



**VILNIAUS UNIVERSITETAS**

**MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS**

**FINANSŲ IR DRAUDIMO MATEMATIKOS STUDIJŲ PROGRAMA**

Magistro baigiamasis darbas

**Portfelio sudarymas minimalios dispersijos ir vidutinio  
absoliutaus nuokrypio metodais**

**Portfolio Construction Using Minimal Variance and Mean Absolute  
Deviation Methods**

Juozas Rimantas

Darbo vadovas : Doc. Dr. Andrius Grigutis

**Vilnius  
2025**

## Santrauka

Šiame magistro baigiamajame darbe nagrinėjami dviejų tipų investicinių portfelių – minimalios dispersijos (dar vadinamo minimalaus standartinio nuokrypio) (Min-STD) ir vidutinio absoliutaus nuokrypio (MAD) – sudarymo principai bei jų palyginimas su S&P 500 indekso rezultatais. Naudojantis Modernaus portfelio teorijos (MPT) principais ir remiantis istoriniais S&P 500 komponentų duomenimis iš trijų skirtingų 3 metų laikotarpių, portfeliai buvo optimizuoti pagal kvadratinio ir tiesinio programavimo algoritmus. Gauti rezultatai parodė, kad Min-STD portfeliai paprastai išsiskiria didesne diversifikacija, tačiau reikalauja daugiau skaičiavimo resursų, o MAD portfeliai yra labiau koncentruoti ir greičiau apskaičiuojami. Įvertinus testiniuose laikotarpiuose pasiektas grąžas ir rizikos rodiklius, matyti, kad Min-STD ir MAD portfeliai, nors kai kuriais mėnesiais nusileidžia S&P 500, gali pasiūlyti panašius investavimo rezultatus ir būti naudojami kaip alternatyva rinkos indeksui. Efektyvumo frontų analizė taip pat rodo, kad, nepaisant skirtingo rizikos mato, abu metodai geba formuoti panašius efektyvių portfelių rinkinius.

**Raktiniai žodžiai:** portfelio optimizavimas, minimalios dispersijos portfelis, minimalaus standartinio nuokrypio portfelis, vidutinio absoliutaus nuokrypio portfelis, diversifikacija, efektyvumo frontas, portfelio teorija, S&P 500

## Summary

This Master's thesis examines the principles behind the construction of two types of investment portfolios: the minimum variance (also known as the minimum standard deviation) (Min-STD) and the mean absolute deviation (MAD) and compares them with the performance of the S&P 500 index. Using the fundamentals of Modern Portfolio Theory (MPT) and based on historical data of the S&P 500 components from three different 3-year periods, the portfolios were optimized using quadratic and linear programming algorithms. The results showed that Min-STD portfolios tend to be more diversified but require more computational resources, while MAD portfolios are more concentrated and faster to compute. The returns and risk indicators achieved in the test periods show that the Min-STD and MAD portfolios, although underperforming the S&P 500 in some months, can offer similar investment results and can be used as an alternative to a market index. The analysis of the efficient frontiers also shows that, despite their different risk measures, the two approaches are able to form similar sets of efficient portfolios.

**Keywords:** portfolio optimization, minimum variance portfolio, minimum standard deviation portfolio, mean absolute deviation portfolio, diversification, efficient frontier, portfolio theory, S&P 500

## Iliustracijų sąrašas

|    |                                                                                         |    |
|----|-----------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1  | S&P 500 indekso kainos grafikas su išskirstytais laiko periodais D1, D2 ir D3 . . . . . | 15 |
| 2  | S&P 500 indekso komponentų skirtumai tarp periodų . . . . .                             | 16 |
| 3  | Minimalaus standartinio nuokrypio portfelio svoriai D1 periodui . . . . .               | 18 |
| 4  | Minimalaus standartinio nuokrypio portfelio svoriai D2 periodui . . . . .               | 18 |
| 5  | Minimalaus standartinio nuokrypio portfelio svoriai D3 periodui . . . . .               | 19 |
| 6  | Vidutinio absoliutaus nuokrypio portfelio svoriai D1 periodui . . . . .                 | 20 |
| 7  | Vidutinio absoliutaus nuokrypio portfelio svoriai D2 periodui . . . . .                 | 20 |
| 8  | Vidutinio absoliutaus nuokrypio portfelio svoriai D3 periodui . . . . .                 | 21 |
| 9  | Istorinė S&P 500, Min-STD ir MAD portfelių grąža D1 periode . . . . .                   | 23 |
| 10 | Istorinė S&P 500, Min-STD ir MAD portfelių grąža D2 periode . . . . .                   | 23 |
| 11 | Istorinė S&P 500, Min-STD ir MAD portfelių grąža D3 periode . . . . .                   | 24 |
| 12 | Ateities S&P 500, Min-STD ir MAD portfelių grąža T1 periode . . . . .                   | 25 |
| 13 | Ateities S&P 500, Min-STD ir MAD portfelių grąža T2 periode . . . . .                   | 26 |
| 14 | Ateities S&P 500, Min-STD ir MAD portfelių grąža T3 periode . . . . .                   | 26 |
| 15 | Standartinio nuokrypio ir vidutinio absoliutaus nuokrypio frontai D1 periodu . . . .    | 28 |
| 16 | Standartinio nuokrypio ir vidutinio absoliutaus nuokrypio frontai D2 periodu . . . .    | 29 |
| 17 | Standartinio nuokrypio ir vidutinio absoliutaus nuokrypio frontai D3 periodu . . . .    | 29 |

## Lentelių sąrašas

|   |                                                                                          |    |
|---|------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1 | S&P 500 indekso komponentų skaičiai trijų skirtingų laikotarpių pradžioje . . . . .      | 16 |
| 2 | Minimalaus standartinio nuokrypio portfelių svorių charakteristikos skirtingai periodais | 19 |
| 3 | Vidutinio absoliutaus nuokrypio portfelių svorių charakteristikos skirtingai periodais . | 21 |
| 4 | Sudarytų portfelių grąžos ir rizikos charakteristikos . . . . .                          | 24 |
| 5 | S&P 500 grąžos ir rizikos charakteristikos . . . . .                                     | 25 |
| 6 | Ateities sudarytų portfelių grąžos ir rizikos charakteristikos . . . . .                 | 27 |
| 7 | Ateities S&P 500 grąžos ir rizikos charakteristikos . . . . .                            | 27 |

# Turinys

|                                                                                               |           |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Santrauka</b>                                                                              | <b>2</b>  |
| <b>Summary</b>                                                                                | <b>3</b>  |
| <b>Iliustracijų sąrašas</b>                                                                   | <b>4</b>  |
| <b>Lentelių sąrašas</b>                                                                       | <b>5</b>  |
| <b>Žymėjimai</b>                                                                              | <b>7</b>  |
| <b>Ivadas</b>                                                                                 | <b>8</b>  |
| <b>1. Portfelio teorija</b>                                                                   | <b>9</b>  |
| 1.1. Modernaus portfelio teorija                                                              | 9         |
| 1.2. Minimalaus standartinio nuokrypio portfeliai                                             | 10        |
| 1.3. Vidutinio absoliutaus nuokrypio portfeliai                                               | 10        |
| 1.4. Minimalaus standartinio nuokrypio ir vidutinio absoliutaus nuokrypio portfelių skirtumai | 12        |
| 1.5. Efektyvumo frontas                                                                       | 13        |
| <b>2. Efektyvių portfelių sudarymas</b>                                                       | <b>14</b> |
| 2.1. Duomenų rinkimas ir parengimas                                                           | 14        |
| 2.1.1. Duomenų rinkimas                                                                       | 14        |
| 2.1.2. Duomenų parengimas                                                                     | 16        |
| 2.2. Minimalaus standartinio nuokrypio portfelių sudarymas                                    | 17        |
| 2.3. Vidutinio absoliutaus nuokrypio portfelių sudarymas                                      | 19        |
| 2.4. Sudarytų portfelių skirtumai                                                             | 21        |
| <b>3. Portfelių palyginimas su S&amp;P 500</b>                                                | <b>23</b> |
| 3.1. Istorinių rezultatų palyginimas                                                          | 23        |
| 3.2. Būsimos grąžos prognozės                                                                 | 25        |
| 3.3. Portfelių veiksmingumas                                                                  | 27        |
| 3.4. Efektyvumo frontų palyginimas                                                            | 28        |
| <b>Rezultatai ir išvados</b>                                                                  | <b>30</b> |
| <b>1 priedas. Algoritmai</b>                                                                  | <b>32</b> |

## Žymėjimai

- Min-STD žymi minimalų standartinį nuokrypį;
- MAD žymi vidutinį absoliutų nuokrypį;
- MPT žymi Modernaus portfelio teoriją.

## Ivadas

Investavimas ir rizikos valdymas yra neatsiejami šiuolaikinės finansų rinkos elementai, kuriuose teoriniai modeliai ir praktiniai įrankiai vaidina esminį vaidmenį. Viena iš kertinių finansų teorijų yra Modernaus portfelio teorija (*MPT*) [Mar52], kurią 1952 m. pristatė Harry Markowitz. Ši teorija tapo pagrindu formuojant portfelius, kurių tikslas – pasiekti optimalų rizikos ir grąžos balansą, naudojant dispersiją kaip rizikos matą ir ją minimizuojant. Nepaisant *MPT* įtakos, minimalios dispersijos (dar vadinamo minimalaus standartinio nuokrypio) (*Min-STD*) metodas pasižymi ribotumu, nes yra jautrus ekstremalioms reikšmėms ir reikalauja sudėtingų skaičiavimų, ypač dirbant su dideliais duomenų kiekiais.

Dėl šių ribotumų atsirado alternatyvūs rizikos matavimo ir portfelių sudarymo metodai. Vienas iš jų – vidutinio absoliutaus nuokrypio (*MAD*) metodas, kurį 1991 m. pasiūlė Konno ir Yamazaki [KY91]. Šis metodas naudoja absoliutų nukrypimą nuo grąžos vidurkio, todėl yra mažiau jautrus kraštutinėms reikšmėms. Be to, *MAD* metodas pasižymi efektyvesniu skaičiavimo procesu, nes remiasi tiesiniu programavimu, o tai leidžia jį taikyti dideliems duomenų rinkiniams.

Darbe išsamiai nagrinėjami *Min-STD* ir *MAD* optimizavimo metodai, siekiant nustatyti jų taikymo efektyvumą bei įvertinti jų poveikį rizikos mažinimui bei investicijų grąžos optimizavimui.

Darbo tikslas – išanalizuoti ir palyginti minimalios dispersijos ir vidutinio absoliutaus nuokrypio portfelių grąžas su S&P 500 indekso grąžomis, įvertinti sudarytų portfelių rizikos ir grąžos charakteristikas bei nustatyti, kuri strategija yra veiksmingesnė investuotojams, siekiantiems gauti kuo didesnę grąžą prisiimtai rizikai.

Darbo tikslui pasiekti yra išsikelti šie uždaviniai:

- Išnagrinėti minimalios dispersijos ir vidutinio absoliutaus nuokrypio portfelių sudarymo principus, išsiaiškinti šių dviejų metodų skirtumus;
- Sukurti ir optimizuoti skirtingus portfelius pagal minimalios dispersijos ir vidutinio absoliutaus nuokrypio rizikas, naudojant S&P 500 indekso aktyvų duomenis;
- Palyginti sudarytų portfelių rizikas ir grąžas su S&P 500 indeksu;
- Sudaryti efektyvumo frontus ir palyginti rezultatus.



# 1. Portfelio teorija

Portfelio teorija yra esminis šiuolaikinio finansų valdymo principas, leidžiantis investuotojams optimaliai paskirstyti riziką ir užtikrinti didžiausią galimą grąžą. Šios teorijos pagrindas – esminis ryšys tarp rizikos ir grąžos: siekiant didesnės grąžos, paprastai reikia prisiimti didesnę riziką. Todėl pagrindinis portfelio teorijos tikslas – optimizuoti investicijų paskirstymą, siekiant geriausio rizikos ir grąžos santykio.

