

VILNIAUS UNIVERSITETAS
FIZIKOS FAKULTETAS
TEORINĖS FIZIKOS KATEDRA

Mantas Račiūnas

TRUPMENINIO KRŪVIO SUŽADINIMAI RIBOTŲ MATMENŲ GARDELĖJE

Magistrantūros studijų baigiamasis darbas

(studijų programa – TEORINĖ FIZIKA IR ASTROFIZIKA)

Studentas

Mantas Račiūnas

Darbo vadovas

Prof. dr. (HP) Egidijus Anisimovas

Recenzentas

Dr. Jogundas Armaitis

Katedros vedėjas

Prof. habil. dr. Leonas Valkūnas

Vilnius 2017

Turinys

Įvadas	2
1 Harper-Hofstadter modelis su stipriai sąveikaujančiomis dalelėmis	3
2 Optinės gardelės	7
2.0.1 HH modelis optinėse gardelėse.....	7
2.1 Matavimai optinėse gardelėse	8
3 Kvantinis Hall efektas begalinėse sistemose	10
3.1 Laughlin būsenos	11
4 Kvantinis Hall efektas baigtinėse sistemose	14
4.1 Skaitmeninių eksperimentų metodika	14
5 Skaitmeniniai skaičiavimai	16
5.1 Tikslioji diagonalizacija	16
5.1.1 Fok erdvė.....	16
5.2 Tiksliosios diagonalizacijos metodo apribojimai ir galimos aproksimacijos	17
5.3 DMRG.....	19
6 Skaičiavimų rezultatai	20
6.1 Atviros kraštinės sąlygos	20
6.2 Sužadinimai	22
6.2.1 Periodinės kraštinės sąlygos.....	22
6.2.2 Atviros kraštinės sąlygos 8×5 dydžio gardelėje	22
6.2.3 Atviros kraštinės sąlygos 9×6 dydžio gardelėje	24
Išvados	26
Literatūros sąrašas	27
Summary	29

Įvadas

Trupmeninio kvantinio Hall efekto (fractional quantum Hall effect, FQHE) atradimas [1] sukėlė didelį susidomėjimą topologinėmis kvantinėmis fazėmis [2]. Šis efektas pasižymi egzotiškais savybėmis tokiomis, kaip trupmeninis elementariųjų sužadinių krūvis ir anioninė (trupmeninė) kvantinė statistika [3].

Nuo pirmojo eksperimento ši būseną buvo pastebėta įvairiose sistemose [4] [5], yra pasiūlymų kaip FQHE būseną gali būti realizuota optinėse gardelėse [6]. Pirminis eksperimentas pasižymėjo milžinišku sistemos dydžiu ir dalelių skaičiumi, todėl iki šiol visi teoriniai skaičiavimai buvo siejami su periodinėmis arba begalinio dydžio sistemomis. Todėl lieka neatsakytas klausimas: ar galimas FQHE būsenos susidarymas mažų matmenų gardelėse ir jei galimas, kokius efektus išryškina atviros kraštinės sąlygos.

Norint surasti atsakymus į šiuos klausimus, galima paimti Hofstadterio-Harperio [7] modelį su sąveikaujančioms dalelėmis. Šis modelis aprašo dvimatę kvadratinę gardelę patalpintą stipriame magnetiniame lauke ir gali būti eksperimentiškai įgyvendintas optinėse gardelėse [8].

Taigi, šio darbo tikslas – išsiaškinti trupmeninio kvantinio Hall efekto būsenos savybes ir požymius ribotų matmenų gardelėje.

1 Harper-Hofstadter modelis su stipriai sąveikaujančiomis dalelėmis

Šiame darbe nagrinėjamas Harper-Hofstadter modelis, kuris aprašo stipriame magnetiniame lauke patalpintą kvadratinę gardelę. Norint geriau suprasti sudėtingus daugelio dalelių reiškinius ir susidarancias kvantines fazes yra prasminga pradėti nuo viendalelinio uždavinio, t.y. atmetus sąveikas. Šį modelį atitinkantis viendalelinis hamiltonianas:

$$H = \sum_{n,m} t e^{i2m\pi\alpha} a_{m,n+1}^\dagger a_{m,n} + \Omega a_{m+1,n}^\dagger a_{m,n} + h.c. \quad (1)$$

Čia a^\dagger ir a yra atsiradimo ir išnykimo operatoriai, indeksai m ir n žymi gardelės mazgo vietą. α – magnetinio lauko stipris, t ir Ω yra šuolio tarp mazgų stipriai. Šiame darbe laikysime, kad gardelė yra simetrinė, o energijos skalė bus išreikšta t vienetais, tad patogiu pasirinkti $t = \Omega = 1$.

Jei laikoma, kad gardelė yra begalinė, galima uždavinį spręsti kvaziimpulso erdvėje atlikus Fourier transformaciją atsiradimo ir išnykimo operatoriams. Šuolio stipris priklauso nuo α , tai reiškia, kad šia kryptimi gardelės periodiškumas priklauso nuo magnetinio lauko stiprio.

Toroidinė geometrija Fourier transformacija toroidinės geometrijos atveju:

$$a_{m,n}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{N_m N_n \alpha}} \sum_{kl} e^{-ikn} e^{-ilm} a_{k,l,p}^\dagger, \quad a_{m,n} = \frac{1}{\sqrt{N_m N_n \alpha}} \sum_{kl} e^{-ikn} e^{-ilm} a_{k,l,p}, \quad (2)$$

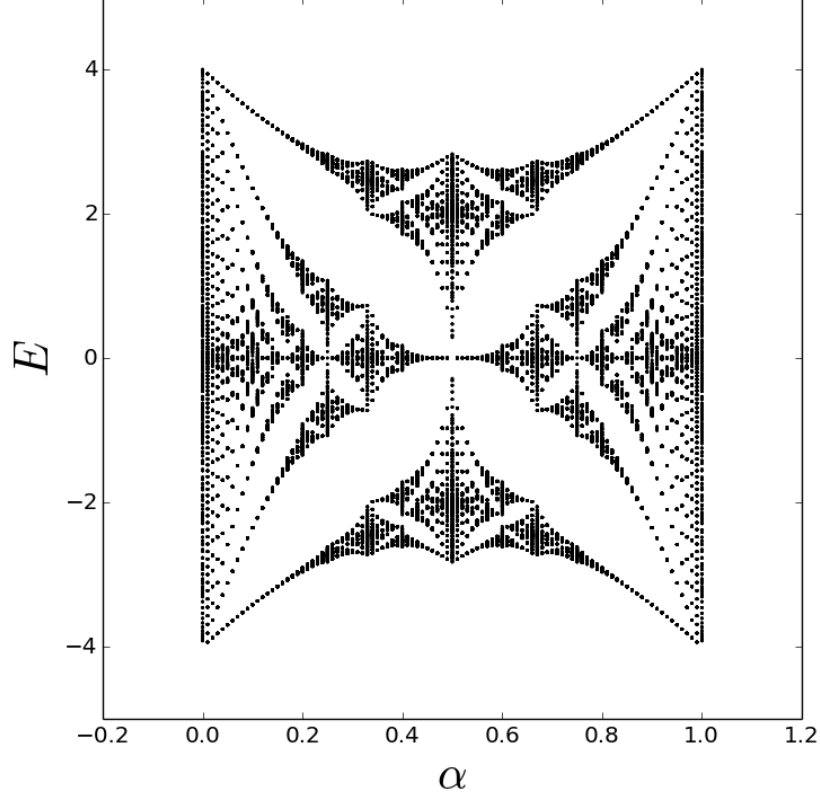
Čia k yra viena kvaziimpulso komponentė pirmoje Brillouin zonoje: $k \in [0, 2\pi]$, l yra kvaziimpulso komponentė kita kryptimi, apibrėžta $l \in [0, 2\pi\alpha]$. Brillouino zonos asimetriškumas ir papildomas indeksas p kvaziimpulso erdvėje atsiranda dėl magnetinio lauko sukulto periodiškumo pakitimo. Atlikę Fourier transformaciją 2 hamiltonianui 1, gauname:

$$H(k, l) = \sum_p 2 \cos(k - 2\pi\alpha p) a_p^\dagger(k, l) a_p(k, l) + e^{il} a_{p+1}^\dagger(k, l) a_p(k, l) + e^{-il} a_{p-1}^\dagger(k, l) a_p(k, l). \quad (3)$$

Tuomet gautas Fourier erdvės hamiltonianas 3 yra atsietas pagal kvaziimpulso vertes k, l tačiau dėl magnetinio lauko sukulto periodiškumo pakitimo, gauname, kad elementarus gardelės narvelis sudarytas iš $N_p = 1/\alpha$ elementų, kurie minėtame hamiltoniane lieka surišti. Norint surasti šios sistemos tikrines vertes, reikia diagonalizuoti $N_p \times N_p$ dydžio matricą. Skaitmeniškai gautos tikrinės vertės pavaizduotos 1 paveikslėlyje.

Cilindrinė geometrija Fourier transformacija cilindrinėje geometrijoje, kai gardelės konstanta lygi 1:

$$a_{m,n}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{N_n}} \sum_k e^{-ikn} a_{k,m}^\dagger, \quad a_{m,n} = \frac{1}{\sqrt{N_n}} \sum_k e^{ikn} a_{k,m}. \quad (4)$$



1 pav. Energijos spektro priklausomybė nuo magnetinio lauko stiprio α , grafikas gautas skaitmeniškai sprendžiant 3 lygtį.

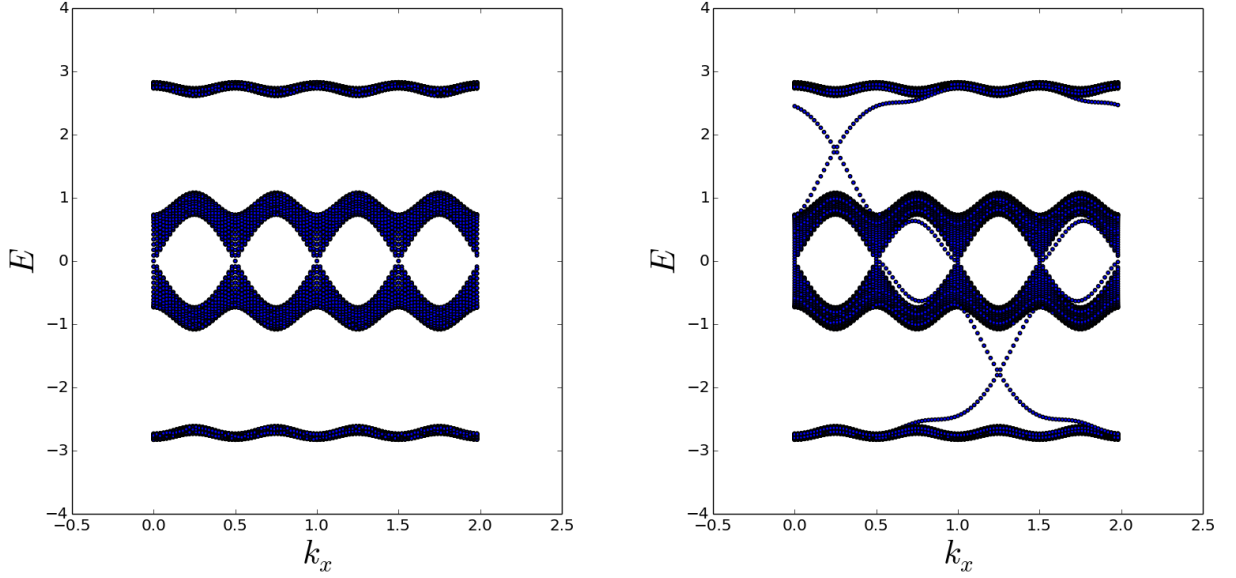
k - kvaziimpulsas pirmoje Brillouino zonoje. Tuomet sistemą aprašantį hamiltonianą galime perrašyti:

$$H = \sum_{k,m} e^{i2\pi\alpha m} a_{k,m}^\dagger a_{k,m} + a_{k,m}^\dagger a_{k,m+1} + h.c. \quad (5)$$

Skaitmeniškai diagonalizuodami šį hamiltonianą gauname tikrinių verčių spektrą 3. Esminis matomas skirtumas nuo toro geometrijos 1 sprendinių yra tas, kad susidariusios kraštinės būsenos turi energijos vertes ten, kur anksčiau būdavo draustiniai tarpai.

