstymo funkcijoms. Tai apibūdinta (ir įrodyta) [31] straipsnio 1 Teoremoje:

Tegul F priklauso klasei $\mathcal{R}_\alpha$ su $\alpha \geq 0$ ir imkime teigiamą atsitiktinį dydį Z su didžiausiu apatiniu režiu $b > 0$, t.y.

$$\mathbb{P}(Z \geq b) = 1, \quad \mathbb{P}(Z \geq b + \delta) < 1$$

kiekvienam $\delta > 0$. Tada transformuota pasiskirstymo funkcija pereina į klasę $\mathcal{R}_{b\alpha}$.

Toliau [31] straipsnyje parodyta, jog pasiskirstymo funkcijoms iš $\mathcal{D}$, $\mathcal{L}$, ir $\mathcal{OL}$ klasių, transformacija palieka pasiskirstymo funkcijas tose pačiose klasėse tol, kol atsitiktinis dydis, dėka kurio veikia atsitiktinis efektas, yra griežtai teigiamas.

3. Pagrindiniai darbo rezultatai

Šiame darbe nagrinėjamos trys klasės: $\mathcal{H}$, $\mathcal{C}$ ir $\mathcal{L}_\gamma$ su $\gamma > 0$. Remiantis straipsnio [31] rezultais, kartais pasiskirstymo funkcija su atsitiktiniu efektu išsaugo originalios funkcijos savybes. Tačiau kartais, atsitiktinis efektas daugiau ar mažiau gali paveikti pasiskirstymo funkcijos reguliarumą nusakančias savybes. Pokyčiai gali priklausyti nuo nagrinėjamos reguliarumo klasės bet taip pat ir nuo atsitiktinio efekto savybių. Šiame skyriuje parodoma pagrindinius darbo rezultatus, kelias išvadas bei pavyzdžius.

3.1. Sunkiauodegės pasiskirstymo funkcijos transformacija

Šiame skyriuje nustatoma, kaip atsitiktinis efektas veikia pasiskirstymo funkcijos uodegą, priklausančią sunkiauodegių pasiskirstymo funkcijų klasei $\mathcal{H}$. Žemiau pateikiama teorema nusako, jog sunkioji uodega, paveikta atsitiktiniu efektu, išlaiko savo sunkumą.

1 Teorema. *Sakykime pasiskirstymo funkcija F priklauso sunkiauodegių funkcijų klasei $\mathcal{H}$. Tegul Z - teigiamas atsitiktinis dydis. Tada transformuota pasiskirstymo funkcija $F^{(Z)}$ irgi priklauso klasei $\mathcal{H}$.*

Šios teoremos įrodymą galima rasti 4.1. skyriuje. Analogiškas teiginys negalioja lengvauodegių funkcijų klasei $\mathcal{H}^c$, kadangi egzistuoja pasiskirstymo funkcija F priklausanči klasei $\mathcal{H}^c$ ir teigiamas atsitiktinis laipsnis Z kuriam $F^{(Z)} \notin \mathcal{H}^c$. Tai matoma iš esančios žemiau 3 Teoremos ir pavyzdžių 3.3. skyrelyje.

3.2. Nuosekliai kintančios pasiskirstymo funkcijos transformacija

Šiame skyriuje nustatoma, kaip atsitiktinis efektas veikia nuosekliai kintančios pasiskirstymo funkcijos uodegą. Žemiau pateikiama teorema nurodo, jog nuosekliai kintanti pasiskirstymo funkcija, paveikta atsitiktiniu efektu, pasilieka toje pačioje klasėje $\mathcal{C}$.

2 Teorema. *Sakykime F yra pasiskirstymo funkcija priklausanči klasei $\mathcal{C}$. Tada transformuota pasiskirstymo funkcija $F^{(Z)}$ irgi priklauso klasei $\mathcal{C}$ bet kokiam teigiamam atsitiktiniam dydžiui Z .*

Šios teoremos įrodymą galima rasti 4.2. skyriuje. Šiame skyrelyje dar pristatomi du pavyzdžiai iliustruojantys kaip atsitiktinis efektas veikia nuosekliai kintančią pasiskirstymo funkciją.

1 Pavyzdys. Imkime Cai-Tang atsitiktinį dydį (žiūrėti [6]) su parametru $p \in (0,1)$:

$$X = (1 + Y)2^N,$$

kur Y ir N yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, Y tolygiai pasiskirstęs intervale $[0,1]$, ir N geometrinis atsitiktinis dydis kuriam

$$\mathbb{P}(N = k) = (1 - p)p^k, \quad k = 0, 1, \dots$$

Tegul F - atsitiktinio dydžio X pasiskirstymo funkcija. Kai $x \geq 1$, atsitiktinio dydžio X pasiskirstymo funkcija atrodo štai taip:

$$\begin{aligned} F(x) &= (1 - p) \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(Y \leq \frac{x}{2^k} - 1\right) p^k \\ &= (1 - p) \sum_{k=0}^{\infty} p^k \left(\left(\frac{x}{2^k} - 1\right) \mathbb{I}_{[0,1)} \left(\frac{x}{2^k} - 1\right) + \mathbb{I}_{[1,\infty)} \left(\frac{x}{2^k} - 1\right) \right) \\ &= (1 - p) \left(\frac{x}{2^{\lfloor \log_2 x \rfloor}} - 1 \right) p^{\lfloor \log_2 x \rfloor} + 1 - p^{\lfloor \log_2 x \rfloor}, \end{aligned}$$

taip pat žiūrėti lygybę (6) straipsnyje [9]. Pasiskirstymo funkcijos uodega, kai $x \geq 1$:

$$\begin{aligned} \overline{F}(x) &= 1 - F(x) = 1 - (1 - p) \left(\frac{x}{2^{\lfloor \log_2 x \rfloor}} - 1 \right) p^{\lfloor \log_2 x \rfloor} - 1 + p^{\lfloor \log_2 x \rfloor} \\ &= 1 - (1 - p) \left(\frac{x}{2^{\lfloor \log_2 x \rfloor}} \right) p^{\lfloor \log_2 x \rfloor} + (1 - p) p^{\lfloor \log_2 x \rfloor} - 1 + p^{\lfloor \log_2 x \rfloor} \\ &= p^{\lfloor \log_2 x \rfloor} - p p^{\lfloor \log_2 x \rfloor} + p^{\lfloor \log_2 x \rfloor} - (1 - p) \left(\frac{x}{2^{\lfloor \log_2 x \rfloor}} \right) p^{\lfloor \log_2 x \rfloor} \\ &= 2p^{\lfloor \log_2 x \rfloor} - p p^{\lfloor \log_2 x \rfloor} - (1 - p) \left(\frac{x}{2^{\lfloor \log_2 x \rfloor}} \right) p^{\lfloor \log_2 x \rfloor} \\ &= p^{\lfloor \log_2 x \rfloor} \left(2 - p - (1 - p) \frac{x}{2^{\lfloor \log_2 x \rfloor}} \right). \end{aligned}$$

Pagal skaičiavimus straipsnio [6] 124 puslapyje, pasiskirstymo funkcija F priklauso klasei $\mathcal{C}$. Būtent kai $2^n < x \leq 2^{n+1}$ ir $y \in (\frac{1}{2}, 1)$, turime, kad $\lfloor \log_2 x \rfloor = \lfloor \log_2 xy \rfloor = n$, todėl

$$\begin{aligned} \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} &= \frac{2 - p - (1 - p) \frac{xy}{2^n}}{2 - p - (1 - p) \frac{x}{2^n}} \\ &= \frac{2 - p - (1 - p) \frac{x}{2^n} + (1 - y)(1 - p) \frac{x}{2^n}}{2 - p - (1 - p) \frac{x}{2^n}} \\ &= \frac{2 - p - (1 - p) \frac{x}{2^n}}{2 - p - (1 - p) \frac{x}{2^n}} + \frac{(1 - y)(1 - p) \frac{x}{2^n}}{2 - p - (1 - p) \frac{x}{2^n}} \\ &= 1 + \frac{(1 - y)(1 - p) \frac{x}{2^n}}{2 - p - (1 - p) \frac{x}{2^n}} \\ &\leq 1 + \frac{2(1 - y)(1 - p)}{p}. \end{aligned}$$

Paskutinis įvertis parodo, jog

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} \leq 1 + \frac{2(1-y)(1-p)}{p},$$

kiekvienam $y \in (\frac{1}{2}, 1)$. Atitinkamai, pagal klasės $\mathcal{C}$ apibrėžimą, pasiskirstymo funkcija $F \in \mathcal{C}$.