Tolesniuose skyriuose bus detaliau aptarta Modernaus portfelio teorija bei portfelio sudarymo strategijos: minimalaus standartinio nuokrypio ir vidutinio absoliutaus nuokrypio metodai.

## 1.1. Modernaus portfelio teorija

Modernaus portfelio teorija (angl. *Modern Portfolio Theory*, MPT), kurią 1952 m. pristatė Harry Markowitz, yra algoritmas, pagal kurį portfeliai yra sudaromi siekiant ne tik gauti geriausią portfelio rizikos ir grąžos santykį, bet ir atkreipiant dėmesį į užsibrėžtą riziką. Markowitz darbas tapo pagrindu tolesniems tyrimams, kurių metu buvo tobulinama ir plėtojama vidutinės grąžos ir dispersijos analizė. Pavyzdžiui, R.C. Merton savo darbe „*An Analytic Derivation of the Efficient Portfolio Frontier*“ (1972) analitiškai išvedė efektyvumo fronto formulę, taip patobulindamas teorinį modelį ir suteikdamas investuotojams gilesnį supratimą apie optimalaus portfelio sudarymą [Mer72]. Šios teorijos pagrindu matematiškai portfelio vidutinė grąža  $\mathbb{E}(R_p)$  gali būti išreikšta kaip svorių  $w_i$ , priskirtų kiekvienam aktyvui  $i$  iš viso  $n$  aktyvų rinkinio, ir jų individualių vidutinių grąžų  $\mathbb{E}(R_i)$  svertinė suma:

$$\mathbb{E}(R_p) = \sum_i w_i \mathbb{E}(R_i). \quad (1)$$

Portfelio rizika paprastai matuojama dispersija  $\sigma_p^2$ , kuri priklauso ne tik nuo individualių aktyvų dispersijų  $\sigma_i^2$ , bet ir nuo jų kovariacijų  $\text{Cov}(R_i, R_j)$ :

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \text{Cov}(R_i, R_j). \quad (2)$$

Pagrindinis šios teorijos principas yra diversifikacija, kuri leidžia sumažinti riziką, susijusią su atskirų aktyvų specifiniais veiksniais. Diversifikacijos efektyvumas priklauso nuo aktyvų tarpusavio koreliacijos – kuo mažesnė koreliacija tarp portfelį sudarančių aktyvų, tuo efektyviau mažinama bendroji rizika.

Remiantis minėtomis formulėmis (1) ir (2), vidutinės dispersijos optimizavimas siekia rasti tokius svorius  $w_i^*$ , kurie maksimizuoja portfelio grąžą esant užduotam rizikos lygiui, arba minimizuoja riziką pasiekus norimą grąžos lygį. Rezultatas yra efektyvumo frontas (angl. *efficient frontier*) (žr. paskyrį 1.5.), vaizduojantis visas optimalias portfelių kombinacijas plokštumoje „rizika–grąža“. Tačiau MPT remiasi prielaida, kad dispersija tinkamai atspindi būsimų grąžų riziką, ir daro prielaidą, jog investuotojai yra racionalūs bei siekia išvengti rizikos. Praktiškai šios prielaidos dažnai neatitinka realių sąlygų, ypač jei grąžos pasiskirstymas yra stipriai asimetriškas arba pasižymi „ilgomis uodegomis“. Todėl MPT susiduria su sunkumais, susijusiais su kraštutinių reikšmių įtaka, ribota galimybe pritaikyti

modelį skirtingiems investuotojų poreikiams ir didėjančiu skaičiavimų sudėtingumu, kai didėja aktyvų skaičius ir duomenų apimtis.

## 1.2. Minimalaus standartinio nuokrypio portfeliai

Minimalaus standartinio nuokrypio (angl. *minimum variance*) portfeliai yra sudaromi taip, kad jų dispersija (ir atitinkamai standartinis nuokrypis  $\sigma_p$ ) būtų pati mažiausia. Tokie portfeliai ypač tinka investuotojams, siekiantiems sumažinti bendrą riziką, net jei tai reiškia galimai mažesnę laukiamą grąžą. Formuluoiant optimizavimo uždavinį, siekiama rasti svorius  $\{w_i\}_{i=1}^n$ , kurie minimizuoja portfelio dispersiją:

$$\min_{\{w_i\}} \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \text{Cov}(R_i, R_j).$$

Prie šio optimizavimo uždavinio paprastai pridedamos papildomos apribojimų sąlygos. Dažnai taikomas visiško investavimo apribojimas (angl. *full investment constraint*), reikalaujantis, kad bendra svorių suma būtų lygi 1:

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1.$$

Be to, gali būti taikomas draudimas skolintis ir parduoti vertybinius popierius, reikalaujantis, kad kiekvieno aktyvo svoris būtų teigiamas:

$$w_i \geq 0, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Tokiu būdu minimalaus standartinio nuokrypio portfelio parinkimas tampa kvadratinio programavimo uždaviniu, kurio sprendimas gali būti randamas pasitelkiant efektyvius skaitinius algoritmus. Šis požiūris ypač patrauklus rizikos vengiančiam investuotojui, kuriam svarbiau yra išlaikyti žemą nepastovumo lygį, nei maksimizuoti laukiamą grąžą. Tokie portfeliai paprastai yra koncentruoti į žemos koreliacijos, mažo kintamumo aktyvus, taip siekiant užtikrinti kuo stabilesnę portfelio vertės dinamiką ilgalaikėje perspektyvoje.

## 1.3. Vidutinio absoliutaus nuokrypio portfeliai

Vidutinio absoliutaus nuokrypio (angl. *mean absolute deviation*, MAD) portfeliai naudoja vidutinį absoliutų grąžos nuokrypį nuo jos vidurkio kaip rizikos matą. Tarkime, kad turime portfelį, sudarytą iš  $n$  aktyvų, kurių svoriai yra  $\{w_i\}_{i=1}^n$ , o kiekvieno aktyvo grąža yra atsitiktinis dydis  $R_i$ . Tuomet portfelio tikėtina grąža yra:

$$\mu_p = \sum_{i=1}^n w_i \mu_i,$$

kai  $\mu_i = \mathbb{E}[R_i]$  yra aktyvo  $i$ -tojo laukiamoji grąža. Vidutinis absoliutus nuokrypis, matuojantis portfelio riziką, apibrėžiamas kaip:

$$\text{MAD}_p = \mathbb{E}[|R_p - \mu_p|],$$

kai  $R_p = \sum_{i=1}^n w_i R_i$ . Portfelio, sudaryto iš  $J$  aktyvų, vidutinis absoliutus nuokrypis per  $T$  laiko intervalų su svoriais  $w_j$  aktyvui  $j$  yra apskaičiuojamas pagal formulę:

$$\text{MAD} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left| \sum_{j=1}^J w_j (r_{t,j} - \bar{r}_j) \right|,$$

kai  $r_{t,j}$  yra aktyvo  $j$  grąža laiko momentu  $t$ ,  $\bar{r}_j$  yra aktyvo  $j$  vidutinė grąža, o  $w_j$  yra portfelio dalis, investuota į aktyvą  $j$ . Pažymėtina, kad dėl absoliučiuųjų reikšmių naudojimo, portfelio MAD nėra lygi atskirų aktyvų  $\text{MAD}_j$  svertinei sumai.

Portfelio optimizavimo uždavinio tikslas – rasti tokį investicinių svorių  $w_j$  paskirstymą, kuris minimizuotų pasirinktą rizikos matą ir kartu išlaikytų reikalaujamą minimalią grąžą bei kitus investuotojo nustatytus apribojimus. Tarkime, jog investicinius sprendimus galima priimti kasdien fiksuotu laikotarpiu  $t = 1, \dots, T$ , o investuotojas turi prieigą prie  $J$  aktyvų, į kuriuos gali investuoti.

Pradinė vidutinio absoliutaus nuokrypio formulė yra:

$$\text{MAD} = \min \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left| \sum_{j=1}^J w_j (r_{t,j} - \bar{r}_j) \right|$$

su sąlygomis:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^J w_j \bar{r}_j &\geq R, \\ \sum_{j=1}^J w_j &= 1, \\ w_j &\geq 0, \quad \forall j \in J, \\ w_j &\leq w_j^{ub}, \quad \forall j \in J, \end{aligned} \tag{3}$$

čia  $R$  – minimali reikalaujama portfelio grąža. Apatinė riba  $w_j \geq 0$  užtikrina, kad vertybinių popierių nebus galima parduoti, o viršutinė riba  $w_j \leq w_j^{ub}$  garantuoja tinkamą portfelio diversifikacijos lygį.

Apibrėžus pagalbinus kintamuosius  $u_t \geq 0$  ir  $v_t \geq 0$  kiekvienam  $t = 1, \dots, T$ , uždavinį galima performuluoti kaip tiesinį optimizavimo uždavinį:

$$\text{MAD} = \min \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (u_t + v_t)$$

su sąlygomis:

$$\begin{aligned}
u_t - v_t &= \sum_{j=1}^J w_j (r_{t,j} - \bar{r}_j) \quad \forall t = 1, \dots, T, \\
\sum_{j=1}^J w_j \bar{r}_j &\geq R, \\
\sum_{j=1}^J w_j &= 1, \\
w_j &\geq 0, \quad \forall j \in J, \\
w_j &\leq w_j^{ub}, \quad \forall j \in J, \\
u_t, v_t &\geq 0, \quad \forall t = 1, \dots, T.
\end{aligned} \tag{4}$$

Tokiu būdu, pasitelkus pagalbinius kintamuosius, vidutinių absoliučių nuokrypių minimizavimo uždavinys (4) tampa tiesinio programavimo uždaviniu, kurį galima efektyviai išspręsti, tenkinant investuotojo reikalavimus ir diversifikacijos sąlygas.

#### 1.4. Minimalaus standartinio nuokrypio ir vidutinio absoliutaus nuokrypio portfelių skirtumai

Minimalaus standartinio nuokrypio (Min-STD) ir vidutinio absoliutaus nuokrypio (MAD) portfelių sudarymo metodai iš esmės skiriasi savo rizikos vertinimo principais, optimizavimo uždavinio sudėtingumu ir jautrumu duomenų pasiskirstymo ypatybėms. Pagrindinis Min-STD metodo bruožas – kvadratinis rizikos matas (dispersija), kuriuo siekiama mažinti bendrą portfelio kintamumą. Toks požiūris pabrėžia didesnius nuokrypius nuo vidurkio, todėl yra jautresnis kraštinėms reikšmėms. Be to, šio metodo sprendimas dažnai reikalauja kvadratinio programavimo, kuris, didėjant aktyvų skaičiui, tampa skaičiavimo požiūriu sudėtingesnis ir reikalauja daugiau resursų.

Kita vertus, MAD metodas remiasi absoliučia grąžos nuokrypio verte, todėl rizika matuojama tiesiogiai įvertinant portfelio grąžų nuokrypius nuo jų vidurkio. Dėl to jis mažiau reaguoja į kraštutines grąžų reikšmes ir užtikrina stabilesnį rizikos vertinimą, ypač esant plačiai ar asimetriškai pasiskirsčiusioms grąžoms. Tiesinio programavimo sprendimo struktūra leidžia efektyviau apskaičiuoti MAD portfelius didelių duomenų imčių atvejais, todėl šis metodas gali būti patrauklesnis praktinei investicijų valdymo veiklai, kai norima greitai ir patikimai optimizuoti portfelį.

Min-STD portfeliai dažniau linkę išlaikyti platesnį aktyvų spektrą, nes siekiama subalansuoti kovariacijų poveikį ir taip sumažinti bendrą dispersiją. Tuo tarpu MAD metodas, orientuotas į nuoseklesnę rizikos matavimo strategiją, kartais gali sukcentruoti svorius į mažesnį skaičių aktyvų, taip geriau pasinaudodamas tų aktyvų stabilumu, tačiau rizikuodamas sumažinti diversifikacijos teikiamą naudą.

Pasirinkimas tarp Min-STD ir MAD metodų priklauso nuo investuotojo prioritetų: jei svarbus mažas jautrumas kraštinėms reikšmėms, paprastesnis skaičiavimas ir galimybė dirbti su dideliais duo-

menų rinkiniais, MAD metodas yra patrauklesnis. Tačiau jei investuotojui yra priimtinas didesnis skaičių sudėtingumas, Min-STD metodas gali užtikrinti didesnę portfelio diversifikaciją.

