

VILNIAUS UNIVERSITETAS
FIZIKOS FAKULTETAS
TEORINĖS FIZIKOS KATEDRA

Giedrius Žlabys

KVAZI-VIENMATĖS KINTAMO MAGNETINIO SRAUTO OPTINĖS GARDELĖS

Magistrantūros studijų baigiamasis darbas

(studijų programa – TEORINĖ FIZIKA IR ASTROFIZIKA)

Studentas

Giedrius Žlabys

Darbo vadovas

Prof. dr. (HP) Egidijus Anisimovas

Recenzentas

Dr. Viktor Novičenko

Katedros vedėjas

Prof. habil. dr. Leonas Valkūnas

Vilnius 2017

Turinys

| | |
|--|----|
| Ivadas | 2 |
| 1 Šaltųjų atomų sistemų tyrimas ir kontrolė | 3 |
| 1.1 Optinės gardelės | 4 |
| 1.1.1 Veikimo principas..... | 4 |
| 1.1.2 Hubbard modelis | 5 |
| 1.2 Dirbtiniai kalibruotės laukai | 6 |
| 1.2.1 Magnetinis srautas gardelėje..... | 6 |
| 1.2.2 Išorine jėga veikiama sistema | 7 |
| 1.3 Banginis paketas gardelėje | 9 |
| 1.3.1 Banginio paketo sudarymas..... | 9 |
| 1.3.2 Banginio paketo dinamika | 10 |
| 2 Kvazi-vienmatės gardelės su valdomu srautu | 13 |
| 2.1 Kvadratinės gardelės hamiltoniano apibrėžimas | 13 |
| 2.1.1 Dispersijos sąryšiai | 16 |
| 2.2 Trikampė gardelė | 17 |
| 2.3 Banginio paketo dinamika kvazi-vienmatėje gardelėje | 18 |
| 2.3.1 Judėjimo lygtys gardelėje su pastoviu γ | 18 |
| 2.3.2 Judėjimo lygtys kintančiam srautui $\gamma(x_c)$ | 21 |
| 2.4 Magnetinio srauto valdymas | 22 |
| 2.4.1 Dirbtinis magnetinis srautas kvazi-vienmatėje dinaminėje kvadratinėje gardelėje..... | 24 |
| 2.4.2 Dirbtinis magnetinis srautas kvazi-vienmatėje dinaminėje trikampėje gar- delėje | 25 |
| 2.5 Skaitmeniniai skaičiavimai | 26 |
| 2.5.1 Banginis paketas kvazi-vienmatėje kvadratinėje gardelėje | 26 |
| 2.5.2 Banginis paketas kvazi-vienmatėje trikampėje gardelėje..... | 28 |
| Išvados | 30 |
| Literatūros sąrašas | 31 |
| Summary | 33 |

Įvadas

Optinės gardelės – erdvėje periodiškai interferuojančių lazerių spindulių intensyvumo skirstiniai. Jose sugauti šaltieji atomai gali sukurti švarias, įvairios kristalinės geometrijos sistemas, tiksliai kontroliuojamas laboratorijoje [1].

Skirtingai negu kietuosiuose kūnuose, tirti išorinio magnetinio lauko poveikį šaltųjų atomų sistemose yra sudėtinga – neutralios dalelės neveikiamos Lorentz jėgos. Norint įgyvendinti magnetinius efektus, tenka įvesti ekvivalentų dirbtinį kalibruotės potencialą [2]. Dėl jo, dalelė apėjusi gardelės elementarų narvelį sukaupia nenulinę fazę, atitinkančią lauko kuriamą dirbtinį magnetinį srautą. Toks srautas gali būti realizuojamas keliais būdais: periodiškai virpinant gardelę [3], lazeriu indukuojant kompleksinius šuolius tarp skirtingų jos mazgų [4] arba naudojant dažnio standarto šuolius [5]. Iš vienos pusės, eksperimento schema komplikuojasi, iš kitos – turime daugiau valdomų parametrų. Šiuos laisvės laipsnius galima išnaudoti įvairių stiprių bei erdvinių konfigūracijų dirbtinio magnetinio srauto kūrimui. Iki šiol eksperimentai apsiribodavo pastoviu arba alternuojančiu vienodo dydžio srautu, todėl šiame darbe siūloma nehomogeninio srauto sukūrimo schema. Jos taikymui pasirenkamos kvazi-vienmatės gardelės, dėl lengvai valdomų šuolių parametrų bei įdomių energijos juostų.

Šio darbo tikslas yra kintamo magnetinio srauto sudarymas kvazi-vienmatėse gardelėse bei jo poveikio gardelėje sklindančio banginio paketo dinamikai tyrimas.

1 Šaltųjų atomų sistemų tyrimas ir kontrolė

Šaltųjų atomų sistemą sudaro atomų dujos, atšaldytos iki dešimčių mikrokelvinų arba žemesnės temperatūros bei išorinis potencialas ribojantis šių dalelių judėjimą. Tikslus išorinio potencialo valdymas leidžia tirti platų kvantinių reiškinių spektrą, išvengiant sunkumų susijusių su kondensuotų medžiagų bandinių netobulumais.

Bose-Einstein kondensato sukūrimas 1995 m. [6] yra vienas iš pirmųjų eksperimentinių šaltųjų sistemų įgyvendinimų, atomų sugavimui naudojant magnetinę gaudyklę, o atšaldymui pritaikant naujus metodus – šaldymą lazeriu ir didžiausią kinetinę energiją turinčių atomų išgaravimą iš gaudyklės potencialo. Šis eksperimentas patvirtino Bose ir Einstein teorinius skaičiavimus atliktus XX a. pradžioje ir kartu paskatino plėsti tyrimus supertakumo srityje (kolektyvinės osciliacijos [7], kvantuotų sūkurių susidarymas [8], Josephson tipo efektai [9]). Taip pat pradėtos tirti fermioninės dalelės: 1999 m. šaltose ^{40}K dujose stebėti judėsio kiekio skirstinio pakitimai sąlygoti Pauli draudimo principo [10], 2005 m. įgyvendintas supertakumas aprašomas Bardeen–Cooper–Schrieffer teorija [11]. Išsami Fermi dujų eksperimentų ir teorijos apžvalga pateikiama Giorgini et al. [12].

Siekiant sukurti ir kontroliuoti periodines sistemas, pradėtos naudoti optinės gardelės – interferuojantys lazerių spinduliai lokalizuojantys daleles periodiškoje struktūroje. Toks optinis kristalas sukėlė didelį susidomėjimą, nes jis potencialiai gali būti naudojamas kaip kvantinės daugiadalelės sistemos simulatorius, idėjiškai aprašytas Feynman 1982 m. [13]. Keičiant lazerių konfigūracijas sukuriamos skirtingų geometrijų gardelės, o dinamiškai valdomas lazerių intensyvumas sąlygoja dalelių tuneliavimo tarp gardelės mazgų ir tarpusavio sąveikų vertes [1]. Tai atveria kelią analizuoti: žemo dimensiškumo problemas, kuriose gali pasireikšti anioninė dalelių statistika (pvz. trumpėnis kvantinis Hall efektas [14]), kvantinius fazinius virsmus (superskysčio-Mott izoliatoriaus virsmas [15]), Hubbard tipo modelius [16]. Įvedus periodinį optinės gardelės virpinimą [17], lazeriu indukuojamus Ramano šuolius [18] arba dažnio standarto (optinio laikrodžio) šuolius [5] tarp mazgų, dvimatėje sistemoje galima sukurti dirbtinius kalibruotės laukus. Ši kontroliuojamų paramatrų gausa ir nuolat tobulėjanti eksperimentinė metodika paverčia šaltųjų atomų sistemų sritį labai patrauklia, skatinančia ieškoti naujų egzotinių medžiagų savybių bei leidžiančia prisiliesti prie fundamentaliausių kvantinės mechanikos reiškinių.

Toliau šiame skyriuje bus detaliau aptariami esminiai šaltųjų atomų sistemų įgyvendinimo ir kontrolės metodai; jų teoriniai aspektai reikalingi nagrinėjamos kvazi-vienmatės gardelės tyrimui.

1.1 Optinės gardelės

Optinė gardelė – interferuojančių lazerių spindulių sukuriamas intensyvumo pasiskirstymas, dinaminio Stark efekto dėka sulaikantis daleles intensyvumo maksimumuose arba minimumuose.

1.1.1 Veikimo principas

Tarkime atomas, kurį norime pagauti yra dviejų lygmenų sistema, aprašoma hamiltonianu

$$H_a = \hbar\omega_g|g\rangle\langle g| + \hbar\omega_e|e\rangle\langle e|, \quad (1.1)$$

čia $\hbar\omega_g$ ir $\hbar\omega_e$ žymi žemiausios ir sužadintos būsenos energijas, o $|g\rangle$, $|e\rangle$ yra jų tikriniai vektoriai. Dažnių skirtumą tarp energijos lygmenų pažymėsime $\omega_0 = \omega_e - \omega_g$. Atomą veikiant ω dažnio elektromagnetine spinduliuote $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{E}(\mathbf{x})e^{-i\omega t} + \mathcal{E}^*(\mathbf{x})e^{i\omega t}$, kai $\mathcal{E}(\mathbf{x})$ yra elektrinio lauko erdvinė priklausomybė, indukuojamas dipolinis momentas, kurio sąveika su lauku atitiks

$$H_{\text{dip}} = -\hat{\mathbf{d}}\mathbf{E}(\mathbf{x}, t). \quad (1.2)$$

Užrašius dipolinio momento operatorių $\hat{\mathbf{d}}$ atomo tikrinių būsenų bazėje $\hat{\mathbf{d}} = \sum_{i,j \in \{g,e\}} \langle i|\hat{\mathbf{d}}|j\rangle|i\rangle\langle j|$, žinoma, kad diagonaliniai dipolinio momento matriciniai elementai išnyks dėl simetriško krūvių pasiskirstymo esant stacionariose būsenose, išliks tik nediagonaliniai nariai $\boldsymbol{\mu}_{ge} \equiv \langle e|\hat{\mathbf{d}}|g\rangle$ ir $\boldsymbol{\mu}_{ge}^*$. Tada pilną sistemą apibūdins hamiltonianas

$$H = H_a + H_{\text{dip}} = \frac{\hbar\omega_0}{2} (|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|) - (\boldsymbol{\mu}_{ge}|e\rangle\langle g| + \boldsymbol{\mu}_{ge}^*|g\rangle\langle e|) \mathbf{E}(\mathbf{x}, t). \quad (1.3)$$

Toliau siekiant supaprastinti uždavinį, atliekama kalibruotės transformacija, leidžianti pereiti į atskaitos sistemą besisukančią spinduliuotės dažniu, t.y.

$$H \rightarrow U^\dagger H U - i\hbar U^\dagger \frac{dU}{dt}, \quad \text{kai } U = e^{\frac{-i\omega t}{2}(|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|)}. \quad (1.4)$$

Gautam efektiniam hamiltonianui

$$\tilde{H} = -\frac{\hbar(\omega - \omega_0)}{2} (|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|) - (e^{i\omega t} \boldsymbol{\mu}_{ge}|e\rangle\langle g| + e^{-i\omega t} \boldsymbol{\mu}_{ge}^*|g\rangle\langle e|) \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \quad (1.5)$$

taikoma besisukančios bangos aproksimacija, atmetanti sparčiai osciluojančius narius:

$$\tilde{H}_{\text{RW}} = -\frac{\hbar(\omega - \omega_0)}{2} (|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|) - \boldsymbol{\mu}_{ge} \mathcal{E}(\mathbf{x})|e\rangle\langle g| - \boldsymbol{\mu}_{ge}^* \mathcal{E}^*(\mathbf{x})|g\rangle\langle e|. \quad (1.6)$$

Galiausiai, laikant jog Rabi dažnis $\Omega(\mathbf{x}) \equiv \frac{2\boldsymbol{\mu}_{ge}\mathcal{E}(\mathbf{x})}{\hbar}$ yra daug mažesnis už perėjimo tarp atomo energijos lygmenų dažnį $\Omega(\mathbf{x}) \ll \omega_0$, galima taikyti perturbacijų metodą ir surasti energijos verčių pataisas dėl dipolinės sąveikos. Pirmos eilės trikdžių nario duodamos pataisos yra lygios

nuliui, o antros eilės pataisos yra

$$E_g^{(2)}(\mathbf{x}) = \frac{|\boldsymbol{\mu}_{ge}\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{x})|^2}{\hbar(\omega-\omega_0)}, \quad (1.7a)$$

$$E_e^{(2)}(\mathbf{x}) = -\frac{|\boldsymbol{\mu}_{ge}^*\boldsymbol{\mathcal{E}}^*(\mathbf{x})|^2}{\hbar(\omega-\omega_0)}. \quad (1.7b)$$

Šie nuo koordinatės priklausantys energijų poslinkiai ir yra dinaminis Stark efektas. Taigi parenkant interferuojančių lazerių intensyvumo skirstinį $|\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{x})|^2$ žemiausios būsenos atomai yra lokalizuojami intensyvumo minimumuose, kai lauko dažnis yra paslinktas į „mėlynąją“ pusę sistemos šuolio atžvilgiu ($\omega - \omega_0 > 0$), maksimumuose – į „raudonąją“ ($\omega - \omega_0 < 0$).

1.1.2 Hubbard modelis

Hubbard modelis yra taikomas hamiltoniano aproksimavimui, kai periodiniame potenciale turime pakankamai atšaldytas daleles užpildančias žemiausią Bloch juostą ir sąveikos tarp jų yra artiveikės (sąveikos tik tarp artimiausiuose kaimyniniuose mazguose esančių dalelių). Šaltųjų atomų optinė gardelė gerai atitinka šiuos kriterijus [16], todėl šis modelis yra vienas iš pagrindinių gardelių modeliavimo įrankių.