Daugiadaleliniams skaičiavimams pasirinkę fiksuotą $\alpha = 0.25$ gauname viendalelinį energijos spektrą, kuris pasižymi mažu apatinės juostos pločiu ir dideliu draustinės energijos tarpu (2 pav.), tokia plokščia energijos juosta stipriai išryškina sąveikų vaidmenį, tad tikimasi, kad tokios sąlygos bus geriausios FQHE būsenos susidarymui.

Atviros kraštinės sąlygos Paveikslėlyje 4 pavaizduotos energijos verčių histogramos esant skirtingiems gardelės dydžiams ir kraštinėms sąlygoms. Kaip jau buvo aptarta anksčiau, sprendžiant viendalelinį uždavinį toroidinėje geometrijoje (a) akivaizdžiai matome draustinės energi-



2 pav. Energijos spektro vertės Hofstadter-Harper modeliui, kai $\alpha = 0.25$. Kairėje – periodinės kraštinės sąlygos, dešinėje – cilindrinės.

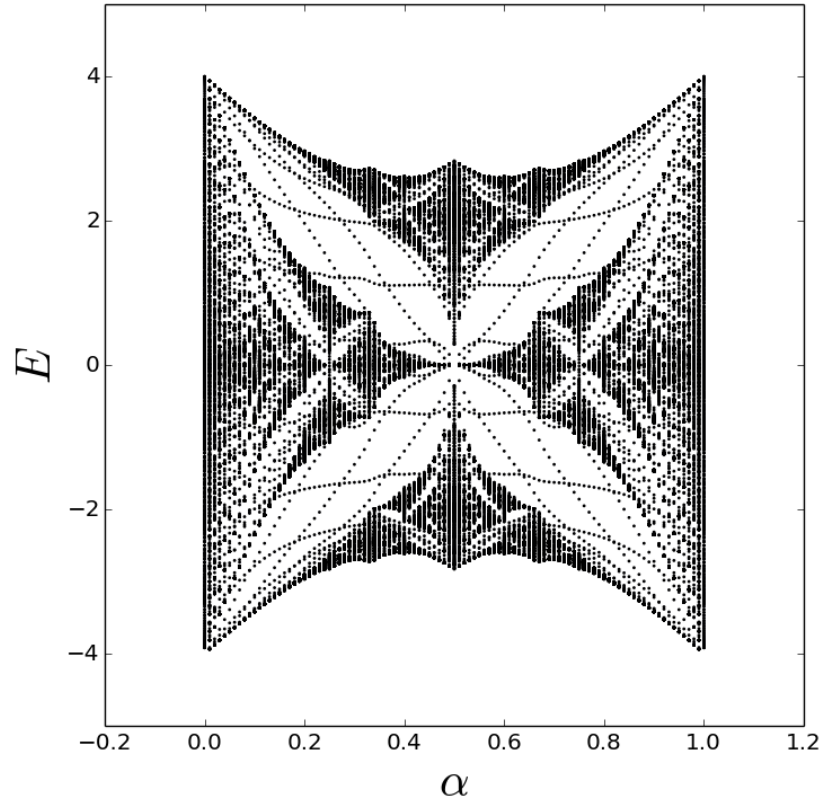
jos tarpus. Tokio pat dydžio gardeli, tačiau su atviromis kraštinėmis sąlygomis (b) draustinio tarpo nelieka o jo vietoje matome keletą kraštinių IQHE būsenų. Šiame darbe nagrinėjamiems gardelių dydžiams (c ir d) energijos spektras turi santykinai daug būsenų vietoje, kurioje stabilus draustinis tarpas periodinės gardelės atveju.

Sąveikų įskaitymas Iki šiol aprašėme nesąveikaujantį Hofstadterio-Harperio modelį. Trupmeniniam kvantiniam Hall efektui pasireikšti yra reikalingos tarpdalelinės sąveikos. Bozonams šios sąveikos aprašomos:

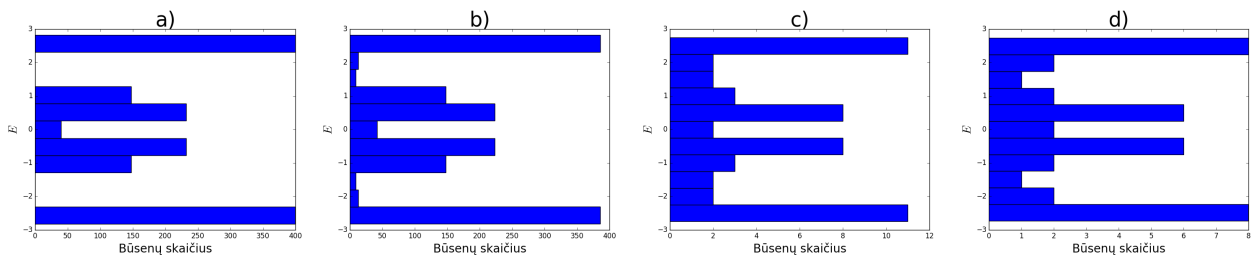
$$H_{int} = \frac{U}{2} \sum_j \hat{n}_j(\hat{n}_j - 1), \quad (6)$$

kur \hat{n}_j yra dalelių tankio operatorius. Tuomet pilnas sistemą aprašantis hamiltonianas:

$$H = \sum_{n,m} t e^{i2\pi\alpha} a_{m,n+1}^\dagger a_{m,n} + \Omega a_{m+1,n}^\dagger a_{m,n} + h.c. + \frac{U}{2} \sum_j \hat{n}_j(\hat{n}_j - 1). \quad (7)$$



3 pav. Energijos spektro priklausomybė nuo magnetinio lauko stiprio α , grafikas gautas skaitmeniškai sprendžiant 5 lygtį.



4 pav. Energijos verčių pasiskirstymas HH modelio gardelėje $\alpha = 0.25$. a) 40×40 dydžio gardelė su periodinėmis kraštinėmis sąlygomis. b) 40×40 dydžio gardelė su atviromis kraštinėmis sąlygomis. c) 9×6 dydžio gardelė su atviromis kraštinėmis sąlygomis. d) 8×5 dydžio gardelė su atviromis kraštinėmis sąlygomis.

2 Optinės gardelės

Šiame darbe siekiama išsiaiškinti, ar galimas trupmeninis kvantinis Hall efektas labai mažų matmenų sistemose. Tokias sistemas galima sukurti optinėse gardelėse. Optinė gardelė yra vadinama ultrašaltųjų atomų dujos patalpintos į periodinį potencialą. Toks potencialas sukuriamas naudojantis lazerių interferencija. Keičiant gardelę kuriančių lazerių skaičių, išsidėstymą ir bangos ilgį galima gauti įvairius potencialus. Sukuriant labai stiprų optinį potencialą viena kryptimi, galima visiškai uždrausti atomams judėti išilgai tos ašies, taip padarant dvimačių (2D) sistemų ansamblį, analogiškai, galima kurti ir vienmates gardeles.

Optinės gardelės leidžia simuliuoti kietojo kūno fizikoje pasitaikančius vyksmus, kur elektronai yra "pakeičiami" neutraliais atomais.

Optinių gardelių eksperimentai neapsiriboja vien tik realių sistemų atkartojimu. Dėl gero valdomumo ir galybės eksperimentų variacijų optinės gardelės leidžia tikrinti įvairius teorinius modelius ir hipotezes, taip leidžiančios vis geriau suprasti daugelio stipriai sąveikaujančių dalelių fiziką.

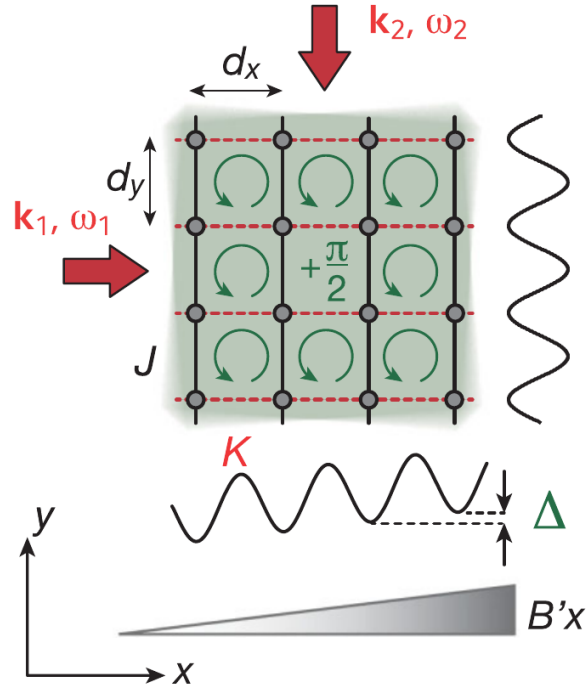
Vienas iš didžiausių skirtumų tarp optinių gardelių ir realių kristalų yra magnetinio lauko įtaka. Kadangi optinėse gardelėse naudojami atomai yra neutralūs, jų neveikia išorinis magnetinis laukas. Ši problema yra sprendžiama kuriant dirbtinius kalibruotinius laukus, kurie leidžia atomams elgtis taip, lyg jie turėtų krūvį ir būtų magnetiniame lauke, todėl tokie kalibruotiniai laukai kertantys gardelę dažnai vadinami dirbtiniu magnetiniu srautu. Dirbtiniai kalibruotiniai laukai ne tik, kad leidžia atkartoti magnetinio lauko sukurtus efektus, bet ir įgalina tyrinėti ypatingai stipraus lauko efektus, kuriuos stebėti realiuose kristaluose būtų neįmanoma dėl technologinių apribojimų.