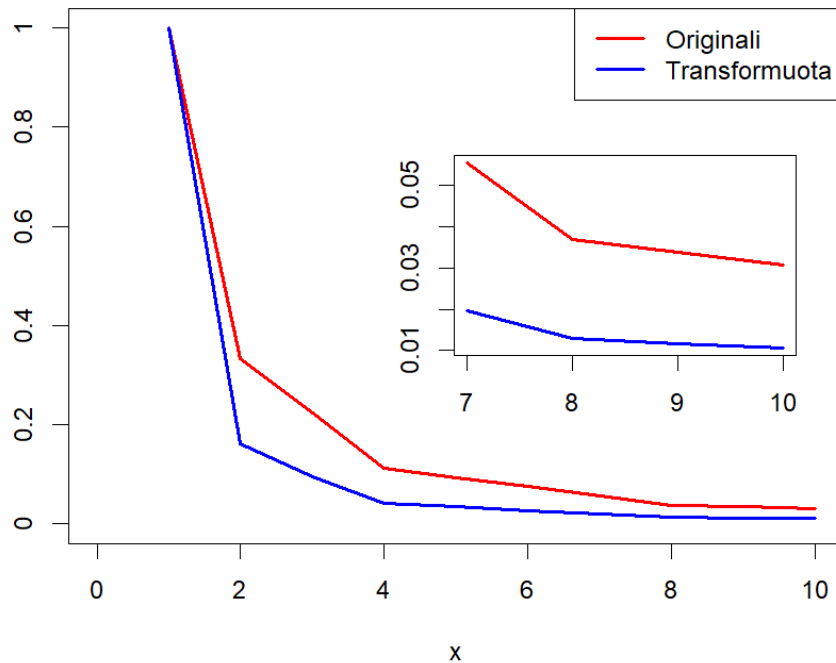
Imkime atsitiktinį dydį Z kuris įgyja reikšmes iš aibės $\{1, 2, 3\}$ su tikimybėmis

$$\mathbb{P}(Z = 1) = \mathbb{P}(Z = 2) = \mathbb{P}(Z = 3) = \frac{1}{3}.$$

Tada transformuotos pasiskirstymo funkcijos uodega:

$$\begin{aligned} \overline{F^{(Z)}}(x) &= \mathbb{E}(\overline{F}(x))^Z = \frac{1}{3} ((\overline{F}(x))^1 + (\overline{F}(x))^2 + (\overline{F}(x))^3) \\ &= \frac{p^{\lfloor \log_2 x \rfloor}}{3} \left(2 - p - (1-p) \frac{x}{2^{\lfloor \log_2 x \rfloor}} \right) \\ &\times \left(1 + p^{\lfloor \log_2 x \rfloor} \left(2 - p - (1-p) \frac{x}{2^{\lfloor \log_2 x \rfloor}} \right) + p^{2\lfloor \log_2 x \rfloor} \left(2 - p - (1-p) \frac{x}{2^{\lfloor \log_2 x \rfloor}} \right)^2 \right). \end{aligned}$$

Pagal 2 Teoremą, pasiskirstymo funkcija $F^{(Z)} = 1 - \overline{F^{(Z)}}$ priklauso klasei $\mathcal{C}$, taip pat kaip ir originali pasiskirstymo funkcija F . Kaip skiriasi $\overline{F}$ ir $\overline{F^{(Z)}}$, kai $p = \frac{1}{3}$, parodoma 2 paveikslėlyje.



2 pav. Pasiskirstymo funkcijų uodegų $\overline{F}$ ir $\overline{F^{(Z)}}$ iš 1 Pavyzdžio palyginimas.

Galima pastebėti, jog šioje situacijoje, pasiskirstymo funkcijos F uodega yra sunkesnė nei transformuotos pasiskirstymo funkcijos uodega $\overline{F^{(Z)}}$. Nepaisant skirtumų, abi funkcijos F ir $F^{(Z)}$ priklauso klasei $\mathcal{C}$.

2 Pavyzdys. Imkime Cauchy pasiskirstymą su parametrais $x_0 = 2, \gamma = 3$. Tokiu atveju pasiskirstymo funkcijos uodega lygi:

$$\overline{F}(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctan \left(\frac{x-2}{3} \right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pasiskirstymo funkcija

$$F(x) = 1 - \overline{F}(x) = \frac{1}{\pi} \arctan \left(\frac{x-2}{3} \right) + \frac{1}{2}$$

priklauso klasei $\mathcal{C}$, nes jos uodega tenkina klasės $\mathcal{C}$ apibrėžimo sąlygą:

$$\begin{aligned} \lim_{y \uparrow 1} \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} &= \lim_{y \uparrow 1} \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctan \left(\frac{xy-2}{3} \right)}{\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctan \left(\frac{x-2}{3} \right)} \\ &\stackrel{\mathcal{C}}{=} \lim_{y \uparrow 1} \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctan \left(\frac{xy-2}{3} \right) \right)'}{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctan \left(\frac{x-2}{3} \right) \right)'} \\ &= \lim_{y \uparrow 1} \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{-3y}{13\pi + \pi x^2 y^2 - 4xy\pi}}{\frac{-3}{13\pi + x^2 \pi - 4x\pi}} \\ &= \lim_{y \uparrow 1} \limsup_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-3y}{13\pi + \pi x^2 y^2 - 4xy\pi} \cdot \frac{13\pi + x^2 \pi - 4x\pi}{-3} \right) \\ &= \lim_{y \uparrow 1} \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{13y + x^2 y - 4xy}{13 + x^2 y^2 - 4xy} \\ &= \lim_{y \uparrow 1} \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{4}{x} + \frac{13}{x^2}}{y - \frac{4}{x} + \frac{13}{yx^2}} \\ &= \lim_{y \uparrow 1} \frac{1}{y} = 1. \end{aligned}$$

Antroje lygybėje taikoma Liopitalio taisyklė, kadangi gaunamas neapibrėžtumas $\frac{0}{0}$.

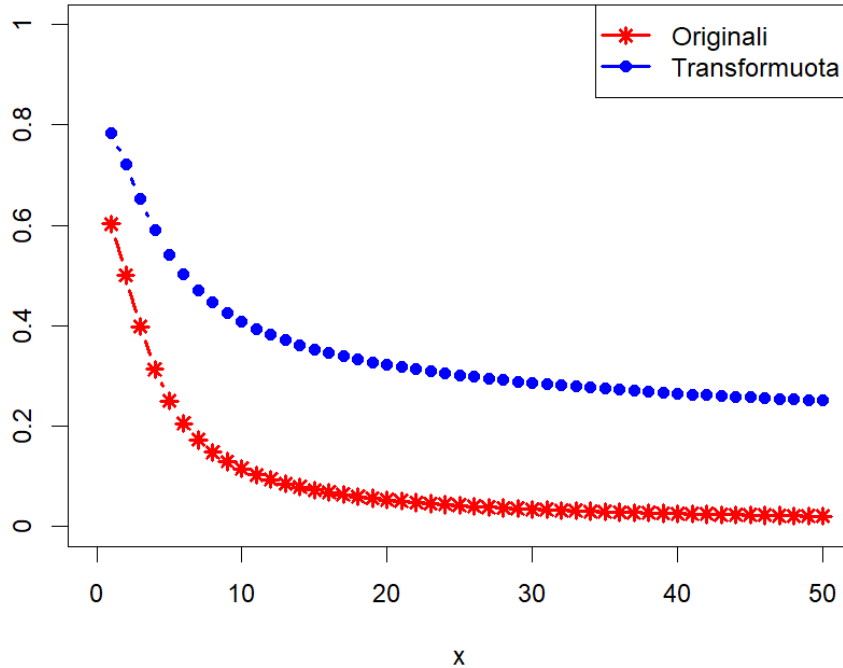
Imkime atsitiktinį dydį Z tolygiai pasiskirsčiusį intervale $[0,1]$. Tokio atsitiktinio dydžio tankio funkcija:

$$f_Z(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \\ 0, & x \notin [0,1] \end{cases}$$

Tada transformuotos pasiskirstymo funkcijos uodega:

$$\begin{aligned} \overline{F^{(Z)}}(x) &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctan \left(\frac{x-2}{3} \right) \right)^u du \\ &= \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctan \left(\frac{x-2}{3} \right) \right)^u}{\ln \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctan \left(\frac{x-2}{3} \right) \right)} \bigg|_0^1 \\ &= \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctan \left(\frac{x-2}{3} \right) \right)^1}{\ln \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctan \left(\frac{x-2}{3} \right) \right)} - \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctan \left(\frac{x-2}{3} \right) \right)^0}{\ln \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctan \left(\frac{x-2}{3} \right) \right)} \\ &= \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctan \left(\frac{x-2}{3} \right) - 1}{\ln \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctan \left(\frac{x-2}{3} \right) \right)} = \frac{-\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan \left(\frac{x-2}{3} \right) \right)}{\ln \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctan \left(\frac{x-2}{3} \right) \right)}. \end{aligned}$$

Pagal 2 Teoremą, pasiskirstymo funkcija $F^{(Z)} = 1 - \overline{F^{(Z)}}$ priklauso klasei $\mathcal{C}$, taip pat kaip ir originali pasiskirstymo funkcija F . Kaip skiriasi $\overline{F}$ ir $\overline{F^{(Z)}}$ parodoma 3 paveikslėlyje.



3 pav. Pasiskirstymo funkcijų uodegų $\overline{F}$ ir $\overline{F^{(Z)}}$ iš 2 Pavyzdžio palyginimas.

