

VILNIAUS UNIVERSITETAS

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ IR SKAIČIAVIMO MATEMATIKOS KATEDRA

Gerda Lukošūtė

**VIENOS SUSIETOS PARABOLINIŲ LYGČIŲ
SISTEMOS SPRENDINIŲ
APRIORINIAI ĮVERČIAI**

Bakalauro baigiamasis darbas

Leidžiu ginti _____
Darbo vadovas doc. Algirdas Ambrazevičius

Vilnius 2016

Turinys

Įvadas	2
1 Problemos formulavimas	3
2 Maksimumo principas	4
2.1 Pagrindiniai žymėjimai ir uždavinių formulavimas	4
2.2 Maksimumo principas aprėžtoje srityje	5
2.3 Pozityvumo lema	12
3 Aprioriniai įverčiai	13
3.1 Sistemos (2) aprioriniai įverčiai	13
3.2 Sistemos (1) aprioriniai įverčiai	15
Summary	17

Ivadas

Per pastaruosius 300 metų, diferencialinės lygtys buvo naudojamos aprašant ir analizuojant įvairių mokslo sričių uždavinius. Kraštiniai uždaviniai tiesinėms ir netiesinėms parabolinėms lygtims bei jų sistemoms yra gerai išnagrinėti (žr. pav. [3], [4]). Pastaruoju metu daug dėmesio skiriama susietoms parabolinių bei parabolinių ir paprastųjų diferencialinių lygčių sistemoms. C.V. Pao bei kitų matematikų darbuose (žr. pav. [2], [6]) nagrinėjamos susietos paprastųjų ir parabolinių lygčių sistemos bei susietos parabolinių lygčių sistemos toje pačioje srityje. Tačiau praktikoje dažnai tenka susidurti su tokiais sistemomis, kurių viena dalis yra nagrinėjama duotoje aprėžtoje srityje, o kita - tos srities paviršiaus dalyje. Šiame darbe ir nagrinėsime tokio tipo susietų parabolinių lygčių sistemą. Darbo tikslas yra gauti šios sistemos sprendinių apriorinius įverčius.

Pirmajame skyriuje formuluojamas pagrindinis šio darbo uždavinys. Antrajame skyriuje nagrinėjami įvarūs maksimumo principo aspektai homogeninių ir nehomogeninių lygčių atveju. Trečiajame skyriuje gaunami nagrinėjamos susietos parabolinių lygčių sistemos sprendinių aprioriniai įverčiai.

1 Problemos formulavimas

Tegu Ω yra apręžta sritis erdvėje $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, $S = \partial\Omega$ yra glodus paviršius erdvėje $\mathbb{R}^n$, $S_2 \subset S$ yra sritis erdvėje $\mathbb{R}^{n-1}$, esanti plokštumoje $x_n = 0$, $S_1 = S \setminus S_2$, $\partial S_1 = \partial S_2 = \Sigma$ - $n-2$ dimensijos paviršius erdvėje $\mathbb{R}^{n-1}$.

Nagrinėsime uždavinį: reikia rasti funkcijas a_i , θ_i , $i = 1, 2$, tokias, kad

$$\begin{cases} a_i - k_i \Delta a_i = 0, & (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ k_i \frac{\partial a_i}{\partial \nu} = 0, & (x, t) \in S_1 \times (0, T), \\ k_i \frac{\partial a_i}{\partial \nu} + \kappa_i \rho a_i (1 - \theta_i) = \kappa_{ii} \rho \theta_i, & (x, t) \in S_2 \times (0, T), \\ a_i|_{t=0} = a_{i0}, & x \in \overline{\Omega} \end{cases} \quad (1)$$

kur $k_i > 0$ yra difuzijos koeficientas, o κ_i bei κ_{ii} yra teigiamos konstantos, $\rho = \rho(x') \geq 0$ - tolydi funkcija, $\partial a_i / \partial \nu$ - normalinė išvestinė paviršiui S , išorinė srities Ω atžvilgiu,