Lazerių sukurtas interferencinis vaizdas yra nepriklausomas nuo jame patalpintų atomų, todėl gardelės struktūra nekinta netgi vykstant įvairiems dinaminiam procesams. Dėl tokio gardelės-dalelių atskyrimo optinėse gardelėse negalimi gardelės virpesiai – fononai, ar kiti defektai. Iš vienos pusės, tai leidžia tyrinėti idealias sistemas ir turėti labai glaustą ryšį tarp eksperimento ir teorinio modelio, tačiau toks sistemos tvarkingumas nėra sutinkamas gamtoje. Bendrai, optinės gardelės pasitarnauja kaip jungtis tarp teorinio aprašymo ir kristalų fizikos.

2.0.1 HH modelis optinėse gardelėse

Šiame darbe nagrinėjamas HH modelis, tad svarbu paminėti, kad 2013 metais buvo atliktas eksperimentas [8], kurio metu buvo sukurta optinė gardelė atitinkanti šį modelį. Iki tol, didžiausią problema kėlė dirbtinio magnetinio lauko sukūrimas. Jau anksčiau buvo sukurti dirbtiniai magnetiniai laukai, tačiau jie pasižymėjo tuo, kad integralinis srautas per gardelę visad buvo lygus 0, o srautas turėdavo fliuktuacinį pavidalą [9]. Tik išmokus kurti vienalyčius magnetinius laukus buvo galima atkartoti HH modelį.

Eksperimentinės HH modelio realizacijos optinėje gardelėje schema pavaizduota 5 paveikslė-



5 pav. Eksperimentinė schema. (M.Aidelsburger et al. 2013 [8])

lyje. Ultrašaltieji atomai patalpinami trimatėje optinėje gardelėje. z kryptimi optinio potencialo stipris padaromas labai didelis taip efektyviai gaunant 2D gardelių ansamblį. y kryptimi optinis potencialas pakankamai silpnas, kad tarp gretimų mazgų vyktų tuneliavimas, kurio stipris J . x kryptimi yra įjungiamas papildomas silpnas magnetinio lauko gradientas. Šis gradientas dėl Zėmano efekto paslenka atominius energijos lygmenis ir gauname, kad atomai esantys ant skirtingų mazgų x kryptimi jaučia skirtingą suminį potencialą. Energijos poslinkis tarp greitimų mazgų žymimas Δ . Taip gaunama gardelė, kurioje atomai gali judėti tik viena (y) kryptimi. Du papildomi lazeriai šviečia dažniais ω_1 ir ω_2 išilgai x ir y ašių atitinkamai. Šių lazerių dažnis parenkamas taip, kad būtų tenkinama sąlyga $\omega_{res} = \omega_1 - \omega_2 = \Delta/\hbar$. Tuomet gauname, kad išilgai x krypties atstatomi šuoliai su kompleksine amplitude K , kurios stipris priklauso nuo papildomų lazerių intensyvumo. Dėl tokių optiškai indukuotų šuolių taip pat gauname erdvinę fazinę moduliaciją: $\phi = (m + n)\pi/2$, čia m ir n yra gardelės mazgo indeksai x ir y kryptimis. Dėl tokios fazinės moduliacijos, apėję vieną gardelės narvelį gauname suminę $\Phi/2$ fazę. Svarbu paminėti, kad keičiant šių lazerių tarpusavo kampą galime keisti šios fazės, taigi ir dirbtinio magnetinio srauto stiprį. Plačiau apie šį eksperimentą galima paskaityti [8].

2.1 Matavimai optinėse gardelėse

Žinoma, optinės gardelės atneša ir savų problemų. Kvantinis Hall efektas buvo atrastas matuojant per MOSFET (metal–oxide–semiconductor field-effect transistor, metalo, oksido ir

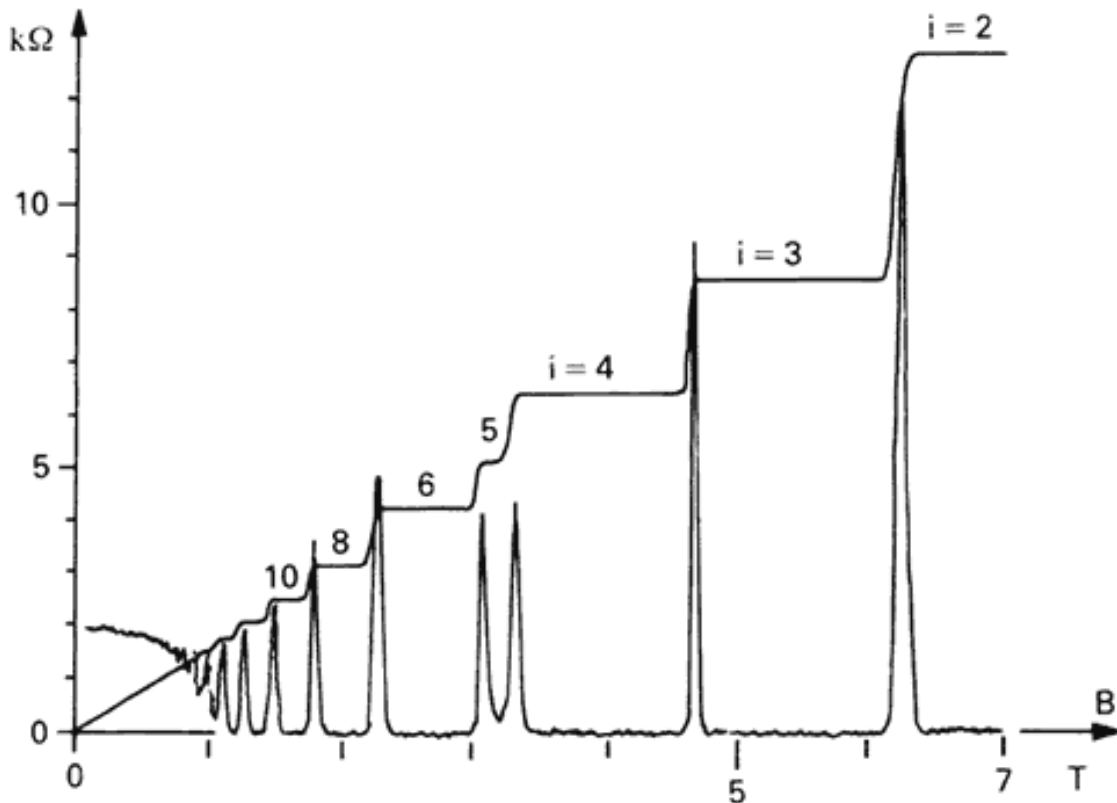
puslaidininkio lauko tranzistorius) leidžiant elektros srovę ir stebint Hall įtampą. Bėda ta, kad prie ultrašaltųjų atomų dujų neįmanoma prilituoti ominių kontaktų ir išmatuoti įtampos, reikia surasti kitų eksperimentinių būdų, kaip išmatuoti norimus dydžius. Šiame skyriuje bus glaustai aprašyti keli dažniausiai naudojami matavimo metodai.

TOF – Time of Flight. Kaip ir kristaluose, dalelės optinėse gardelėse užima kvantines būsenas su tam tikra energija ir tam tikru kvaziimpulsu. Jeigu staiga optinė gardelė yra išjungiamą, kristalinis kvaziimpulsas pavirsta realiu judesio kiekiu ir dalelės pradeda judėti. TOF idėja paprasta: gardelei pasiekus pusiausvyrą, staigiai išjungiamas gardele kuriantis potencialas ir visos esančios dalelės pradeda judėti tiesiai ir tolygiai pagal prieš tai turėtą judesio kiekį. Palaukus pakankamą laiko tarpą, kad dalelių nueitas kelias būtų didesnis už gardeles matmenis, vakuuminė kamera apšviečiama infraraudonąja šviesa ir atliekama fotografija, taip atkuriamas dalelių pasiskirstymas pagal kvaziimpulso vertes. Šio matavimo metu, bandinys yra sunaikinamas ir sekantis matavimas daromas iš naujo paruošus sistemą.

Dalelių tankio gardelėje stebėjimas Vienas iš svarbiausių tvarkos parametrų, charakterizuojančių kvantines medžiagos fazes, yra tankio pasiskirstymas. Eksperimentiškai, tankio pasiskirstymas yra gaunamas atliekant sklaidos eksperimentą, tačiau tarpmazginio atstumo dydis gali stipriai apriboti gauto vaizdo rezoliuciją. Kol kas geriausias būdas leidžiantis stebėti dalelių tankį vieno gardelės mazgo tikslumu yra kvantinių dujų mikroskopas [10]. Svarbu paminėti, kad toks mikroskopas ne tik leidžia gauti tikslų dalelių pasiskirstymo vaizdą, bet ir kurti įvairių formų potencialinį reljefą.

3 Kvantinis Hall efektas begalinėse sistemose

Pirmą kartą kvantinis Hall efektas buvo pastebėtas 2D elektronų sistemoje, kuri gali būti sudaryta MOSFET tranzistoriuje [11]. Elektronai izoliuoti 2D sistemoje, kuri yra patalpina į stiprų magnetinį lauką, klasikiniu požiūriu pradės judėti uždaromis orbitomis, elektronų energija taps papildomai kvantuota ciklotroninių orbitalių, kurių dažnis ω_c ir energija $\epsilon_n = \hbar\omega_c(n + 1/2)$, šie lygmenys vadinami Landau lygmenimis. Tuomet, atšaldžius sistemą iki tiek, kad būtų tenkinama sąlyga $kT \ll \hbar\omega_c$ ir esant užpildytam N žemiausių lygmenų, tuomet elektronų sistema atitinka izoliatorių, kurio draudžiamų energijų tarpas lygus $\hbar\omega_c$. Skirtingai nuo įprastinių izoliatorių, Landau lygmenys turi metališkas kraštines būsenas, kurios kiekviena suteikia laidumą e^2/h . Tokių kraštinių būsenų skaičius atitinka juostos Chern skaičių. Jeigu 2D elektronų sistemoje viena kryptimi (x) yra prijungiamas išorinis elektrinis laukas, kita kryptimi (y) yra stebima Hall srovė, kuri charakterizuojama laidumu $\sigma_{xy} = \sum_{s=0}^N C_s e^2/h$. Čia C_s yra s – tosios užimtos juostos Chern skaičius. Landau lygmenims $C_s = 1$.



6 pav. Kvantinis Hall efektas. Keičiant magnetinio lauko stiprį keičiasi ω_c , taigi keičiasi ir užpildytų energijos juostų skaičius. Grafike pavaizduota tiek išilginės, tiek skersinės bandinio varžos priklausomybė nuo magnetinio lauko. (Kosmos 1986)

Jei Landau lygmuo yra užpildytas nepilnai, esant tarpdalelinei sąveikai gali susidaryti sąlygos trupmeniniam kvantiniam Hall efektui (Fractional Quantum Hall Effect – FQHE) pasi-

reikšti [1]. Tuomet esant išoriniam elektriniam laukui skersinis laidumas tampa: $\sigma_{xy} = \nu e^2/h$, čia ν yra racionalioji trupmena, kuri atitinka trupmeninį juostos užpildymą ν . Viena FQHE būsenų savybė: žemiausios energijos būseną yra išsigimusi $1/\nu$ kartų, tačiau skaitmeniniuose skaičiavimuose, dėl diskretumo išsigimimas nėra idealus.