Pradžioje turime daugiadalelį sistemos hamiltonianą

$$H = \sum_{\sigma} \int d\mathbf{x} \hat{\Psi}_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{x}) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_0(\mathbf{x}) + V_T(\mathbf{x}) \right) \hat{\Psi}_{\sigma}(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \sum_{\sigma, \sigma'} \iint d\mathbf{x} d\mathbf{x}' \hat{\Psi}_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{x}) \hat{\Psi}_{\sigma'}^{\dagger}(\mathbf{x}') V(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \hat{\Psi}_{\sigma'}(\mathbf{x}) \hat{\Psi}_{\sigma}(\mathbf{x}'), \quad (1.8)$$

kai $\hat{\Psi}_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{x})$ ($\hat{\Psi}_{\sigma}(\mathbf{x})$) žymi bozoninius arba fermioninius sukūrimo (sunaikinimo) lauko operatorius su sukiniu σ , V_0 – optinės gardelės kuriamą periodinį potencialą (1.7), V_T – išorinį, lėtai erdvėje kintantį gaudyklės potencialą (pvz. magnetinę gaudyklę), V – tarpdalelinės sąveikos potencialą. Žinant, kad dalelės yra žemiausioje Bloch juostoje ir nėra toliveikių sąveikų, lauko operatorius galima skleisti ortogonalioje Wannier funkcijų $w(\mathbf{x})$ bazėje:

$$\hat{\Psi}_{\sigma}(\mathbf{x}) = \sum_i w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \hat{c}_{i\sigma}, \quad (1.9)$$

taip atvaizduojant hamiltonianą į diskrečią gardelę (pritaikant stipraus ryšio aproksimaciją). Čia \mathbf{x}_i atitinka i -tojo optinės gardelės potencialo minimumo koordinatę, o \hat{c}_i^{\dagger} (\hat{c}_i) – sukūrimo (sunaikinimo) operatorių, apibrėžiamą ties \mathbf{x}_i . Įstačius lauko operatoriaus skleidinį į (1.8) gausime

$$H_H = - \sum_{\langle i,j \rangle, \sigma} J_{ij} \hat{c}_{i\sigma}^{\dagger} \hat{c}_{j\sigma} + \sum_{i, \sigma} \varepsilon_i \hat{c}_{i\sigma}^{\dagger} \hat{c}_{i\sigma} + \frac{1}{2} \sum_{i,j,k,l, \sigma} U_{ijkl} \hat{c}_{i\sigma}^{\dagger} \hat{c}_{j\sigma}^{\dagger} \hat{c}_{k\sigma} \hat{c}_{l\sigma}. \quad (1.10)$$

Tai yra Hubbard modelio hamiltonianas. Pirmasis narys aprašo šuolius tarp artimiausiųjų

kaimyninių gardelės mazgų $\langle i, j \rangle$, su tuneliavimo stipriu

$$J_{ij} = - \int d\mathbf{x} w^*(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_0(\mathbf{x}) \right) w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j), \quad (1.11)$$

antrasis – ties kiekvienu mazgu atsirandantį energijos poslinkį, dėl lėtai erdvėje kintančio išorinio potencialo

$$\varepsilon_i = \int d\mathbf{x} |w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)|^2 V_T(\mathbf{x}) \approx V_T(\mathbf{x}_i), \quad (1.12)$$

trečiasis – sąveikas. Šaltųjų atomų dujos yra žemos energijos sistema, todėl tikslus sąveikų potencialas gali būti aproksimuojamas pseudopotencialu, nusakomu sklaidos ilgiu a_s ir dalelės mase m :

$$U_{ijkl} = \frac{4\pi\hbar^2 a_s}{m} \int d\mathbf{x} w^*(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) w^*(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_l). \quad (1.13)$$

Šuolio (J) ir sąveikos (U) stiprių vertės skaičiuojamos skaitmeniškai.

Čia buvo pateiktas paprasčiausias Hubbard modelis, tačiau egzistuoja jo plėtiniai, įvedantys tolimesnes, tankio indukuojamas, sąveikas [19] taip praturtindami sistemų savybes. Šiame darbe apsiribojame viendaleliu uždaviniu, todėl tarpdalelėms sąveikoms daugiau dėmesio neskirsime.

1.2 Dirbtiniai kalibruotės laukai

Optinėse gardelėse naudojamos neutralios dalelės, todėl atrodytų, jog elektromagnetizmo sąlygotus efektus sukurti yra sudėtinga. Tačiau egzistuoja schemas, kurių pagalba įgyvendinami dirbtiniai kalibruotės laukai [20], simuliuojantys sistemą kertantį efektinį magnetinį srautą. Tai potencialiai leidžia kurti topologinius izolatorius, kvantines Hall sistemas, sukinio-orbitos sąveikas. Dirbtinės kalibruotės potencialai realizuojami sistemą sukant [21], virpinant [17], indukuojant kompleksinius šuolius tarp gardelės mazgų lazeriu [18].

Šiame poskyryje įvedamas gardelės elementarųjį narvelį kertančio srauto apibrėžimas ir dirbtinio kalibruotės potencialio kūrimo metodai.

1.2.1 Magnetinis srautas gardelėje

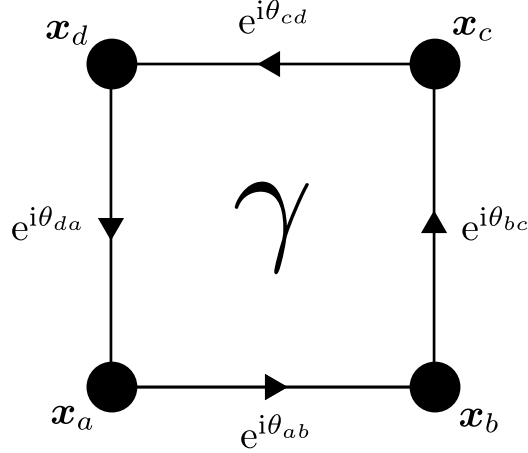
Tarkime dvimatė optinė gardelė yra veikiamą išorinio lauko, kurio kalibruotės potencialas $\mathcal{A}(\mathbf{x})$. Dalelė tokioje sistemoje judėdama nuo vieno mazgo a iki kito mazgo b įgis magnetinį fazės daugiklį $e^{i\theta_{ab}}$, kurio argumentas vadinamas Peierls faze

$$\theta_{ab} = \frac{1}{\hbar} \int_{\mathbf{x}_a}^{\mathbf{x}_b} \mathcal{A}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (1.14)$$

Jei dalelė apeis gardelės narvelį uždaru kontūru ∂M , tuomet jos fazė bus lygi

$$\gamma \equiv \sum_{\partial M} \theta_{ij} = \frac{1}{\hbar} \oint_{\partial M} \mathcal{A}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \frac{1}{\hbar} \int_M \mathbf{B} d\mathbf{S}. \quad (1.15)$$

Matome, kad $\mathbf{B} = \nabla \times \mathcal{A}(\mathbf{x})$ atitinka kalibruotės potencialo kuriamą efektinį magnetinį lauką, o γ aprašo kiek magnetinio srauto kvantų $\gamma_0 = \hbar$ kerta uždaro kontūro plotą M . Srauto skaičiavimo pavyzdys kvadratinės gardelės narveliui pateikiamas 1 pav.



$$\gamma = \theta_{ab} + \theta_{bc} + \theta_{cd} + \theta_{da}$$

1 pav. Magnetinis srautas kvadratinės gardelės narvelyje (rodyklės žymi šuolių kryptis).

Modeliuojant tokią sistemą, srauto poveikis įskaitomas stipraus ryšio hamiltoniane (Hubbard modelio hamiltoniano (1.10) kinetinėje dalyje):

$$H_{\text{TB}} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} e^{i\theta_{ji}} \hat{c}_i^\dagger \hat{c}_j, \quad (1.16)$$

tuneliavimo amplitudę J padauginus iš Peierls fazės daugiklio.

1.2.2 Išorine jėga veikiama sistema

Vienas iš būdų sukurti kalibruotės potencialą yra periodiškai virpinti gardelę. Tegul mūsų sistema aprašoma nuo laiko priklausančiu hamiltonianu

$$H(t) = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \hat{c}_i^\dagger \hat{c}_j + \sum_i w_i(t) \hat{c}_i^\dagger \hat{c}_i. \quad (1.17)$$

Pirmas narys įskaito įprastus tarpkaimyninius šuolius, o antrasis moduliuoja kiekvieno mazgo energijos poslinkį funkcija proporcinga išorinei periodinei jėgai $\mathbf{F}(t)$ bei įveda statinį energijos

poslinkį sukeliama pastovios jėgos \mathbf{F}_0 :

$$w_i(t) = -\mathbf{x}_i [\mathbf{F}(t) + \mathbf{F}_0]. \quad (1.18)$$

Statinis poslinkis leidžia minimizuoti natūralų tuneliavimą, todėl padidėja purtymo lemiamą kontrolė.

Norint suvesti hamiltonianą į (1.16) pavidalą, atliekama kalibruotės transformacija

$$H \rightarrow U^\dagger H U - i\hbar U^\dagger \frac{dU}{dt}, \quad \text{kai} \quad U = \prod_i U_i = \prod_i e^{i\chi_i(t)\hat{c}_i^\dagger \hat{c}_i} \quad (1.19)$$

ir

$$\chi_i = -\frac{1}{\hbar} \int_{t_0}^t w_i(t') dt' + \chi_{i0}, \quad (1.20)$$

čia χ_{i0} nuo laiko nepriklausanti kalibruotės konstanta. Tada norint gauti naują hamiltoniano formą, tenka sutvarkyti išraišką

$$\tilde{H}(t) = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \prod_l U_l^\dagger \hat{c}_i^\dagger \hat{c}_j \prod_m U_m + \sum_i w_i(t) \prod_l U_l^\dagger \hat{c}_i^\dagger \hat{c}_i \prod_m U_m - i\hbar \prod_l U_l^\dagger \frac{d}{dt} \prod_m U_m. \quad (1.21)$$

Unitariniai operatoriai U_i komutuoja su indeksu besiskiriančiais sukūrimo/sunaikinimo operatoriais, todėl nesunku pastebėti, kad visos pirmame ir antrame naryje mazgų neveikiančios unitarinių operatorių poros duos vienetus

$$\tilde{H}(t) = -J \sum_{\langle i,j \rangle} U_i^\dagger \hat{c}_i^\dagger U_i U_j^\dagger \hat{c}_j U_j + \sum_i w_i(t) U_i^\dagger \hat{c}_i^\dagger \hat{c}_i U_i - i\hbar \underbrace{\prod_l U_l^\dagger \prod_m U_m}_1 \sum_m i \underbrace{\frac{d\chi_m}{dt}}_{-w_m(t)/\hbar} \hat{c}_m^\dagger \hat{c}_m. \quad (1.22)$$

Pirmiesiems dviems nariams pritaikius tapatybę sekančią iš Baker-Campbell-Hausdorff formulės išvedimo

$$e^{-\hat{A}} \hat{B} e^{\hat{A}} = \hat{B} - [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{2!} [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] - \frac{1}{3!} [\hat{A}, [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]]] + \dots, \quad (1.23)$$

turėsime narius

$$U_i^\dagger \hat{c}_i^\dagger U_i = \hat{c}_i^\dagger e^{-ix_i}, \quad (1.24a)$$

$$U_i^\dagger \hat{c}_i \hat{c}_i U_i = \hat{c}_i^\dagger \hat{c}_i, \quad (1.24b)$$

kuriuos įstatę į (1.22) ir išprastinę paskutinius du narius galiausiai gausime

$$\tilde{H}(t) = -J \sum_{\langle i,j \rangle} e^{i(\chi_j - \chi_i)} \hat{c}_i^\dagger \hat{c}_j. \quad (1.25)$$

Matome, kad šis hamiltonianas turi (1.16) formą, tik dabar nuo laiko priklausanti Peierls fazė

$\theta_{ji} \equiv \chi_j - \chi_i$. Taigi virpinant gardelę indukuojami kompleksiniai šuoliai galintys sukurti dirbtinį magnetinį srautą.

1.3 Banginis paketas gardelėje

1.3.1 Banginio paketo sudarymas

Dalelių pernašai gardelėse esant išoriniam laukui tirti taikoma kvaziklasikinė banginių paketų dinamikos teorija. Judėjimo lygtys išvedamos naudojant lagranžiano formalizmą, sekant Xiao et al. [22].

Tarkime, kad mus dominančią periodinę sistemą aprašo hamiltonianas

$$H[\hat{x}, \hat{p}; \beta(\hat{x}, t)], \quad (1.26)$$

priklausantis nuo koordinatės (\hat{x}), judesio kiekio (\hat{p}) ir funkcijos charakterizuojančios perturbacijos ($\beta(\hat{x}, t)$). Norime rasti, kaip elgsis mažo išplitimo (lyginant su perturbacijų charakteringu ilgiu) banginis paketas, laiko momentu t centruotas ties koordinate x_c . Išskleidus hamiltonianą x_c aplinkoje

$$H \approx H_c + \Delta H, \quad (1.27)$$

gauname banginio paketo dinamiką sąlygojančią aproksimaciją, kai $H_c \equiv H[\hat{x}, \hat{p}; \beta(x_c, t)]$ yra lokalus hamiltonianas, turintis potencialo periodiškumą, o ΔH gradientinė pataisa.