$$\Delta a_i = \sum_{j=1}^n a_{ix_j x_j},$$

$$\begin{cases} \theta'_i - \hat{k}_i \Delta \theta_i = \kappa_i a_i (1 - \theta_i) - \kappa_{ii} \theta_i - \kappa_{12} \theta_1 \theta_2, & (x, t) \in S_2 \times (0, T), \\ \frac{\partial \theta_i}{\partial \mu} = 0, & (x, t) \in \Sigma \times (0, T], \\ \theta_i|_{t=0} = \theta_{i0}(x'), & x \in \overline{S_2}, \end{cases} \quad (2)$$

kur $\hat{k}_i$ - difuzijos koeficientai, κ_i bei κ_{ii} yra teigiamos konstantos, $\partial \theta_i / \partial \mu$ - normalinė išvestinė kontūrai Σ , išorinė srities S_2 atžvilgiu,

$$\Delta \theta_i = \sum_{j=1}^{n-1} \theta_{ix_j x_j}.$$

2 Maksimumo principas

Šiame skyriuje nagrinėjama A.M. Ilyin, A.S. Kalashnikov ir O.A. Oleynik "Linear second - order partial differential equations of the parabolic type" straipsnyje esanti medžiagos dalis (žr. pav. [5]).

2.1 Pagrindiniai žymėjimai ir uždavinių formulavimas

Tegu D yra aprėžta sritis erdėje $\mathbb{R}^{n+1}$, esanti tarp plokštumų $t = 0$ ir $t = T$, o $\overline{D} = D \cup \partial D$, kur ∂D yra srities D kraštinių taškų aibė. Tegu aibė $D_0 = \overline{D} \cap \{t = 0\} \neq \emptyset$. Pažymėkime $\overline{S}$ aibės ∂D taškų uždarinį kurie nėra plokštumose $t = 0$ ir $t = T$. Aibės $\overline{S}$ taškus, kurie nėra plokštumoje $t = 0$ žymėsime raide S . Visumą taškų, kurie priklauso $S \cup D_0$ žymėsime Γ .

Atskiru atveju, kai negrinėjama sritis D yra cilindras $\Omega \times (0, T)$, ją žymėsime raide Q_T . Šiuo atveju $D_0 = \Omega \cup \sigma$, $\Sigma = S \cup \Omega \cup \sigma$, $\sigma = \partial\Omega$.

Nagrinėsime parabolinę lygtį

$$L(u) := \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x, t) u_{x_i} + c(x, t) u - u_t = f(x, t), \quad (3)$$

kur funkcijos a_{ij} , b_i , c ir f yra realios bei aprėžtos, o koeficientai $a_{ij} = a_{ji}$ tenkina sąlygą $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \alpha_i \alpha_j > 0$, $\forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Pati paprasčiausia tiesinė antros eilės parabolinė lygtis yra šilumos laidumo lygtis

$$\sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} - u_t = 0. \quad (4)$$

Viena svarbiausių (4) lygties sprendinių savybių yra maksimumo principas. Šiame skyrelyje parodysime, kokiomis formomis maksimumo principas išlieka teisingas antros eilės parabolinėms lygtims. Kaip ir šilumos laidumo lygčiai, taip ir įvairioms antros eilės parabolinėms lygtims, maksimumo principas garantuoja pagrindinių kraštinių uždavinių sprendinių vienatį. Šie uždaviniai antros eilės parabolinėms lygtims sudaromi taip pat kaip ir šilumos laidumo lygčiai.

Suformuluosime pagrindinius uždavinius lygčiai (3).

Reikia rasti funkcija $u = u(x, t)$, kuri srityje $\overline{D} \setminus \Gamma$ tenkina (3) lygtį, pradinę sąlygą

$$u|_{t=0} = \phi(x)$$

ir kraštinę sąlygą

$$u|_S = \psi(x, t),$$

kur ϕ , ψ ir a žinomos tolydžios funkcijos. Taip suformuluotas uždavinys vadinamas pirmuoju kraštiniu uždaviniu.