Apibendrinant, FQHE efektui reikalinga užpildyta išreiškiamą kaip dalelių skaičiaus sistemoje ir magnetinių elementariųjų narvelių skaičiaus santykis $\nu = \frac{P}{N_{flux}}$. Hofstadter-Harper modeliui $N_{flux} = \alpha N_m N_n$.

3.1 Laughlin būsenos

Trupmeninis kvantinis Hall efektas pasireiškia tik tuo atveju, kai turime sąveikaujančią sistemą. Dėja, nėra žinoma kaip analitiškai spręsti Šrėdingerio lygtį tuo atveju, kai dalelės tarpusavyje surištos per sąveikas, todėl tikslus FQHE būsenos pavidalas nėra žinomas. Pirmas sėkmingas bandymas išreikšti FQHE būseną analitiniu pavidalu buvo padarytas Laughlin [12]. Jis užrašė tikrinę funkciją žemiausios energijos FQHE būsenai tuo atveju, kai sistemos užpildyta $\nu = \frac{1}{m}$, kur m bet koks sveikasis skaičius. Svarbu paminėti, kad ši Laughlin funkcija aprašo FQHE homogeniškoje aplinkoje, tad nėra tinkama gardelėms, tačiau ši funkcija puikiai iliustruoja įvairias FQHE savybes. Šiame skyriuje bus glaustai aptarta Laughlino būseną ir jos pagrindinės ypatybės. Detalus nagrinėjimas gali būti rastas [13], [14].

$$\psi(z_i) = \prod_{i < j} (z_i - z_j)^m e^{-\sum_{i=1}^n |z_i|^2 / 4l_B^2} \quad (8)$$

Čia z_i yra i -osios dalelės koordinatės išreikštos kaip kompleksinis skaičius: $z_i = x_i + iy_i$. $l_B = \hbar/eB$ yra magnetinis ilgis.

Nors Laughlin'o funkcija buvo gauta fenomenologiškai jos sanklota su skaitmeniškai gauta yra ≈ 0.99 tiek Kulono, tiek kitokioms stūmos sąveikoms [15], tačiau skaitmeniškai įmanoma gauti sprendinį tik tuo atveju, kai dalelių skaičius labai mažas, tad negalima griežtai teigti, kad ši funkcija bus tikrinė termodinaminėje riboje.

Kvaziskylės

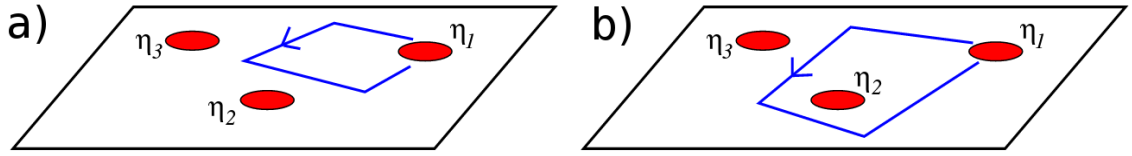
$$\psi_{QH}(z; \eta) = \prod_{i=1}^N (z_i - \eta) \prod_{k < l} (z_k - z_l)^m e^{-\sum_{i=1}^n |z_i|^2 / 4l_B^2} \quad (9)$$

Kai kvaziskylių turime M :

$$\psi_{QH-M}(z; \eta) = \prod_{j=1}^M \prod_{i=1}^N (z_i - \eta_j) \prod_{k < l} (z_k - z_l)^m e^{-\sum_{i=1}^n |z_i|^2 / 4l_B^2} \quad (10)$$

η_j yra j -osios kvaziskylės koordinatė kompleksiniu pavidalu.

Jeigu pasirinksimė, kad $M = 1/\nu = m$ ir visos kvaziskylės yra vienoje vietoje: $\eta_j = \eta$:



7 pav. Kontūras naudojami kvaziskylės krūvio (a) ir statistinių savybių (b) įvertinimui.

$$\psi_{QH-m}(z; \eta) = \prod_{i=1}^N (z_i - \eta)^m \prod_{k<l} (z_k - z_l)^m e^{-\sum_{i=1}^n |z_i|^2 / 4l_B^2} \quad (11)$$

Tuomet matyti, kad funkcija tampa tokia pat, kaip 8, tačiau su trūkstamu elektronu padėtyje η , taigi galime daryti išvadą, kad jei m kvaziskylių atitinka vieno elektrono trūkumą, vadinasi viena kvaziskylė turi turėti $1/m = \nu$ krūvį.

Eksperimentinis trupmeninio krūvio matavimas Kol kas trupmeninio krūvio susidarymą/trūkumą aprašėme tik kaip statistinį efektą. Taip pat svarbu paminėti, kad tiek optinėse gardelėse, tiek puslaidininkinėse sistemose bendras krūvis visada bus kvantuotas e vienetais. Tačiau 1997m. buvo atliktas eksperimentas [16] kuris parodė, FQHE palaikančioje sistemoje srovę nešantys krūvininkai turi trupmeninį krūvį. Šio eksperimento esmė pagrindas yra šratinio triukšmo matavimas.

Trupmeninis krūvis ir anioninė statistika Tarkime turime Laughlino būseną su keletu kvaziskylių, tuomet sistema aprašoma būseną 10 funkcija. Norėdami skaičiuoti įvairių operatorių reikšmes, turime sunormuoti šią tikrinę funkciją:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{Z}} |\eta_1, \dots, \eta_M\rangle \quad (12)$$

Normavimo daugiklis:

$$Z = \int \prod d^2 z_i \exp\left(\sum_{i,j} \log|z_i - \eta_j|^2\right) + m \sum_{k,l} \log|z_k - z_l|^2 - \frac{1}{2l_B^2} \sum_i |z_i|^2. \quad (13)$$

Tiek krūvio, tiek statistikos įvertinimui, naudosisimės Berry ryšiu:

$$A_\eta(\eta, \bar{\eta}) = -i \langle \psi | \frac{\partial}{\partial \eta} | \psi \rangle = -\frac{i}{2} \frac{\partial \log Z}{\partial \eta}, \quad (14)$$

$$A_{\bar{\eta}}(\eta, \bar{\eta}) = +\frac{i}{2} \frac{\partial \log Z}{\partial \bar{\eta}}. \quad (15)$$

Jeigu laikome, kad kvaziskylės pakankamai toli viena nuo kitos, kad tarp jų nebūtų sąveikos, galime išskaičiuoti Berry ryšį:

$$A_\eta = \frac{i}{2m} \sum_{j \neq i} \frac{1}{\bar{\eta}_i - \bar{\eta}_j} - \frac{in_i}{4ml_B^2}. \quad (16)$$

Jeigu adiabatiškai apnešame kvaziskylę uždaru kontūru, taip, kaip pavaizduota 7a, gauname, kad banginės funkcijos fazė pasikeičia:

$$e^{i\gamma} = \exp(-i \oint_C A_\eta d\eta + A_{\bar{\eta}} d\bar{\eta}) \quad (17)$$

Atsiradusi papildoma γ fazė vadinama Berry faze:

$$\gamma = \frac{e\Phi}{m\hbar} \quad (18)$$

Ši geometrinė fazė yra analogiškai Aharonov-Bohm fazei, kurią įgauna elektronas judantis magnetiniame lauke $\gamma_{AB} = e\Phi/\hbar$. Iš šios analogijos, matome, kad kvaziskylės elgiasi kaip krūvio e/m dalelės.

Bandant adiabatiškai apnešti kvaziskylę kontūru, kurio viduje yra kita kvaziskylė (7b) gauname dar vieną papildomą fazę:

$$e^{i\gamma_S} = \exp\left(-\frac{1}{2m} \oint_C \frac{d\eta_1}{\eta_1 - \eta_2} + h.c.\right) = e^{2\pi i/m} \quad (19)$$

Daugiadalelinėje banginėje funkcijoje sukeitus dvi daleles vietomis tikimės, kad banginė būsena pasikeis tik faziniu daugikliu:

$$\psi(r_1, r_2) = e^{i\pi\beta} \psi(r_1, r_2) \quad (20)$$

Bozonams banginės funkcijos fazė pakinta $\beta = 0$, fermionams $\beta = \pi/2$.

Analogiškai sukeitus dviejų FQHE sužadintųjų pozicijas, galioja sąryšis:

$$e^{i\gamma_S} = e^{i2\pi\beta} \rightarrow \beta = 1/m. \quad (21)$$

4 Kvantinis Hall efektas baigtinėse sistemose

Šio darbo tikslas – išsiaiškinti, ar trupmeninis kvantinis Hall efektas yra galimas labai mažų matmenų sistemose. Idealu būtų atlikti skaičiavimus be periodinių kraštinių sąlygų labai didelėms sistemoms ir po truputį mažinant sistemos matmenis stebėti, kaip keičiasi stebimi dydžiai, tačiau tikslūs skaičiavimai nėra įmanomi dėl skyrelyje 5.2 aprašytų priežasčių, todėl pasirinkta strategija – vykdyti skaitmeninius eksperimentus mažų matmenų sistemose atsižvelgiant į žinomas FQHE būsenos savybes.

Kita problema, su kuria susiduriama nagrinėjant cilindrinę ar atvirą geometriją išskyla FQHE charakterizuojančios užpildos ν neapibrėžtumas. Begalinėje sistemoje užpilda parenkama atsižvelgiant į magnetinių narvelių skaičių, kuris yra lygus gardelės elementariųjų narvelių skaičiui padaugintam iš bedimensinio magnetinio srauto, tenkančio vienam elementariajam narveliui. Tuo pačiu, periodinėje/begalinėje kvadratinėje gardelėje elementariųjų narvelių skaičius yra lygus mazgų, taigi ir viendalelinių būsenų skaičiui, todėl galima sakyti, kad FQHE būsenoje pasireiškianti trupmeniškumas atitinka apatinio Landau lygmens užpildą. Literatūroje šie du apibūdinamai vartojami pakaitomis. Atviroje sistemoje, kurios matmenys maži, elementariųjų narvelių skaičius ir mazgų skaičius nėra lygūs, todėl nėra aišku, kaip teisingai reiktų parinkti sistemos užpildą. Optimalus variantas būtų pasirinkti tokių matmenų gardelę, kurioje keisdami dalelių skaičių galėtume patenkinti arba vieną arba kitą sąlygą, tačiau mažiausia tokia sistema mūsų nagrinėjamame modelyje: 8×9 yra skaitmeniškai nepasiekiamas. Ši problema iš dalies gali būti išspręsta vykdant skaičiavimus skirtingo dydžio gardelėse, kuriose užpilda nustatoma arba pagal mazgų arba pagal elementariųjų narvelių skaičių. Toks sprendimas nėra visiškai tvarkingas, kadangi dėl skirtingo gardelių dydžio, kraštiniai efektai turės skirtingo dydžio įtaką.

4.1 Skaitmeninių eksperimentų metodika

Krūvio pernešimas Baigtinėse sistemose, kaip ir fizikinėse sistemose, pasireiškiant kvantiniam Hall efektui turėtume stebėti krūvio (neutralioms dalelėms optinėse gardelėse – dalelių skaičiaus) pernešimą, kuris turi būti lygus ν .