## 1.5. Efektyvumo frontas

Efektyvumo frontas (angl. *efficient frontier*) yra tiesė arba hiperbolės šaka, apibrėžianti visas efektyvių portfelių kombinacijas, iš kurių tikimasi didžiausios grąžos esant tam tikram rizikos lygiui. Portfelis yra efektyvus, kokioje nors portfelių aibėje, jei nėra kito portfelio, kuris duotą didesnę grąžą esant mažesnei arba tokiai pačiai rizikai.

Efektyvumo frontas dažniausiai vaizduojamas dviem ašimis: horizontali ašis žymi riziką (standartinį nuokrypį arba vidutinį absoliutų nuokrypį), o vertikali – tikėtiną portfelio grąžą. Kiekvienas taškas šioje plokštumoje atitinka tam tikrą portfelį, o efektyvumo frontas jungia tik tuos portfelius, kurie savo pelno-rizikos santykiu yra pranašesni už visus kitus portfelius. Investuotojai, atsižvelgdami į savo rizikos toleranciją, renkasi portfelius iš efektyvumo fronto: labiau rizikos vengiantys investuotojai gali rinktis portfelius kairėje fronto dalyje su maža rizika ir mažesne grąža, o investuotojai, toleruojantys didesnę riziką, gali rinktis portfelius dešinėje, siekdami didesnio pelno.

Efektyvumo frontas suteikia koncepcinį pagrindą priimant racionalius investicinius sprendimus ir padeda vizualizuoti įvairius rizikos-grąžos kompromisus, nepriklausomai nuo to, ar rizika matuojama per standartinį nuokrypį ar per vidutinį absoliutų nuokrypį.

## 2. Efektyvių portfelių sudarymas

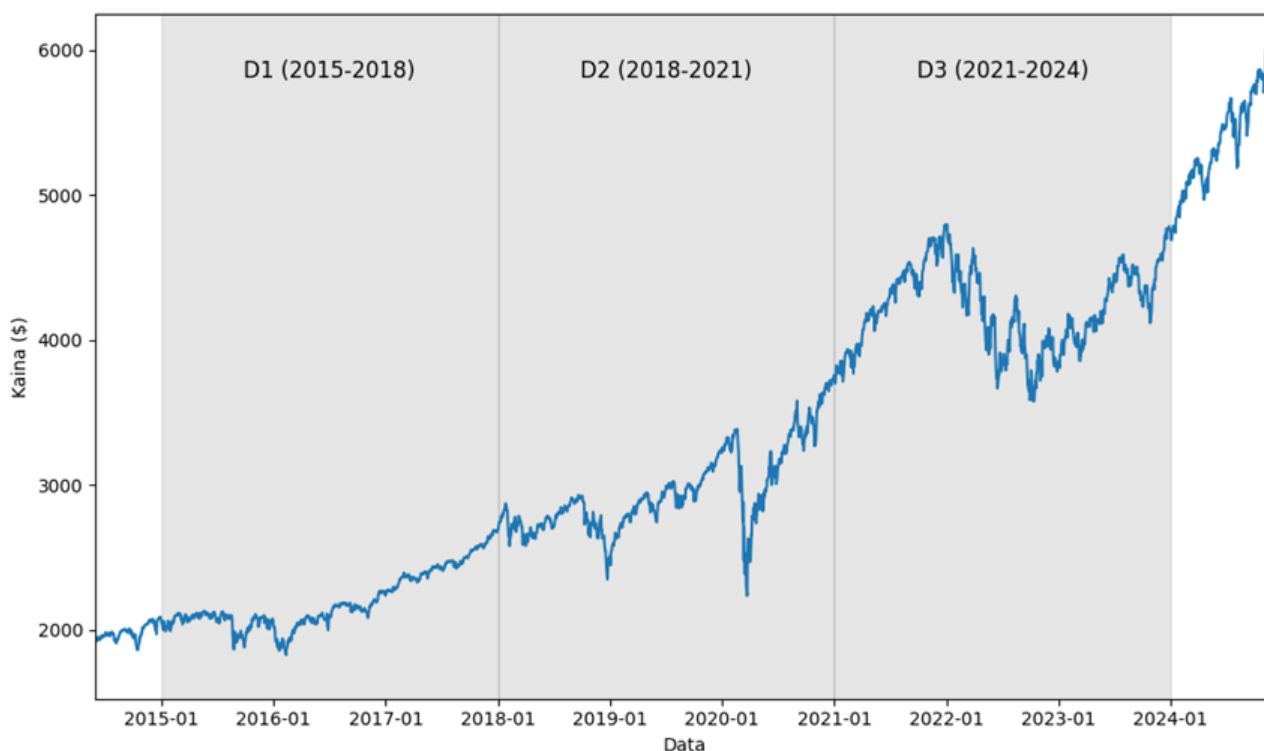
Ankstesniuose skyriuose buvo nagrinėjami minimalaus standartinio nuokrypio ir vidutinio absoliutaus nuokrypio portfelių optimizavimo teoriniai pagrindai. Remdamiesi šia teorija, šioje dalyje bus sudaryti efektyvūs portfeliai, naudojant skirtingų laiko periodų istorinius S&P 500 indekso aktyvų duomenis. Portfelių optimizavimo metu bus taikomas 2 % mėnesinis tikslinės grąžos apribojimas. Tai užtikrins, jog sudarytus portfelius bus galima lengviau palyginti su S&P 500 indekso rezultatais ir į juos bus verta investuoti. Siekiant atspindėti praktines investavimo sąlygas, pasiskolinti ir parduoti vertybinių popierių nebus leidžiama. Bus taip pat aprašyti skirtumai, kilę portfelių sudarymo metu.

### 2.1. Duomenų rinkimas ir parengimas

Duomenų rinkimas ir parengimas yra esminis etapas atliekant portfelių optimizavimą. Kokybiški ir patikimi duomenys užtikrina, kad optimizavimo rezultatai bus tikslūs ir reikšmingi. Šiame skyriuje aptarsime, kaip bus renkami ir paruošiami duomenys, kurie bus naudojami optimizuojant skirtingus portfelius.

#### 2.1.1. Duomenų rinkimas

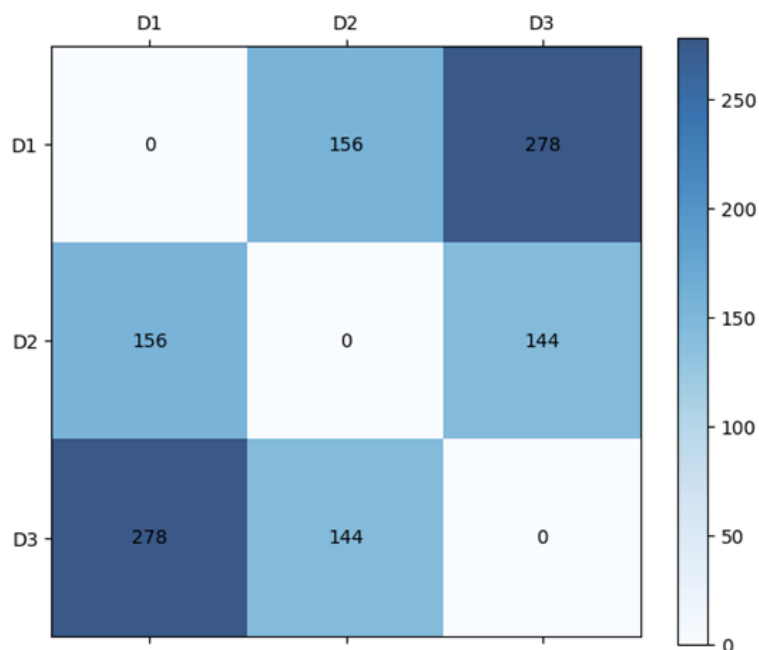
Istorinių duomenų rinkimui yra pasirinkta naudoti „Yfinance“ biblioteką [ran], kuri leidžia atsisųsti finansinius duomenis, naudojant *Python* programavimo kalbą. Pasirinkti mėnesio „žvakių“ (candles) duomenys. Juos sudaro kiekvieno mėnesio atidarymo, aukščiausios, žemiausios ir uždarymo kainų reikšmės. Šios trukmės duomenys padės sumažinti trumpalaikių svyravimų poveikį ir leis sutelkti dėmesį į ilgalaikes rinkos tendencijas. Kiekvienam portfelio optimizavimo metodui buvo pasirinkta atlikti analizę portfeliams, kuriuos sudaro duomenys iš trijų skirtingų 3 metų laiko periodų. Pirmasis laiko periodas trunka nuo 2015 iki 2018 metų, antrasis nuo 2018 iki 2021 metų, o trečiasis – nuo 2021 iki 2024 metų [1 pav.].



**1 pav.** S&P 500 indekso kainos grafikas su išskirstytais laiko periodais D1, D2 ir D3

Šiame grafike [1 pav.] atspindi S&P 500 indekso kainos grafikas, išskirstytas į tris skirtingus laiko periodus, pagal kuriuos bus sudaromi skirtingi portfeliai. Portfelių analizavimas šiais periodais padės išlaikyti rezultatų aktualumą bei leis palyginti skirtingų portfelių sudėtis, keičiantis istoriniams duomenims.

Norėdami palyginti sudarytų portfelių rezultatus su S&P 500 indeksu, neužtenka atsitiktinai pasirinkti tą indeksą sudarančius aktyvus ir juos naudoti optimizavimo metu. Reikia pasirinkti visus aktyvus, kurie sudaro šį indeksą portfelio sudarymo metu. Tai yra svarbu, norint atspindėti realias sąlygas kuo tiksliau, nes S&P 500 indekso bendrovių sąrašas laikui bėgant keičiasi dėl naujai įtrauktų įmonių ar esamų pašalinimo iš sąrašo [Ind]. Kadangi istoriniai šio indekso komponentų sąrašai nėra lengvai viešai prieinami, be prenumeratos ar papildomo mokesčio, jie bus paimami iš žmonių sudarytų istorinių sąrašų [fja]. Šie sąrašai yra pagrįsti besikeičiančiu ir nuolatos atnaujinamu „Wikipedia“ puslapio S&P 500 indekso komponentų sąrašu [Wik]. Pagal gautus duomenis, 2015 metų pradžioje sąraše buvo 499 komponentai, o 2018 ir 2021 metų pradžioje 505 komponentai.



**2 pav.** S&P 500 indekso komponentų skirtumai tarp periodų

Matricoje 2 pav. galima pastebėti, jog net ir 3 metų skirtumas tarp periodų reiškia, kad nagrinėjamų komponentų sąrašas skiriasi apie 30 %, o praėjus 6 metams – daugiau nei 55 %.

### 2.1.2. Duomenų parengimas

Keli punktai yra svarbūs duomenų parengimo etape. Pirmiausia, nepaisant to, kad tam tikro periodo pradžioje kažkuri kompanija egzistavo ir galima buvo prekiauti jos akcijomis, tai nereiškia, jog jos istoriniai duomenys bus prieinami. Tai galėjo nutikti, jei iki periodo pabaigos kompanija patyrė susijungimus, įsigijimus ar restruktūrizacijas, dėl kurių buvo pašalinta iš biržos sąrašų ar jų pavadinimas buvo pakeistas. Pavyzdžiui, SanDisk LLC (biržos simbolis SNDK) įsigijo „Western Digital Corporation“ (NASDAQ: WDC) įmonė 2016 metais [Fin].