Galima pastebėti, jog šioje situacijoje transformuotos pasiskirstymo funkcijos uodega $\overline{F^{(Z)}}$ yra sunkesnė nei uodega $\overline{F}$. Nepaisant to, pagal 2 Teoremą, abi funkcijos F ir $F^{(Z)}$ priklauso klasei $\mathcal{C}$.

3.3. Eksponentinio tipo pasiskirstymo funkcijos transformacija

Pagrindiniai teiginiai esantys žemiau parodo, jog klasė $\mathcal{L}_\gamma, \gamma > 0$ yra žymiai jautresnė nagrinėjamam atsitiktiniam efektui. 3 Teorema aprašo bendrąjį atvejį, kai pasiskirstymo funkcija priklausanti klasei $\mathcal{L}_\gamma, \gamma > 0$, paveikta atsitiktiniu efektu, pasilieka toje pačioje klasėje, tik pasikeičia klasės parametro vertė. 4 Teoremoje parodoma, jog konkrečios formos atsitiktinis efektas nuveda pasiskirstymo funkciją iš klasės $\mathcal{L}_\gamma, \gamma > 0$ į reguliariai kintančių funkcijų klasę $\mathcal{R}$. Šių Teoremų įrodymus galima rasti 4.3. ir 4.4. skyreliuose atitinkamai.

3 Teorema. Sakykime F yra pasiskirstymo funkcija iš klasės $\mathcal{L}_\gamma$ su parametru $\gamma > 0$. Tegul Z tai teigiamas atsitiktinis dydis su specialios formos atrama

$$\text{supp}\{Z\} = \{a\} \cup B,$$

kur $\inf\{B\} = b > a > 0$. Tada transformuota pasiskirstymo funkcija $F^{(Z)}$ priklauso klasei $\mathcal{L}_{\gamma a}$.

1 Išvada. Jeigu $F \in \mathcal{L}_\gamma, \gamma > 0$, ir Z tai teigiamas aritmetinis atsitiktinis dydis su $a = \min\{\text{supp}(Z)\}$, tada transformuota pasiskirstymo funkcija $F^{(Z)} \in \mathcal{L}_{\gamma a}$.

Įrodymas. Pagal išvados sąlygas,

$$\text{supp}\{Z\} = \{a, 2a, 3a, \dots\}$$

su tam tikru teigiamu a . Todėl

$$\text{supp}\{Z\} = \{a\} \cup A,$$

kur $A = \{2a, 3a, \dots\}$ su $\inf\{A\} = 2a > a$. Tokiu atveju, pagal 3 Teoremą, išvados teiginys yra teisingas. $\square$

2 Išvada. *Jeigu pasiskirstymo funkcija*

$$F \in \mathcal{L}_+ := \bigcup_{\gamma > 0} \mathcal{L}_\gamma$$

ir Z yra teigiamas atsitiktinis dydis, toks kad

$$\text{supp}\{Z\} = \{a\} \cup B, \quad \inf\{B\} = b > a,$$

tada transformuota pasiskirstymo funkcija $F^{(Z)}$ taip pat priklauso klasei $\mathcal{L}_+$.

Įrodymas. Iš 3 Teoremos tiesiogiai išvedama, jog:

$$F \in \mathcal{L}_+ \Rightarrow F \in \mathcal{L}_\gamma \text{ kai kuriems } \gamma > 0 \Rightarrow F^{(Z)} \in \mathcal{L}_{\gamma a} \Rightarrow F^{(Z)} \in \mathcal{L}_+.$$

Šios pasekmės tiesiogiai įrodo išvados teiginį. $\square$

4 Teorema. *Sakykime pasiskirstymo funkcija F priklauso klasei $\mathcal{L}_\gamma$ su $\gamma > 0$. Tegul atsitiktinis dydis Z yra pasiskirstęs pagal gamma pasiskirstymą su teigiamais parametrais α ir β , t.y.*

$$F_Z(u) = \mathbb{P}(Z \leq u) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^u y^{\alpha-1} e^{-\beta y} dy, \quad u \geq 0.$$

Tada transformuota pasiskirstymo funkcija $F^{(Z)}$ priklauso klasei $\mathcal{R}_\alpha$.

Iš aukščiau esančios teoremos gauname išvadą, kai atsitiktinis efektas yra eksponentiškai pasiskirstęs.

3 Išvada. *Jei pasiskirstymo funkcija F priklauso klasei $\mathcal{L}_\gamma$ su $\gamma > 0$ ir atsitiktinis dydis Z yra pasiskirstęs pagal eksponentinį dėsnį*

$$F_Z(u) = \mathbb{P}(Z \leq u) = (1 - e^{-\beta u}) \mathbb{I}_{[0, \infty)}(u),$$

su parametru $\beta > 0$, tada transformuota pasiskirstymo funkcija $F^{(Z)}$ priklauso klasei $\mathcal{R}_1$.

Kaip jau anksčiau minėta, 3 ir 4 Teoremų įrodymus galima rasti 4.3. ir 4.4. skyreliuose atitinkamai. Šiame skyriuje dar pristatomi trys pavyzdžiai iliustruojantys kaip skirtingi atsitiktiniai efektai veikia pasiskirstymo funkciją iš klasės $\mathcal{L}_1$.

3 Pavyzdys. Imkime eksponentinį pasiskirstymą su parametru 1, t.y.

$$F(x) = (1 - e^{-x})\mathbb{I}_{[0,\infty)}(x), \quad \overline{F}(x) = \mathbb{I}_{(-\infty,0)}(x) + e^{-x}\mathbb{I}_{[0,\infty)}(x).$$

Pasiskirstymo funkcija F priklauso klasei $\mathcal{L}_1$ nes yra tenkinama klasės $\mathcal{L}_1$ apibrėžimo sąlyga

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-(x-y)}}{e^{-x}} = e^y.$$

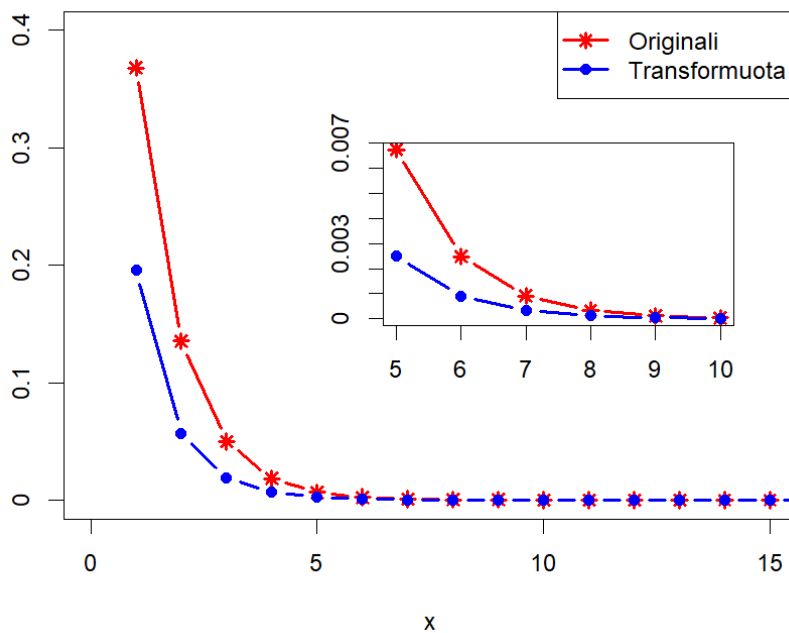
bent kokiam teigiamam y . Imkime teigiamą atsitiktinį dydį Z pasiskirsčiusį pagal paslinktą Poisson dėsnį, t.y

$$\mathbb{P}(Z = k) = \frac{e^{-1}}{(k-1)!}, \quad k \in \{1, 2, \dots\}.$$

Tada transformuotos pasiskirstymo funkcijos uodega atrodo štai taip:

$$\begin{aligned} \overline{F^{(Z)}}(x) &= \mathbb{E}(\overline{F}(x))^Z = \sum_{k=1}^{\infty} (\overline{F}(x))^k \mathbb{P}(Z = k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (\overline{F}(x))^k \frac{e^{-1}}{(k-1)!} = e^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\overline{F}(x))^k}{(k-1)!} \\ &= e^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\overline{F}(x))^{k+1}}{k!} = \frac{\overline{F}(x)}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\overline{F}(x))^k}{k!} \\ &= \frac{\overline{F}(x)}{e} \exp \{ \overline{F}(x) \} = \overline{F}(x) \exp \{ \overline{F}(x) - 1 \} \end{aligned}$$

Pagal 3 Teoremą, pasiskirstymo funkcija $F^{(Z)} = 1 - \overline{F^{(Z)}}$ priklauso klasei $\mathcal{L}_1$, kaip ir originali pasiskirstymo funkcija F . Kaip skiriasi funkcijos $\overline{F}$ ir $\overline{F^{(Z)}}$ parodoma 4 paveikslėlyje.