Reikia rasti funkciją u , kuri sirtyje $\overline{D} \setminus \Gamma$ tenkina (3) lygtį, pradinę sąlygą

$$u|_{t=0} = \phi(x),$$

ir kraštinę sąlygą

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \gamma} + a(x, t)u \right) \Big|_S = \psi(x, t),$$

kur ϕ , ψ ir a žinomos bei tolydžios funkcijos, γ - neličiamoji kryptis paviršiui S . Taip suformuluotas uždavinys vadinamas trečiuoju kraštiniu uždaviniu. Atskiru atveju, kai $a = 0$, toks uždavinys yra vadinamas antruoju kraštiniu uždaviniu.

2.2 Maksimumo principas aprėžtoje srityje

Šiame skyrelyje apibendrinsime žinomus teiginius, kurie yra teisingi šilumos laidumo lygčiai cilindre Q_T , gana plačiai parabolinių lygčių klasei ir pakankamai bendro pavidalo srityje D .

2.1 teorema. *Tarkime funkcija $u(x, t)$ yra tolydi aibėje $\overline{D}$, turi tolydžias išvestines, įeinančias į operatorių L ir tenkina nelygybę $L(u) \leq 0$ aibėje $\overline{D} \setminus \Gamma$, be to $c(x, t) < M$, M - konstanta. Tada, jei $u(x, t) \geq 0$ paviršiuje Γ , tai $u(x, t) \geq 0$, kai $(x, t) \in \overline{D}$.*

Irodymas. Pirmiausia, nagrinėsime atvejį, kai $M < 0$, t.y. $c(x, t) < 0$. Jei funkcija u taškuose $(x, t) \in \overline{D}$ įgyja neigiamas reikšmes, tai egzistuoja taškas $(x_0, t_0) \in \overline{D}$, kuriame funkcija u įgyja mažiausią neigiamą reikšmę: $u(x_0, t_0) \leq u(x, t), \forall (x, t) \in \overline{D}$.

Todėl, šiame taške turime $u_{x_i} = 0, i = 1, \dots, n, u_t \leq 0, cu > 0$. Be to, šiame taške $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i x_j} \geq 0$. Iš tikrųjų vietoje kintamųjų $x_1, \dots, x_n$ apibrėšime naujus nepriklausomus kintamuosius

$$y_i = \sum_{j=1}^n C_{ij}x_j, \quad i = 1, \dots, n;$$

o matricą $\{C_{ij}\}$ parinksime taip, kad

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i x_j} = \sum_{k,l=1}^n A_{kl}u_{y_k y_l} = \sum_{k=1}^n \lambda_k u_{y_k y_k}.$$

kadangi minimumo taške $u_{y_k y_k} \geq 0$, tai šiame taške $\sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} x_j \geq 0$.

Tačiau tada minimumo taške $L(u) > 0$. Gauta prieštarą, įrodo teoremą, kai $c(x, t) < 0$.

Išnagrinėsime bendrą atvejį. Tegu koeficientas $c(x, t) < M$ ir $M > 0$. Darome keitinį $u(x, t) = v(x, t)e^{Mt}$. Tuomet

$$L(u) = L(v e^{Mt}) = e^{Mt} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} v_{x_i} v_{x_j} + e^{Mt} \sum_{i=1}^n v_{x_i} + e^{Mt} c v - e^{Mt} v_t - e^{Mt} v M$$

Dauginamasis $e^{Mt} > 0$. Suprastinę iš jo, gauname, kad funkcija v tenkina nelygybę

$$\sum_{i,j=1}^n v_{x_i} x_j + \sum_{i=1}^n b_i v_{x_i} + (c - M)v - v_t \leq 0,$$

paviršiaus Γ_T taškuose $v(x, t) \geq 0$ ir $(c - M) \leq 0$. Todėl galime tvirtinti, kad $v(x, t) \geq 0, \forall (x, t) \in \overline{D}$. Kartu galima teigti, kad ir funkcija $u(x, t) \geq 0, \forall (x, t) \in D$. Teorema įrodyta.