**1 lentelė.** S&P 500 indekso komponentų skaičiai trijų skirtingų laikotarpių pradžioje

|                                                  | D1 (2015-2018 m.) | D1 (2015-2018 m.) | D1 (2015-2018 m.) |
|--------------------------------------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| Visi komponentai                                 | 499               | 505               | 505               |
| Egzistuojantys komponentai                       | 382               | 437               | 465               |
| Egzistuojantys komponentai su pilnais duomenimis | 375               | 426               | 463               |

Lentelėje 1 yra pateikti S&P 500 indekso komponentų skaičiai trijų skirtingų laikotarpių pradžioje. Šie komponentai yra suskirstyti į tris kategorijas:

- **Visi komponentai** – į šią grupę įeina visos bendrovės, įtrauktos į S&P 500 indeksą, skaičius kiekvieno laikotarpio pradžioje;



- **Egzistuojantys komponentai** – tai apima S&P 500 indekso bendroves, kurios kiekvienu atitinkamu laikotarpiu buvo nuolat įtrauktos į biržos sąrašus;
- **Egzistuojantys komponentai su pilnais duomenimis** – šioje kategorijoje esami komponentai susiaurinami iki tų, kurių visų mėnesių to periodo duomenys buvo prieinami.

Siekiant užtikrinti rezultatų nuoseklumą ir patikimumą, buvo atmesti komponentų duomenys, kurių bent vieno mėnesio kainos trūksta. Net vieno mėnesio „žvakės“ duomenų nebuvimas gali iškreipti pagrindinių finansinių rodiklių, grąžos, kintamumo ir koreliacijos, skaičiavimus. Šie rodikliai yra labai svarbūs optimizuojant portfelį ir vertinant rezultatus.

Paskutinis duomenų rengimo etapas – apskaičiuoti mėnesio grąžą pagal kiekvieno komponento uždarymo kainas. Mėnesio grąža apskaičiuojama kaip einamojo mėnesio paskutinės prekybos dienos uždarymo kainos ir praėjusio mėnesio paskutinės prekybos dienos uždarymo kainos procentinis pokytis. Šis žingsnis yra labai svarbus siekiant standartizuoti duomenis ir užtikrinti visų komponentų ir laikotarpių vienodumą. Naudojant mėnesio grąžą, analizėje išlyginamas kasdienis rinkos triukšmas, o dėmesys sutelkiamas į vidutinės trukmės tendencijas, kurios yra svarbesnės portfelio sudarymui ir rezultatų vertinimui.

## 2.2. Minimalaus standartinio nuokrypio portfelių sudarymas

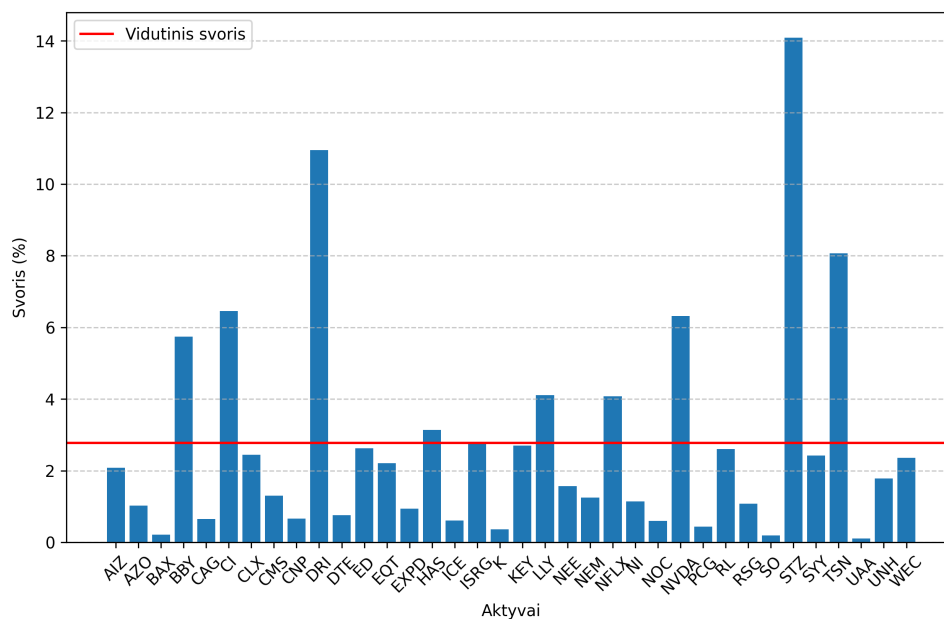
Minimalaus standartinio nuokrypio portfelių sudarymas bus vykdomas pasitelkus kvadratinio programavimo optimizavimo algoritmą. Optimizavimas atliktas naudojant Python funkciją *scipy.optimize.minimize* iš Scipy bibliotekos [Com]. Ši funkcija remiasi skaitmeniniais optimizavimo metodais, tokiais kaip nuoseklus mažiausių kvadratų programavimo algoritmas (SLSQP). Taikyti šie apribojimai:

$$\sum w_i = 1, \quad (5)$$

$$w_i \geq 0. \quad (6)$$

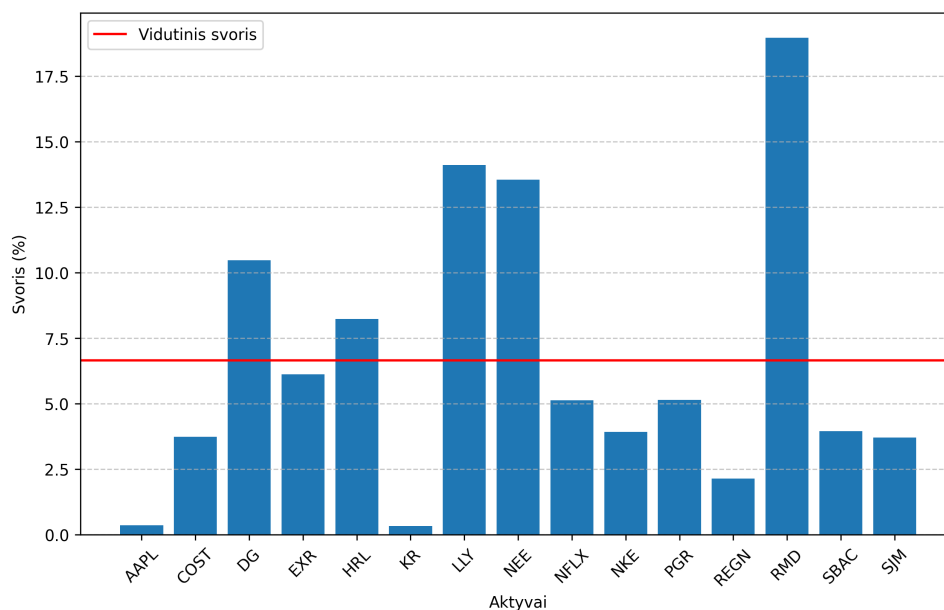
Čia  $w_i$  yra svoris, priskirtas  $i$ -tajam portfelio turto aktyvui. Jis rodo, kokią portfelio dalį sudaro investicijos į kiekvieną atskirą aktyvą. Pirmasis apribojimas (5) garantuoja, kad visas turimas kapitalas bus paskirstytas pasirinktam portfelio turtui. Jei šio apribojimo nebūtų, optimizavimo procese dalis kapitalo gali likti neinvestuota arba per daug įsiskolinti portfeliui skolinantis papildomų lėšų. Visiškai investuotas portfelis yra labai svarbus daugumoje realių scenarijų, nes jis atspindi praktinį turimų išteklių panaudojimą be perteklinių grynųjų pinigų ar finansinio sverto. Antroji sąlyga (6) neleidžia pasiskolinti ir parduoti vertybinių popierių, kurie gali sukelti papildomų išlaidų ir didesnę riziką.

Pagal šiuos apribojimus ir optimizavimo algoritmą, sudaryti šie portfeliai:



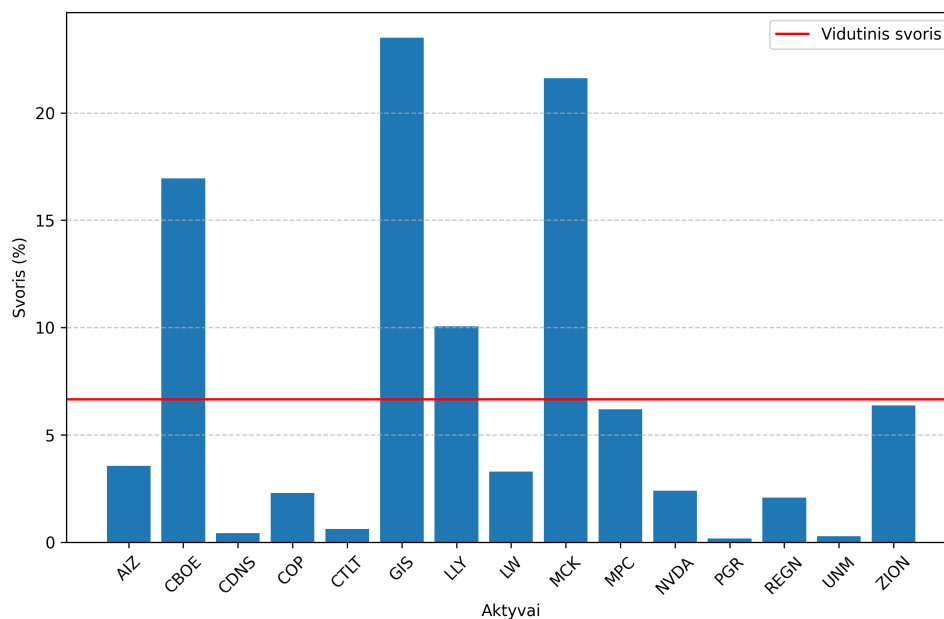
**3 pav.** Minimalaus standartinio nuokrypio portfelio svoriai D1 periodui

Pirmojo portfelio [3 pav.] svorių amplitudė yra labai plati. Didžiausias svoris (STZ) sudaro ten 14,08 % portfelio, o mažiausias tik 0,10 %. Palyginus šį portfelį su kitais, jį sudaro daugiausia skirtingų aktyvų – net 36. Vidutinis svoris siekia tik 2,77 %.



**4 pav.** Minimalaus standartinio nuokrypio portfelio svoriai D2 periodui

Antrojo portfelio [4 pav.] paskirstymas yra labiau koncentruotas, palyginti su D1 [3 pav.]. Jį sudaro 15 aktyvų – tai yra 2,4 kartus mažiau. Didžiausias svoris sudaro 18,96 % viso portfelio, o vidutinis svoris yra lygis 6,66 %.



**5 pav.** Minimalaus standartinio nuokrypio portfelio svoriai D3 periodui

Trečiojo portfelio [5 pav.] svorių ypatybės yra labai panašios į antrojo [4 pav.]. Vidutinis svoris lygus 6,65 % ir visų jų yra tiek pat – 15. Pagrindinis skirtumas yra didžiausias svoris, kuris siekia 23,46 %. Šis svoris yra 1,23 didesnis nei antrojo portfelio ir apie 1,66 karto viršija pirmojo [3 pav.]. Tai parodo, jog rizika yra labiau koncentruota.