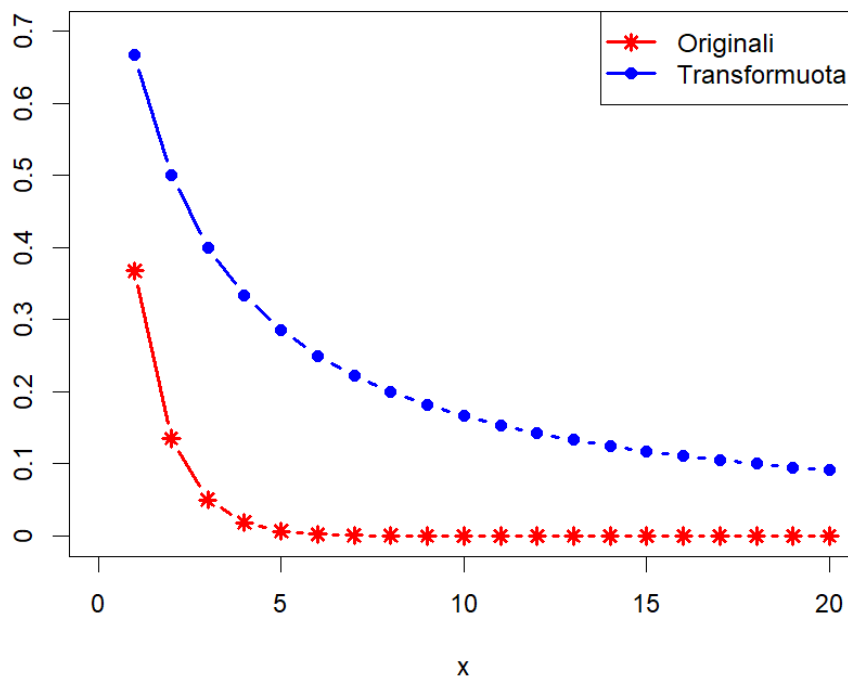
4 pav. Pasiskirstymo funkcijų uodegų $\overline{F}$ ir $\overline{F^{(Z)}}$ iš 3 Pavyzdžio palyginimas.

Galima pastebėti, jog šioje situacijoje, pasiskirstymo funkcijų $F^{(Z)}$ ir F uodegos yra panašaus sunkumo.

4 Pavyzdys. Taip pat kaip ir praeitame pavyzdyje, imkime eksponentinį pasiskirstymą su parametru 1. Tačiau šiuo atveju imkime eksponentiškai pasiskirsčiusį atsitiktinį dydį Z su parametru 2. Tada transformuotos pasiskirstymo funkcijos uodega atrodo štai taip:

$$\begin{aligned}\overline{F^{(Z)}}(x) &= 2 \int_0^{\infty} (e^{-x})^u e^{-2u} du \\ &= 2 \int_0^{\infty} e^{-(x+2)u} du \\ &= 2 \left(\frac{-1}{x+2} e^{-(x+2)u} \right) \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{2}{2+x}, \quad x \geq 0.\end{aligned}$$

Pagal 4 Teoremą ir 3 išvadą turime, kad transformuota pasiskirstymo funkcija $F^{(Z)} = 1 - \overline{F^{(Z)}}$ priklauso klasei $\mathcal{R}_1$. Kaip skiriasi funkcijos $\overline{F}$ ir $\overline{F^{(Z)}}$ parodyta 5 paveikslėlyje.



5 pav. Pasiskirstymo funkcijų uodegų $\overline{F}$ ir $\overline{F^{(Z)}}$ iš 4 Pavyzdžio palyginimas.

Galima pastebėti, jog šiuo atveju pasiskirstymo funkcijos $F^{(Z)}$ uodega yra žymiai sunkesnė nei uodega $\overline{F}$, nes pasiskirstymo funkcija F yra lengvauodegė, o pasiskirstymo funkcija $F^{(Z)}$ yra sunkiauodegė.

5 Pavyzdys. Imkime eksponentinį pasiskirstymą su parametru 1, taip kaip pavyzdžiuose 3 ir 4. Taip kaip anksčiau nustatyta, turime jog pasiskirstymo funkcija

$$F(x) = 1 - e^{-x}, \quad x \geq 0.$$

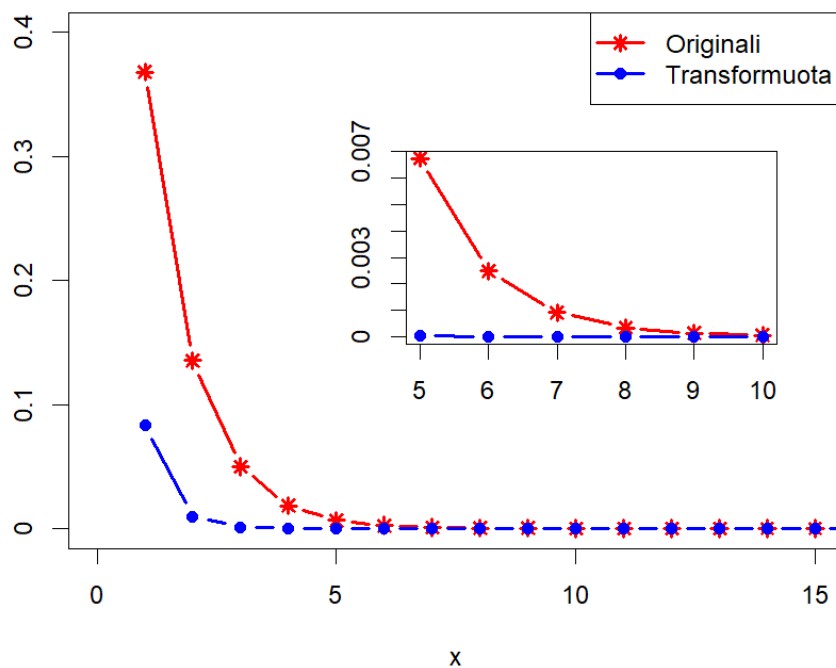
priklauso klasei $\mathcal{L}_1$. Imkime teigiamą atsitiktinį dydį Z su pasiskirstymo funkcija:

$$F_Z(u) = \frac{1}{2} \mathbb{I}_{[2,3)}(u) + \left(\frac{1}{2}u - 1\right) \mathbb{I}_{[3,4)}(u) + \mathbb{I}_{[4,\infty)}(u).$$

Tada kai $x \geq 0$, transformuota pasiskirstymo funkcijos uodega atrodo štai taip:

$$\begin{aligned} \overline{F^{(Z)}}(x) &= \mathbb{E}(\overline{F}(x))^Z = e^{-2x} \mathbb{P}(Z = 2) + \int_3^4 e^{-xu} d\left(\frac{1}{2}u - 1\right) \\ &= e^{-2x} \mathbb{P}(Z = 2) + \int_3^4 e^{-xu} \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} e^{-2x} + \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{x} e^{-xu} \right) \Big|_3^4 \\ &= \frac{1}{2} e^{-2x} + \frac{1}{2} \left(\frac{-e^{-4x}}{x} - \frac{-e^{-3x}}{x} \right) \\ &= \frac{1}{2} e^{-2x} + \frac{1}{2} \frac{e^{-3x} - e^{-4x}}{x} \end{aligned}$$

Pagal 3 Teoremą, pasiskirstymo funkcija $F^{(Z)}$ priklauso klasei $\mathcal{L}_2$, nes atsitiktinio dydžio Z atrama lygi $\{2\} \cup [3,4]$. Tai matoma ir iš gautos transformuotos pasiskirstymo funkcijos uodegos išraiškos. Kaip skiriasi funkcijos $\overline{F}$ ir $\overline{F^{(Z)}}$ parodoma 6 paveikslėlyje.



6 pav. Pasiskirstymo funkcijų uodegų $\overline{F}$ ir $\overline{F^{(Z)}}$ iš 5 Pavyzdžio palyginimas.

Galima pastebėti, jog šioje situacijoje, pasiskirstymo funkcijų $F^{(Z)}$ ir F uodegos yra panašaus sunkumo. Iš tikrųjų, funkcija F priklauso klasei $\mathcal{L}_1$, o funkcija $F^{(Z)}$ priklauso klasei $\mathcal{L}_2$, kas atitinka 3 Teoremos teiginį. Abi šios klasės priklauso klasei $\mathcal{L}_+$.

4. Teoremų įrodymai

4.1. 1 Teoremos įrodymas

Šios Teoremos įrodymui reikalinga viena pagalbinė Lema.

1 Lema. *Sakykime F tai realias reikšmes įgyjančio atsitiktinio dydžio pasiskirstymo funkcija. Tada šie teiginiai yra lygiaverčiai:*

- (i) F yra sunkiauodegė,
- (ii) $\limsup_{x \rightarrow \infty} e^{\lambda x} \overline{F}(x) = \infty$, bet kokiam $\lambda > 0$.