Cilindrinėje geometrijoje toks skaitmeninis eksperimentas vykdomas įvedant susuktas kraštines sąlygas:

$$\Psi(L) = e^{i\Delta\phi}\Psi(0), \quad (22)$$

kur ϕ yra magnetinio srauto stipris. Keičiant magnetinio srauto stiprį, skaičiuojama krūvio poliarizacija:

$$\Delta\langle n \rangle = \frac{1}{N_i} \sum_{i,j} \langle n_{i,j} \rangle i, \quad (23)$$

Kiekvienas magnetinio srauto kvantas $\Delta\phi = 2\pi$ turėtų duoti $\Delta\langle n \rangle = \nu$ esant kvantinio Hall efekto būsenai.

Sistemoje, kurioje visos kraštinės atviros, atitinkamas srautas yra įvedamas ties centriniu narveliu ir skaičiuojama, koks užpildos skirtumas tarp ši narvelį sudarančių mazgų ir likusių. Grafiškai ši schema pavaizduota 8 pav., $\Delta\langle n \rangle$ yra apibrėžiamas kaip užpildos skirtumas tarp raudonai ir juodai pažymėtų mazgų.

FQHE susidarantis cilindrinėse sistemose gerai išnagrinėtas [17]. Šiame darbe pakartojome skaičiavimus mus labiausiai dominančiam srautui $\alpha = 0.25$ ir gavome sutampančius rezultatus, tad dėmesį skirsime tik sistemoms su atviromis kraštinėmis dvejomis kryptimis.

Potencialo defektų kuriami sužadainimai Toliau, žiūrime sužadainimų – kvaziskylių ir kvazidalelių elgseną bei savybes. Pagrindinė šiame darbe panaudota idėja – kvaziskylės ir kvazidalelės poros sukūrimas įvedant potencialo defektus, tam tikruose gardelės mazguose pridėjus $+/-V$ dydžio potencialą. Tikimės, kad tolydžiai didinant šį potencialą iš pradžių sistemos būseną neregus visiškai, po to, staiga susidarys/išnyks papildomas trupmeninis krūvis ($\Delta\langle n \rangle$) aplink neigiamo/teigiamo ženklo potencialą. Kadangi nėra aišku, kokio dydžio kvazidalelės turi susidaryti ribotų matmenų sistemoje, gardelė padalinama į 3 dalis ir skaičiuojamas vidutinis dalelių skaičius kiekvienoje iš šių sričių.

Toks sužadainimų lokalizavimas remiasi FQHE būsenos savybėmis: FQHE būseną yra nespūdi, taigi mažas defektas neturėtų keisti tankio pasiskirstymo, tačiau tai galioja tik milžiniškose sistemose, mažose, dėl kraštinių efektų, negalima tikėtis visiško nespūdumo.

Sekantis skaitmeninis eksperimentas yra vieno iš defektų judinimas. Keičiant defekto padėtį, tikimės, kad jis ir pirmasis tankio momentas ta pačia kryptimi, tai indikuotų, kad kvazidalelė juda tiksliai sekdamą defektą, t.y. pastūmęs defekto padėtį per vieną gardelės vektorių, tikimės matyti, kad pirmasis momentas pasikeičia per 0.5. Svarbu atkreipti dėmesį, kad šiame darbe, defekto padėties keitimas vykdomas ne dinamiškai, o statiškai, t.y. vykdamas kelis skaičiavimus su skirtingomis padėtimis ir lyginant rezultatus.

Jeigu pavyks toks kvazidalelės judinimas, sekantis eksperimentas būtų Berry fazės įvertinimas apnešant kvazidalelę uždara kontūrais kaip pavaizduota 7 paveikslėlyje, tai duotų papildomą krūvio įvertinimą ir leistų patikrinti ar sužadainimai demonstruoja anioninę statistiką.

Svarbu paminėti, kad šiame skyriuje aprašyt skaitmeniniai eksperimentai yra sėkmingai atlikti periodinėms sistemoms [18] [17].

5 Skaitmeniniai skaičiavimai

Didžiausias dėmesys šiame darbe skiriamas skaitmeniniams eksperimentams. Skirtingai nei realūs eksperimentai, skaičiavimai leidžia daug laisviau keisti įvairius sistemos parametrus, kartais net leidžia imituoti eksperimentus, kurie šiai dienai yra technologiškai neįmanomi. Nepaisant to, kad šiuolaikiniai eksperimentai optinėse gardelėse labai tiksliai atitinka nagrinėjamus matematinius modelius, skaitmeniniai eksperimentai negali pilnai pakeisti realių eksperimentų. Pagrindinė to priežastis yra per didelė skaičiavimų apimtis, tad šiame skyriuje bus aptarta, kokio dydžio sistemas įmanoma modeliuoti ir kokios yra galimos aproksimacijos.

5.1 Tikslioji diagonalizacija

Svarbiausias dalykas, kurio ieškome, yra 7 hamiltoniano tikrinės būsenos. Suskaičiavę tikrines funkcijas, turėtume visą informaciją apie sistemą. Norint įvertinti nagrinėjamoje gardelėje susidarančias kvantines fazes ir jų savybes mums nereikia pilno sprendinio – užtenka tik žemiausios energijos būsenos ir dar kelių sužadintų būsenų. Iš to mes galime įvertinti sistemos esančios $0K$ temperatūroje savybes.

Tiksliosios diagonalizacijos metodo esmė paprasta – hamiltonianas užrašomas matriciniu pavidalu tam tikroje iš anksto apibrėžtoje bazėje. Tuomet gauta matrica diagonalizuojama, taip gaunamos tikrinės vertės ir tikriniai vektoriai išreikšti per bazės vektorius.

Šiame darbe naudojamas Lanczos diagonalizavimo algoritmas, kuris leidžia gauti tik kelias didžiausias (arba mažiausias) matricos tikrines vertes, tačiau tai daro ypatingai greitai.

5.1.1 Fok erdvė

Naudojantis tiksliosios diagonalizacijos metodu Hubbardo tipo hamiltonianų tikrinėms vėrtėms rasti dažniausiai yra naudojamas dalelių skaičiaus arba Fok formalizmas. Šis formalizmas apibrėžia bazinius vektorius pagal tai, kiek dalelių egzistuoja kiekviename gardelės mazge. Tuomet daugiadalelinės tikrinės funkcijos užrašomos:

$$|\Psi\rangle = \sum_j c_j |n_1^j, n_2^j, \dots, n_N^j\rangle, \quad (24)$$

$|n_1^j, n_2^j, \dots, n_N^j\rangle$ yra daugiadalelinis bazinis vektorius, c_j kompleksinis skaičius.

Baziniai vektoriai išreiškiami:

$$|n_1, n_2, \dots, n_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{\prod_\lambda n_\lambda!}} a_{\lambda P}^\dagger \dots a_{\lambda 1}^\dagger |0\rangle. \quad (25)$$

Čia, λ_j yra mazgo, ant kurio patalpinta j – oji dalelė indeksas, n_λ parodo kiek dalelių yra ant mazgo, kurio indeksas λ .

Žinoma, yra ir kitų būdų, kaip išreikšti pilną uždavinio bazę, tiesiog reikia atlikti transformaciją atsiradimo/išnykimo operatoriams nepažeidžiant komutacijos sąryšių 27. Bendrai, vektorių bazės pasirinkimas priklauso nuo keleto dalykų: kai kurios reprezentacijos leidžia atlikti labai paprastus ir pagrįstus supaprastinimus bei aproksimacijas, kai kurios reprezentacijos leidžia daug greičiau ir efektyviau apskaičiuoti hamiltoniano matricos elementus.

5.2 Tiksliosios diagonalizacijos metodo apribojimai ir galimos aproksimacijos

Šiame darbe naudojamas tiksliosios diagonalizacijos metodas. Bendru atveju, daugiadaleliniam hamiltonianui sudaryti, reikalingas Fok erdvės dydis bozonams yra

$$S_b = \frac{(N + P - 1)!}{P!(N - 1)!}. \quad (26)$$

Tikslūs atminties ir laiko resursus numatyti sunku, tačiau dėl to, kad matricos retos ir ieškome tik keleto žemiausios energijos būsenų, tiek laiko, tiek atminties kiekiai yra tiesiogiai proporcingi $P \times S$.

Projektavimas Kitas metodas, leidžiantis sumažinti Fok erdvės bazę, taigi ir skaičiavimų apimtį, yra projektavimas į nepilną viendalelinio sprendinio būsenų bazę, toks metodas tinkamas, kai sąveikų stipris yra mažas lyginant su viendaleliniame energijos spektre esančiu draustiniu tarpu. Projektavimas atliekamas pasinaudojus transformacija:

$$a_{k,m}^\dagger = \sum_{s'} \psi_s d_{k,s}^\dagger. \quad (27)$$

Čia, ψ yra viendalelinio uždavinio tikrinis vektorius atitinkantis s -ąją energijos vertę. Jei sumavimas vykdomas per pilną bazę ($s' = s$) gaunamas tikslus sprendinys.

Tarkime, viendalelinis spektras turi draustinės energijos tarpą. Jeigu daugiadaleliniame uždavinijje užpilda yra maža (kad Fermi lygmuo nesiektų draustinio tarpo) ir tarpdalelinė sąveika yra silpna, galime tikėtis, kad konfigūracijos esančios virš draustinio energijos tarpo turės nyks-

1 lentelė. Fok erdvės dydis. N gardelės mazgų skaičius, P dalelių skaičius.

N	P	S_b
32	4	52360
64	8	1×10^{10}
80	10	5×10^{12}
800	100	8×10^{134}

tamai mažą įtaką žemiausios energijos daugiadalelinei būsenai. Kaip buvo aprašyta anksčiau, Hofstadter-Harper modelyje su periodinėmis kraštinėmis sąlygomis ir tinkamu magnetinio lauko stipriu (pavyzdžiui $\alpha = 0.25$) abi šios sąlygos yra patenkinamos, tad galime atmesti netgi $3/4$ viendalelinių būsenų, taip labai stipriai sumažindami skaičiavimų apimtį.

Sprendžiant uždavinį su bent viena atvira kraštine susidaro kraštinės būsenos, kurios, kaip aprašyta anksčiau nebeturi draustinės energijos tarpo (3 pav.), tačiau šioje srityje būsenų tankis yra labai mažas, tad projektavimas nepraranda prasmės, tačiau tuomet reikia paimti tiek lygmenų, kad visos kraštinės būsenos būtų panaudotos, tad kai $\alpha = 1/4$ galima atmesti tik $\approx 1/2$ būsenų.

Dėja, projektavimas turi ir didžiulių trūkumų. Jeigu pradinio hamiltoniano matrica buvo reta, atlikus projektavimą hamiltoniano matrica tampa labai tanki, tad naudojami diagonalizavimo algoritmai veikia daug lėčiau.