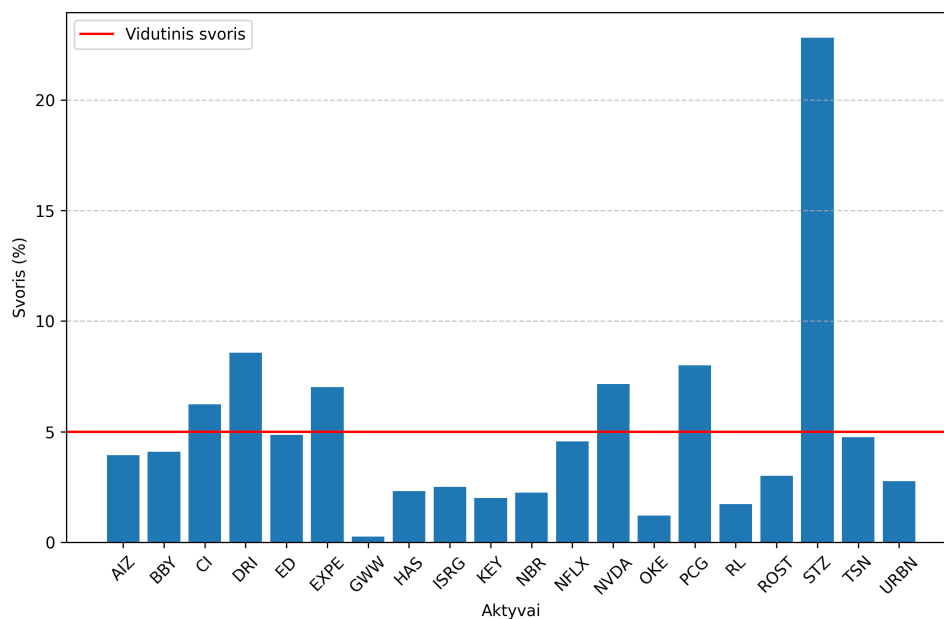
**2 lentelė.** Minimalaus standartinio nuokrypio portfelių svorių charakteristikos skirtingai periodais

| Periodas       | Vidutinis svoris (%) | Standartinis nuokrypis (%) | Didžiausias svoris (%) | Mažiausias svoris (%) | Svorių kiekis |
|----------------|----------------------|----------------------------|------------------------|-----------------------|---------------|
| D1 (2015–2018) | 2,77                 | 3,05                       | 14,08                  | 0,10                  | 36            |
| D2 (2018–2021) | 6,66                 | 5,22                       | 18,96                  | 0,34                  | 15            |
| D3 (2021–2024) | 6,65                 | 7,56                       | 23,46                  | 0,26                  | 15            |

Lentelėje 2 pateiktos minimalaus standartinio nuokrypio portfelių svorių charakteristikos, kurios apima tris periodus. Galima pastebėti, kad kai standartinis nuokrypis didėja, svorių skaičius portfelyje sumažėja. Tai parodo, kad daugiau aktyvų bus atsakingi už bendrą portfelio riziką.

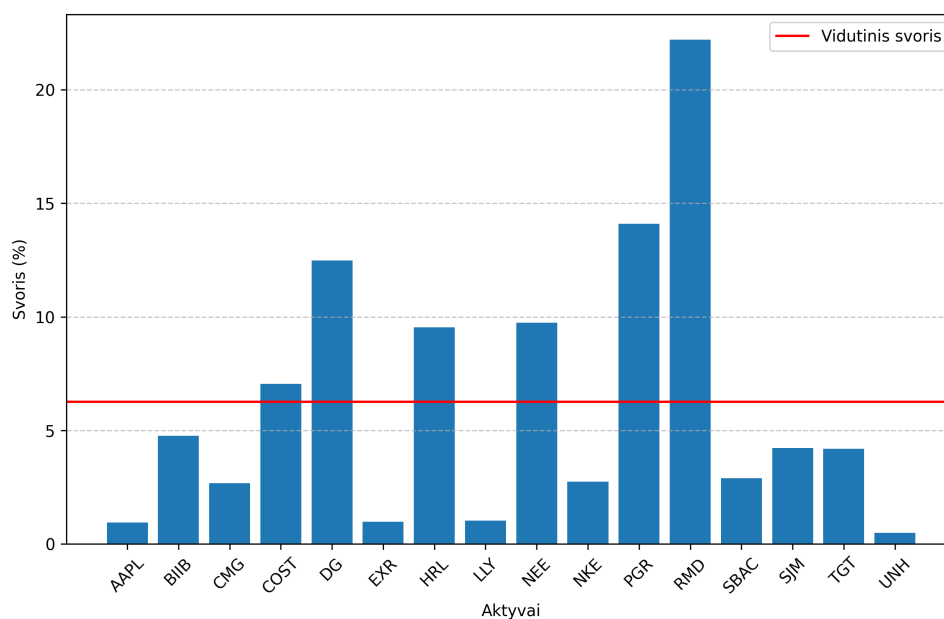
## 2.3. Vidutinio absoliutaus nuokrypio portfelių sudarymas

Vidutinio absoliutaus nuokrypio portfelių sudarymo metu bus taikomas tiesinio programavimo metodas. Formuluoju ir sprendžiant tiesinio optimizavimo uždavinį, buvo naudojama *AMPLpy*, *AMPL* optimizavimo kalbos [Cor] Python sąsaja, kurios pagalba buvo apibrėžtas vidutinio absoliutaus nuokrypio minimizavimo uždavinys [žr. 1 algoritmas priedas]. Taikyti tie patys portfelio apribojimai kaip ir minimalaus standartinio nuokrypio portfelių sudarymo metu. Pagal tai, buvo sudaryti trys portfeliai.



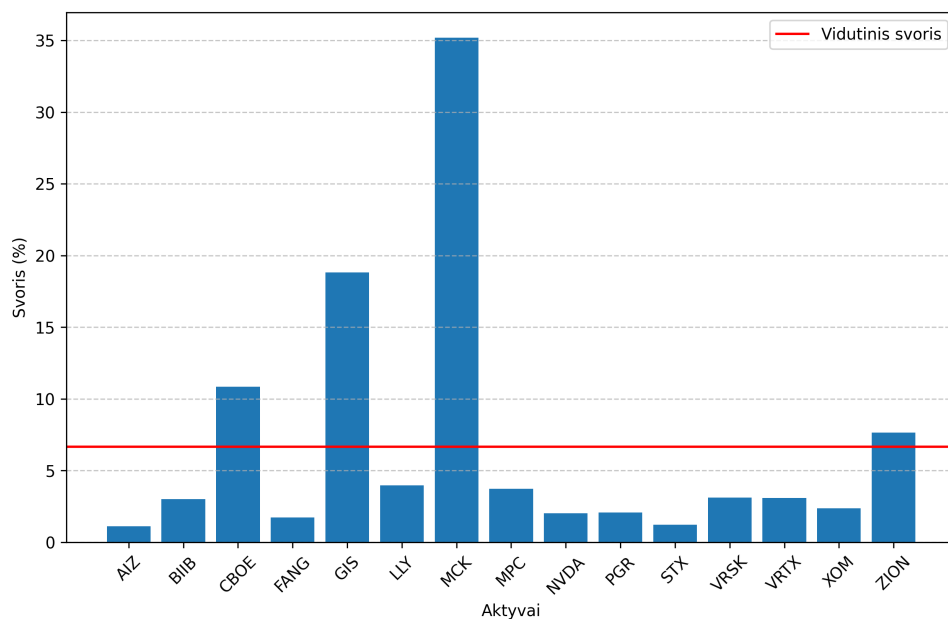
**6 pav.** Vidutinio absoliutaus nuokrypio portfelio svoriai D1 periodui

Pirmojo portfelio [6 pav.] vidutinis vienam aktyvui priskirtas svoris yra 5,00 %. Didžiausias svoris sudaro 22,81 % viso portfelio, o bendras aktyvų kiekis yra 20.



**7 pav.** Vidutinio absoliutaus nuokrypio portfelio svoriai D2 periodui

Antrajame portfelyje [7 pav.] esančių aktyvų skaičius yra 16, tai yra truputi mažiau nei ankstesniame portfelyje [6 pav.]. Mažiausio svorio dalis sudaro 0,49 %, o didžiausias svoris siekia 22,20 % viso portfelio.



**8 pav.** Vidutinio absoliutaus nuokrypio portfelio svoriai D3 periodui

Trečiojo portfelio [8 pav.] didžiausias svoris yra aukščiausias iš visų sudarytų portfelių – 35,19 %. Nepaisant to, jog svorių standartinis nuokrypis irgi yra aukščiausias (8,87 %), svorių kiekis nėra ženkliai mažesnis – 15. Vidutinis svoris yra 8,87 %.

**3 lentelė.** Vidutinio absoliutaus nuokrypio portfelių svorių charakteristikos skirtingai periodais

| Periodas          | Vidutinis svoris (%) | Standartinis nuokrypis (%) | Didžiausias svoris (%) | Mažiausias svoris (%) | Svorių kiekis |
|-------------------|----------------------|----------------------------|------------------------|-----------------------|---------------|
| D1 (2015–2018 m.) | 5,00                 | 4,68                       | 22,81                  | 0,26                  | 20            |
| D2 (2018–2021 m.) | 6,25                 | 5,82                       | 22,21                  | 0,49                  | 16            |
| D3 (2021–2024 m.) | 6,67                 | 8,87                       | 35,19                  | 1,13                  | 15            |

Lentelėje 3 pateikta, kaip laikui bėgant keitėsi vidutinio absoliutaus nuokrypio portfelių svorių charakteristikos, pereinant nuo diversifikacijos prie koncentracijos. Paskutiniame portfelyje pastebimas didžiausias kintamumas ir koncentracija tarp pagrindinių aktyvų.

## 2.4. Sudarytų portfelių skirtumai

Analizuojant sudarytus portfelius, galima išskirti pagrindinius skirtumus tarp minimalaus standartinio nuokrypio (Min-STD) ir vidutinio absoliutaus nuokrypio (MAD) portfelių, susijusius su jų struktūra, svorių paskirstymu ir skaičiavimo efektyvumu. Šie skirtumai atspindi optimizavimo tikslus, metodų savybes bei praktinius jų taikymo aspektus.

Pagrindinis skirtumas tarp Min-STD ir MAD portfelių yra diversifikacijos lygis. Min-STD portfeliai pasižymi didesne diversifikacija, nes jų optimizavimo algoritmas stengiasi sumažinti bendrą portfelio riziką paskirstant svorius tarp daugiau aktyvų. Tai ypač ryšku pirmojo laikotarpio (D1) portfelyje [3 pav.], kurį sudarė 36 aktyvai. Tuo tarpu MAD portfeliuose pastebima didesnė koncentracija – pavyzdžiui, D2 laikotarpio MAD portfelį [7 pav.] sudarė tik 9 aktyvai. Šie skirtumai rodo, kad Min-STD

portfeliai siekia platesnės rizikos paskirstymo, o MAD portfeliai labiau orientuojasi į mažesnį, labiau koncentruotą aktyvų pasirinkimą.

Min-STD portfeliuose svoriai yra labiau pasiskirstę, o didžiausio svorio aktyvai sudaro mažesnę portfelio dalį, palyginti su MAD portfeliais. Pavyzdžiui, D3 laikotarpiu didžiausias svoris Min-STD portfelyje [5 pav.] buvo 23,46 %, o MAD portfelyje [8 pav.] – 35,19 %. Be to, MAD portfeliuose mažesni svoriai dažnai yra reikšmingai didesni nei Min-STD portfeliuose. Tai taip pat lemia mažesnę diversifikaciją.

Min-STD portfelių sudarymo metu optimizuojamas standartinis nuokrypis, kuris labiau reaguoja į ekstremalias grąžų reikšmes. Tai lemia jautresnį svorių paskirstymą aktyvams su maža kintamumo rizika. Tuo tarpu MAD portfeliuose, optimizuojant vidutinį absoliutų nuokrypį, rizikos mažinimo metodas yra mažiau jautrus ekstremalioms reikšmėms. Tai leidžia MAD metodui efektyviau panaudoti aktyvus su vidutine rizika, tačiau kartu sukelia didesnę koncentraciją.

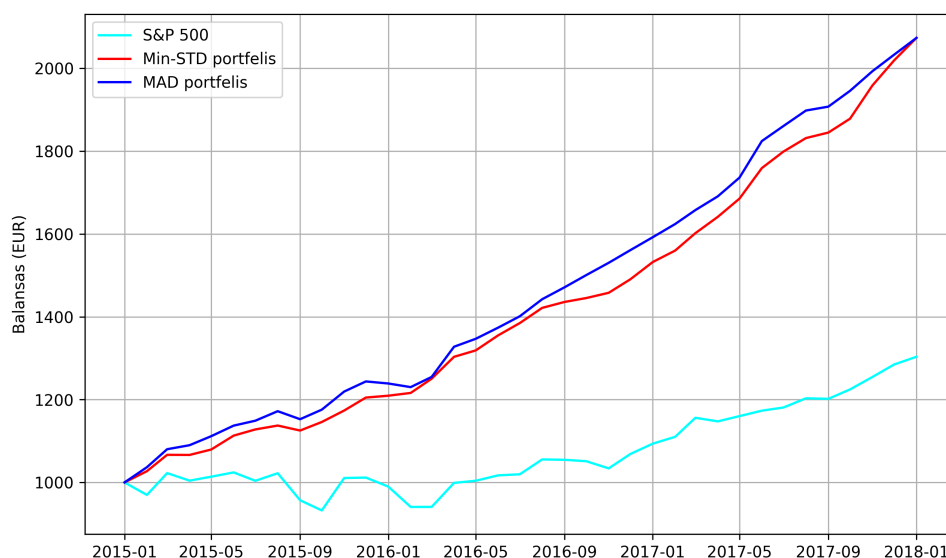
Kitas svarbus skirtumas yra skaičiavimo efektyvumas. Min-STD portfelių sudarymo procesas yra žymiai sudėtingesnis ir reikalauja daugiau skaičiavimo resursų, nes jis remiasi kvadratinio programavimo algoritmais. Praktikoje pastebėta, kad Min-STD portfelių optimizavimas užtruko nuo 5 iki 15 sekundžių, kai tuo tarpu MAD portfelių optimizavimo laikas užtruko nuo 400 milisekundžių iki 1,2 sekundės. Portfelių optimizacijos skaičiavimai buvo atlikti *Windows* aplinkoje, naudojant *AMD Ryzen 5 5600*, 32 GB darbinės atminties bei *NVIDIA GeForce RTX 3060 Ti* vaizdo plokštę. Šis skirtumas gali būti lemiamas veiksnys, kai optimizavimas atliekamas realiu laiku arba kai analizuojama didelė duomenų apimtis.