1 Lemos įrodymas. (i) $\Rightarrow$ (ii). Imkime priešingai

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} e^{\lambda^* x} \overline{F}(x) < \infty,$$

kai kuriems $\lambda^* > 0$. Tada egzistuoja c ir $x_c > 0$ tokie, kuriems tenkinama nelygybė

$$\overline{F}(x) \leq c e^{-\lambda^* x}, \quad x \geq x_c.$$

Pagal alternatyvią vidurkio formulę (žiūrėti [22]), bet kokiam $\Delta \in (0, \lambda^*)$, gauname prieštarą sąlygai $F \in \mathcal{H}$ nes

$$\begin{aligned} \int_{[0, \infty)} e^{\Delta x} dF(x) &= 1 + \Delta \int_0^\infty e^{\Delta x} \overline{F}(x) dx \\ &= 1 + \Delta \int_0^{x_c} e^{\Delta x} \overline{F}(x) dx + \Delta \int_{x_c}^\infty e^{\Delta x} \overline{F}(x) dx \\ &\leq \Delta x_c e^{\Delta x_c} + c \Delta \int_{x_c}^\infty e^{-(\lambda^* - \Delta)x} dx. \end{aligned}$$

(ii) $\Rightarrow$ (i). Jeigu $\lambda > 0$ ir $x > 0$, tada turime

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty e^{\lambda y} dF(y) &\geq \int_{(x, \infty)} e^{\lambda y} dF(y) \\ &\geq e^{\lambda x} \overline{F}(x) \end{aligned}$$

tai reiškia, kad

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda y} dF(y) \geq \limsup_{x \rightarrow \infty} e^{\lambda x} \overline{F}(x) = \infty.$$

Todėl $F \in \mathcal{H}$. 1 Lema įrodyta. □

1 Teoremos įrodymas. Dėl 1 Lemos pakanka įrodyti, kad

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} e^{\lambda x} \overline{F^{(Z)}}(x) = \infty$$

bet kokiam teigiamam λ .

Tegul $b > 0$ būna toks, kad $\mathbb{P}(Z \in [0, b]) > 0$. Tokiam b turime

$$\begin{aligned} \overline{F^{(Z)}}(x) &= \int_{[0, \infty)} (\overline{F}(x))^u dF_Z(u) \\ &\geq \int_{[0, b]} (\overline{F}(x))^u dF_Z(u) \\ &\geq (\overline{F}(x))^b \mathbb{P}(Z \in [0, b]). \end{aligned}$$

Todėl, bent kokiam $\lambda > 0$

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} e^{\lambda x} \overline{F^{(Z)}}(x) \geq \limsup_{x \rightarrow \infty} (e^{\lambda \frac{x}{b}} \overline{F}(x))^b \mathbb{P}(Z \in [0, b]) = \infty,$$

nes sąlyga $F \in \mathcal{H}$ reiškia, kad

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} e^{\lambda \frac{x}{b}} \overline{F}(x) = \infty,$$

pagal 1 Lemą. 1 Teorema įrodyta. □

4.2. 2 Teoremos įrodymas

Įrodymas. Iš klasės $\mathcal{C}$ apibrėžimo turime

$$\lim_{y \uparrow 1} \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} = 1. \quad (2)$$

Pasirinkime $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ ir $\delta = \delta(\varepsilon) \in (0, \frac{1}{2})$ tokius, kad $\mathbb{P}(Z \in [0, \frac{1}{\varepsilon}]) > 0$ ir

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} \leq 1 + \varepsilon^2,$$

visiems $y \in (1 - \delta, 1)$.

Taip parinktam ε ir teigiamiems x, y turime

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{F^{(Z)}}(xy)}{\overline{F^{(Z)}}(x)} &= \frac{\int_{[0, \infty)} (\overline{F}(xy))^u dF_Z(u)}{\int_{[0, \infty)} (\overline{F}(x))^u dF_Z(u)} \\
&= \frac{\int_{[0, \frac{1}{\varepsilon})} (\overline{F}(xy))^u dF_Z(u)}{\int_{[0, \infty)} (\overline{F}(x))^u dF_Z(u)} + \frac{\int_{[\frac{1}{\varepsilon}, \infty)} (\overline{F}(xy))^u dF_Z(u)}{\int_{[0, \infty)} (\overline{F}(x))^u dF_Z(u)} \\
&:= J_{1\varepsilon} + J_{2\varepsilon},
\end{aligned} \tag{3}$$

kur F_Z žymi atsitiktinio dydžio Z pasiskirstymo funkciją.

Kai $y \in (1 - \delta, 1)$, tada

$$\begin{aligned}
\limsup_{x \rightarrow \infty} J_{1\varepsilon} &\leq \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_{[0, \frac{1}{\varepsilon})} (\overline{F}(xy))^u \frac{(\overline{F}(x))^u}{(\overline{F}(x))^u} dF_Z(u)}{\int_{[0, \frac{1}{\varepsilon})} (\overline{F}(x))^u dF_Z(u)} \\
&\leq \limsup_{x \rightarrow \infty} \max_{0 \leq u \leq \frac{1}{\varepsilon}} \left(\frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} \right)^u \\
&\leq \limsup_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} \right)^{\frac{1}{\varepsilon}} \\
&\leq (1 + \varepsilon^2)^{\frac{1}{\varepsilon}}.
\end{aligned}$$

Be to, pasirinktiems ε ir $y \in (1 - \delta, 1)$ turime

$$\begin{aligned}
\limsup_{x \rightarrow \infty} J_{2\varepsilon} &\leq \frac{\int_{[\frac{1}{\varepsilon}, \infty)} (\overline{F}(xy))^u dF_Z(u)}{\int_{[0, \frac{1}{\varepsilon}]} (\overline{F}(x))^u dF_Z(u)} \\
&\leq \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{(\overline{F}(xy))^{\frac{1}{\varepsilon}} \mathbb{P}(Z \geq \frac{1}{\varepsilon})}{(\overline{F}(x))^{\frac{1}{\varepsilon}} \mathbb{P}(Z \in [0, \frac{1}{\varepsilon}])} \\
&\leq (1 + \varepsilon^2)^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{\mathbb{P}(Z \geq \frac{1}{\varepsilon})}{\mathbb{P}(Z \in [0, \frac{1}{\varepsilon}])}.
\end{aligned}$$

Iš gautų įverčių ir (3) lygybės turime, kad

$$\lim_{y \uparrow 1} \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F^{(Z)}}(xy)}{\overline{F^{(Z)}}(x)} \leq (1 + \varepsilon^2)^{\frac{1}{\varepsilon}} \left(\frac{\mathbb{P}(Z \geq \frac{1}{\varepsilon})}{\mathbb{P}(Z \in [0, \frac{1}{\varepsilon}])} + 1 \right)$$

visiems ε tenkinantiems sąlygą $\mathbb{P}(Z \in [0, \frac{1}{\varepsilon}]) > 0$.

Perėję prie ribos $\varepsilon \downarrow 0$ gauname

$$\lim_{y \uparrow 1} \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F^{(Z)}}(xy)}{\overline{F^{(Z)}}(x)} \leq \lim_{\varepsilon \downarrow 0} (1 + \varepsilon^2)^{\frac{1}{\varepsilon}} \left(1 + \frac{\mathbb{P}(Z \geq \frac{1}{\varepsilon})}{\mathbb{P}(Z \in [0, \frac{1}{\varepsilon}))} \right).$$

Kadangi

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} (1 + \varepsilon^2)^{\frac{1}{\varepsilon}} = 1,$$

turime

$$\lim_{y \uparrow 1} \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F^{(Z)}}(xy)}{\overline{F^{(Z)}}(x)} \leq 1. \quad (4)$$

Be to, kai $y \in (0,1)$ ir $x > 0$ turime

$$\overline{F^{(Z)}}(xy) \geq \overline{F^{(Z)}}(x).$$

Tada

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F^{(Z)}}(xy)}{\overline{F^{(Z)}}(x)} \geq \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F^{(Z)}}(xy)}{\overline{F^{(Z)}}(x)} \geq 1,$$

visiems $y \in (0,1)$. Gauname įvertį

$$\lim_{y \uparrow 1} \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F^{(Z)}}(xy)}{\overline{F^{(Z)}}(x)} \geq 1$$

kuris kartu su (4) įverčiu parodo, kad

$$\lim_{y \uparrow 1} \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F^{(Z)}}(xy)}{\overline{F^{(Z)}}(x)} = 1.$$

Taigi gauname, jog transformuota pasiskirstymo funkcija $F^{(Z)} \in \mathcal{C}$. 2 Teorema įrodyta. □

4.3. 3 Teoremos įrodymas

Įrodymas. Iš klasės $\mathcal{L}_\gamma$ apibrėžimo turime

$$F \in \mathcal{L}_\gamma \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} = e^{-\gamma y} \quad \text{visiems } y > 0. \quad (5)$$

Kai x yra teigiamas, turime

$$\begin{aligned} \overline{F^{(Z)}}(x) &= \mathbb{E} \left((\overline{F}(x))^Z \right) \\ &= \mathbb{E} \left((\overline{F}(x))^Z \mathbb{I}_{\{Z=a\}} + (\overline{F}(x))^Z \mathbb{I}_{\{Z \in B\}} \right) \\ &= (\overline{F}(x))^a \mathbb{P}(Z = a) + \mathbb{E} \left((\overline{F}(x))^Z \mathbb{I}_{\{Z \geq b\}} \right). \end{aligned}$$