Sprendžiant lokalaus hamiltoniano tikrinių verčių uždavinį

$$H_c(x_c, t)|\psi_k^n(x_c, t)\rangle = E_c^n(x_c, k, t)|\psi_k^n(x_c, t)\rangle, \quad (1.28)$$

randamos Bloch energijos juostos $E_c^n(x_c, k, t)$, indeksuojamos n , ir atitinkamos tikrinės būsenos $|\psi_k^n(x_c, t)\rangle = e^{ik\hat{x}}|u(x_c, k, t)\rangle$ su Bloch bangos vektoriumi k bei periodine Bloch bangos dalimi u . Iš šių banginių būsenų galima sudaryti banginį paketą

$$|\Psi\rangle = \int dk a(k, t)|\psi_k(x_c, t)\rangle \quad (1.29)$$

su normalizuota gaubtine funkcija $a(k, t)$, t.y. $\int dk |a(k, t)|^2 = 1$, esant ortogonalioms būsenoms $\langle\psi_k|\psi_{k'}\rangle = \delta(k' - k)$. Energijos juostų indeksas n neberašomas, laikant, kad tarpai tarp energijos juostų yra pakankamai dideli ir banginis paketas negali pereiti iš vienos juostos į kitą. Banginio paketo dinamikos aprašymui svarbūs dydžiai yra vidutinis bangos vektorius

$$k_c = \int dk k |a(k, t)|^2 \quad (1.30)$$

ir banginio paketo centro koordinatė

$$x_c = \langle \Psi | \hat{x} | \Psi \rangle = i \int dk \left(a^*(k, t) \frac{\partial a(k, t)}{\partial k} + |a(k, t)|^2 \langle u(x_c, k, t) | \frac{\partial |u(x_c, k, t)\rangle}{\partial k} \right),$$

išreiškus $a(k, t) = |a(k, t)| e^{-i\gamma(k, t)}$

$$x_c = \int dk |a(k, t)|^2 \left(\frac{\partial \gamma(k, t)}{\partial k} + i \left\langle u(x_c, k, t) \left| \frac{\partial u(x_c, k, t)}{\partial k} \right. \right\rangle \right).$$

Jei paketas yra siauras $|a(k, t)|^2 \approx \delta(k - k_c)$, tada galutinė banginio paketo koordinatės centro išraiška

$$x_c = \frac{\partial \gamma(k_c, t)}{\partial k_c} + i \left\langle u(x_c, k_c, t) \left| \frac{\partial u(x_c, k_c, t)}{\partial k_c} \right. \right\rangle, \quad (1.31)$$

čia antrasis lygties narys yra vadinamas Berry ryšiu.

1.3.2 Banginio paketo dinamika

Banginio paketo judėjimo lygtys gali būti gaunamos iš nuo laiko priklausančio variacinio principo. Pradžioje skaičiuojamas lagranžianas

$$L = \left\langle \Psi \left| i\hbar \frac{d}{dt} - H \right| \Psi \right\rangle, \quad (1.32)$$

toliau šiame skyrelyje laikysime $\hbar = 1$, o taškas virš kintamojo reikš jo laikinę išvestinę. Pirmąjį lagranžiano narį

$$\left\langle \Psi \left| i \frac{d}{dt} \right| \Psi \right\rangle = \frac{\partial \gamma(k_c, t)}{\partial t} + i \left\langle u(x_c, k_c, t) \left| \frac{\partial u(x_c, k_c, t)}{\partial x_c} \right. \right\rangle \dot{x}_c + i \left\langle u(x_c, k_c, t) \left| \frac{\partial u(x_c, k_c, t)}{\partial t} \right. \right\rangle$$

galima pertvarkyti panaudojus diferencialą

$$\frac{d\gamma(k_c, t)}{dt} = \frac{\partial \gamma(k_c, t)}{\partial t} + \frac{\partial \gamma(k_c, t)}{\partial k_c} \dot{k}_c. \quad (1.33)$$

Įstačius (1.31) ir (1.33) į pirmąjį lagranžiano narį turime

$$\begin{aligned} \left\langle \Psi \left| i \frac{d}{dt} \right| \Psi \right\rangle &= \frac{d\gamma(k_c, t)}{dt} - x_c \dot{k}_c + i \left\langle u(x_c, k_c, t) \left| \frac{\partial u(x_c, k_c, t)}{\partial k_c} \right. \right\rangle \dot{k}_c \\ &+ i \left\langle u(x_c, k_c, t) \left| \frac{\partial u(x_c, k_c, t)}{\partial x_c} \right. \right\rangle \dot{x}_c + i \left\langle u(x_c, k_c, t) \left| \frac{\partial u(x_c, k_c, t)}{\partial t} \right. \right\rangle. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Antrasis lagranžiano narys yra stacionaraus periodinio hamiltoniano bei išorinio lauko perturbuotos hamiltoniano dalies energijų suma

$$\langle \Psi | H | \Psi \rangle = \langle \Psi | H_c | \Psi \rangle + \langle \Psi | \Delta H | \Psi \rangle = E_c(x_c, k_c, t) + \langle \Psi | \Delta H | \Psi \rangle \equiv E. \quad (1.35)$$

Žinant (1.34) ir (1.35) gaunamas pilnas lagranžianas

$$\begin{aligned} L = \dot{x}_c k_c + i \left\langle u(x_c, k_c, t) \left| \frac{\partial u(x_c, k_c, t)}{\partial k_c} \right. \right\rangle \dot{k}_c + i \left\langle u(x_c, k_c, t) \left| \frac{\partial u(x_c, k_c, t)}{\partial x_c} \right. \right\rangle \dot{x}_c \\ + i \left\langle u(x_c, k_c, t) \left| \frac{\partial u(x_c, k_c, t)}{\partial t} \right. \right\rangle - E. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Jį ištačius į Euler-Lagrange lygtį

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0 \quad (1.37)$$

suskaičiuojama banginio paketo dinamika

$$\dot{x}_c = \frac{\partial E}{\partial k_c} + (\partial_{x_c} \mathcal{A}_{k_c} - \partial_{k_c} \mathcal{A}_{x_c}) \dot{x}_c + (\partial_t \mathcal{A}_{k_c} - \partial_{k_c} \mathcal{A}_t), \quad (1.38a)$$

$$\dot{k}_c = -\frac{\partial E}{\partial x_c} + (\partial_{x_c} \mathcal{A}_{k_c} - \partial_{k_c} \mathcal{A}_{x_c}) \dot{k}_c + (\partial_{x_c} \mathcal{A}_t - \partial_t \mathcal{A}_{x_c}). \quad (1.38b)$$

Ji yra modifikuota Berry kreivumo nariais $(\partial_j \mathcal{A}_k - \partial_k \mathcal{A}_j)$, čia $\mathcal{A}_j = i \langle u | \partial u / \partial j \rangle$.

Nesunkiai galima patikrinti, kokią rezultatą gausime, jei sistema yra skaliariniam lauke $\phi(x_c, t)$ ir jos hamiltonianas:

$$H = H_0 + \phi(x_c, t). \quad (1.39)$$

Panaudojus ankstesnius skaičiavimus (1.36), lagranžianas lygus

$$\begin{aligned} L = \dot{x}_c k_c + i \left\langle u(x_c, k_c, t) \left| \frac{\partial u(x_c, k_c, t)}{\partial k_c} \right. \right\rangle \dot{k}_c + i \left\langle u(x_c, k_c, t) \left| \frac{\partial u(x_c, k_c, t)}{\partial x_c} \right. \right\rangle \dot{x}_c, \\ + i \left\langle u(x_c, k_c, t) \left| \frac{\partial u(x_c, k_c, t)}{\partial t} \right. \right\rangle - E_0(k_c) - \phi(x_c, t). \end{aligned} \quad (1.40)$$

Tada banginio paketo judėjimo lygtys:

$$\dot{x}_c = \frac{\partial E_0}{\partial k_c} + (\partial_{x_c} \mathcal{A}_{k_c} - \partial_{k_c} \mathcal{A}_{x_c}) \dot{x}_c + (\partial_t \mathcal{A}_{k_c} - \partial_{k_c} \mathcal{A}_t), \quad (1.41a)$$

$$\dot{k}_c = (\partial_{x_c} \mathcal{A}_{k_c} - \partial_{k_c} \mathcal{A}_{x_c}) \dot{k}_c + (\partial_{x_c} \mathcal{A}_t - \partial_t \mathcal{A}_{x_c}) + \frac{\partial \phi(x_c, t)}{\partial x_c}. \quad (1.41b)$$

Jei tarsime, kad išorinis laukas nuo laiko nepriklauso, gausime lygtis

$$\dot{x}_c = \frac{\partial E_0}{\partial k_c} + (\partial_{x_c} \mathcal{A}_{k_c} - \partial_{k_c} \mathcal{A}_{x_c}) \dot{x}_c, \quad (1.42a)$$

$$\dot{k}_c = (\partial_{x_c} \mathcal{A}_{k_c} - \partial_{k_c} \mathcal{A}_{x_c}) \dot{k}_c - \frac{\partial \phi(x_c)}{\partial x_c}. \quad (1.42b)$$

Jas pertvarkius

$$[1 - (\partial_{x_c} \mathcal{A}_{k_c} - \partial_{k_c} \mathcal{A}_{x_c})] \dot{x}_c = \frac{\partial E_0}{\partial k_c}, \quad (1.43a)$$

$$[1 - (\partial_{x_c} \mathcal{A}_{k_c} - \partial_{k_c} \mathcal{A}_{x_c})] \dot{k}_c = -\frac{\partial \phi(x_c)}{\partial x_c}, \quad (1.43b)$$

matome, jog fazinės erdvės kreivumo narius galima interpretuoti kaip laikinės išvestinės skalės modifikavimą.

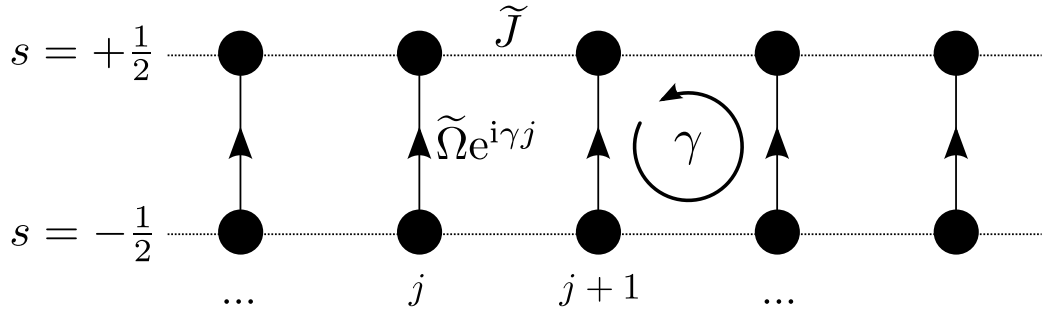
2 Kvazi-vienmatės gardelės su valdomu srautu

2.1 Kvadratinės gardelės hamiltoniano apibrėžimas

Šiame darbe nagrinėjamos begalinės kvazi-vienmatės gardelės – dvi vienmatės gardelės tarpusavyje susietos tarpmazginiu tuneliavimu. Toliau aprašoma kvazi-vienmatė kvadratinė gardelė. Tokios sistemos sukūrimo laboratorijoje pavyzdys naudojant dažnio standarto (optinio laikrodžio) šuolius pateikiamas Livi et al. [5] straipsnyje. Eksperimento kalibruotėje, ši gardelė aprašoma stipraus ryšio artinio hamiltonianu:

$$\tilde{H}_0 = \sum_{j,s} \left\{ -\tilde{J} \left(\hat{c}_{j+1,s}^\dagger \hat{c}_{j,s} + \hat{c}_{j,s}^\dagger \hat{c}_{j+1,s} \right) + \tilde{\Omega} \left(e^{-i\gamma j} \hat{c}_{j,s}^\dagger \hat{c}_{j,s+1} + e^{i\gamma j} \hat{c}_{j,s+1}^\dagger \hat{c}_{j,s} \right) \right\}, \quad (2.1)$$

$\hat{c}_{j,s}^{(\dagger)}$ – dalelės sunaikinimo (sukūrimo) operatorius, kai indeksas s žymi viršutinę ($s = 1/2$) ir apatinę ($s = -1/2$) gardelės šaką (s aprašomas laisvės laipsnis nebūtinai turi indeksuoti gretimas vienmatės gardelės realioje erdvėje, s gali žymėti ir sukiningą būseną – tuomet turėsime sintetinės dimensijos gardelę), j atitinka mazgo koordinatę šakoje (2 pav.), sumuojama per visus mazgus abejose šakose. Išilgai vienmačių begalinių šakų tuneliavimo amplitudė \tilde{J} yra reali, o tarp vienmačių gardelių indukuojami nuo koordinatės priklausantys šuoliai $\tilde{\Omega}e^{\pm i\gamma j}$ turi kompleksinę amplitudę. Apėjus gardelės narvelį uždaru kontūru prieš laikrodžio rodyklę, dėl kompleksinio šuolio fazės γj , sukuriamas dirbtinis magnetinis srautas γ .



2 pav. Kvazi-vienmatė gardelė eksperimento kalibruotėje.