Simetrijų taikymas Sprendžiant toroidinėje arba cilindrinėje geometrijoje galima pasinaudoti kvaziimpulso tvermės dėsnium. Kaip matyti iš 3, kinetinė hamiltoniano dalis yra suma dėmenų su skirtingomis kvaziimpulso vertėmis, kitaip sakant, gauname, kad kvaziimpulsas yra geras kvantinis skaičius (toliau tekste bus žymimas K) charakterizuojantis būsenas. Kvaziimpulsas taip pat yra tvarus dydis, todėl daugiadaleliniame uždavinyje ieškodami tikrinių būsenų taip pat galime suskaidyti uždavinį pagal suminę kvaziimpulso vertę, taigi galima sumažinti Fok bazės dydį: $S_f^K = S_f/N$, $S_b^K = S_b/N$. Jeigu sprendžiama su atviromis kraštinėmis sąlygomis, bendru atveju galima taikyti atspindžio arba sukimo simetrijas. Nors 1 lygtis nėra simetriška pagal sukimo simetriją, tačiau nesunku pastebėti, kad viena kryptimi, išilgai kurios šuoliai aprašomi tik realia amplitude, galioja atspindžio simetrija. Kita vertus, Harper-Hofstadter modelis sukurtas norint aprašyti 2D kvadratinę gardelę magnetiniame lauke, taigi tokiai gardelei turi galioti sukimo 90 deg kampu simetrija, jeigu tik gardelė yra kvadratinė. Nesunku suprasti, kad norint "atgauti" šią simetriją užtenka padaryti kalibruotės transformaciją, tačiau tuomet hamiltoniano užrašymas tampa labai sudėtingas – reikalinga rekursija. Žinoma, simetrijų naudojimas ne tik apsunkina uždavinio formulavimą, tačiau ir apriboja – šiame darbe naudojamas potencialo defekto metodas sulaužo tiek sukimo, tiek atspindžio transformacijas, tad atliekant didžiąją dalį skaičiavimų į simetrijas nebuvo atsižvelgta.

Atminties sumažinimas Naudojantis tiksliosios diagonalizacijos metodu, minimalus reikalingos kompiuterio atminties kiekis yra lygus Fok erdvės dydžiui padaugintam iš viename kompleksiniam skaičiui reikalingos atminties kiekio. Šis apribojimas yra universalus ir bet kokiam kitam algoritmui, kadangi toks atminties kiekis yra reikalingas saugoti sprendiniui – žemiausios energijos būsenos tikriniam vektoriui. Tokiu atveju, Fok erdvės hamiltoniano matrica nebūtų saugoma atmintyje. Žinoma, toks metodas labai stipriai pailgintų skaičiavimų laiką, kadangi kai kurie hamiltoniano matriciniai elementai turėtų būti perskaičiuoti daugybę kartų. Kai

kuriais atvejais, hamiltoniano matricos sudarymas netgi paprasčiausioje bazėje užima daugiau laiko negu diagonalizacijos algoritmo vykdymo trukmė, tad tai programinio kodo vykdymo laiką pailgintų keletą ar net keliolika kartų.

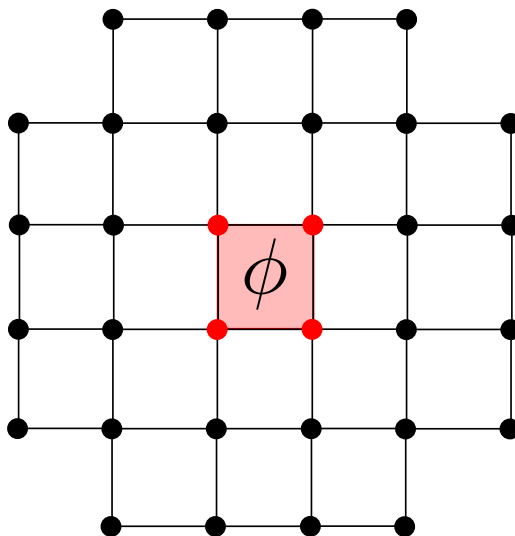
5.3 DMRG

Kaip aptarta ankstesniame skyrelyje, tiksliosios diagonalizacijos metodas yra apribotas suteikiamos atminties kiekiu ir nėra algoritmo, kuris leistų apeiti šią problemą, tačiau prieš tai pateikti variantai: kai saugoma/perskaičiuojama pilna hamiltoniano matrica, yra kraštiniai problemos "atmintis/vykdyto laikas" atvejai. Kitas literatūroje dažnai sutinkamas būdas spręsti Hubbardo tipo hamiltonianus yra DMRG metodas [19]. Šis metodas remiasi prielaida, kad tik nedidelė dalis visų galimų daugiadalelinių būsenų turės reikšmingą įtaką stabiliai sistemos būsenai. DMRG metodas yra iteratyvus, t.y. vykdoma daug iteracijų įskaitant vis daugiau ir daugiau daugiadalelinių būsenų ir žiūrint, kada sprendinys konverguos. Bendrai, tai yra apytikslis sprendimo metodas, kurio sėkmė priklauso nuo sprendžiamo hamiltoniano ir sistemos dimensiškumo. DMRG metodas yra labai populiarus sprendžiant 1D sistemas, kadangi beveik visais atvejais gaunamas geras sprendinys, tačiau tik retkarčiais pavyksta panaudoti šį metodą 2D sistemoms. Problema ta, kad DMRG yra griežtai aprašytas tik vienmatėms sistemoms, o norint spręsti 2D uždavinius, reikia perrašyti dvimatį uždavinį kaip vienmatį, žinoma, toks perrašymas galimas tik kai sistemos nėra labai didelės. Dėl tokio 2D \rightarrow 1D projektavimo pradinis Hubbardo hamiltonianas pasudėtingėja, atsiranda tolimos sąveikos. Esant tolimos sąveikoms atsiranda pradinė prielaida, kad tik labai nedidelė dalis būsenų bus reikšminga negalioja, arba galioja tik dalinai, tad DMRG metodas tampa neefektyvus. Todėl bendrai, DMRG puikiai veikia 2D sistemose tik esant sąlygai, kad viena kryptimi gardelė yra labai siaura. Šiame darbe buvo išmėgintas DMRG metodas, tačiau jis buvo tik nedaug efektyvesnis RAM atžvilgiu, o vykdymo laikas išaugo kelis kartus, tad buvo nuspręsta pasilikti prie tiksliosios diagonalizacijos.

6 Skaičiavimų rezultatai

6.1 Atviros kraštinės sąlygos

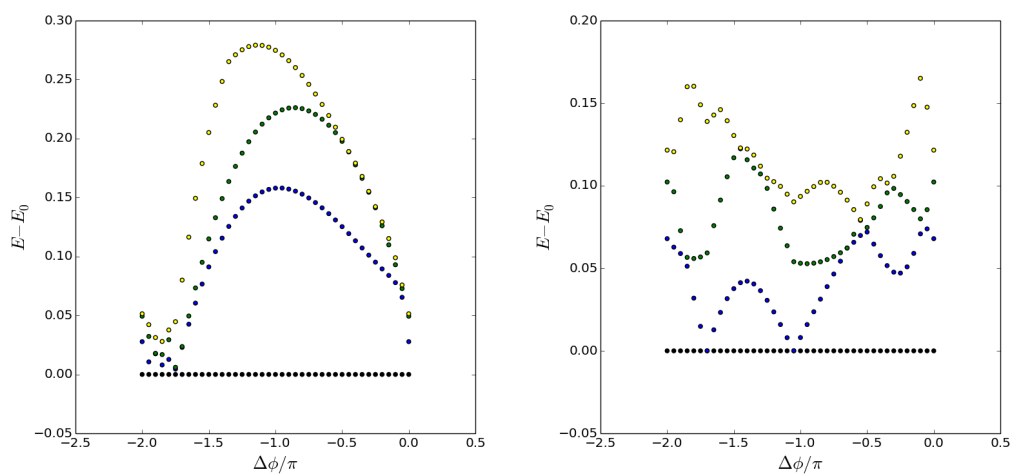
Skaičiuojame $N_m = 6, N_n = 6$ dydžio sistemai atmesdami kraštinius elementus, taip gaunama forma panašesnė į apskritiminę. Sistemos schema pavaizduota 8. Skaičiavimai vykdomi su 4 bozonais.



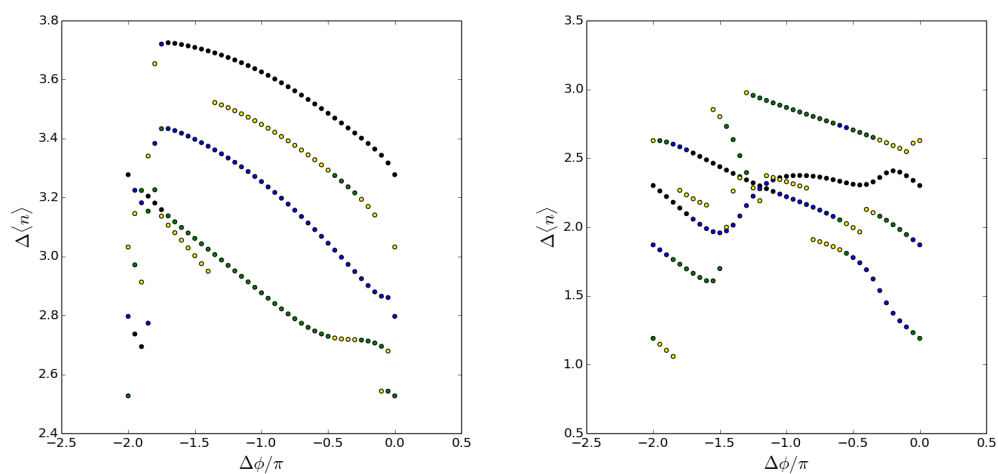
8 pav. Sistemos su atviromis kraštinėmis schema. Raudonai pažymėtas papildomo, krūvio pernašą sukeliančio, srauto vieta.

Sistemoje su atviromis kraštinėmis nebegalime naudoti kvaziimpulso kaip charakteringo kvantinio skaičiaus, tad ne tik išauga skaičiavimų apimtis, tačiau ir tampa sunku atskirti tikrinių būsenų krūvio pernašą. Kaip matyti iš 9pav. daugiadalelinis energijos spektras neturi draustinio tarpo ir vyksta daugybės būsenų persimaišymas keičiant $\Delta\phi$, todėl skaičiuodami krūvio pernešimą žemiausioje būsenoje, gauname daugybę lūžių kreivėje. Šie lūžiai yra susiję su negebėjimu sekti kuri būseną pereina į kurią. Ši problema iš dalies gali būti išspręsta vaizduojant keletą žemiausios energijos būsenų krūvio pernešimo kreives 10 pav.

Iš 9 matome, kad neperiodinėje sistemoje vyksta krūvio judėjimas, tačiau nėra suminio pernešimo charakterizuojančio FQHE būseną. Galima pastebėti, kad krūvio judėjimo amplitudė keičiasi nuo ≈ 1 iki ≈ 0.5 , tad tai gali būti indikatorius, kad vyksta kažkoks kokybinis virsmas.