Todėl, bet kokiam fiksuotam $y > 0$, gauname

$$\begin{aligned}
& \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F^{(Z)}}(x-y)}{\overline{F^{(Z)}}(x)} \\
&= \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{(\overline{F}(x-y))^a \mathbb{P}(Z=a) + \mathbb{E}\left((\overline{F}(x-y))^Z \mathbb{I}_{\{Z \geq b\}}\right)}{(\overline{F}(x))^a \mathbb{P}(Z=a) + \mathbb{E}\left((\overline{F}(x))^Z \mathbb{I}_{\{Z \geq b\}}\right)} \\
&\leq \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{(\overline{F}(x-y))^a \mathbb{P}(Z=a) + (\overline{F}(x-y))^b \mathbb{P}(Z \geq b)}{(\overline{F}(x))^a \mathbb{P}(Z=a)} \\
&\leq \limsup_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} \right)^a + \limsup_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} \right)^b (\overline{F}(x))^{b-a} \frac{\mathbb{P}(Z \geq b)}{\mathbb{P}(Z=a)} \\
&= e^{\gamma a y}
\end{aligned} \tag{6}$$

Panašiai gauname

$$\begin{aligned}
& \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F^{(Z)}}(x-y)}{\overline{F^{(Z)}}(x)} \\
&\geq \frac{(\overline{F}(x-y))^a \mathbb{P}(Z=a)}{(\overline{F}(x))^a \mathbb{P}(Z=a) + (\overline{F}(x))^b \mathbb{P}(Z \geq b)} \\
&= \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} \right)^a \mathbb{P}(Z=a)}{\mathbb{P}(Z=a) + (\overline{F}(x))^{b-a} \mathbb{P}(Z \geq b)} \\
&= \liminf_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} \right)^a \\
&= e^{\gamma a y}
\end{aligned} \tag{7}$$

Iš gautų (6) ir (7) įverčių turime, kad $F^{(Z)} \in \mathcal{L}_{\gamma a}$. 3 Teorema įrodyta. $\square$

4.4. 4 Teoremos įrodymas

4 Teoremos įrodymui reikalingas vienas papildomas teiginys susijęs su atstovavimo teorema eksponentinio tipo pasiskirstymo funkcijoms.

2 Lema. *Sakykime pasiskirstymo funkcija F priklauso klasei $\mathcal{L}_\gamma$ su $\gamma > 0$. Tada bent kokiam $\varepsilon \in (0, \frac{\gamma}{2})$ turime pakankamai didelį $x^* = x^*(\varepsilon)$ kuriam tenkinama sąlyga*

$$e^{-(\gamma+\varepsilon)x} \leq \overline{F}(x) \leq e^{-(\gamma-\varepsilon)x}$$

visiems $x \geq x^*$.

2 Lemos įrodymas. Pasiskirstymo funkcija F priklauso klasei $\mathcal{L}_\gamma$ su $\gamma > 0$. Vadinasi, fiksuotam $y > 0$,

turime

$$\frac{(yx)^\gamma \overline{F}(\log yx)}{x^\gamma \overline{F}(\log x)} = y^\gamma \frac{\overline{F}(\log y + \log x)}{\overline{F}(\log x)} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} y^\gamma e^{-\gamma \log y} = 1.$$

Tai reiškia, jog funkcija $x^\gamma \overline{F}(\log x)$ lėtai kinta. Pagal gerai žinomą Karamatos atstovavimo teoremą, žiūrėti [17], [34] 1.2 Teoremą, ar 1.3.1 Teoremą kartu su [4] 1.3.5 išvada,

$$x^\gamma \overline{F}(\log x) = h(x) \exp \left\{ - \int_1^x \frac{g(u)}{u} du \right\}, \quad (8)$$

kur h ir $g \geq 0$ tai išmatuojamos funkcijos, tokios kad

$$h(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} h > 0, \quad \text{ir} \quad g(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0.$$

Keičiant $\log x$ į x , iš (8) įverčio gauname

$$\begin{aligned} \overline{F}(x) &= h(e^x) e^{-\gamma x} \exp \left\{ - \int_1^{e^x} \frac{g(u)}{u} du \right\} \\ &= h(e^x) e^{-\gamma x} \exp \left\{ - \int_0^x g(e^u) du \right\}. \end{aligned}$$

Tegul $\varepsilon \in (0, \frac{\gamma}{2})$ yra fiksuotas. Iš paskutinės išraiškos gauname

$$\overline{F}(x) \leq \max\{1, 2h\} e^{-\gamma x} \leq e^{-(\gamma-\varepsilon)x} \quad (9)$$

jeigu $x \geq \frac{1}{\varepsilon} \log \max\{1, 2h\}$.

Panašiai, sąlyga $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$ parodo, kad

$$\begin{aligned} \overline{F}(x) &= h(e^x) e^{-\gamma x} \exp \left\{ - \int_0^{x_1} g(e^u) du - \int_{x_1}^x g(e^u) du \right\} \\ &\geq h(e^x) e^{-\gamma x} \exp \left\{ - \int_0^{x_1} g(e^u) du - \frac{\varepsilon}{2}(x - x_1) \right\} \\ &\geq h(e^x) e^{-(\gamma+\varepsilon/2)x} \exp \left\{ - \int_0^{x_1} g(e^u) du \right\}, \quad x \geq x_1, \end{aligned}$$

kur x_1 yra toks, kad $g(e^u) \leq \frac{\varepsilon}{2}$, $u \geq x_1$.

Jeigu x yra pakankamai didelis ($x \geq x_2 > x_1$), turime

$$h(e^x) \geq \frac{h}{2} \geq e^{-\varepsilon \frac{x}{4}}$$

pagal sąlygą $h(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} h > 0$ ir įvertį

$$\exp \left\{ - \int_0^{x_1} g(e^u) du \right\} \geq e^{-\varepsilon \frac{x}{4}},$$

kuris galioja dėl funkcijos g integruojamumo.

Gautas įvertis parodo, kad

$$\overline{F}(x) \geq e^{-(\gamma+\varepsilon)x} \quad (10)$$

visiems $x \geq x_2$.

Iš (9) ir (10) įverčių turime, kad Lemos teiginys galioja su $x^* = \max\{\frac{1}{\varepsilon} \log \max\{1, 2h\}, x_2\}$. 2 Lema įrodyta. $\square$

4 Teoremos įrodymas. Sakysime $y > 0$ yra fiksuotas. Bet kokiam pasirinktam $x > 0$

$$\begin{aligned} \frac{\overline{F^{(Z)}}(xy)}{\overline{F^{(Z)}}(x)} &= \frac{\int_{[0, \infty)} (\overline{F}(xy))^u dF_Z(u)}{\int_{[0, \infty)} (\overline{F}(x))^u dF_Z(u)} \\ &= \frac{\int_0^\infty (\overline{F}(xy))^u u^{\alpha-1} e^{-\beta u} du}{\int_0^\infty (\overline{F}(x))^u u^{\alpha-1} e^{-\beta u} du}. \end{aligned}$$

Kadangi $F \in \mathcal{L}_\gamma$ su $\gamma > 0$, pagal 2 Lemą turime

$$\begin{aligned} e^{-(\gamma+\varepsilon)xy} &\leq \overline{F}(xy) \leq e^{-(\gamma-\varepsilon)xy} \\ e^{-(\gamma+\varepsilon)x} &\leq \overline{F}(x) \leq e^{-(\gamma-\varepsilon)x} \end{aligned}$$

kai $\varepsilon \in (0, \frac{\gamma}{2})$ ir pakankamai dideliu x .