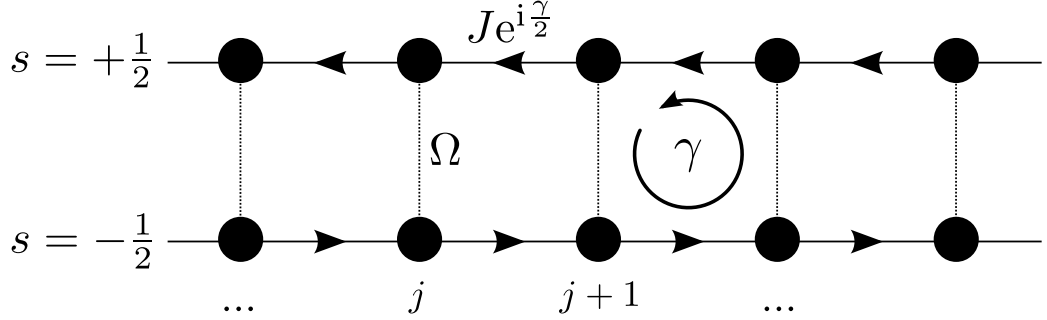
Magnetinio srauto poveikį sistemai patogiau skaičiuoti pakeitus kalibruotę, taip atsikrانتant šuolių amplitudės koordinatinės priklausomybės ir išvengiant magnetinio narvelio įvedimo. Panaudojus banginės funkcijos kalibruotės simetriją (transformacija atliekama naudojant $U = e^{i\gamma \sum_{j,s} j s \hat{c}_{j,s} c_{j,s}}$ operatorium), sunaikinimo/sukūrimo operatorius galime pakeisti į

$$\begin{aligned} \hat{c}_{j,s} &\longrightarrow e^{i\gamma s j} \hat{c}_{j,s}, \\ \hat{c}_{j,s}^\dagger &\longrightarrow e^{-i\gamma s j} \hat{c}_{j,s}^\dagger. \end{aligned}$$

Tuomet hamiltonianas įgis naują formą

$$H_0 = \sum_{j,s} \left\{ -J \left(e^{-i\gamma s} \hat{c}_{j+1,s}^\dagger \hat{c}_{j,s} + e^{i\gamma s} \hat{c}_{j,s}^\dagger \hat{c}_{j+1,s} \right) + \Omega \left(\hat{c}_{j,s}^\dagger \hat{c}_{j,s+1} + \hat{c}_{j,s+1}^\dagger \hat{c}_{j,s} \right) \right\}, \quad (2.2)$$

kurioje kompleksiniai šuoliai vyksta nebe tarp skirtingų šakų, bet išilgai vienmačių gardelių bei nebelieka jų koordinatinės priklausomybės (3 pav.). Srautas γ per gardelės narvelį išlieka toks pats.



3 pav. Kvazi-vienmatė gardelė skaičiavimų kalibruotėje.

Ieškant sistemos tikrinių verčių bei vektorių, hamiltonianas H_0 perrašomas kvaziimpulso k atvaizdavime. Tai daroma atliekant sukūrimo/sunaikinimo operatorių Fourier transformaciją

$$\hat{c}_{j,s}^\dagger = \sqrt{\frac{a}{2\pi}} \int_{\text{BZ}} dk e^{-ikaj} \hat{c}_{k,s}^\dagger \quad (2.3)$$

(a – atstumas tarp artimiausių kaimyninių mazgų, BZ žymi integravimo ribą – gardelės pirmąją Brillouin zoną) įstatant į (2.2):

$$H_0 = \int_{\text{BZ}} dk \begin{pmatrix} \hat{c}_{k,\frac{1}{2}}^\dagger & \hat{c}_{k,-\frac{1}{2}}^\dagger \end{pmatrix} \mathcal{H}_k \begin{pmatrix} \hat{c}_{k,\frac{1}{2}} \\ \hat{c}_{k,-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Gaunamas matricinio pavidalo hamiltonianas \mathcal{H}_k , indeksuojamas pagal šakas $s = \pm\frac{1}{2}$

$$\mathcal{H}_k = \begin{pmatrix} -2J \cos(ka + \frac{\gamma}{2}) & \Omega \\ \Omega & -2J \cos(ka - \frac{\gamma}{2}) \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Jį galima išreikšti kaip Pauli matricių $\hat{\sigma}$ ir vienetinės matricos $\hat{1}$ tiesinę kombinaciją:

$$\mathcal{H}_k = h_0 \cdot \hat{1} + \mathbf{h}(k) \hat{\sigma}, \quad (2.6)$$

čia $\mathbf{h}(k) = (h_x, h_y, h_z)$ ir koeficientai

$$h_0 = -2J \cos(ka) \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right), \quad (2.7a)$$

$$h_z = 2J \sin(ka) \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right), \quad (2.7b)$$

$$h_x + ih_y = \Omega. \quad (2.7c)$$

Perėjus į sferinę koordinačių sistemą $(|h|, \varphi, \theta)$

$$\mathcal{H}_k = h_0 \cdot \hat{1} + |h| \begin{pmatrix} \cos \theta & e^{-i\varphi} \sin \theta \\ e^{i\varphi} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

suskaičiuojame naujus koeficientus

$$|h| = (h_x^2 + h_y^2 + h_z^2)^{\frac{1}{2}} = \left(4J^2 \sin^2(ka) \sin^2\left(\frac{\gamma}{2}\right) + \Omega^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.9a)$$

$$\cos \theta = \frac{h_z}{|h|} = \frac{2J \sin(ka) \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{\left(4J^2 \sin^2(ka) \sin^2\left(\frac{\gamma}{2}\right) + |\Omega|^2\right)^{\frac{1}{2}}}, \quad (2.9b)$$

$$\varphi = \arg \Omega. \quad (2.9c)$$

Galima rasti šio hamiltoniano tikrines vertes

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= \langle \chi_t | \mathcal{H}_k | \chi_t \rangle = h_0 + |h|, \\ \varepsilon_b &= \langle \chi_b | \mathcal{H}_k | \chi_b \rangle = h_0 - |h|, \end{aligned} \quad (2.10)$$

su atitinkamais tikriniais vektoriais

$$|\chi_t\rangle = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad |\chi_b\rangle = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} \\ -\cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Tikriniai vektoriai bus naudojami banginio paketo judėjimo tyrimui, o iš dispersijos sąryšių nustatysime dirbtinio magnetinio srauto poveikį sistemai.

Tolimesniems skaičiavimams teks projektuoti banginio paketo judėjimą į žemiausios energijos juostą, todėl dabar patogiau užrašyti hamiltonianą (2.4) diagonalioje formoje. Tai padarome įterpdami unitarinių operatorių $UU^\dagger = 1$ poras į hamiltoniano išraišką

$$H_0 = \int_{\text{BZ}} dk \begin{pmatrix} \hat{c}_{k,\frac{1}{2}}^\dagger & \hat{c}_{k,-\frac{1}{2}}^\dagger \end{pmatrix} UU^\dagger \mathcal{H}_k UU^\dagger \begin{pmatrix} \hat{c}_{k,\frac{1}{2}} \\ \hat{c}_{k,-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

kadangi žinome \mathcal{H}_k tikrinius vektorius, iš karto galime sudaryti operatorių U , kuris šią matricą

diagonalizuos:

$$U = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi} \cos \frac{\theta}{2} & e^{-i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} & -\cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Telieka pakeisti sukūrimo/sunaikinimo operatorių bazes

$$\begin{pmatrix} \hat{t}_k^\dagger & \hat{b}_k^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{c}_{k,\frac{1}{2}}^\dagger & \hat{c}_{k,-\frac{1}{2}}^\dagger \end{pmatrix} U, \quad (2.14a)$$

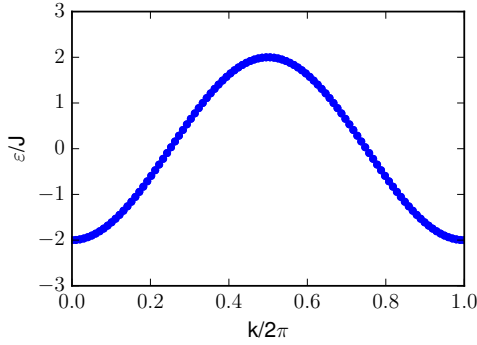
$$\begin{pmatrix} \hat{t}_k \\ \hat{b}_k \end{pmatrix} = U^\dagger \begin{pmatrix} \hat{c}_{k,\frac{1}{2}} \\ \hat{c}_{k,-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \quad (2.14b)$$

ir mūsų hamiltonianas naujoje bazėje taps diagonalus

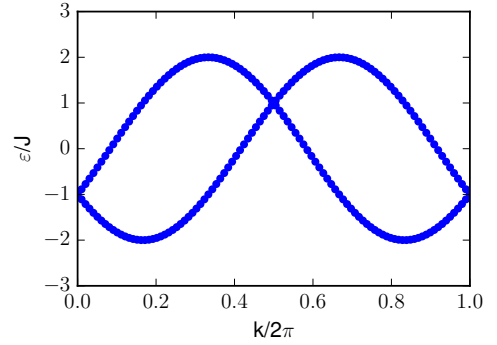
$$H_0 = \int_{\text{BZ}} dk \left\{ \varepsilon_t \hat{t}_k^\dagger \hat{t}_k + \varepsilon_b \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k \right\}. \quad (2.15)$$

2.1.1 Dispersijos sąryšiai

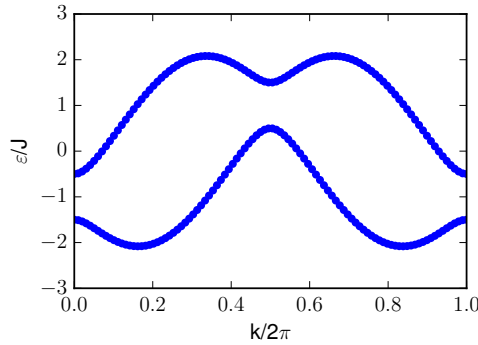
Turėdami energijos juostų analitines išraiškas kvazi-vienmatei kvadratinei gardelei (2.10) galime kokybiškai įvertinti kokį poveikį turi šuolių parametrų įvedimas. Jei šuolio parametras



4 pav. Energijos juostos, kai $\Omega = 0$ ir $\gamma = 0$.



5 pav. Energijos juostos, kai $\Omega = 0$ ir $|\gamma| > 0$.

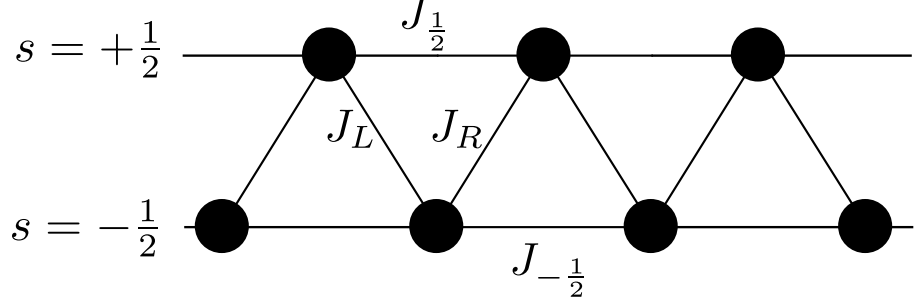


6 pav. Energijos juostos, kai $|\Omega| > 0$ ir $|\gamma| > 0$.

Ω jungiantis abi vienmates šakas ir srautas γ per gardelės elementarų narvelį yra lygūs nuliui,

gauname trivialų atvejį – dvi atskiras vienmatis gardelės su kosinusiniu dispersijos sąryšiu (4 pav.). Įjungus kompleksinę šuolio J amplitudę, juostos yra pastumiamos per $\pm\gamma/2$ kvaziimpulso erdvėje (5 pav.). Šuoliai tarp vidinių būsenų Ω atskiria energijos juostas draustinių energijų tarpu (6 pav.).

2.2 Trikampė gardelė



7 pav. Zigzaginė gardelė. Trikampė gardelė gaunama išjungus šuolius $J_{\frac{1}{2}}$.

Zigzaginė gardelė aprašoma stipraus ryšio artinio hamiltonianu

$$H = - \sum_{j,s} \left(J_s \hat{c}_{j+1,s}^\dagger \hat{c}_{j,s} + J_R \hat{c}_{j+1,s+1}^\dagger \hat{c}_{j,s} + J_L \hat{c}_{j,s+1}^\dagger \hat{c}_{j,s} \right) + \text{h.c.} \quad (2.16)$$

kai $\hat{c}_{j,s}^\dagger$ ($\hat{c}_{j,s}$) yra sukūrimo (sunaikinimo) operatoriai veikiantys $s = -\frac{1}{2}$ ir $s = +\frac{1}{2}$ vienmačių subgardelių mazgų būsenas, o J_i – šuolių parametrai (J_s yra šuoliai tarp mazgų esančių $s = -\frac{1}{2}$ arba $s = +\frac{1}{2}$ subgardelėse, J_L , J_R – diagonalia ir anti-diagonalia kryptimi tarp vienmačių gardelių). Šio hamiltoniano Fourier transformacija, patogi tolesniam energijos juostų skaičiavimui

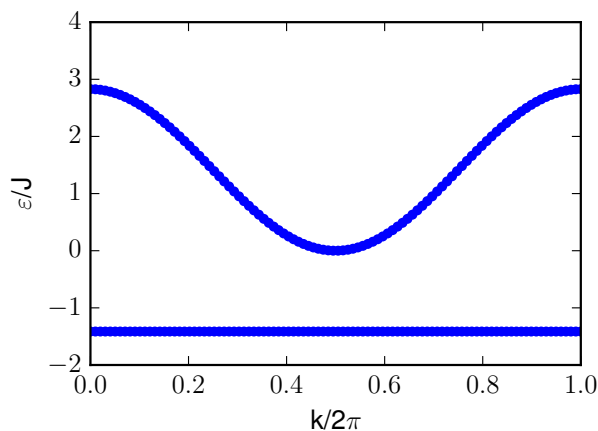
$$\mathcal{H}_k = - \sum_k 2 \cos(ka) \left(J_{-\frac{1}{2}} \hat{c}_{k,-\frac{1}{2}}^\dagger \hat{c}_{k,-\frac{1}{2}} + J_{\frac{1}{2}} \hat{c}_{k,\frac{1}{2}}^\dagger \hat{c}_{k,\frac{1}{2}} \right) - \sum_k \left(J_R e^{\frac{1}{2}ika} + J_L e^{-\frac{1}{2}ika} \right) \hat{c}_{k,\frac{1}{2}}^\dagger \hat{c}_{k,-\frac{1}{2}} + \text{h.c.}, \quad (2.17)$$

čia a atstumas tarp gardelės mazgų ir pridėdamas ermitiškai jungtinis narys h.c. nariui $b_k^\dagger a_k$.