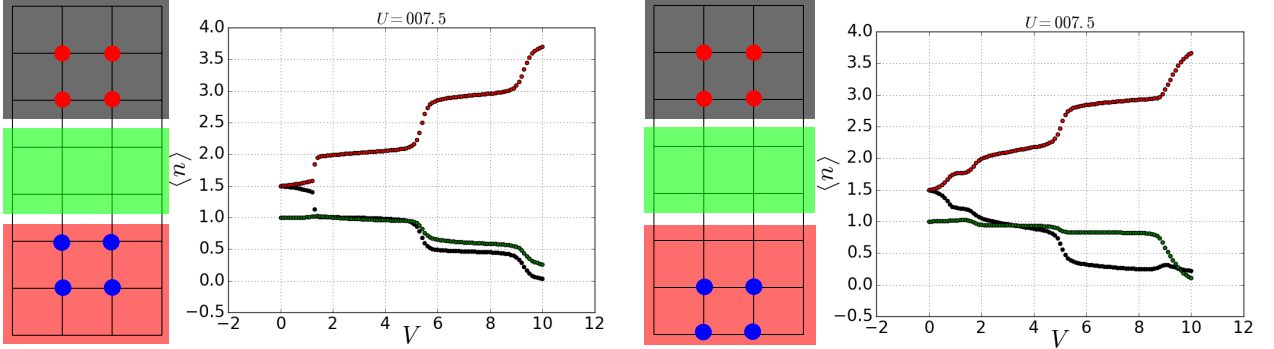
9 pav. Sistemos su atvirais kraštais daugiadalelinis energijos spektras. Kairėje – sąveikos stipris $U = 1.0$, dešinėje – $U = 6.0$



10 pav. Krūvio pernešimas sistemoje su atvirais kraštais. Kairėje – sąveikos stipris $U = 1.0$, dešinėje – $U = 6.0$

6.2 Sužadainimai

6.2.1 Periodinės kraštinės sąlygos



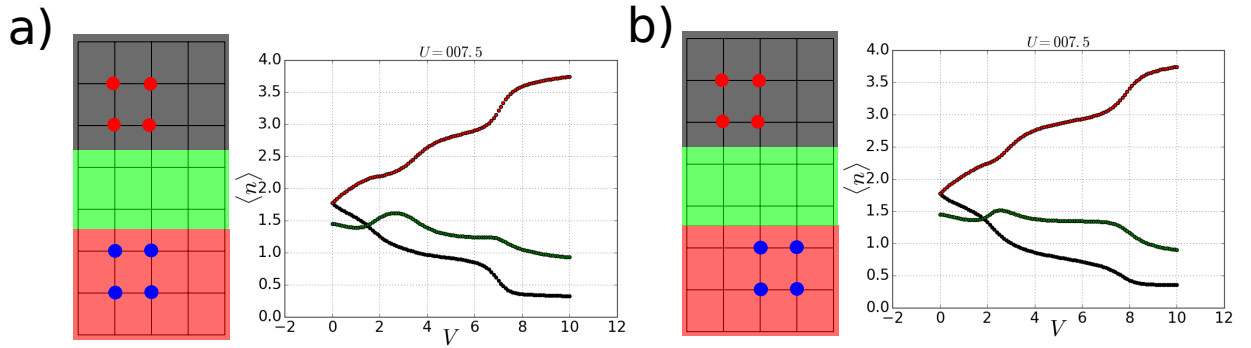
11 pav. Krūvio pasiskirstymas esant skirtingoms defektų padėtimis ir stipriams. Gardelės dydis 8×4 . Grafikuose vaizduojamas integralinis dalelių skaičius per plotą pavaizduotą schemeje. Neigiamo potencialo defektas žymimas mėlynais skrituliais, teigiamo – raudonais.

Toroidinė sistema Norėdami išbandyti, kaip veikia defekto įvedimo metodas, atliekame skaičiavimus su periodinėmis kraštinėmis sąlygomis. Rezultatai pateikti 11 paveikslėlyje. Kairiajame paveikslėlyje tarp defektų yra bent dviejų mazgų tarpas, lengva pastebėti, kad ties $V \approx 1$ verte susidaro 0.5 dalelės dydžio sužadainimai aplink teigiamą ir neigiamą defektus, sritis tarp defektų (žalia) yra beveik nepaveikta. Didinant defektų potencialą dar labiau, ties $V \approx 5.5$ sistemoje "nebeužtenka" dalelių ir tolimesni sužadainimai yra trivialūs. Dešiniajame paveikslėlyje defektai yra arčiau vienas kito. Ties $V \approx 0.8$ matomas 0.25 dydžio sužadainimo susidarymas, kuris greitai pavirsta į 0.5 dydžio sužadainimą. Taigi, matome, kad potencialo defekto įvedimas į gardelę leidžia stebėti lokalizuotus dalinio krūvio sužadainimus.

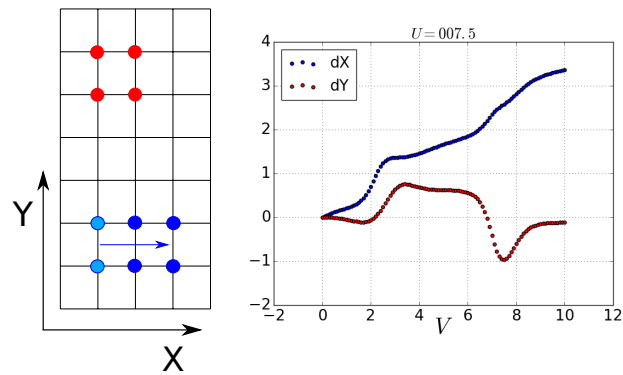
6.2.2 Atviros kraštinės sąlygos 8×5 dydžio gardelėje

Pirmiausia skaičiavimai buvo atlikti 5 dalelėms 8×5 dydžio gardelėje, taip gaunama užpilda $\nu = 1/2$, skaičiuojant pagal gardelės mazgus. Grafike 12 vaizduojamas integralinis krūvis trijose skirtingose gardelės zonose. Matyti, kad defekto stipriui didėjant, dalelių skaičius kinta beveik tolygiai, tačiau galima išžiūrėti stabilų sričių susidarymą ties $V \approx 2$, šiose srityse gauname papildomą krūvį ties defektais, kurio stipris: $\Delta \langle n \rangle \approx 0.5$. Nenulinė išvestinė $\frac{\partial \langle n \rangle}{\partial V}$ ties $V = 0$ indikuoja, kad sistema nėra nespūdi, taigi neatitinka FQHE būsenos begalinėje sistemoje savybių.

Grafike 13 pavaizduotas tankio pirmojo momento kitimas perkeltant potencialo defektą iš vienos padėties į kitą. Matome, kad kvazidalelės judėjimas yra daugiau statmenas defekto judėjimo kryptiai, ir labai neapibrėžto dydžio. Statmenas tankio judėjimas atsiranda dėl simetriškumo balansuojančiam defektui nebuvimo. Atsižvelgus į tankio pasiskirstymą sistemoje



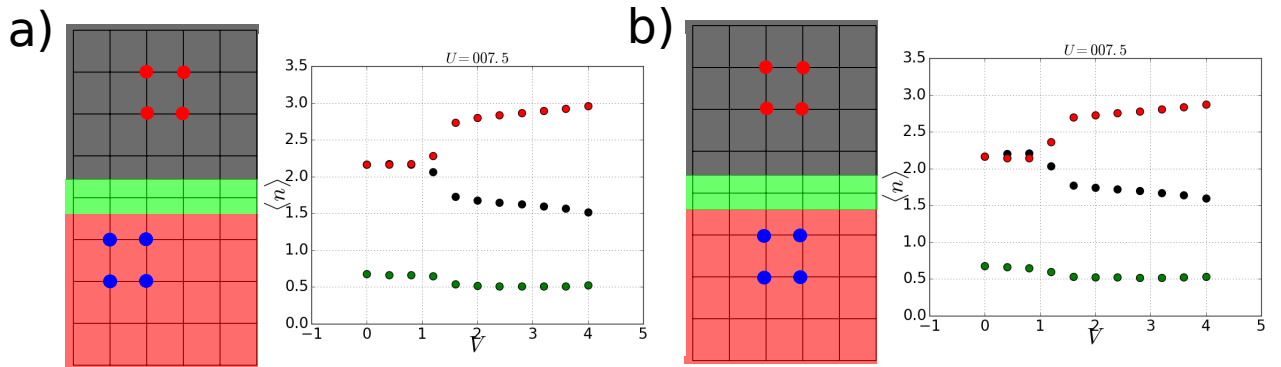
12 pav. Krūvio pasiskirstymas esant skirtingoms defektų padėtimis ir stipriams. Gardelės dydis 8×5 , gardelėje patalpintos 5 dalelės. Grafikuose vaizduojamas integralinis dalelių skaičius per plotą pavaizduotą schemoje. Neigiamo potencialo defektas žymimas mėlynais skrituliais, teigiamo – raudonais.



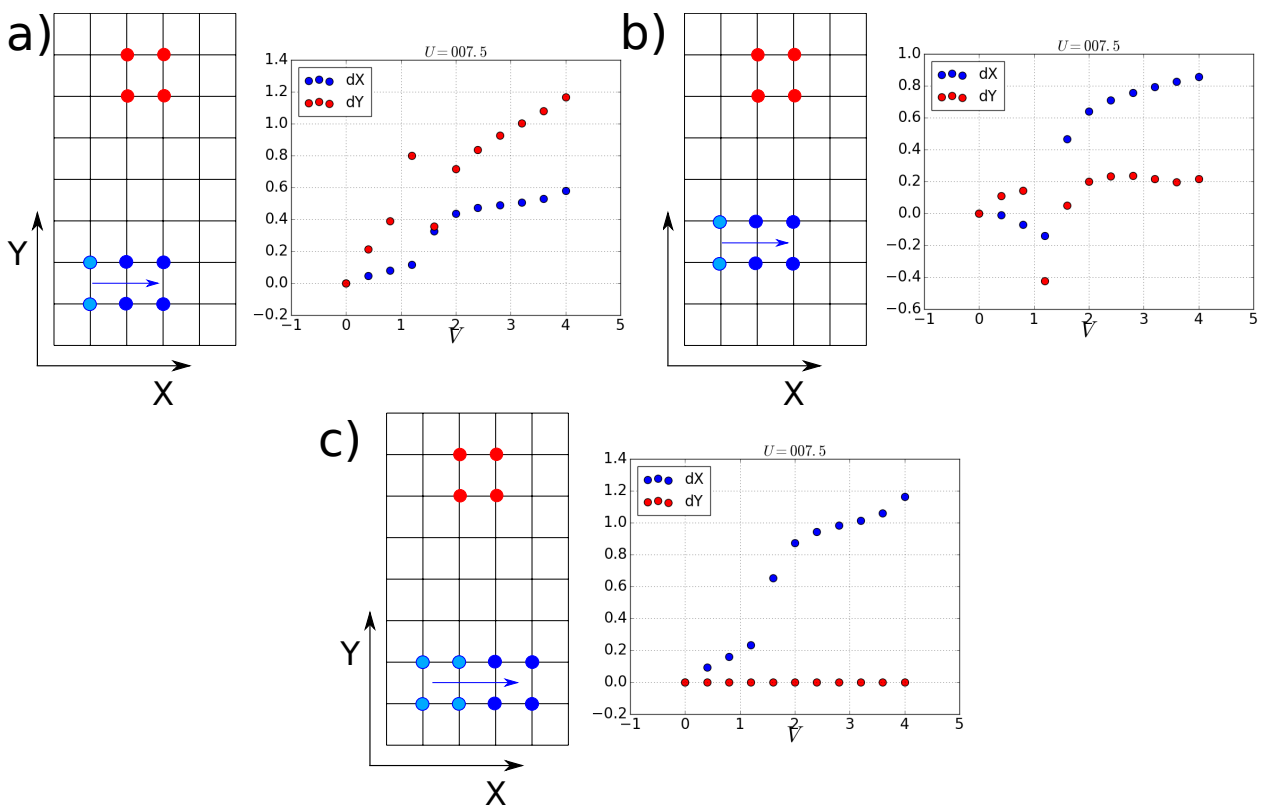
13 pav. Tankio pirmojo momento pokytis keičiant kvazidalelės padėtį. Gardelės dydis 8×5 , gardelėje patalpintos 5 dalelės.

galima daryti išvadą, kad net ir matant krūvio lokalizaciją, šioje sistemoje susidarę sužaditimai nėra stabilūs, tad Berry fazės skaičiavimas yra netikslus.