Vadinasi,

$$\begin{aligned} \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F^{(Z)}}(xy)}{\overline{F^{(Z)}}(x)} &\leq \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^\infty u^{\alpha-1} e^{-(\gamma-\varepsilon)xy+\beta} u du}{\int_0^\infty u^{\alpha-1} e^{-(\gamma+\varepsilon)x+\beta} u du} \\ &= \limsup_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{(\gamma+\varepsilon)x+\beta}{(\gamma-\varepsilon)xy+\beta} \right)^\alpha \\ &= \left(\frac{\gamma+\varepsilon}{\gamma-\varepsilon} \right)^\alpha y^{-\alpha}, \end{aligned} \quad (11)$$

ir, panašiai gauname,

$$\begin{aligned} \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F^{(Z)}}(xy)}{\overline{F^{(Z)}}(x)} &\geq \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^\infty u^{\alpha-1} e^{-(\gamma+\varepsilon)xy+\beta} u du}{\int_0^\infty u^{\alpha-1} e^{-(\gamma-\varepsilon)x+\beta} u du} \\ &= \liminf_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{(\gamma-\varepsilon)x+\beta}{(\gamma+\varepsilon)xy+\beta} \right)^\alpha \\ &= \left(\frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon} \right)^\alpha y^{-\alpha}. \end{aligned} \quad (12)$$

Dėl $\varepsilon \in (0, \frac{\gamma}{2})$ laisvo pasirinkimo, iš (11) ir (12) įverčių turime

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F^{(Z)}}(xy)}{\overline{F^{(Z)}}(x)} = y^{-\alpha}.$$

5. Išvados

Šiame darbe nagrinėta kaip atsitiktinio efekto transformacija keičia pasiskirstymo funkcijos reguliarumą. Išnagrinėtos trys reguliarumo klasės: sunkiauodegių pasiskirstymų klasė $\mathcal{H}$, pasiskirstymo funkcijų su nuosekliai kintančiomis uodegomis klasė $\mathcal{C}$ ir eksponentinio tipo klasė $\mathcal{L}_\gamma$, $\gamma > 0$. Nustatyta, jog eksponentinio uodegų tipo klasė jautriausiai reaguoja į atsitiktinio efekto transformaciją. Kai kuriais atvejais atsitiktinis efektas transformuoja šios lengvauodegių funkcijų poklasės pasiskirstymo funkcijas į sunkiauodeges. Reguliarumo klasėse $\mathcal{H}$ ir $\mathcal{C}$, transformacija palieka pasiskirstymo funkcijas tose pačiose klasėse tol, kol atsitiktinis dydis, dėka kurio veikia atsitiktinis efektas, yra griežtai teigiamas. Atsitiktinio efekto transformacija yra vienas iš būdų konstruoti pasiskirstymo funkcijas su specifinėmis savybėmis. Šis metodas puikiai papildo kitus tokių konstrukcijų metodus, aptartus daugybėje straipsnių, žiūrėti, pavyzdžiui, [1, 2, 7, 11, 19, 28, 35, 41] ir jų nurodytą literatūrą. Tęsiant šį darbą galima būtų analizuoti pasiskirstymo funkcijas priklausančias dar šiuo atžvilgiu neišnagrinėtoms reguliarumo klasėms, pavyzdžiui, subeksponentinei klasei $\mathcal{S}$.

Literatūra

- [1] F. Aldhufairi, J. Sepanski. „New bivariate copulas via Lomax Distribution generated distortions“. Iš: *AppliedMath* 4 (2024), puslapiai 641–665.
- [2] M. Alfahad, M. Githany, A. Alothman, S. Nadarajah. „A bimodal extension of the log-normal distribution on the real line with an application to DNA microarray data“. Iš: *Mathematics* 11 (2023), puslapis 3360.
- [3] S. Asmussen, M. Steffensen. *Risk and Insurance*. Cham: Springer, 2020.
- [4] N. Bingham, C. Goldie, J. Teugels. *Regular Variation*. Cambridge: Cambridge University Press, 1987.
- [5] N. Bowers, H. Gerber, J. Hickman, D. Jones, C. Nesbit. *Actuarial Mathematics*. Itasca, Illinois: Society of Actuaries, 1986.
- [6] J. Cai, Q. Tang. „On max-sum equivalence and convolution closure of heavy-tailed distributions and their applications“. Iš: *J. Appl. Probab.* 41 (2004), puslapiai 117–130.
- [7] F. Candino, F. Domma. „Unit distributions: a general framework, some special cases, and regression unit-dagum models“. Iš: *Mathematics* 11 (2023), puslapis 2888.
- [8] D. Dickson, M. Hardy, H. Waters. *Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks*. Cambridge: Cambridge University Press, 2009.
- [9] M. Dirma, S. Paukštys, J. Šiaulys. „Tails of the moments for sums with dominatedly varying summands“. Iš: *Mathematics* 9 (2021), puslapis 824.
- [10] P. Embrechts, C. Klüppelberg, T. Mikosch. *Modeling Extremal Events for Insurance and Finance*. Berlin: Springer, 1997.
- [11] A. Fayami, A. Hassan, H. Baaqeel, E. Almetwally. „Bayesian Influence and data analysis of the unit-power Burr X distribution“. Iš: *Axioms* 12 (2023), puslapis 297.
- [12] H. Gerber. *Life Insurance Mathematics*. Berlin: Springer-Verlag, 1990.
- [13] P. Hougaard. „Frailty models for survival data“. Iš: *Lifetime Data Anal.* 1 (1995), puslapiai 255–273.
- [14] A. Yashin, I. Iachine, A. Begun, J. Vaupel. „Hidden frailty: Myths and reality“. Iš: *Institut for Statistik og Demografi, Syddansk Universitet, Odense Research Report* 34 (2001).
- [15] A. Jessen, T. Mikosch. „Regularly varying functions“. Iš: *Publ. Inst. Math. Nouv. Sér.* 80 (2006), puslapiai 171–192.
- [16] R. Kaas, M. Goovaerts, J. D. ans M. Denuit. *Modern Actuarial Risk Theory*. Berlin: Springer, 2008.
- [17] J. Karamata. „Sur un mode de croissance régulière. Théoremes fondamentaux“. Iš: *Bull. de la Soc. Math. de France* 61 (1933), puslapiai 55–62.

- [18] J. Karasevičienė, J. Šiaulys. „Randomly stopped minimum maximum, minimum of sums and maximum of sums with generalized subexponential distributions“. Iš: *Axioms* 13 (2024), puslapis 85.
- [19] D. Konstantinides, R. Leipus, J. Šiaulys. „On the non-closure under convolution for strong subexponential distributions“. Iš: *Nonlinear Anal.-Model.* 28 (2023), puslapiai 97–115.
- [20] R. Leipus, J. Šiaulys, S. Danilenko, J. Karasevičienė. „Randomly stopped sums, minima, and maxima for heavy-tailed and light-tailed distributions“. Iš: *Axioms* 13 (2024), puslapis 355.
- [21] R. Leipus, J. Šiaulys, D. Konstantinides. *Closure Properties of Heavy-Tailed and Related Distributions*. Cham: Springer, 2023.
- [22] Y. Liu. „A general treatment of alternative expectation formulae“. Iš: *Stat. Probab. Lett.* 166 (2020), puslapis 108863.
- [23] K. Manton. „Changing concepts of morbidity and mortality in the elderly population“. Iš: *Milbank Meml. Fund Q. Health Soc.* 60 (1982), puslapiai 183–244.
- [24] K. Manton, E. Stallard, J. Vaupel. „Alternative models for heterogeneity of mortality risks among the aged“. Iš: *J. Am. Stat. Assoc.* Sep.81(395) (1986), puslapiai 635–644.
- [25] T. Mikosch. *Non-life Insurance Mathematics. An Introduction with the Poisson Process*. Berlin: Springer, 2009.
- [26] T. Moger, O. Aalen. „Regression models for infant mortality data in Norwegian siblings, using a compound Poisson frailty distribution with random scale“. Iš: *Biostatistics* 3 (2008), puslapiai 577–591.
- [27] T. Møller. *Market-valuation methods in life and pension insurance*. Cambridge: Cambridge University Press, 2007.
- [28] S. Paukštys, J. Šiaulys, R. Leipus. „Truncated moments for heavy-tailed and related distribution classes“. Iš: *Mathematics* 11 (2023), puslapis 2172.
- [29] E. Pitacco. „From Halley to “frailty”: A review of survival models for actuarial calculations“. Iš: *G. Ist. Ital. Attuari* (2005).
- [30] E. Pitacco. *High age mortality and frailty. Some remarks and hints for actuarial modeling*. Australia: Working paper 2016/19, CEPAR, 2016.
- [31] R. Puišys, S. Lewkiewicz, J. Šiaulys. „Properties of the random effect transformation“. Iš: *Lith. Math. J.* 64 (2024), puslapiai 177–189.
- [32] O. Ragulina, J. Šiaulys. „Randomly stopped minima and maxima with exponential-type distributions“. Iš: *Nonlinear Anal.-Model.* 24 (2019), puslapiai 297–313.
- [33] H. Schmidli. *Risk Theory*. Cham: Springer, 2017.
- [34] E. Seneta. *Regularly Varying Functions*. Berlin: Lecture note in Mathematics volume 508. Springer-Verlag, 1976.

- [35] J. Sepanski, X. Wang. „New classes of distortion risk measures and their estimation“. Iš: *Risks* 11 (2023), puslapis 194.
- [36] J. Sprindys, J. Šiaulys. „Regularly distributed randomly stopped sum, minimum and maximum“. Iš: *Nonlinear Anal.-Model.* 25 (2020), puslapiai 509–522.
- [37] E. Straub. *Non-life Insurance Mathematics*. Berlin: Springer-Verlag, 1988.
- [38] J. Šiaulys, R. Puišys. „Survival with random effect“. Iš: *Mathematics* (2022), 10:1097.
- [39] J. Vaupel. „Inherited frailty and longevity“. Iš: *Demography* 25 (1988), puslapiai 277–287.
- [40] F. D. Vylder. *Life Insurance Theory: Actuarial Perspectives*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997.
- [41] T. Zaeviski, N. Kyurkchiev. „On some composite Kies families: distribution properties and saturation in Hausdorf sense“. Iš: *Mod. Stoch.: Theory Appl.* 10 (2023), puslapiai 287–312.
- [42] Y. Zhu. *Actuarial Model: Life Insurance and Annuity*. Somerville: MA: International Press, 2007.