Trikampe gardelė vadinsime tokią zigzaginę gardelę, kurioje šuoliai begaline gardelės kryptimi yra galimi tik vienoje vienmatėje subgardelėje, t.y. $J_{\frac{1}{2}} = 0$, taip pat tarsime, kad $J_R = J_L = J$. Vėl galime suvesti hamiltonianą į diagonalų pavidalą (2.15) ir suskaičiuoti tikrines vertes

$$\varepsilon_n(k) = -J_{-1/2} \cos(ka) \pm \sqrt{J_{-1/2}^2 \cos^2(ka) + 4J^2 \cos^2\left(\frac{ka}{2}\right)}, \quad (2.18)$$

čia $n = t$ (aukštesnės energijos juosta), kai šaknis pridėdama, o $n = b$ (žemesnės), kai atimama. Iš sąlygos $\frac{\partial \varepsilon_n(k)}{\partial k} = 0$, gaunama, kad egzistuoja plokščios juostos esant parametrams $\frac{J_{-1/2}}{J} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$



8 pav. Trikampės gardelės energijos juostos, kai $\frac{J_{-1/2}}{J} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(dispersijos sąryšis 8 pav.). Šis atvejis įdomus, nes plokščioje juostoje dalelių grupinis greitis lygus nuliui, kas potencialiai leidžia naudoti plokščią juostą banginio paketo pagavimui.

2.3 Banginio paketo dinamika kvazi-vienmatėje gardelėje

Toliau tirsime, kaip banginis paketas juda aprašytose gardelėse. Pradėsime nuo paprasčiausio atvejo, kai turime pastovų srautą per kiekvieną gardelės narvelį, tuomet rasime judėjimo lygtis erdvėje kintančiam srautui.

2.3.1 Judėjimo lygtys gardelėje su pastoviu γ

Tiriamas banginis paketas sukuriamas kvazi-vienmatės gardelės žemiausios energijos juostoje ir yra aprašomas banga būseną

$$|\Psi\rangle = \int_{\text{BZ}} dk a(k, t) \hat{b}_k^\dagger |0\rangle, \quad (2.19)$$

kai $a(k, t)$ paketo gaubtinė, o $|0\rangle$ žymi vakuumo būseną. Norint indukuoti banginio paketo centro judėjimą, gardelę tenka patalpinti į išorinį nuo koordinatės priklausantį potencialą V_j , bendru atveju aprašomą

$$H_{\text{F}} = \sum_{j,s} V_j \hat{c}_{j,s}^\dagger \hat{c}_{j,s}. \quad (2.20)$$

Tuomet pilnas sistemos hamiltonianas

$$H = H_0 + H_{\text{F}}. \quad (2.21)$$

Judėjimo lygtims gauti galime panaudoti Ehrenfest teoremą, siejančią stebimo dydžio \hat{A} vidurkio $\langle \hat{A} \rangle \equiv \langle \Psi | \hat{A} | \Psi \rangle$ laikinę priklausomybę su šio dydžio ir sistemos hamiltoniano komuta-

toriaus tikėtiniausia verte:

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{A}\rangle = \frac{i}{\hbar}\langle[H, \hat{A}]\rangle + \left\langle\frac{\partial\hat{A}}{\partial t}\right\rangle. \quad (2.22)$$

Mūsų sistema aprašoma Schrödinger atvaizdavime – operatoriai nepriklauso nuo laiko ir pastutinis (2.22) lygties narys išnyks. Laikysime, kad banginis paketas negali pereiti iš žemiausios energijos juostos į aukštesnę, todėl atmesime hamiltoniano narius atitinkančius tarpjuostinius šuolius. Pažymėję koordinatės $\hat{x} = \sum_{j,s} a_j \hat{c}_{j,s}^\dagger \hat{c}_{j,s}$ ir judėsio kiekio $\hat{p} \equiv \frac{d}{dt}\hat{x}$ operatorius, užsirašome sprendžiamas judėjimo lygtis

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{x}\rangle = \frac{i}{\hbar}\langle[H_0^{(b)}, \hat{x}]\rangle + \frac{i}{\hbar}\langle[H_F^{(b)}, \hat{x}]\rangle, \quad (2.23a)$$

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{p}\rangle = \frac{i}{\hbar}\langle[H_0^{(b)}, \hat{p}]\rangle + \frac{i}{\hbar}\langle[H_F^{(b)}, \hat{p}]\rangle, \quad (2.23b)$$

$H_i^{(b)}$ žymi suprojektuotas hamiltoniano dalis į žemiausios energijos juostą, kurias netrukus išsivesime. Gardelę aprašančiam hamiltonianui tai atitiks (2.15) antrąjį narį,

$$H_0^{(b)} = \int_{\text{BZ}} dk \varepsilon_b \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k \quad (2.24)$$

nes banginis paketas aukštesnėje juostoje nesklinda. Suprojektuotam potencialo nariui gauti, reikia atlikti Fourier transformaciją (2.20) hamiltoniano sukūrimo/sunaikinimo operatoriams ir išreiškus naujoje bazėje (2.14) pasilikti tik pagrindinės energijos būseną veikiančią dalį. Pradžioje užsirašome visą potencialo indėlį

$$\begin{aligned} H_F &= \frac{a}{2\pi} \sum_s \iint_{\text{BZ}} dk dk' \hat{c}_{k,s}^\dagger \hat{c}_{k',s} \sum_j V_j e^{i(k'-k)ja} \\ &= \frac{a}{2\pi} \iint_{\text{BZ}} dk dk' \left\{ \left(e^{i(\varphi-\varphi')} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta'}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta'}{2} \right) \hat{t}_k^\dagger \hat{t}_{k'} \right. \\ &\quad + \left(e^{i(\varphi-\varphi')} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta'}{2} + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta'}{2} \right) \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_{k'} \\ &\quad + \left(e^{i(\varphi-\varphi')} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta'}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta'}{2} \right) \hat{t}_k^\dagger \hat{b}_{k'} \\ &\quad \left. + \left(e^{i(\varphi-\varphi')} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta'}{2} - \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta'}{2} \right) \hat{b}_k^\dagger \hat{t}_{k'} \right\} \sum_j V_j e^{i(k'-k)ja}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

čia $\theta' \equiv \theta(k')$ ir $\varphi' \equiv \varphi(k')$. Iš jo seka, kad suprojektuota dalis lygi

$$H_F^{(b)} = \frac{a}{2\pi} \iint_{\text{BZ}} dk dk' \left(e^{i(\varphi-\varphi')} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta'}{2} + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta'}{2} \right) \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_{k'} \sum_j V_j e^{i(k'-k)ja}. \quad (2.26)$$

Toliau pasirenkame potencialo išraišką. Eksperimentiškai optinėje gardelėje galima įgyvendinti

pastovią jėgą, pvz. paleidžiant banginį paketą skliti išilgai gravitacinio lauko gradiento arba sukurti magnetinio lauko gradientą, todėl vienas iš paprasčiausių pasirinkimų yra tiesinis potencialas $V_j = Faj$ (F – jėgos dydis). Įstačius potencialą į (2.26) ir pastebėjus, jog

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} aj e^{iaj(k'-k)} = \frac{2\pi}{a} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(-i \frac{\partial}{\partial k'} \right) \delta \left(k' - k - j \frac{2\pi}{a} \right), \quad (2.27)$$

supaprastiname jėgos sąlygotą hamiltoniano narį integruodami dalimis iki

$$H_F^{(b)} = iF \int_{\text{BZ}} dk \hat{b}_k^\dagger \left(\frac{\partial}{\partial k} - i \frac{\partial \varphi}{\partial k} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \hat{b}_k. \quad (2.28)$$

Koordinatės operatorius nuo pastarojo tesiskiria per konstantą F

$$\hat{x} = i \int_{\text{BZ}} dk \hat{b}_k^\dagger \left(\frac{\partial}{\partial k} - i \frac{\partial \varphi}{\partial k} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \hat{b}_k, \quad (2.29)$$

o judėsio kiekio operatorių suskaičiuojame iš komutatoriaus

$$\hat{p} = \frac{i}{\hbar} [H_0^{(b)}, \hat{x}] = \frac{1}{\hbar} \int_{\text{BZ}} dk \hat{b}_k^\dagger \left(\frac{\partial \varepsilon_b}{\partial k} \right) \hat{b}_k. \quad (2.30)$$

Turėdami visus reikalingus operatorius, galime užsirašyti judėjimo lygtyse naudojamus komutatorius: $[H_0^{(b)}, \hat{x}]$ jau gautas (2.30); $[H_F^{(b)}, \hat{x}] = 0$, nes abu operatoriai skiriasi tik per konstantą;

$$[H_0^{(b)}, \hat{p}] = \frac{1}{\hbar} \iint_{\text{BZ}} dl dk \varepsilon_b(l) \left(\frac{\partial \varepsilon_b(k)}{\partial k} \right) [\hat{b}_l^\dagger \hat{b}_l, \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k] = 0$$

ir

$$[H_F^{(b)}, \hat{p}] = \frac{iF}{\hbar} \int_{\text{BZ}} dk \hat{b}_k^\dagger \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_b}{\partial k^2} \right) \hat{b}_k.$$

Įstatę juos į judėjimo lygtis

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{x} \rangle = \frac{1}{\hbar} \left\langle \int_{\text{BZ}} dk \hat{b}_k^\dagger \left(\frac{\partial \varepsilon_b}{\partial k} \right) \hat{b}_k \right\rangle, \quad (2.31a)$$

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{p} \rangle = -\frac{F}{\hbar^2} \left\langle \int_{\text{BZ}} dk \hat{b}_k^\dagger \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_b}{\partial k^2} \right) \hat{b}_k \right\rangle. \quad (2.31b)$$

Jei laikysime, kad banginis paketas yra siauras $|a(k, t)|^2 \approx \delta(k - k_c)$ (k_c – banginio paketo

centras kvaziimpulso erdvėje), tuomet judėjimo lygtys tampa

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{x}\rangle = \frac{1}{\hbar}\frac{\partial\varepsilon_b}{\partial k_c}, \quad (2.32a)$$

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{p}\rangle = -\frac{F}{\hbar^2}\frac{\partial^2\varepsilon_b}{\partial k_c^2}. \quad (2.32b)$$

Koordinatės kitimas aprašomas energijos juostos dispersijos sąryšio išvestine, tai atitinka banginio paketo grupinį greitį. Taip pat galime gauti kvaziimpulso kitimą

$$\frac{dk_c}{dt} = \frac{d\langle\hat{p}\rangle}{dt} \left(\frac{d\langle\hat{p}\rangle}{dk_c}\right)^{-1} = -\frac{F}{\hbar}. \quad (2.33)$$

2.3.2 Judėjimo lygtys kintančiam srautui $\gamma(x_c)$

Dabar tarsime, kad dirbtinis magnetinis srautas parametriškai priklauso nuo banginio paketo centro koordinatės $\gamma \equiv \gamma(x_c)$, tuomet patogiau aprašyti turimą sistemą pagal 1.3.2 skyrelį. Prie turimo hamiltoniano pridėsime tiesinės jėgos potencialą $V(x_c)$, kuris privers banginį paketą judėti:

$$H_0 = \begin{pmatrix} -2J \cos\left(ka + \frac{\gamma(x_c)}{2}\right) - V(x_c) & \Omega \\ \Omega & -2J \cos\left(ka - \frac{\gamma(x_c)}{2}\right) - V(x_c) \end{pmatrix}. \quad (2.34)$$

Užsirašant hamiltonianą sferinėse koordinatėse, (2.9) parametrai išlieka tokie patys apart atsirandančios koordinatinės priklausomybės, o $h_0 \rightarrow h_0(x_c) - V(x_c)$. Tikriniai vektoriai (2.11) taip pat išlaiko tą pačią formą $|\chi\rangle \rightarrow |\chi(x_c)\rangle$.

Judėjimo lygtys, kurias spėsime yra

$$\dot{x}_c = \frac{1}{\hbar}\frac{\partial E}{\partial k_c} + (\partial_{x_c}\mathcal{A}_{k_c} - \partial_{k_c}\mathcal{A}_{x_c})\dot{x}_c, \quad (2.35a)$$

$$\dot{k}_c = -\frac{1}{\hbar}\frac{\partial E}{\partial x_c} + (\partial_{x_c}\mathcal{A}_{k_c} - \partial_{k_c}\mathcal{A}_{x_c})\dot{k}_c. \quad (2.35b)$$

Čia $E \equiv \varepsilon_b(k_c, x_c) + \Delta\varepsilon(k_c, x_c)$ yra suma žemiausios energijos juostos dispersijos sąryšio parametrizuoto banginio paketo centro koordinate $\varepsilon_b(k_c, x_c) = h_0 - |h| - V(x_c)$ ir pirmos eilės gradientinės pataisos [23]:

$$\Delta\varepsilon(k_c, x_c) \equiv -\text{Im} \left[\left\langle \frac{\partial\chi_b(k, x_c)}{\partial x_c} \middle| (\varepsilon_b(k, x_c) - H_0) \middle| \frac{\partial\chi_b(k, x_c)}{\partial k} \right\rangle \right] \Big|_{k=k_c}. \quad (2.36)$$

Iš karto įvertiname gradientinę pataisą – kadangi šuolių parametras Ω yra realus, tai ir hamiltonianas bei banginės būsenos $\langle\chi_b| = (\sin\frac{\theta(k_c, x_c)}{2} - \cos\frac{\theta(k_c, x_c)}{2})$ koeficientai yra realūs. Iš to

seka, jog $\Delta\varepsilon(k_c, x_c) = 0$. Toliau suskaičiuojame Berry kreivumo narį

$$\partial_{x_c} \mathcal{A}_{k_c} - \partial_{k_c} \mathcal{A}_{x_c} = i \partial_{x_c} \left\langle \chi_b \left| \frac{\partial \chi_b}{\partial k_c} \right\rangle - i \partial_{k_c} \left\langle \chi_b \left| \frac{\partial \chi_b}{\partial x_c} \right\rangle = 0, \quad (2.37)$$

nes $\left\langle \chi_b \left| \frac{\partial \chi_b}{\partial k_c} \right\rangle = \frac{1}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \frac{\partial \theta}{\partial k_c} - \frac{1}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \frac{\partial \theta}{\partial k_c} = 0$, analogiškas rezultatas gaunamas ir $\left\langle \chi_b \left| \frac{\partial \chi_b}{\partial x_c} \right\rangle$ nariui. Taigi judėjimo lygtys supaprastėja iki

$$\dot{x}_c = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial \varepsilon_b(k_c, x_c)}{\partial k_c}, \quad (2.38a)$$

$$\dot{k}_c = -\frac{1}{\hbar} \frac{\partial \varepsilon_b(k_c, x_c)}{\partial x_c}. \quad (2.38b)$$

Iš karto matome, kad esant pastoviam srautui, lygtys redukuojasi į aprašytas ankstesniame poskyryje. Prieš sprendžiant judėjimo lygtis pažiūrime kaip galima sukurti erdvėje kintantį $\gamma(x_c)$.