□

2.2 pastaba. *Akivaizdu, jei (2.1) teoremos sąlygos yra išpildytos ir $L(u) \geq 0$ aibėje $\overline{D} \setminus \Gamma$ bei $u(x, t) \leq 0$ paviršiuje Γ , tai $u(x, t) \leq 0$, kai $(x, t) \in \overline{D}$.*

2.3 išvada. *Iš (2.1) teoremos įrodymo išplaukia, kad*

1. *Jei $L(u) < 0$ ir $c \leq 0$ srityje D , tai u negali įgyti neigiamo minimumo aibėje $\overline{D} \setminus \Gamma$;*
2. *Jei $L(u) > 0$ ir $c \leq 0$ srityje D , tada u negali įgyti teigiamo maksimumo aibėje $\overline{D} \setminus \Gamma$.*

2.4 teorema. *Tarkime, kad $u(x, t) \in C(\overline{D})$ ir aibėje $\overline{D} \setminus \Gamma$, tenkina (3) lygtį, funkcija f yra aprėžta, funkcija c yra neteigiama. Tada*

$$|u(x, t)| \leq Nt + m, \quad \forall (x, t) \in \overline{D}. \quad (5)$$

Čia $N = \max_{(x,t) \in \overline{D}} |f(x, t)|$, $m = \max_{(x,t) \in \Gamma} |u(x, t)|$.

Irodymas. Nagrinėsime funkciją $\omega_{\pm}(x, t) = Nt + m \pm u(x, t)$, $(x, t) \in \overline{D}$. Pagal teoremos prielaidą $c \leq 0$. Tuomet

$$L(\omega_{\pm}) \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \frac{\partial^2 \omega_{\pm}}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x, t) \frac{\partial \omega_{\pm}}{\partial x_i} + c(x, t) \omega_{\pm} - \frac{\partial \omega_{\pm}}{\partial t} =$$

$$\begin{aligned}
& \pm \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)u_{x_i x_j} \pm \sum_{i=1}^n b_i(x,t)u_{x_i} + c(x,t)(Nt + m \pm u(x,t)) - (Nt \pm u_t) = \\
& \left(\pm \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)u_{x_i x_j} \pm \sum_{i=1}^n b_i(x,t)u_{x_i} \pm c(x,t)u \mp u_t \right) + c(Nt + m) - N = \\
& \pm L(u) + c(Nt + m) - N \leq -N + |f| \leq 0.
\end{aligned}$$

Remiantis (2.1) teorema, abi funkcijos $\omega_{\pm}(x,t)$ yra neneigiamos srityje $\overline{D}$. Taigi yra teisinga (5) nelygybė. $\square$

2.5 išvada. Tegu teoremos (2.4) prielaidos yra tenkinamos ir $f(x,t) \equiv 0$. Tada

$$|u(x,t)| \leq \max_{(x,t) \in \Gamma} |u(x,t)|, \quad \forall (x,t) \in \overline{D}. \quad (6)$$

2.6 teorema. Tarkime, kad funkcija $u \in C(\overline{D})$ ir tenkina (3) lygtį aibėje $\overline{D} \setminus \Gamma$. Be to, tegu $\max_{(x,t) \in \overline{D}} |f(x,t)| \leq N$ ir $c(x,t) \leq -c_0 < 0$. Tada

$$|u(x,t)| \leq \max \left\{ \frac{N}{c_0}, m \right\}, \quad \forall (x,t) \in \overline{D},$$

čia $m = \max_{(x,t) \in \Gamma} |u(x,t)|$.

Irodymas. Pažymėkime $N_1 = \max\{N/c_0, m\}$. Nagrinėkime funkciją $\omega_{\pm}(x,t) = N_1 \pm u(x,t)$, $(x,t) \in \overline{D} \setminus \Gamma$. Tuomet

$$\begin{aligned}
L(\omega_{\pm}) & \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t) \frac{\partial^2 \omega_{\pm}}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x,t) \frac{\partial \omega_{\pm}}{\partial x_i} + c(x,t)\omega_{\pm} - \frac{\partial \omega_{\pm}}{\partial t} = \\
& \pm \sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i x_j} \pm \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} \pm cu(x,t) \mp u_t + cN_1 = \\
& \pm L(u) + cN_1 = \pm f + cN_1
\end{aligned}$$

Pasinaudojus prielaida $c(x,t) \leq -c_0$ gauname

$$L(\omega_{\pm}) = \pm f + cN_1 \leq -N_1 c_0 + N \leq 0.$$

Reimiantis (2.1) teorema, funkcijos $\omega_{\pm}(x,t)$ yra neneigiamos $\forall (x,t) \in \overline{D}$. Kartu yra teisinga (6) nelygybė. $\square$

Jei $c \equiv 0$ ir $f \equiv 0$, tai iš (2.4) teoremos gauname tokius teiginius.