6.2.3 Atviros kraštinės sąlygos 9×6 dydžio gardelėje



14 pav. Krūvio pasiskirstymas esant skirtingoms defektų padėtimis ir stipriams. Gardelės dydis 9×6 , gardelėje patalpintos 5 dalelės. Grafikuose vaizduojamas integralinis dalelių skaičius per plotą pavaizduotą schemeje. Neigiamo potencialo defektas žymimas mėlynais skrituliais, teigiamo – raudonais.



15 pav. Tankio pirmojo momento pokytis keičiant kvazidalelės padėtį. Gardelės dydis 9×6 , gardelėje patalpintos 5 dalelės.

Kadangi tinkama gardelės užpilda yra svarbus parametras trupmeniniam Hall efektui pasireikšti, išbandome kitą variantą – parenkame gardelės užpildą taip, kad dalelių skaičius atitiktų magnetinių narvelių skaičių. Taigi, 9×6 dydžio gardelėje vykdomi skaičiavimai su 5 dalelėmis. Grafike 14 pavaizduotas integralinis tankis aplink defektus ir tarp jų, kintant defekto stipriui.

Skirtingai negu prieš tai nagrinētu atveju, matome, kad, kai $V \approx 0$, kreivės pokrypis artimas 0, taigi turime nespūdžią būseną. Gradualiai didinant potencialo stiprį stebime atsirandančius $\Delta\langle n \rangle = 0.5$ dydžio tankio nuokrypius. Kaip ir prieš tai nagrinėtoje sistemoje, skaičiuojame pirmąjį tankio momentą. Paveikslėlyje 15 pateikti gauti rezultatai skirtingoms defekto padėtimis. Kai neigiamos potencinės energijos defektas yra kiek įmanoma toliau nuo teigiamos energijos defekto (15a), matome, kad pirmasis tankio momentas pakinta per ≈ 0.5 , tai yra labai geras ir laukiamas rezultatas, tačiau taip pat matomas labai stiprus sužadavimo judėjimas statmena kryptimi. Grafike (15c) pavaizduoti skaitmeninio eksperimento rezultatai, kuomet neigiamos energijos defektas perkeliamas per 2 gardelės narvelius, taip išlaikant simetriškumą pagal atspindžio Y kryptimi operaciją, tuomet gauname, kad pirmasis momentas padvigubėja, o skersinio judėjimo nelieka.

Iš grafiko (15b) matome, kad bandant vykdyti analogišką eksperimentą kaip, tačiau defektams esant arčiau vienas kito, gaunami daug prastesni rezultatai – pirmasis momentas pakinta per ≈ 1 ir primena fermiono judėjimą. Taigi, galima daryti išvadą, kad ribotos geometrijos sistemoje pavyksta matyti tiek dalinio krūvio lokalizaciją, tiek judėjimą, tačiau dėl labai mažų gardelės matmenų tarp kvazidalelės ir kvaziskylės yra per stipri sąveika, kuri neleidžia įvertinti sužadavimo statistikos ir krūvio skaičiuojant Berry fazę.

Išvados

- Skaičiuojant tankio pasiskirstymą gardelėje esant potencialo defektams, matomas trupmeninio krūvio kvazidalelės susidarymas, taigi ir trupmeninio kvantinio Hall efekto būseną.
- Bandant įvertinti susidariusios kvazidalelės statistines savybes, nustatyta, kad dėl sąveikos su kraštiniais efektais arba su kvaziskyle, negalima įvertinti Berry fazės, taigi ir statistinių savybių.
- Norint stebėti trupmeninio kvantinio Hall efekto būseną, dalelių skaičius ribotų matmenų gardelėje turi būti parinktas taip, kad užpilda skaičiuojama pagal magnetinių narvelių skaičių atitiktą racionalią trupmeną.

Literatūros sąrašas

- [1] D. C. Tsui, H. L. Stormer, A. C. Gossard, Two-dimensional magnetotransport in the extreme quantum limit, *Phys. Rev. Lett.* **48**(22), 1559 (1982).
- [2] E. J. Bergholtz, Z. Liu, Topological flat band models and fractional Chern insulators, *International Journal of Modern Physics B* **27**(24), 1330017 (2013).
- [3] G. Moore, N. Read, Nonabelions in the fractional quantum hall effect, *Nuclear Physics B* **360**(2), 362 – 396 (1991).
- [4] K. I. Bolotin, F. Ghahari, M. D. Shulman, H. L. Stormer, P. Kim, Observation of the fractional quantum Hall effect in graphene, *Nature* **462**, 196–199 (2009).
- [5] C. R. Dean, L. Wang, P. Maher, C. Forsythe, F. Ghahari, Y. Gao, J. Katoch, M. Ishigami, P. Moon, M. Koshino, T. Taniguchi, K. Watanabe, K. L. Shepard, J. Hone, P. Kim, Hofstadter’s butterfly and the fractal quantum Hall effect in moire superlattices, *Nature* **497**(7451), 598–602 (2013).
- [6] N. R. Cooper, J. Dalibard, Reaching fractional quantum hall states with optical flux lattices, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 185301 (2013).
- [7] D. R. Hofstadter, Energy levels and wave functions of bloch electrons in rational and irrational magnetic fields, *Phys. Rev. B* **14**, 2239–2249 (1976).
- [8] M. Aidelsburger, M. Atala, M. Lohse, J. T. Barreiro, B. Paredes, I. Bloch, Realization of the hofstadter hamiltonian with ultracold atoms in optical lattices, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 185301 (2013).
- [9] M. Aidelsburger, M. Atala, S. Nascimbène, S. Trotzky, Y.-A. Chen, I. Bloch, Experimental realization of strong effective magnetic fields in an optical lattice, *Phys. Rev. Lett.* **107**(25) (2011).
- [10] W. S. Bakr, J. I. Gillen, A. Peng, S. Fölling, M. Greiner, A quantum gas microscope for detecting single atoms in a Hubbard-regime optical lattice, *Nature* **462**(7269), 74–77 (2009).
- [11] K. v. Klitzing, G. Dorda, M. Pepper, New method for high-accuracy determination of the fine-structure constant based on quantized hall resistance, *Phys. Rev. Lett.* **45**(6), 494 (1980).
- [12] R. B. Laughlin, Anomalous quantum hall effect: An incompressible quantum fluid with fractionally charged excitations, *Phys. Rev. Lett.* **50**, 1395–1398 (1983).

- [13] D. Tong, Lectures on the Quantum Hall Effect, ArXiv e-prints (2016).
- [14] S. M. Girvin, Course 2: The Quantum Hall Effect: Novel Excitations and Broken Symmetries 53 (1999).
- [15] A. S. Sørensen, E. Demler, M. D. Lukin, Fractional quantum hall states of atoms in optical lattices, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 086803 (2005).
- [16] R. de-Picciotto, M. Reznikov, M. Heiblum, V. Umansky, G. Bunin, D. Mahalu, Direct observation of a fractional charge, *Physica B Condensed Matter* **249**, 395–400 (1998).
- [17] T. S. Zeng, C. Wang, H. Zhai, Charge Pumping of Interacting Fermion Atoms in the Synthetic Dimension, *Phys. Rev. Lett.* **115**(9), 5–9 (2015).
- [18] Z. Liu, R. N. Bhatt, N. Regnault, Characterization of quasiholes in fractional Chern insulators, *Phys. Rev. B* **91**(4), 045126 (2015).
- [19] U. Schollwöck, The density-matrix renormalization group in the age of matrix product states, *Annals of Physics* **326**, 96–192 (2011).
- [20] I. Bloch, J. Dalibard, W. Zwerger, Many-body physics with ultracold gases, *Rev. Mod. Phys.* **80**, 885–964 (2008).

FRACTIONALLY CHARGED EXCITATIONS IN A RESTRICTED-GEOMETRY
LATTICE

Summary

The discovery of fractional quantum Hall effect (FQHE) in 2D electron gas gave rise to immense interest in topological phases of matter [2], [1]. One of the most intriguing features of FQHE state is fractionally charged excitations which embodies anyonic statistics. Even though the FQHE was first observed in GaAs-GaAlAs heterojunctions, experiments in optical lattices [20] allow much more controllable study of many-body systems, therefore allowing regimes that are impossible to realise in semiconductor based experiments. Historically, FQHE comes from condensed matter systems, which can be characterized by a very large number of particles, as a consequence, theoretical studies were focused only on infinite or periodical Hamiltonians. Therefore, few of the unanswered questions remain: can FQHE states be realised in minuscule lattices, containing only several sites in diameter, and what additional effects would open boundaries produce? In this work we try to tackle both of these questions. Using numerical diagonalization of Harper-Hofstadter model we were able to observe localisation of fractional charge in a 9×6 square lattice with artificial magnetic flux. Unfortunately, close proximity to the lattice edges does not allow direct confirmation of fractional statistics.

Račiūnas, Mantas. *Trupmeninio krūvio sužadėjimai ribotų matmenų gardelėje*: Fizikos magistrantūros studijų baigiamasis darbas. Vad. Prof. dr.(HP) Egidijus Anisimovas. Vilnius: Vilniaus universitetas Fizikos fakultetas, 2017, 30 p.

Šiame darbe nagrinėjama Hofstadterio Harperio gardelė, kurioje patalpinti sąveikaujantys bozonai. Tokioje sistemoje pasireiškia kvantinis Hall efektas, tačiau visi iki šiol daryti skaičiavimai naudojo periodines kraštines sąlygas, taigi, laikėsi begalinės sistemos artinio. Šio darbo tikslas – patikrinti ar stebimi trupmeniniam kvantiniam Hall efektui būdingi požymiai labai mažų matmenų gardelėje. Vykstant skaitmeninius skaičiavimus esant potencialo defektams, gardelėje buvo pastebėtas trupmeninio krūvio lokalizavimasis.