2.4 Magnetinio srauto valdymas

Dirbtinio magnetinio srauto valdymą įgyvendinsime periodiškai virpindami gardelę ir įvesdami mazgų energijų poslinkius. Remiantis ankstesniu poskyriu 1.2.2, tokia optinė gardelė aprašoma (1.17) hamiltonianu:

$$H(t) = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \hat{c}_i^\dagger \hat{c}_j + \sum_i w_i(t) \hat{c}_i^\dagger \hat{c}_i, \quad (2.39)$$

kurio forma po kalibruotės transformacijos (1.25) yra

$$\tilde{H}(t) = -J \sum_{\langle i,j \rangle} e^{i(\chi_j - \chi_i)} \hat{c}_i^\dagger \hat{c}_j. \quad (2.40)$$

Parenkame virpinimo režimą

$$w_i(t) = K \sin(\omega t - \varphi_i) + \nu_i \hbar \omega, \quad (2.41)$$

pirmasis narys atitinka purtymą su amplitude K bei nuo mazgo pozicijos priklausančia faze φ_i ; antrasis narys aprašo mazgų energijos poslinkį per sveiką skaičių ν_i energijos kvantų $\hbar \omega$, atsirandantį dėl pastovios išorinės jėgos (Wannier-Stark efektas). Norėdami rasti Peierls fazę $\theta_{ji} = \chi_j - \chi_i$ pradžioje suskaičiuojame

$$\chi_i = -\frac{1}{\hbar} \int_{t_0}^t w_i(t') dt' + \chi_{i0} = \frac{K}{\hbar \omega} \cos(\omega t' - \varphi_i) \Big|_{t_0}^t - \nu_i \omega t' \Big|_{t_0}^t + \chi_{i0}. \quad (2.42)$$

Parinkus kalibruotės konstantą taip, kad ji išprastintų nuo pradinio laiko momento priklausančius narius, turėsime

$$\chi_i = \frac{K}{\hbar\omega} \cos(\omega t - \varphi_i) - \nu_i \omega t \quad (2.43)$$

ir Peierls fazė bus lygi

$$\theta_{ji} = -\frac{2K}{\hbar\omega} \sin\left(\frac{\varphi_i - \varphi_j}{2}\right) \sin\left(\omega t - \frac{\varphi_i + \varphi_j}{2}\right) - (\nu_j - \nu_i)\omega t. \quad (2.44)$$

Esant dideliame virpinimo dažniui, t.y. kai purtymo energijos kvantas $\hbar\omega$ yra didesnis už sistemos charakteringas energijos skales (tuneliavimo stiprį J), hamiltonianas gali būti aproksimuojamas vidurkinant per greitai osciliuojančios Peierls fazės periodą [3]

$$H_{\text{eff}} \equiv \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{H}(t) dt \quad (2.45)$$

taip gaunant nuo laiko nepriklausantį efektinį hamiltonianą, nepaisantį trumpalaikės dinamikos. Jį suskaičiuojame analitiškai, naudodami pasirinkto virpinimo protokolo fazę (2.44):

$$H_{\text{eff}} = -\frac{J}{T} \sum_{\langle i,j \rangle} \int_0^T e^{-i\frac{2K}{\hbar\omega} \sin\left(\frac{\varphi_i - \varphi_j}{2}\right) \sin\left(\omega t - \frac{\varphi_i + \varphi_j}{2}\right) - i(\nu_j - \nu_i)\omega t} \hat{c}_i^\dagger \hat{c}_j dt, \quad (2.46)$$

atlikus kintamųjų pakeitimą $\alpha = \omega t - \frac{\varphi_i + \varphi_j}{2}$ ir pertvarkius išraišką

$$H_{\text{eff}} = -\frac{J}{2\pi} \sum_{\langle i,j \rangle} e^{i(\nu_i - \nu_j)\left(\frac{\varphi_i + \varphi_j}{2}\right)} \hat{c}_i^\dagger \hat{c}_j \int_0^{2\pi} e^{-i\frac{2K}{\hbar\omega} \sin\left(\frac{\varphi_i - \varphi_j}{2}\right) \sin(\alpha) + i(\nu_i - \nu_j)\alpha} d\alpha, \quad (2.47)$$

matome, kad po integralu esantis narys turi pirmojo tipo Bessel funkcijos $\mathcal{J}_n(x)$ formą

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i\frac{2K}{\hbar\omega} \sin\left(\frac{\varphi_i - \varphi_j}{2}\right) \sin(\alpha) + i(\nu_i - \nu_j)\alpha} d\alpha = \mathcal{J}_{\nu_i - \nu_j} \left(\frac{2K}{\hbar\omega} \sin\left(\frac{\varphi_i - \varphi_j}{2}\right) \right). \quad (2.48)$$

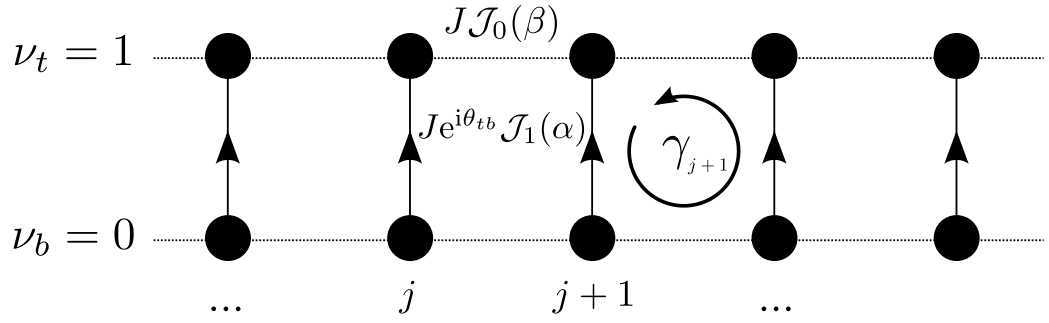
Galiausiai turime efektinį hamiltonianą

$$H_{\text{eff}} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} e^{i(\nu_i - \nu_j)\left(\frac{\varphi_i + \varphi_j}{2}\right)} \mathcal{J}_{\nu_i - \nu_j} \left(\frac{2K}{\hbar\omega} \sin\left(\frac{\varphi_i - \varphi_j}{2}\right) \right) \hat{c}_i^\dagger \hat{c}_j, \quad (2.49)$$

kurio reali tuneliavimo stiprio dalis modifikuojama pirmojo tipo Bessel funkcija, o kompleksinė priklauso nuo mazgų purtymo fazių ir energijų išderinamo.

2.4.1 Dirbtinis magnetinis srautas kvazi-vienmatėje dinaminėje kvadratinėje gardelėje

Ankstesnio skyrelio rezultatus pritaikome magnetinio srauto kontrolei kvazi-vienmatėje gardelėje. Esminis efektinio hamiltoniano narys lemiantis srauto kūrimą yra fazinis daugiklis $e^{i(\nu_i - \nu_j)\left(\frac{\varphi_i + \varphi_j}{2}\right)}$. Norint užtikrinti netrivialų atvejį (kada eksponentės rodiklis nelygus nuliui), gardelėje turi egzistuoti gretimi mazgai besiskiriantys energija $(\nu_i - \nu_j)\hbar\omega$. Tokį išderinimą galima sukurti įvedus pastovią jėgą, statmeną gardelės begalinei kryptiai. Tinkamai parinkus jėgos dydį visi gardelės viršutinės šakos mazgai skirsis per vieną energijos kvantą nuo apatinės šakos mazgų (laikysime $\nu_b = 0$ – apatinės šakos mazgams, $\nu_t = 1$ – viršutinės), tuomet turėsime realius šuolius begaline gardelės kryptimi ir kompleksinę dalį turinčius šuolius tarp gardelės šakų (9 pav.).



9 pav. Kvazi-vienmatė dinaminė kvadratinė gardelė. Čia eksponentės argumentas $\theta_{tb} = \frac{\varphi_j^{(t)} + \varphi_j^{(b)}}{2}$ ir pirmojo tipo Bessel funkcijų argumentai $\alpha = \frac{2K}{\hbar\omega} \sin\left(\frac{\varphi_j^{(t)} - \varphi_j^{(b)}}{2}\right)$, $\beta = \frac{2K}{\hbar\omega} \sin\left(\frac{\varphi_j^{(t)} - \varphi_{j+1}^{(t)}}{2}\right)$.

Kitas valdomas laisvės laipsnis yra virpinimo fazė ties kiekvienu mazgu. Bendriausiu pavidalu, dirbtinis magnetinis srautas γ_j kertantis individualų narvelį bus aprašomas lygčių sistema

$$\begin{cases} \gamma_1 = \frac{\varphi_2^{(t)} + \varphi_2^{(b)}}{2} - \frac{\varphi_1^{(t)} + \varphi_1^{(b)}}{2} + \text{Im} \left\{ \log \left[\mathcal{J}_1 \left(\frac{2K}{\hbar\omega} \sin \left(\frac{\varphi_2^{(t)} - \varphi_2^{(b)}}{2} \right) \right) \mathcal{J}_{-1} \left(\frac{2K}{\hbar\omega} \sin \left(\frac{\varphi_1^{(b)} - \varphi_1^{(t)}}{2} \right) \right) \right] \right\} \\ \gamma_2 = \frac{\varphi_3^{(t)} + \varphi_3^{(b)}}{2} - \frac{\varphi_2^{(t)} + \varphi_2^{(b)}}{2} + \text{Im} \left\{ \log \left[\mathcal{J}_1 \left(\frac{2K}{\hbar\omega} \sin \left(\frac{\varphi_3^{(t)} - \varphi_3^{(b)}}{2} \right) \right) \mathcal{J}_{-1} \left(\frac{2K}{\hbar\omega} \sin \left(\frac{\varphi_2^{(b)} - \varphi_2^{(t)}}{2} \right) \right) \right] \right\} \\ \vdots \\ \gamma_i = \frac{\varphi_{i+1}^{(t)} + \varphi_{i+1}^{(b)}}{2} - \frac{\varphi_i^{(t)} + \varphi_i^{(b)}}{2} + \text{Im} \left\{ \log \left[\mathcal{J}_1 \left(\frac{2K}{\hbar\omega} \sin \left(\frac{\varphi_{i+1}^{(t)} - \varphi_{i+1}^{(b)}}{2} \right) \right) \mathcal{J}_{-1} \left(\frac{2K}{\hbar\omega} \sin \left(\frac{\varphi_i^{(b)} - \varphi_i^{(t)}}{2} \right) \right) \right] \right\}. \end{cases} \quad (2.50)$$

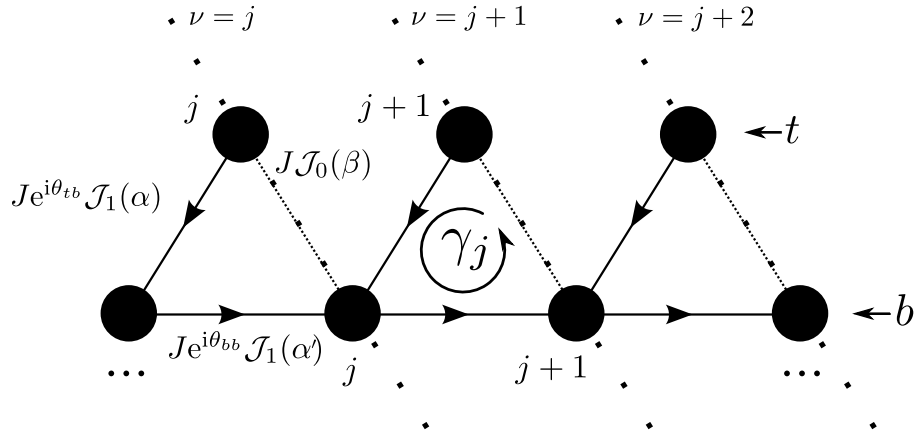
Paskutiniai nariai iš esmės įskaito galimai atsirandančią π fazę, dėl Bessel funkcijų sandaugos neigiamo ženklo. Vienas iš būdų apriboti laisvus parametrus yra pareikalavimas, kad visų šuolių amplitudė tarp skirtingų gardelės šakų būtų vienoda. Šią sąlygą galima užtikrinti parenkant $\forall i : \Delta \equiv \frac{\varphi_i^{(t)} - \varphi_i^{(b)}}{2} = \frac{\pi}{2}$, tuomet šuolio stipris bus lygus $\mathcal{J}_1\left(\frac{2K}{\hbar\omega}\right)$. Tai supaprastina (2.50) lygčių

sistemą iki

$$\begin{cases} \gamma_1 = \varphi_2^{(b)} - \varphi_1^{(b)} \\ \gamma_2 = \varphi_3^{(b)} - \varphi_2^{(b)} \\ \vdots \\ \gamma_i = \varphi_{i+1}^{(b)} - \varphi_i^{(b)}. \end{cases} \quad (2.51)$$

Taigi norimai srautų konfiguracijai sukurti reikia pasirinkti vieną fiksuotą pradinę fazę ir išspręsti lygčių sistemą likusioms fazėms rasti. Eksperimentiškai tai potencialiai gali būti realizuojama naudojant lazerio indukuojamus Raman šuolius sudarant bėgančią bangą [4] arba individualiai adresuojant gardelės mazgus [24].