2.7 teorema. *Tarkime (2.4) teoremos prielaidos yra tenkinamos, $f \equiv 0$, $c \equiv 0$ ir $u(x, t)$ yra (3) lygties sprendinys. Tada*

$$m_1 \equiv \min_{\Gamma} u(x, t) \leq u(x, t) \leq \max_{\Gamma} u(x, t) \equiv m_2, \quad \forall (x, t) \in \overline{D}.$$

Irodymas. Pirmiausia pastebėsime, kad funkcijos $u(x, t) - m_1$ ir $m_2 - u(x, t)$ tenkina (3) lygtį ir paviršiaus Γ taškuose yra neneigiamas. Pasinaudojus 2.4 teoremos išvada, gauname:

$$u(x, t) - m_1 \leq \max_{(x, t) \in \Gamma} \{u(x, t) - m_1\} = m_2 - m_1.$$

$$m_2 - u(x, t) \leq \max_{(x, t) \in \Gamma} \{m_2 - u(x, t)\} = m_2 - m_1.$$

Teorema yra įrodyta. □

2.8 teorema. *Tarkime (2.4) teoremos sąlyga $c \leq 0$ pakeista į $c(x, t) \leq M$, kur $M > 0$. Tada*

$$|u(x, t)| \leq e^{Mt}(Nt + m), \quad \forall (x, t) \in \overline{D}. \quad (7)$$

Irodymas. Norint įrodyti šią teoremą, reikia padaryti keitinį $u = ve^{Mt}$ bei pritaikyti (2.4) teoremą šiai funkcijai v . □

Naudojantis (7) įverčiu, galime įrodyti vienaties teoremą pirmajam kraštiniam uždaviniui, jei koeficientas $c(x, t)$ yra aprėžtas iš viršaus.

Tas pats įvertis leidžia tvirtinti, kad pirmo kraštinio uždavinio sprendinys u tolygiai priklauso nuo pradinių sąlygų. Iš tikrųjų, $|u(x, t)| \leq e^{MT}(T + 1)\varepsilon$, jei $\|f\| < \varepsilon$, $\|\phi\| < \varepsilon$ ir $\|\psi\| < \varepsilon$.

2.9 teorema (Griežtas maksimumo principas). *Tarkime, kad funkcija $u(x, t) \in C(\overline{D})$ ir tenkina lygtį $L(u) = 0$ aibėje $\overline{D} \setminus \Gamma$. Be to, tegu Visi lygties koeficientai yra aprėžti ir $c(x, t) \leq 0$, kai $(x, t) \in \overline{D}$ ir*

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \alpha_i \alpha_j \geq \mu \sum_{i=1}^n \alpha_i^2, \quad \forall (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n,$$

$\mu > 0$ - kokia nors konstanta. Tegų funkcija $u(x, t)$ įgyja teigiamą maksimumą taške $(x^0, t^0) \in \overline{D} \setminus \Gamma$, t.y.

$$u(x^0, t^0) = \max_{(x,t) \in \overline{D}} u(x, t) = m > 0.$$

Tada $u(x, t) = m$, $\forall (x, t) \in \overline{D}$, kai $t < t^0$ ir kuri galima sujungti su tašku (x^0, t^0) tolydžia kreive $x = x(t) \subset \overline{D} \setminus \Gamma$.