### 3. Portfelių palyginimas su S&P 500

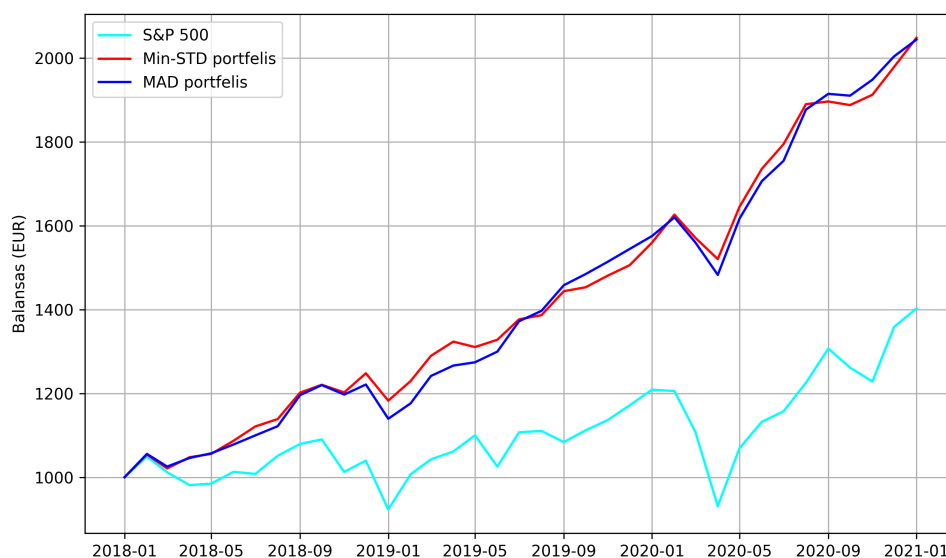
Šiame skyriuje bus palyginami sudarytų portfelių ir S&P 500 grąžos bei rizikos rodikliai, remiantis istoriniais ir ateities duomenimis. Tai padės atskleisti, kaip ateityje keisis portfelių veiksmingumas (žr. poskyrį 3.3.). Be to, bus analizuojamas portfelių pasiskirstymo efektyvumas, lyginant jų efektyvumo frontus.

#### 3.1. Istorinių rezultatų palyginimas

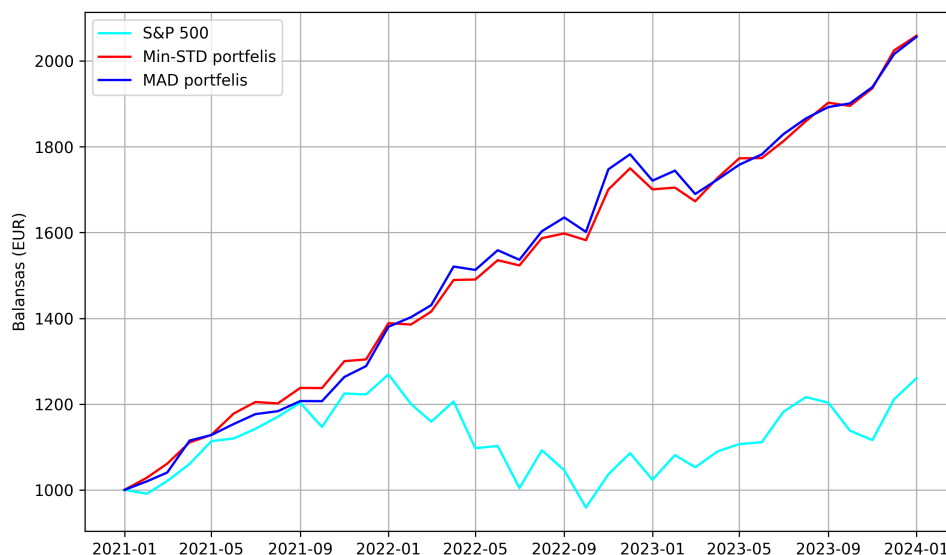
Istoriniai S&P 500, Min-STD ir MAD portfelių rezultatai bei grąžos charakteristikos buvo išanalizuotos D1, D2, ir D3 perioduose. Visuose nagrinėjamuose atvejuose pradinė investicijų suma sudarė 1000 EUR.



**9 pav.** Istorinė S&P 500, Min-STD ir MAD portfelių grąža D1 periode



**10 pav.** Istorinė S&P 500, Min-STD ir MAD portfelių grąža D2 periode



**11 pav.** Istorinė S&P 500, Min-STD ir MAD portfelių grąža D3 periode

Visų portfelių rezultatai tarp skirtingų periodų yra labai panašūs [9 pav.] [10 pav.] [11 pav.]. Sudarytų portfelių vidutinė grąža yra 2 % [žr. 4 lentelė], o S&P 500 – iki 1,09 % [žr. 5 lentelė]. Toks didelis skirtumas yra dėl to, jog portfelių optimizacijos metu, visi duomenys jau buvo žinomi, todėl pasiekti reikiamą mėnesinę grąžą nebuvo sunku. Tai rodo, jog į sudarytų portfelių grąžos ir rizikos charakteristikas reikia žiūrėti atskirai nuo S&P 500.

**4 lentelė.** Sudarytų portfelių grąžos ir rizikos charakteristikos

| Duomenų periodas           | D1      |         | D2      |         | D3      |         |
|----------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Portfelis                  | Min-STD | MAD     | Min-STD | MAD     | Min-STD | MAD     |
| Galutinis balansas         | 2073,64 | 2073,56 | 2048,59 | 2044,33 | 2058,90 | 2056,48 |
| Vidutinė Grąža (%)         | 1,998   | 2,000   | 1,998   | 2,000   | 1,997   | 2,000   |
| Standartinis nuokrypis (%) | 1,27    | 1,408   | 2,895   | 3,171   | 2,332   | 2,610   |
| Šarpo rodiklis             | 1,575   | 1,420   | 0,690   | 0,631   | 0,856   | 0,766   |
| Sortino rodiklis           | 2,742   | 3,068   | 1,197   | 0,876   | 2,079   | 1,453   |
| Maksimalus sumažėjimas (%) | 1,058   | 1,650   | 6,528   | 8,469   | 4,395   | 5,195   |
| VaR (95 %) (%)             | 0,0055  | 0,4603  | 3,2674  | 3,9463  | 1,154   | 2,270   |

Lentelėje 4 lyginamos sudarytų portfelių grąžos ir rizikos charakteristikos skirtingiems istorinių duomenų periodams. Min-STD portfeliai pasižymi ne tik mažesniu kintamumu, bet ir didesniu Šarpo rodikliu visais periodais. Pirmojo periodo MAD portfelio Sortino rodiklis yra didesnis. Nepaisant to, Min-STD portfelių rizika yra mažesnė.



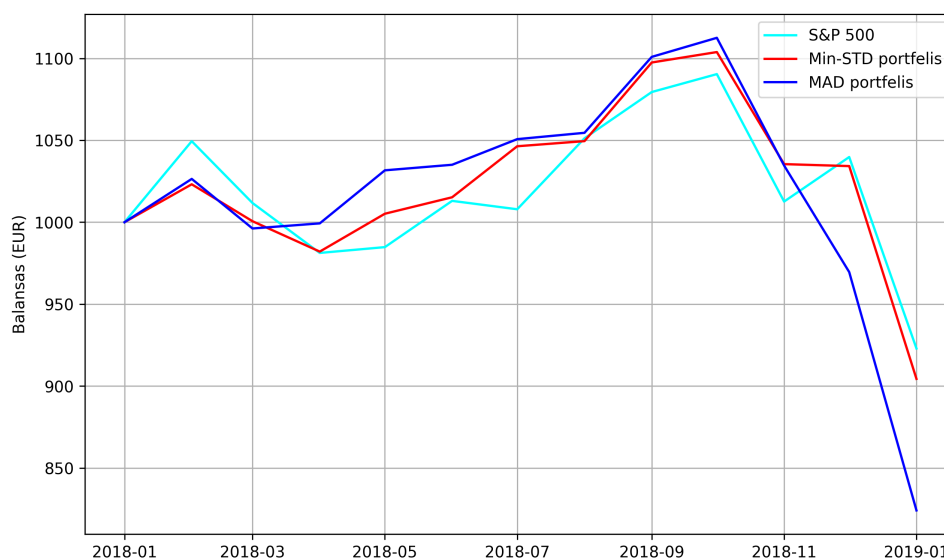
**5 lentelė. S&P 500 grąžos ir rizikos charakteristikos**

| Testinis periodas          | D1     | D2      | D3      |
|----------------------------|--------|---------|---------|
| Galutinis balansas         | 1303,5 | 1402,75 | 1260,47 |
| Vidutinė Grąža (%)         | 0,76   | 1,09    | 0,74    |
| Standartinis nuokrypis (%) | 2,85   | 5,97    | 4,88    |
| Šarpo rodiklis             | 0,27   | 0,18    | 0,15    |
| Sortino rodiklis           | 0,39   | 0,23    | 0,25    |
| Maksimalus sumažėjimas (%) | 8,96   | 23,01   | 24,45   |
| VaR (95 %) (%)             | 3,41   | 8,71    | 8,42    |

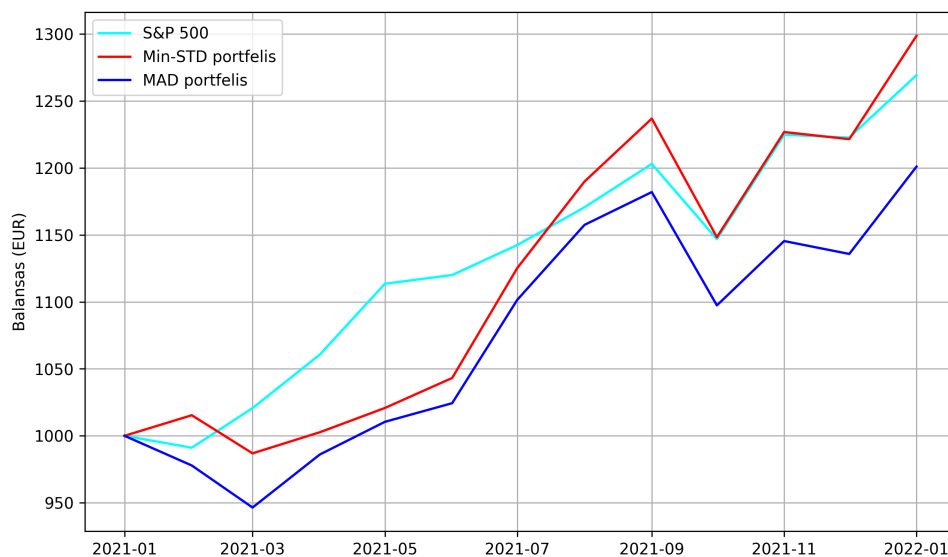
S&P 500 grąžos ir rizikos charakteristikos yra pateiktos 5 lentelėje. Nepastovumas beveik padvigubėja nuo D1 iki D2 ir išlieka didelis D3 periodu, kaip rodo didėjantys standartiniai nuokrypiai. Kartu mažėja Šarpe ir Sortino rodikliai, o reikšmingai didėja maksimalus sumažėjimas ir rizikuojama vertė (angl. *value at risk*) (VaR). Apskritai šie rezultatai rodo, kad laikui bėgant rinkos aplinka tampa vis nepastovesnė. Atliekant šių charakteristikų palyginimą su sukurtų portfelių charakteristikomis, pastebima, kad S&P 500 rizikos rodikliai yra indikatyvūs sudaromų portfelių rodikliams. Tai rodo, kad skirtingus portfelius reikia vertinti santykiškai vienas kito atžvilgiu.