2.4.2 Dirbtinis magnetinis srautas kvazi-vienmatėje dinaminėje trikampėje gardelėje



10 pav. Kvazi-vienmatė dinaminė trikampė gardelė. Čia eksponentės argumentai $\theta_{tb} = \frac{\varphi_j^{(t)} + \varphi_j^{(b)}}{2}$, $\theta_{bb} = \frac{\varphi_{j-1}^{(b)} + \varphi_j^{(b)}}{2}$ ir pirmojo tipo Bessel funkcijų argumentai $\alpha = \frac{2K}{\hbar\omega} \sin\left(\frac{\varphi_{j-1}^{(b)} - \varphi_j^{(t)}}{2}\right)$, $\alpha' = \frac{2K}{\hbar\omega} \sin\left(\frac{\varphi_j^{(b)} - \varphi_{j-1}^{(b)}}{2}\right)$, $\beta = \frac{2K}{\hbar\omega} \sin\left(\frac{\varphi_j^{(t)} - \varphi_j^{(b)}}{2}\right)$.

Analogišką išvedimą galime taikyti trikampei gardelėi, tik šį kart laikysime, kad energijų išderinimas tiesiškai didėja kiekvienai diagonalių mazgų porai kaip pavaizduota 10 pav. Diagonalios mazgų poros indeksuojamos vienu pozicijos skaičiumi j ir viršutinę bei apatinę šaką atitinkančiais simboliais t , b .

Tuomet lygtys srautui rasti

$$\begin{cases} \gamma_1 = \frac{\varphi_2^{(b)} - \varphi_2^{(t)}}{2} + \text{Im} \left\{ \log \left[-J^3 \mathcal{J}_0 \left(\frac{2K}{\hbar\omega} \sin \left(\frac{\varphi_2^{(t)} - \varphi_2^{(b)}}{2} \right) \right) \mathcal{J}_1 \left(\frac{2K}{\hbar\omega} \sin \left(\frac{\varphi_2^{(b)} - \varphi_1^{(b)}}{2} \right) \right) \right. \right. \\ \left. \left. \cdot \mathcal{J}_{-1} \left(\frac{2K}{\hbar\omega} \sin \left(\frac{\varphi_1^{(b)} - \varphi_2^{(t)}}{2} \right) \right) \right] \right\} \\ \vdots \\ \gamma_i = \frac{\varphi_{i+1}^{(b)} - \varphi_{i+1}^{(t)}}{2} + \text{Im} \left\{ \log \left[-J^3 \mathcal{J}_0 \left(\frac{2K}{\hbar\omega} \sin \left(\frac{\varphi_{i+1}^{(t)} - \varphi_{i+1}^{(b)}}{2} \right) \right) \mathcal{J}_1 \left(\frac{2K}{\hbar\omega} \sin \left(\frac{\varphi_{i+1}^{(t)} - \varphi_i^{(b)}}{2} \right) \right) \right. \right. \\ \left. \left. \cdot \mathcal{J}_{-1} \left(\frac{2K}{\hbar\omega} \sin \left(\frac{\varphi_i^{(b)} - \varphi_{i+1}^{(t)}}{2} \right) \right) \right] \right\}. \end{cases} \quad (2.52)$$

2.5 Skaitmeniniai skaičiavimai

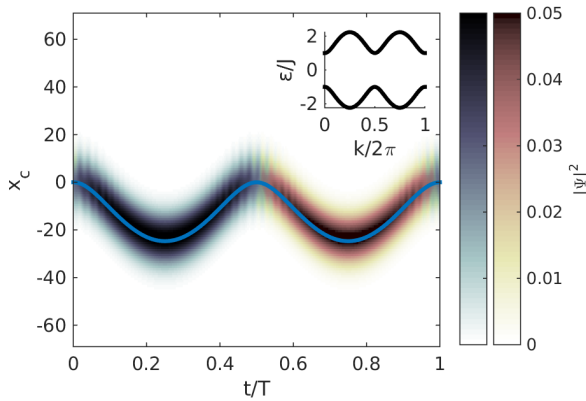
Visi tolimesni skaitmeniniai skaičiavimai susiveda į diferencialinių lygčių sistemų sprendimą. Išspręsimė banginio paketo centro judėjimo lygtis kvazi-vienmatei kvadratinei bei trikampei gardelei. Taip pat užsirašysime nuo laiko priklausančių Schrödinger lygčių sistemą aprašančią tiriamą gardelę su atitinkamu magnetiniu srautu bei palyginsime banginio paketo sklidimo rezultatus su gautais iš kvazi-klasikinių judėjimo lygčių. Lygčių sprendimui naudojamas Runge-Kutta metodas. Paklaida susijusi su vieno laiko žingsnio dydžiu Δt yra $O(\Delta t^5)$.

Nuo laiko priklausanti Schrödinger lygtis sprendžiama baigtiniam gardelės hamiltonianui realioje erdvėje, evoliucionuojant banginį paketą žingsniu $\Delta t = 10^{-5}$. Gardelės dydis parenkamas taip, kad stebėjimo metu dinamikai netrukdytų interferencija nuo atvirų kraštinių sąlygų. Pradinis banginis paketas yra gausinis, su standartiniu nuokrypiu $\sigma = 10$ gardelės mazgų.

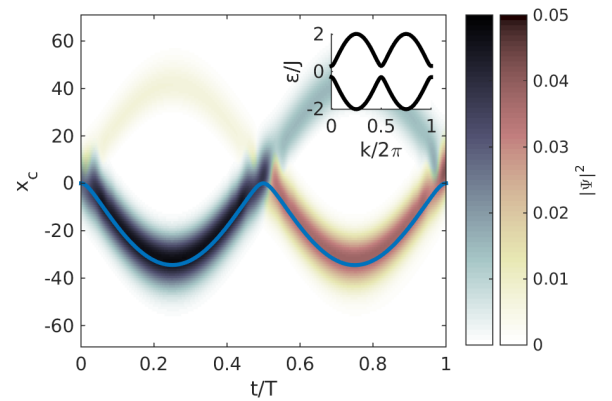
2.5.1 Banginis paketas kvazi-vienmatėje kvadratinėje gardelėje

Pradžioje nagrinėjame kvazi-vienmatę kvadratinę gardelę. Esant pastoviam srautui $\gamma = \pi$ ir pastoviai jėgai, apibrėžtai santykiu $F = -0.05J/a$ (J – šuolio stipris išilgai gardelės, a – gardelės konstanta), parenkame šuolių parametrus taip, kad $\Omega/J = 1$ (virpinimo atveju, stipris K nustatomas ties nulinės ir pirmos eilės pirmojo tipo Bessel funkcijų susikirtimu). Išsprendus Schrödinger ir judėjimo lygtis gauname periodinį banginio paketo centro svyravimą 11 pav. – vadinamą Bloch osciliaciją. Paveiksle $|\Psi(x_c, t)|^2$ yra tikimybės tankis aprašantis tikimybę rasti dalelę taške $x_c = aj$ ($j \in \mathbb{Z}$) gautas iš Schrödinger lygties su (2.2) hamiltonianu. Skirtingos tankio spalvos nurodo banginio paketo judėjimą skirtingose gardelės šakose: pilkas spektras – judėjimas apatinė šakoje ($s = -\frac{1}{2}$), rausvas – viršutinėje ($s = \frac{1}{2}$). Iš judėjimo lygčių (2.38) gaunama mėlyna banginio paketo centro trajektorija, taip pat suskaičiuojamas osciliacijų periodas $T = 2\pi\hbar/F$.

Su šiais parametrais turime pakankamai didelį tarpą tarp energijos juostų (matomą dispersijos sąryšyje 11 pav. įklijoje), todėl banginis paketas išlieka žemiausioje energijos juostoje. Tiek iš Schrödinger lygties, tiek iš kvazi-klasikinių judėjimo lygčių gaunamos trajektorijos sutam-

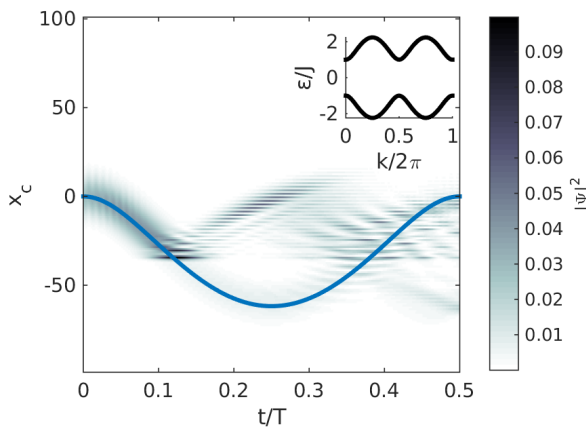


11 pav. Banginio paketo dinamika esant dideliam tarpui tarp energijos juostų.

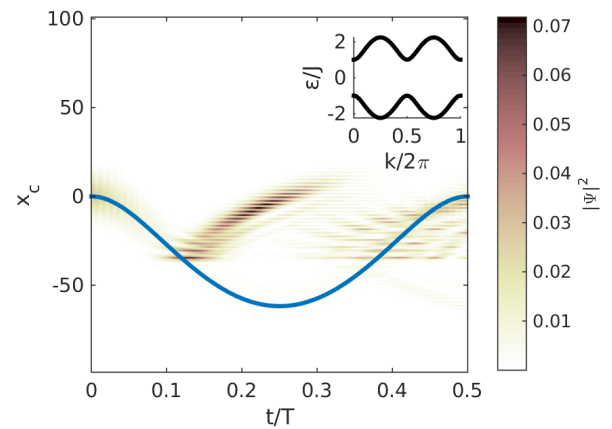


12 pav. Banginio paketo dinamika esant mažam tarpui tarp energijos juostų.

pa. Pabandome sumažinti draustinių energijų juostą parinkdami $\Omega/J = 0.3$, kitų parametru nekeičiant. Rezultate 12 pav. turime ne tik judėjimą žemiausioje juostoje, tačiau ir silpnos amplitudės osciliacijas aukštesnės energijos juostoje, atsirandančias dėl Landau-Zener perėjimo juostoms suartėjus. Prielaida, jog leistinos energijos yra atskirtos dideliu tarpu pažeidžiama, todėl kvazi-klasikinis aprašymas pilnai sistemos nebeaprašo.



13 pav. Banginio paketo sklaida apatinėje gardelės šakoje ($s = -\frac{1}{2}$), dėl lokalaus defekto.

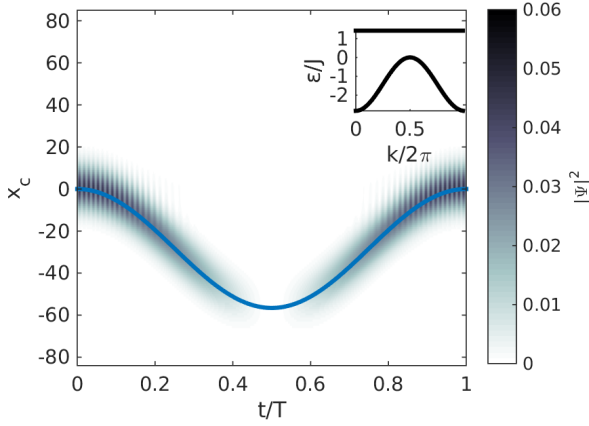


14 pav. Banginio paketo sklaida viršutinėje gardelės šakoje ($s = \frac{1}{2}$), dėl lokalaus defekto.

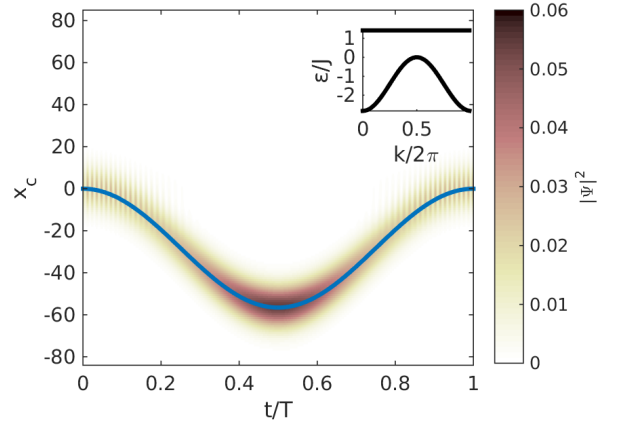
Įdomu pažiūrėti kaip elgiasi banginis paketas įvedus į šią gardelę srauto defektą – ties trimis gardelės mazgais sumažiname srautą iki 0.7π per narvelį. Taip pat šiek tiek sumažiname jėgą $F = 0.02J/a$, taip padidindami Bloch osciliacijos amplitudę. Gauname, kad maža dalis banginio paketo tikimybės tankio tuneliuoja per defektą, ir toliau juda pagal mėlyna kreive pavaizduotą kvazi-klasikinę trajektoriją, o didelė dalis atsispindi (13, 14 pav., dispersijos sąryšiai pavaizduoti nesutrikdytai gardelei). Atsispindėjusi dalis juda tiek apatine, tiek viršutine šaka (juda tiek $s = -\frac{1}{2}$ ir $s = \frac{1}{2}$ būsenose).