Įrodymas. Tarkime priešingai: kokiame nors taške $P_1(x^1, t^1)$, kuris yra sujungtas su tašku $P_0(x^0, t^0)$, $t^1 < t^0$ tolydžia kreive $x = x(t) \subset \overline{D} \setminus \Gamma$, funkcijos $u(x, t)$ reikšmė yra mažesnė už m , kai $t < t^0$. Taškus (x^1, t^1) ir (x^0, t^0) galime sujungti laužte, kurios viršūnės yra $P_1(x^1, t^1), P_2(x^2, t^2), \dots, P_k(x^k, t^k), P_0$, kur $t^1 < t^2 < \dots < t^k < t^0$. Jeigu įrodysime, kad iš nelygybės $u(x^s, t^s) < m$ galima gauti nelygybę $u(x^{s+1}, t^{s+1}) < m$ ($s = 1, 2, \dots, k-1$), tai einant nuo taško $P_s(x^s, t^s)$ iki taško $P_{s+1}(x^{s+1}, t^{s+1})$ gausime nelygybę $u(x^0, t_0) < m$. Gauta prieštara ir įrodytą teoremą.

Paprastumo dėlei, galime teigti, kad $s = 1$. Taigi tarkime, kad $u(x^1, t^1) < m_1 < m$ ir įrodysime, kad $u(x^2, t^2) < m$.

Tegu $x^1 = x^2 = 0$. Priešingu atveju tokią situaciją gausime atlikę tiesinę kintamųjų transformaciją.

$$\tau = t, \quad \xi_i = x_i - x_i^1 - (x_i^2 - x_i^1) \frac{t - t^1}{t^2 - t^1} \quad (i = 1, \dots, n).$$

Lygtis $L(u) = 0$ su naujais kintamaisiais (ξ, τ) taip pat tenkina visas teoremos sąlygas.

Nagrinėkime cilindą $Q_1\{r \leq \rho, t^1 \leq t \leq t^2\}$, kur $r = \{\sum_{i=1}^n x_i^2\}^{1/2}$ ir konstanta $\varrho < 1$ yra parinkta taip, kad cilindras $Q_1 \subset D$ ir apatiniame cilindro pagrinde $u(x, t^1) < m_1$. Cilindre Q_1 panagrinėkime funkciją

$$\omega(x, t) = m - (m - m_1)(\rho^2 - r^2)^2 e^{-\alpha(t-t^1)} - u(x, t).$$

Parodysime, kad konstanta $\alpha > 0$ gali būti parinkta taip, kad $L(\omega) < 0$ cilindre Q_1 . Iš tikrųjų,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho^2 - r^2)^2 &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho^2 - \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^2 = \\ 2(\rho^2 - \sum_{i=1}^n x_i^2)(-2x_i) &= -4x_i(\rho^2 - r^2), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(\rho^2 - r^2)^2 = \frac{\partial}{\partial x_j}(-4x_i(\rho^2 - r^2)) = -4\delta_{ij}(\rho^2 - r^2) - 4x_i 2x_j =$$

$$8x_i x_j - 4(\varrho^2 - r^2)\delta_{ij}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} L(\omega) &= cm - (m - m_1)e^{-\alpha(t-t^1)} \left\{ 8 \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j - 4(\varrho^2 - r^2) \sum_{i=1}^n a_{ii} - \right. \\ &\quad \left. - 4(\varrho^2 - r^2) \sum_{i=1}^n b_i x_i + c(\varrho^2 - r^2)^2 + \alpha(\varrho^2 - r^2)^2 \right\} \\ &\leq -(m - m_1)e^{-\alpha(t-t^1)} \{ 8\mu r^2 + (\varrho^2 - r^2)f_1(x, t) + \alpha(\varrho^2 - r^2)^2 \}, \end{aligned}$$

kur $f_1(x, t)$ yra aprėžta funkcija. Kai $\mu > 0$, $\varrho_1 < r \leq \varrho$, funkcija $f_2(x, t) = 8\mu r^2 + (\varrho^2 - r^2)f_1(x, t) + \alpha(\varrho^2 - r^2)^2$ yra teigiama cilindro Q_1 šoninio paviršiaus taškų aplinkoje, $\varrho_1 < r \leq \varrho$. Likusioje cilindro dalyje, kur $r \leq \varrho_1$, funkcija $(\varrho^2 - r^2)$ yra aprėžta iš apačios teigiama konstanta ir todėl $f_2(x, t)$ yra teigiama, jeigu tik α pakankamai didelis. Tokiems α reiškiny $L(\omega) < 0$ cilindre Q_1 .