1 priedas.

Programos kodas

Grafikų brėžimui naudota programavimo aplinka *RStudio*.

1 pavyzdžio grafiko brėžimas:

```
original_function <- function(x) {  
  ((1/3)^floor(log(x, base=2))) * (2 - (1/3) - (1 - 1/3) * (x / 2^floor(log(x, base=2))))  
}  
  
transformed_function <- function(x) {  
  ((1/3)^floor(log(x, base=2))) * (1/3) *  
  (2 - (1/3) - (1 - 1/3) * (x / 2^floor(log(x, base=2)))) *  
  (1 + ((1/3)^floor(log(x, base=2))) * (2 - (1/3) - 2/3 * (x / 2^floor(log(x, base=2)))) +  
  ((1/3)^(2 * floor(log(x, base=2)))) * (2 - (1/3) - 2/3 * (x / 2^floor(log(x, base=2))))^2)  
}  
  
x_values <- seq(0, 10, by = 1)  
y_original <- original_function(x_values)  
y_transformed <- transformed_function(x_values)  
plot(x_values, y_original, type = "l", col = "red", lwd = 2, ylim = c(0, 1),  
xlab = "x", ylab = "", xlim = c(0, 10), axes = FALSE)  
axis(1, at = seq(0, 10, by = 2), labels = seq(0, 10, by = 2))  
axis(2, at = seq(0, 1, by = 0.2), labels = seq(0, 1, by = 0.2))  
box()  
  
points(x_values, y_transformed, type = "l", col = "blue", lwd = 2)  
legend("topright", legend = c("Originali", "Transformuota"), col = c("red", "blue"), lwd = 2)  
zoom_x_values <- seq(7, 10, by = 1)  
y_zoom_original <- original_function(zoom_x_values)  
y_zoom_transformed <- transformed_function(zoom_x_values)  
par(new = TRUE, fig = c(0.4, 0.95, 0.23, 0.82))  
plot(zoom_x_values, y_zoom_original, type = "l", col = "red", lwd = 2,  
xlab = "", ylab = "", axes = FALSE, ylim = c(min(y_zoom_original, y_zoom_transformed), max(y_zoom_om_original, y_zoom_transformed)))  
points(zoom_x_values, y_zoom_transformed, type = "l", col = "blue", lwd = 2)  
y_ticks <- pretty(range(y_zoom_original, y_zoom_transformed))  
y_labels <- ifelse(y_ticks == 0, "0", format(y_ticks, digits = 2, nsmall = 2, scientific = FALSE))  
axis(2, at = y_ticks, labels = y_labels)  
axis(1, at = seq(min(zoom_x_values), max(zoom_x_values), by = 1), labels = TRUE)  
box()
```

2 pavyzdžio grafiko brėžimas:

```
original_function <- function(x) {
```

```

1/2 - (1/pi)*atan((x-2)/3)
}
transformed_function <- function(x) {
(-(1/2)-(1/pi)*atan((x-2)/3))/log(((1/2)-(1/pi)*atan((x-2)/3)),base = exp(1))
}
x_values <- seq(1, 50, by = 1)
y_original <- original_function(x_values)
y_transformed <- transformed_function(x_values)
plot(x_values, y_original, type = "b", col = "red", pch = 8, lwd = 2, ylim = c(0, 1),
xlab = "", ylab = "", axes = FALSE, xlim = c(0,50))
axis(1, at = seq(0, 50, by = 10), labels = seq(0, 50, by = 10))
axis(2, at = seq(0, 1, by = 0.2), labels = seq(0, 1, by = 0.2))
box()
points(x_values, y_transformed, type = "b", col = "blue", pch = 16, lwd = 2)
title(xlab = "x")
legend("topright", legend = c("Originali", "Transformuota"), col = c("red", "blue"),
pch = c(8, 16), lwd = 2)

```

3 pavyzdžio grafiko brėžimas:

```

original_function <- function(x) {
exp(-x)
}
transformed_function <- function(x) {
exp(-x)*exp(exp(-x)-1)
}
x_values <- seq(1, 20, by = 1)
y_original <- original_function(x_values)
y_transformed <- transformed_function(x_values)
plot(x_values, y_original, type = "b", col = "red", pch = 8, lwd = 2, ylim = c(0, 0.4),
xlab = "", ylab = "", axes = FALSE, xlim = c(0, 15))
axis(1, at = seq(0, 15, by = 5), labels = seq(0, 15, by = 5))
axis(2, at = seq(0, 0.4, by = 0.1), labels = seq(0, 0.4, by = 0.1))
box() points(x_values, y_transformed, type = "b", col = "blue", pch = 16, lwd = 2)
title(xlab = "x")
legend("topright", legend = c("Originali", "Transformuota"), col = c("red", "blue"),
pch = c(8, 16), lwd = 2)
zoom_x_values <- seq(5, 10, by = 1)
y_zoom_original <- original_function(zoom_x_values)
y_zoom_transformed <- transformed_function(zoom_x_values)

```

```

par(new = TRUE, fig = c(0.35, 0.93, 0.25, 0.83))
plot(zoom_x_values, y_zoom_original, type = "b", col = "red", pch = 8, lwd = 2,
xlab = "", ylab = "", axes = FALSE, ylim = c(min(y_zoom_original, y_zoom_transformed), max(y_zoom_original, y_zoom_transformed)))
points(zoom_x_values, y_zoom_transformed, type = "b", col = "blue", pch = 16, lwd = 2)
y_ticks <- pretty(range(y_zoom_original, y_zoom_transformed))
y_labels <- ifelse(y_ticks == 0, "0", format(y_ticks, digits = 3, nsmall = 3, scientific = FALSE))
axis(2, at = y_ticks, labels = y_labels)
xis(1, at = seq(min(zoom_x_values), max(zoom_x_values), by = 1), labels = TRUE)
box()

```

4 pavyzdžio grafiko brėžimas:

```

original_function <- function(x) {
exp(-x)
}
transformed_function <- function(x) {
2/(2+x)
}
x_values <- seq(1, 20, by = 1)
y_original <- original_function(x_values)
y_transformed <- transformed_function(x_values)
plot(x_values, y_original, type = "b", col = "red", pch = 8, lwd = 2, ylim = c(0, 0.7),
xlab = "", ylab = "", axes = FALSE, xlim = c(0,20))
axis(1, at = seq(0, 20, by = 5), labels = seq(0, 20, by = 5))
axis(2, at = seq(0, 0.7, by = 0.1), labels = seq(0, 0.7, by = 0.1))
box()
points(x_values, y_transformed, type = "b", col = "blue", pch = 16, lwd = 2)
title(xlab = "x")
legend("topright", legend = c("Originali", "Transformuota"), col = c("red", "blue"),
pch = c(8, 16), lwd = 2)

```

5 pavyzdžio grafiko brėžimas:

```

original_function <- function(x) {
exp(-x)
}
transformed_function <- function(x) {
(1/2)*exp(-2*x) + (1/2)*((exp(-4*x)*(exp(x)-1))/x)
}

```

```

x_values <- seq(1, 20, by = 1)
y_original <- original_function(x_values)
y_transformed <- transformed_function(x_values)
plot(x_values, y_original, type = "b", col = "red", pch = 8, lwd = 2, ylim = c(0, 0.4),
xlab = "", ylab = "", axes = FALSE, xlim = c(0, 15))
axis(1, at = seq(0, 15, by = 5), labels = seq(0, 15, by = 5))
axis(2, at = seq(0, 0.4, by = 0.1), labels = seq(0, 0.4, by = 0.1))
box()
points(x_values, y_transformed, type = "b", col = "blue", pch = 16, lwd = 2)
title(xlab = "x")
legend("topright", legend = c("Originali", "Transformuota"), col = c("red", "blue"),
pch = c(8, 16), lwd = 2)
zoom_x_values <- seq(5, 10, by = 1)
y_zoom_original <- original_function(zoom_x_values)
y_zoom_transformed <- transformed_function(zoom_x_values)
par(new = TRUE, fig = c(0.35, 0.93, 0.25, 0.83))
plot(zoom_x_values, y_zoom_original, type = "b", col = "red", pch = 8, lwd = 2,
xlab = "", ylab = "", axes = FALSE, ylim = c(min(y_zoom_original, y_zoom_transformed), max(y_zoom_original, y_zoom_transformed)))
points(zoom_x_values, y_zoom_transformed, type = "b", col = "blue", pch = 16, lwd = 2)
y_ticks <- pretty(range(y_zoom_original, y_zoom_transformed))
y_labels <- ifelse(y_ticks == 0, "0", format(y_ticks, digits = 3, nsmall = 3, scientific = FALSE))
axis(2, at = y_ticks, labels = y_labels)
axis(1, at = seq(min(zoom_x_values), max(zoom_x_values), by = 1), labels = TRUE)
box()

```