### 3.2. Būsimos grąžos prognozės

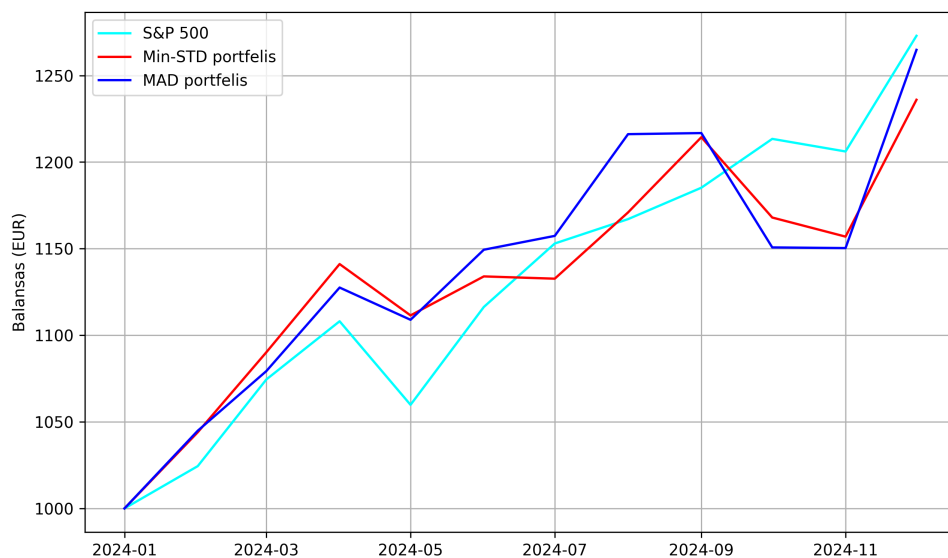
Sudarytų Min-STD ir MAD portfelių bei S&P 500 rezultatai buvo palyginti su testiniais duomenų periodais. Šie periodai yra vienerių metų trukmės, ir jie prasideda nuo sudarytų portfelių duomenų periodo pabaigos – T1 trunka nuo 2019 iki 2020 metų, T2 trunka nuo 2022 iki 2023 metų, T3 trunka nuo 2024-01-01 iki 2024-12-01.



**12 pav. Ateities S&P 500, Min-STD ir MAD portfelių grąža T1 periode**



**13 pav.** Ateities S&P 500, Min-STD ir MAD portfelių grąža T2 periode



**14 pav.** Ateities S&P 500, Min-STD ir MAD portfelių grąža T3 periode

T1 periodo metu [12 pav.], 9 iš 12 mėnesių, MAD portfelio balansas buvo aukštesnis nei Min-STD portfelio ir S&P 500. Periodo pabaigoje, šio portfelio grąža buvo mažiausia. Lyginant T2 laikotarpio grąžas [13 pav.], MAD portfelio grąža niekada neviršijo nei Min-STD portfelio, nei S&P 500 grąžos. T3 laikotarpio metu [14 pav.], MAD portfelio balansas buvo aukštesnis nei S&P 500 8 mėnesius iš eilės, o Min-STD – 6 mėnesius apskritai.

**6 lentelė.** Ateities sudarytų portfelių grąžos ir rizikos charakteristikos

| Duomenų periodas           | T1      |        | T2      |         | T3      |         |
|----------------------------|---------|--------|---------|---------|---------|---------|
| Portfelis                  | Min-STD | MAD    | Min-STD | MAD     | Min-STD | MAD     |
| Galutinis balansas         | 904,4   | 824,1  | 1298,6  | 1200,97 | 1235,96 | 1264,79 |
| Vidutinė Grąža (%)         | -0,67   | -1,34  | 2,11    | 1,49    | 1,83    | 2,05    |
| Standartinis nuokrypis (%) | 4,48    | 5,32   | 4,19    | 4,11    | 3,28    | 3,95    |
| Šarpo rodiklis             | -0,15   | -0,25  | 0,50    | 0,36    | 0,56    | 0,52    |
| Sortino rodiklis           | -0,13   | -0,26  | 0,62    | 0,55    | 1,10    | 0,74    |
| Maksimalus sumažėjimas (%) | -18,07  | -25,92 | -7,16   | -7,15   | -4,73   | -5,46   |
| VaR (95 %) (%)             | 8,74    | 10,20  | 4,54    | 4,78    | 3,15    | 3,35    |

**7 lentelė.** Ateities S&P 500 grąžos ir rizikos charakteristikos

| Duomenų periodas           | T1     | T2     | T3      |
|----------------------------|--------|--------|---------|
| Galutinis balansas         | 922,9  | 1269,2 | 1272,88 |
| Vidutinė Grąža (%)         | -0,51  | 1,89   | 2,07    |
| Standartinis nuokrypis (%) | 4,68   | 2,94   | 2,81    |
| Šarpo rodiklis             | -0,11  | 0,64   | 0,73    |
| Sortino rodiklis           | -0,12  | 0,78   | 0,78    |
| Maksimalus sumažėjimas (%) | -15,35 | -4,67  | -4,35   |
| VaR (95 %) (%)             | 8,77   | 2,40   | 2,29    |

Sudaryti portfeliai [žr. 6 lentelė] T1 ir T3 laikotarpiais pasiekė mažesnę vidutinę grąžą nei S&P 500 [žr. 7 lentelė]. Tačiau, T2 laikotarpiu, Min-STD portfelio vidutinė grąža (2,11 %) buvo didesnė nei S&P 500 (1,89 %). MAD portfelis nesugebėjo įveikti S&P 500 rezultatų, bet T3 laikotarpiu vidutinė grąža (2,05 %) buvo didesnė nei Min-STD portfelio (1,83 %) tuo pačiu laikotarpiu.

Visų testinių periodų rezultatai rodo, jog S&P 500 portfelio Šarpo ir Sortino rodikliai buvo aukštesni nei sudarytų portfelių. Vienintelė tam išimtis yra T3 periodo Min-STD portfelio Sortino rodiklis (1,10), kuris buvo aukštesnis už S&P 500 (0,78). Maksimalus sumažėjimas ir VaR (95 %) visų sudarytų portfelių buvo prastesnis nei S&P 500, išskyrus Min-STD portfelį T1 laikotarpiu – jo VaR (95 %) buvo 8,74 %, o S&P 500 – 8,77 %.

### 3.3. Portfelių veiksmingumas

Portfelių veiksmingumas – tai rodiklis, rodantis, kaip gerai portfelis, sudarytas remiantis istoriniais duomenimis, sugeba išlaikyti stabilią grąžą ir patrauklų rizikos lygį net ir pasikeitus rinkos sąlygoms. Sudaryti portfeliai ankstesniuose perioduose (D1, D2, D3) pasižymėjo stabiliomis grąžomis ir patrauklia rizika, tačiau faktiniai ateities testiniai laikotarpiai (T1, T2, T3) parodė, kad rezultatai nebūtinai kartosis.

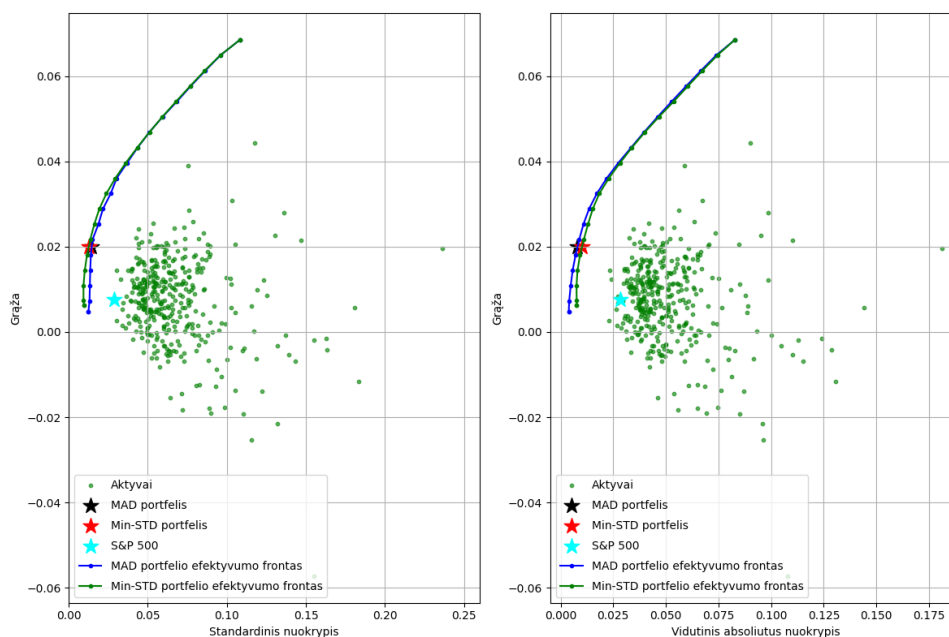
Be to, optimizacijos procesas, grįstas istoriniais duomenimis, gali per daug pritaikyti portfelį prie specifinio laikotarpio dinamikos, taip sumažindamas jo gebėjimą efektyviai veikti, pasikeitus rinkos

sąlygoms. Tai matyti, lyginant T1, T2 ir T3 periodų rezultatus: nors Min-STD strategija T2 laikotarpiu pranoko S&P 500 grąžą, kitais laikotarpiais jos pranašumas nebuvo pastovus. MAD strategija, nors kai kuriais istoriniais periodais pasižymėjo panašiu efektyvumu kaip Min-STD, ateities perioduose dažnai nusileido tiek Min-STD, tiek S&P 500 rezultatams.

Atsižvelgiant į tai, galima daryti išvadą, jog istorinių rezultatų pagrindu sudaryti portfeliai nėra garantuotas ateities sėkmės matas.

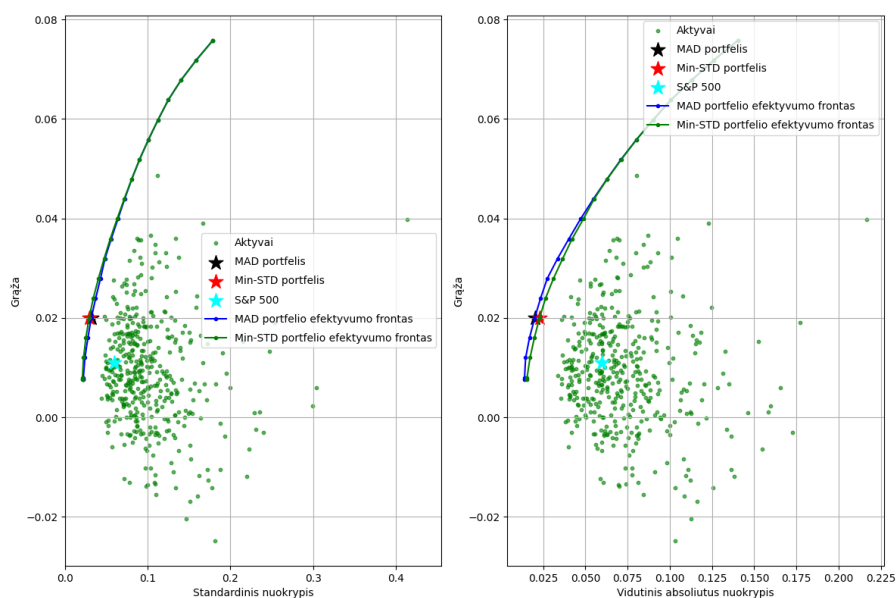
### 3.4. Efektyvumo frontų palyginimas

Efektyvumo frontai bus lyginami naudojant standartinį nuokrypį ir vidutinį absoliutųjį nuokrypį kaip rizikos matą, abiem metodams. Hausdorff atstumas taikomas siekiant kiekybiškai įvertinti skirtumus tarp efektyvumo frontų, parodant jų artumą ar sklaidą. Hausdorff atstumas apibrėžiamas kaip didžiausias minimalus atstumas tarp kiekvieno vieno fronto taško ir jam artimiausio taško kitame fronte, taip kiekybiškai įvertinant jų erdvinį panašumą. Kiekvienam efektyvumo frontui sudaryti pasirinkta naudoti 20 skirtingų portfelių, kurie buvo optimizuoti pagal tolygiai išsidėsčiusią norimą grąžą. Šios grąžos intervalas yra nuo 0 iki didžiausios vidutinės aktyvo grąžos.