Lengva patikrinti, kad funkcija $\omega(x, t)$ yra neneigiama cilindro šoniniame paviršiuje ir jo apatiniame pagrinde. Išties, kai $r = \varrho$, gauname, kad $\omega = m - u \geq 0$. Kai $t = t^1$ ir $r \leq \varrho$, gauname

$$\omega(x, t) = m - (m - m_1)(\varrho^2 - r^2)^2 - u \geq$$

$$m - (m - m_1)\varrho^4 - m_1 \geq m - (m - m_1) - m_1 = 0.$$

Remiantis (2.1) teorema, funkcija $\omega(x, t) \geq 0$ visur cilindre Q_1 . Taigi

$$\omega(0, t^2) = m - (m - m_1)(\varrho^2 - 0^2)^2 e^{-\alpha(t^2-t^1)} - u(0, t^2) =$$

$$m - (m - m_1)\varrho^4 e^{-\alpha(t^2-t^1)} - u(0, t^2) \geq 0$$

ir

$$u(0, t^2) \leq m - (m - m_1)\varrho^4 e^{-\alpha(t^2-t^1)} < m.$$

Teorema yra įrodyta. □

2.10 teorema. Tarkime, kad funkcija $u(x, t)$ yra tolydi aibėje $\overline{D}$ ir aibėje $\overline{D} \setminus \Gamma$ tenkina (3) lygtį. Tegu lygties koeficientai tenkina (2.9) teoremos prielaidas. Tarsime, kad kiekvienam taškui $P \in S$ egzistuoja rutulys A_P , $P \in A_P$, kurio visi taškai, esantys

srityje $0 < t < T$, išskyrus tašką P , priklauso aibei $\overline{D} \setminus \Gamma$, be to šio rutulio spindulys, nubrėžtas į tašką P , nėra lygiagretus ašiai t .

Tarkime, kad funkcija $u(x, t)$ maksimumą įgyja taške $P_1(x^1, t^1) \in S$. Tada arba funkcija $u(x, t)$ yra pastovi taško P aplinkoje, kai $t \leq t^1$, arba $\partial u(P_1) \setminus \partial \gamma < 0$, kur γ kryptis sudaro smailų kampą su rutulio A_{P_1} spinduliu, išeinančiu iš taško P_1 į jo centrą.

Įrodymas. Tegū $t^1 < T$. Jei taško P_1 aplinkoje, kai $t \leq t^1$, $u(x, t)$ nėra konstanta, tai remiantis (2.9) teorema

$$u(P) < u(P_1) \quad (8)$$

kiekvienam rutulio A_{P_1} taškui, esančiam P_1 aplinkoje. Tegū koordinačių pražios taškas sutampa su rutulio A_{P_1} centru ir tarsime, kad spindulys R yra tiek mažas, kad (8) nelygybė išlieka teisinga rutulyje A_{P_1} ir $A_{P_1} \in \overline{D}$. Nagrinėkime funkciją

$$v(x, t) = e^{-\alpha(r^2+t^2)} - e^{-\alpha R^2},$$

čia $r = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2}$. Tada

$$L(v) = \left\{ -2\alpha \left(\sum_{i=1}^n a_{ii} - t + \sum_{i=1}^n b_i x_i \right) + 4\alpha^2 \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j + c \right\} e^{-\alpha(r^2+t^2)} - c e^{-\alpha R^2} > 0 \quad (9)$$

kai $r > \delta$, $\alpha > 0$.