2.5.2 Banginis paketas kvazi-vienmatėje trikampėje gardelėje

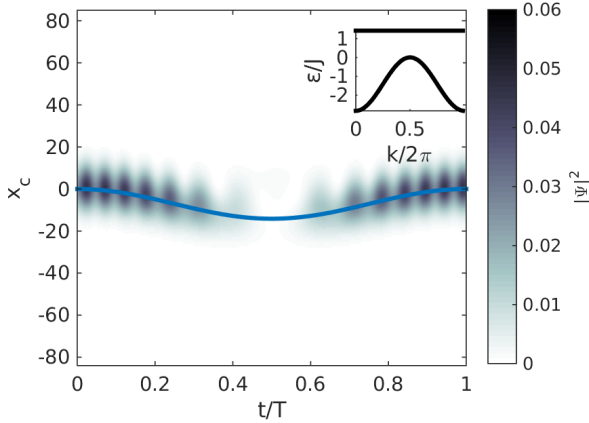
Lieka ištirti banginio paketo elgesį trikampėje gardelėje. Viena iš ankščiau darbe paminėtų idėjų yra banginio paketo pagavimas plokščioje energijos juostoje. Parinkus jėgą $F = 0.05J/a$ matome, kad visas judėjimas vyksta apatinėje juostoje (15, 16 pav.). Norint sukelti Landau-Zener tuneliavimą į sužadintą lygmenį galima bandyti didinti jėgą, išlaikant Bloch osciliacijas – $F = 0.2J/a$, tačiau ir čia nematome banginio paketo pagavimo (17, 18 pav.). Trikampei gardelei



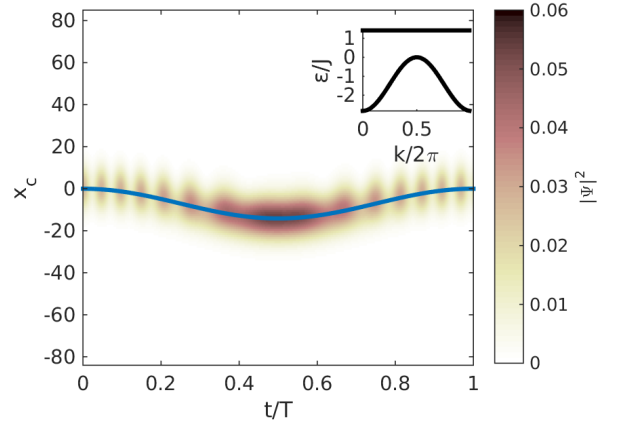
15 pav. Banginio paketo dinamika apatinėje trikampės gardelės šakoje esant silpnai jėgai.



16 pav. Banginio paketo dinamika viršutinėje trikampės gardelės šakoje esant silpnai jėgai.

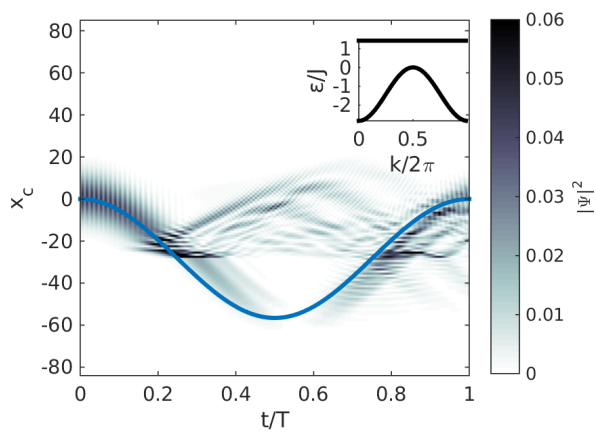


17 pav. Banginio paketo dinamika apatinėje trikampės gardelės šakoje esant stipriai jėgai.

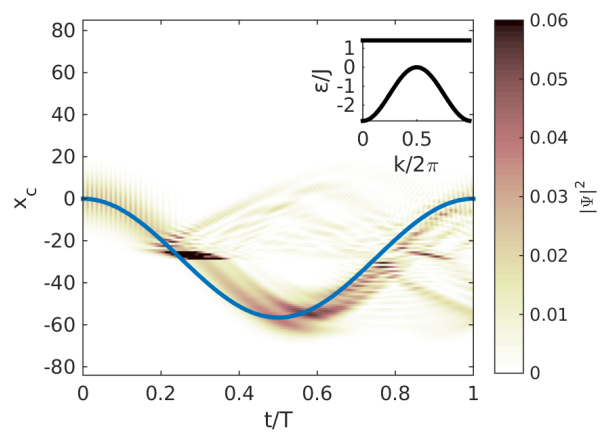


18 pav. Banginio paketo dinamika viršutinėje trikampės gardelės šakoje esant stipriai jėgai.

taip pat galime sudaryti srauto defektą (trys gretimi gardelės narveliai, po $\gamma = 0.7\pi$), nuo kurio banginis paketas atsispindi ir interferuoja pats su savimi (19, 20 pav.). Taigi lokalizuoti judančio banginio paketo į plokščią juostą nepavyksta, bet matome jog atsiranda jo užlaikymas lyginant su trajektorija be srauto defekto.



19 pav. Banginio paketo dinamika apatinėje trikampės gardelės šakoje esant srauto defektui.



20 pav. Banginio paketo dinamika viršutinėje trikampės gardelės šakoje esant srauto defektui.

Rezultatai ir išvados

Šiame darbe pasiūlytas būdas sukurti nehomogeninį srautą valdant virpinimo fazes ties kiekvienu gardelės mazgu. Pasirinktos srautu veikiamos sistemos pasižymi lengvai valdomais dispersijos sąryšiais ir leidžia įgyvendinti įdomius atvejus, tokius kaip trikampės gardelės plokščia juosta, kurioje dalelių kinetika nuslopinama arba kvadratinės gardelės juostų išsiskyrimas pagal sukinines būsenas.

- Gauta gardelės purtymo schema, leidžianti įgyvendinti bet kokią dirbtinio magnetinio srauto konfigūraciją kvazi-vienmatėje kvadratinėje bei trikampėje gardelėje.
- Lokalus magnetinio srauto defektas sukelia banginio paketo sklaidą. Trikampės gardelės atveju taip pat atsiranda banginio paketo užlaikymas.
- Perkelti banginio paketo į plokščią trikampės gardelės energijos juostą su paprasčiausiomis srauto konfigūracijomis nepavyko.

Literatūros saraksts

- [1] P. Windpassinger, K. Sengstock, Engineering novel optical lattices, *Rep. Prog. Phys.* **76**, 086401 (2013).
- [2] J. Dalibard, F. Gerbier, G. Juzeliūnas, P. Öhberg, Colloquium: Artificial gauge potentials for neutral atoms, *Rev. Mod. Phys.* **83**, 1523–1543 (2011).
- [3] A. Eckardt, Colloquium: Atomic quantum gases in periodically driven optical lattices, *Rev. Mod. Phys.* **89**(1), 011004 (2017).
- [4] M. Aidelsburger, M. Atala, S. Nascimbène, S. Trotzky, Y.-A. Chen, I. Bloch, Experimental realization of strong effective magnetic fields in an optical lattice, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 255301 (2011).
- [5] L. F. Livi, G. Cappellini, M. Diem, L. Franchi, C. Clivati, M. Frittelli, F. Levi, D. Calonico, J. Catani, M. Inguscio, L. Fallani, Synthetic dimensions and spin-orbit coupling with an optical clock transition, *Phys. Rev. Lett.* **117**, 220401 (2016).
- [6] K. B. Davis, M.-O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, W. Ketterle, Bose-Einstein condensation in a gas of sodium atoms, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3969–3973 (1995).
- [7] D. S. Jin, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, E. A. Cornell, Collective excitations of a bose-einstein condensate in a dilute gas, *Phys. Rev. Lett.* **77**(3), 420–423 (1996).
- [8] K. W. Madison, F. Chevy, W. Wohlleben, J. Dalibard, Vortex formation in a stirred Bose-Einstein condensate, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 806–809 (2000).
- [9] F. S. Cataliotti, Josephson junction arrays with bose-einstein condensates, *Science* **293**(5531), 843–846 (2001).
- [10] B. DeMarco, Onset of fermi degeneracy in a trapped atomic gas, *Science* **285**(5434), 1703–1706 (1999).
- [11] M. W. Zwierlein, J. R. Abo-Shaer, A. Schirotzek, C. H. Schunck, W. Ketterle, Vortices and superfluidity in a strongly interacting fermi gas, *Nature* **435**(7045), 1047–1051 (2005).
- [12] S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, S. Stringari, Theory of ultracold atomic fermi gases, *Rev. Mod. Phys.* **80**(4), 1215–1274 (2008).
- [13] R. P. Feynman, Simulating physics with computers, *Int. J. Theor. Phys.* **21**(6-7), 467–488 (1982).

- [14] M. Hafezi, A. S. Sørensen, E. Demler, M. D. Lukin, Fractional quantum Hall effect in optical lattices, *Phys. Rev. A* **76**, 023613 (2007).
- [15] M. Greiner, O. Mandel, T. Esslinger, T. W. Hänsch, I. Bloch, Quantum phase transition from a superfluid to a Mott insulator in a gas of ultracold atoms, *Nature* **415**, 39–44 (2002).
- [16] D. Jaksch, P. Zoller, The cold atom Hubbard toolbox, *Ann. Phys.* **315**, 52–79 (2005).
- [17] J. Struck, J. Simonet, K. Sengstock, Spin-orbit coupling in periodically driven optical lattices, *Phys. Rev. A* **90**, 031601(R) (2014).
- [18] V. Galitski, I. B. Spielman, Spin-orbit coupling in quantum gases, *Nature* **494**, 49–54 (2013).
- [19] O. Dutta, M. Gajda, P. Hauke, M. Lewenstein, D.-S. Lühmann, B. A. Malomed, T. Sołwiński, J. Zakrzewski, Non-standard Hubbard models in optical lattices: a review, *Rep. Prog. Phys.* **78**, 066001 (2015).
- [20] N. Goldman, G. Juzeliūnas, P. Öhberg, I. B. Spielman, Light-induced gauge fields for ultracold atoms, *Rep. Prog. Phys.* **77**, 126401 (2014).
- [21] N. R. Cooper, Rapidly rotating atomic gases, *Adv. Phys.* **57**, 539–616 (2008).
- [22] D. Xiao, M.-C. Chang, Q. Niu, Berry phase effects on electronic properties, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 1959–2007 (2010).
- [23] G. Sundaram, Q. Niu, Wave-packet dynamics in slowly perturbed crystals: Gradient corrections and Berry-phase effects, *Phys. Rev. B* **59**, 14915–14925 (1999).
- [24] W. S. Bakr, J. I. Gillen, A. Peng, S. Fölling, M. Greiner, A quantum gas microscope for detecting single atoms in a hubbard-regime optical lattice, *Nature* **462**, 74–77 (2009).

Giedrius Žlabys

OPTICAL LADDER LATTICES WITH TUNABLE FLUX

Summary

Ultracold atoms in optical lattices provide clean and tunable systems to realize many-body quantum physics. They can be used to simulate a variety of effects ranging from superconductivity and superfluidity to novel phases of matter. Particles trapped in an optical lattice are neutral so the Lorentz force does not affect them. A workaround resolving this issue is the introduction of an artificial gauge field that generates magnetic flux. It can be created by using laser assisted tunneling and periodic driving schemes. This also allows to realize a stronger magnetic flux per lattice plaquette than typically available in solid state experiments.

The aim of this thesis is to propose a driving scheme for quasi-one dimensional ladder lattices that induces a tunable artificial magnetic flux through the lattice plaquettes. By manipulating the shaking phase for each individual site, this flux can be made inhomogeneous in space. It allows us to explore the dynamics and control capabilities of an atomic wave-packet propagating in a sawtooth and a square ladder lattice.

ŽLABYS, Giedrius. *Kvazi-vienmatės kintamo magnetinio srauto optinės gardelės*: Magistrantūros studijų baigiamasis darbas. Vad. Egidijus Anisimovas. Vilnius: Vilniaus universitetas Fizikos fakultetas, 2017, 33 p.

Šio darbo tikslas yra sudaryti valdomą magnetinį srautą kvazi-vienmatėje kvadratinėje ir trikampėje gardelėje. Tai atliekama purtymu indukuojant dirbtinį kalibruotės potencialą, kurio kuriamas srautas per gardelės elementarų narvelį gali būti kontroliuojamas parenkant purtymo fazes ties kiekvienu mazgu. Sukūrus norimą srautą, tiriamas banginio paketo sklidimas kvazi-klasikiniu atveju bei sprendžiant nuo laiko priklausančią Schrödinger lygtį. Neturint gardelėje defektų, gaunamos Bloch osciliacijos. Įvedus magnetinio srauto defektą, stebima banginio paketo sklaida. Kvadratinėje gardelėje esant dideliame draustinių energijų tarpui kvazi-klasikinės lygtys gerai aprašo paketo dinamiką, jei tarpas mažas – vyksta Landau-Zener tuneliavimas matomas iš Schrödinger lygties sprendinių. Trikampėje gardelėje įmanoma sukurti plokščią juostą, tačiau net ir esant pakankamai didelei jėgai banginio paketo į ją perkelti nepavyksta.