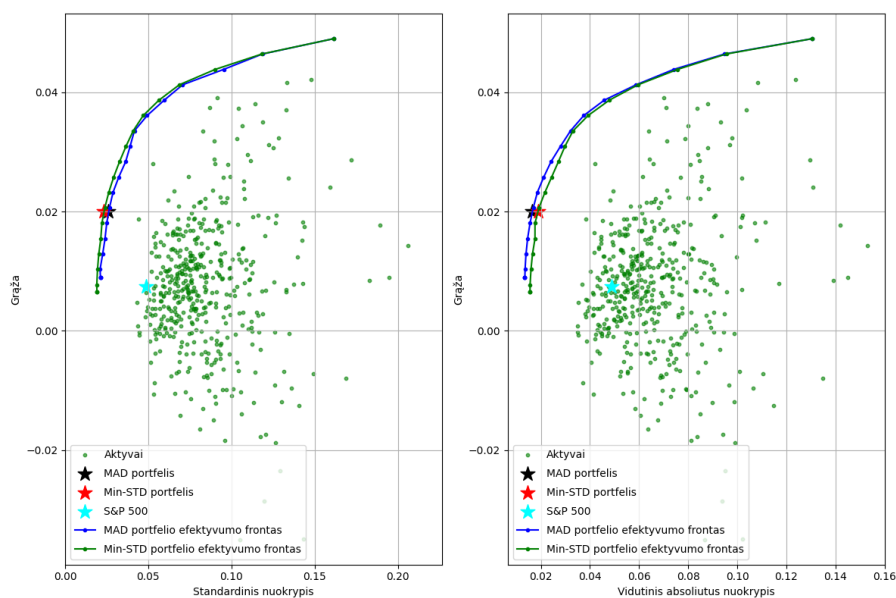
**15 pav.** Standartinio nuokrypio ir vidutinio absoliutaus nuokrypio frontai D1 periodu

Pirmojo periodo efektyvumo frontai [15 pav.] yra labai panašūs. Hausdorffo atstumai tarp efektyvumo frontų kairėje ir dešinėje diagramose yra atitinkamai 0,403 % ir 0,406 %. Tai rodo, jog abiejų optimizavimo metodų taikymas priešingiems rizikos efektyvumo frontams skaičiuoti turi tokią pačią paklaidą. Visus Min-STD portfelio efektyvumo ribos taškus apskaičiuoti užtruko 99,6 sekundės, o MAD – vos 8,7 sekundės.



**16 pav.** Standartinio nuokrypio ir vidutinio absoliutaus nuokrypio frontai D2 periodu

Antrojo periodo efektyvumo frontų [16 pav.] Hausdorfo atstumai yra mažesni. Standartinio nuokrypio efektyvumo frontų atstumas yra 0,29 %, o vidutinio absoliutaus nuokrypio – 0,37 %. Šio periodo metu dar patikimiau būtų galima rinktis priešingą optimizavimo metodą efektyvumo frontui apskaičiuoti. Jei MAD metodas būtų taikomas apskaičiuoti standartinio nuokrypio efektyvumo frontą, tai būtų užtrukę 8,8 sekundės, vietoj 140 sekundžių. Beveik 16 kartų greičiau.



**17 pav.** Standartinio nuokrypio ir vidutinio absoliutaus nuokrypio frontai D3 periodu

Trečiojo periodo efektyvumo frontų [17 pav.] kreivės yra labiau išlenktos, palyginti su ankstesniais periodais. Tai parodo didesnį portfelių grąžos jautrumą rizikos pokyčiams, ypač žemesnio rizikos lygio srityse. Didžiausia vidutinė vieno aktyvo grąža yra mažiausia iš visų periodų – NVDA vidutinė D3 periodo grąža buvo tik 4,89 %. Tai taip pat lėmė faktą, jog efektyvumo fronto kreivė yra labiau išlenkta.

## Rezultatai ir išvados

Šio darbo tikslas buvo išanalizuoti ir palyginti minimalaus standartinio nuokrypio (Min-STD) ir vidutinio absoliutaus nuokrypio (MAD) portfelių grąžas su S&P 500 indekso grąžomis, įvertinti sudarytų portfelių rizikos ir grąžos charakteristikas bei nustatyti, kuri strategija yra veiksmingesnė investuotojams, siekiantiems kuo didesnės grąžos prisiimti rizikai. Tam buvo įgyvendinti šie uždaviniai: išnagrinėti teorinius portfelių sudarymo principus, optimizuoti portfelius pagal Min-STD ir MAD rizikas, palyginti jų rezultatus su S&P 500 indeksu bei sudaryti ir palyginti efektyvumo frontus.

Galima padaryti tokias išvadas:

- Minimalaus standartinio nuokrypio portfeliai pasižymi didesne diversifikacija, o vidutinio absoliutaus nuokrypio portfeliai yra labiau koncentruoti – juos sudaro mažiau aktyvų;
- Minimalaus standartinio nuokrypio portfelį sudaryti vidutiniškai užtruko apie 10 kartų ilgiau nei vidutinio absoliutaus nuokrypio portfelį;
- Sudarytų portfelių rezultatai ženkliai skyrėsi tarp duomenų ir testavimo periodų;
- Pilnais testavimo periodais optimizuoti portfeliai dažniausiai atsiliko nuo S&P 500 rezultatų, o jų rizikos rodikliai buvo prastesni;
- Trečiojo testavimo periodo metu, Min-STD portfelio rezultatai 6 mėnesius buvo geresni nei S&P 500;
- Trečiojo testavimo periodo metu, MAD portfelio rezultatai pirmus 8 mėnesius buvo geresni nei S&P 500;
- Efektyvumo frontų skaičiavimas užtruko 16 kartų ilgiau naudojant minimalaus standartinio nuokrypio algoritmą;
- Efektyvumo frontų analizėje nustatyti maži Hausdorff atstumai tarp Min-STD ir MAD metodų rodo bendrą sudaromų portfelių panašumą.

Tolimesniuose tyrimuose rekomenduojama įtraukti daugiau skirtingos trukmės duomenų. Tai padės užtikrinti optimizavimo algoritmų stabilumą skirtingomis rinkos sąlygomis. Į modelius būtų naudinga įtraukti nerizikingą palūkanų normą, siekiant labiau atspindėti praktines investavimo situacijas. Taip pat būtų naudinga analizuoti skirtingas tikslines grąžas, siekiant nustatyti, kaip rizikos ir grąžos kompromisas keičiasi, kintant investuotojo tikslams. Pasinaudojus *Monte Carlo* simuliacija, galima prognozuoti portfelių rezultatus įvairiomis rinkos sąlygomis, analizuoti galimų grąžų pasiskirstymą bei įvertinti portfelių riziką esant skirtingiems scenarijams [MU49]. Tai padės lengviau suprasti, kuri optimizavimo algoritmo rezultatai bus geresni. Šios rekomendacijos padėtų išplėsti darbo ribas, užtikrinti didesnę rezultatų patikimumą bei geriau atitikti investuotojų poreikius kintančiose rinkos situacijose.

## Literatūra ir šaltiniai

- [Com] S. Community. *SciPy: Scientific Computing Tools for Python*. URL: <https://scipy.org/> (žiūrėta 2024-12-18).
- [Cor] A. D. Corporation. *AMPL Documentation*. URL: <https://amplpy.ampl.com/en/latest/> (žiūrėta 2024-12-18).
- [Fin] Y. Finance. *Western Digital completes SanDisk acquisition*. URL: <https://finance.yahoo.com/news/western-digital-completes-sandisk-acquisition-144901741.html> (žiūrėta 2024-12-18).
- [fja] fja05680. *S&P 500 Historical Components & Changes*. URL: [https://github.com/fja05680/sp500/blob/master/S%26P%20500%20Historical%20Components%20%26%20Changes\(12-10-2024\).csv](https://github.com/fja05680/sp500/blob/master/S%26P%20500%20Historical%20Components%20%26%20Changes(12-10-2024).csv) (žiūrėta 2024-12-16).
- [Ind] S. D. J. Indices. *S&P U.S. Indices Methodology*. URL: <https://www.spglobal.com/spdji/en/documents/methodologies/methodology-sp-us-indices.pdf> (žiūrėta 2024-12-16).
- [KY91] H. Konno, H. Yamazaki. „Mean-absolute deviation portfolio optimization model and its applications to Tokyo stock market“. Iš: *Management Science* 37 (1991), puslapiai 519–531.
- [Mar52] H. Markowitz. „Portfolio Selection“. Iš: *The Journal of Finance* VII (1952), puslapiai 77–91.
- [Mer72] R. C. Merton. „An Analytic Derivation of the Efficient Portfolio Frontier“. Iš: *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 7 (1972), puslapiai 1851–1872.
- [MU49] N. Metropolis, S. Ulam. „The Monte Carlo Method“. Iš: *Journal of the American Statistical Association* 44 (1949), puslapiai 335–341.
- [ran] ranaroussi. *yfinance 0.2.50*. URL: <https://pypi.org/project/yfinance/> (žiūrėta 2024-12-16).
- [Wik] Wikipedia. *List of S&P 500 companies*. URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_S%26P\\_500\\_companies](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_S%26P_500_companies) (žiūrėta 2024-12-16).

---

**1 algoritmas** Vidutinio absoliutaus nuokrypio minimizavimo algoritmas

---

1: **Parametrai:**2:  $R$  (Mažiausia tikėtina grąža)3:  $w_{lb}$  (Apatinė svorių riba)4:  $w_{ub}$  (Viršutinė svorių riba)5:  $\text{monthly\_returns}[t, j]$  (Aktyvo  $j$  mėnesinės pajamos  $j$  laiku  $t$ )6:  $\text{mean\_return}[j]$  (Vidutinė aktyvo  $j$  grąža)7: **Rinkiniai:**

8: ASSETS (Aktyvų rinkinys)

9: TIME (Laikotarpių rinkinys)

10: **Kintamieji:**11:  $w[j] \quad \forall j \in \text{ASSETS}$  (Aktyvo  $j$  svoris portfelyje)12:  $u[t] \geq 0, v[t] \geq 0 \quad \forall t \in \text{TIME}$ 13: **Tikslas:** Vidutinio absoliutaus nuokrypio (MAD) minimizavimas

$$\text{MAD:} \quad \min \frac{1}{|\text{TIME}|} \sum_{t \in \text{TIME}} (u[t] + v[t])$$

14: **Priklauso nuo:**15: *Portfolio Returns:*

$$u[t] - v[t] = \sum_{j \in \text{ASSETS}} w[j] \cdot (\text{monthly\_returns}[t, j] - \text{mean\_return}[j]) \quad \forall t \in \text{TIME}$$

16: *Svorių suma:*

$$\sum_{j \in \text{ASSETS}} w[j] = 1$$

17: *Vidutinė portfelio grąža:*

$$\sum_{j \in \text{ASSETS}} w[j] \cdot \text{mean\_return}[j] \geq R$$

18: *Jokio skolintų vertybinių popierių pardavimo:*

$$w[j] \geq w_{lb} \quad \forall j \in \text{ASSETS}$$

19: *Diversifikavimo apribojimas:*

$$w[j] \leq w_{ub} \quad \forall j \in \text{ASSETS}$$


---