Nagrinėkime sritį ω , kuri aprėžta ta rutulio A_{P_1} paviršiaus dalimi, kuriai priklauso taškas P_1 , ir plokštumos, kuri yra statmena spinduliui OP_1 ir tiek artima taškui P_1 , kad srityje ω būtų teisinga (9) nelygybė. Nagrinėkime pagalbinę funkciją $w(P) = u(P_1) - u(P) - \beta v(P)$, $\beta > 0$. Ši funkcija yra neneigiama rutulio A_{P_1} paviršiuje, nes šiame paviršiuje $v(P) \leq 0$, $u(P) \leq u(P_1)$. Kadangi likusioje paviršiaus ω dalyje teisinga (8) nelygybė, tai pakankamai mažiems β , funkcija $w(P) \geq 0$, $\forall P \in \partial \omega$. Kadangi $L(w) = cu(P_1) - \beta L(v) < 0$, tai remiantis (2.1) teorema, funkcija $w(P) \geq 0$, $\forall P \in \omega$. Be to, $w(P_1) = 0$. Vadinasi $\partial w(P_1) \setminus \partial \gamma \geq 0$ ir

$$\frac{\partial u(P_1)}{\partial \gamma} \leq i\beta \frac{\partial v(P_1)}{\partial \gamma} = 2\beta\alpha e^{-\alpha(r^2+t^2)} \sqrt{r^2+t^2} \cos(\overrightarrow{OP_1}, \gamma) < 0.$$

Jeigu $t^1 = T$, tai pateiktas įrodymas nesikeičia. Reikia tik imti tuos rutulio A_{P_1} taškus, kuriems $t \leq T$. Teorema įrodyta. □

Naudojantis 2.10 teorema, galima įrodyti trečiąjį kraštinį uždavinį ir vienaties teoremą.

2.3 Pozityvumo lema

Šiame skyrelyje nagrinėjama C.V. Pao knygos "Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations" medžiagos dalis (žr. pav [2]).

Norint įrodyti pozityvumo lemą, pirmiau reikia suformuluoti teoremas, kurių prireiks įrodinėjant.

2.11 teorema. Tegu $\omega \in C^{2,1}(Q_T)$ tenkina nelygybę

$$\omega_t - L\omega \geq 0, \quad (x, t) \in Q_T.$$

Jei ω įgyja minimumą m_0 kokiame nors taške, esančiame cilindre Q_T , tada $\omega(x, t) = m_0$, $(x, t) \in Q_T$. Kitu atveju, ω įgyja minimumą kokiame nors taške $(x_0, t_0) \in S_T$, tada tame taške teisinga nelygybė $\partial\omega \setminus \partial\nu$.

2.12 teorema. Tegu $\omega \in C^{2,1}(Q_T)$ tenkina nelygybę

$$\omega_t - L\omega + c\omega \geq 0, \quad (x, t) \in Q_T,$$

čia $c \equiv 0$ aprėžta funkcija cilindre Q_T .

2.13 lema (Pozityvumo lema). Tegu $\omega \in C(\overline{Q_T}) \cap C^{1,2}(Q_T)$ tenkina nelygybes:

$$\begin{aligned} \omega_t - L\omega + c\omega &\geq 0, \quad (x, t) \in Q_T \\ \alpha_0 \frac{\partial\omega}{\partial\nu} + \beta_0\omega &\geq 0, \quad \text{paviršiuje } S_T \\ \omega(0, x) &\geq 0, \quad x \in \Omega, \end{aligned} \tag{10}$$

kur koeficientai $\alpha_0 \geq 0$, $\beta_0 \geq 0$, $\alpha_0 + \beta_0 > 0$ paviršiuje S_T , o funkcija c yra aprėžta aibėje Q_T . Tada $\omega(t, x) \geq 0$, $\forall (x, t) \in \overline{Q_T}$.

Irodymas. Iš pradžių nagrinėsime atvejį, kai $c \geq 0$ cilindre Q_T . Tarkime priešingai. Tada egzistuoja taškas $(x_0, t_0) \in \overline{Q_T}$ toks, kad $\omega(x_0, t_0)$ įgyja neigiamą minimumą cilindre $\overline{Q_T}$. Kadangi $\omega(x_0, 0) \geq 0$ sąlyga išpildyta, tai taškas (x_0, t_0) yra arba srities Q_T viduje, arba paviršiuje S_T . Kadangi yra tokių atvejų, kai ω yra neneigiama, tai (2.12) teorema parodo, kad $(x_0, t_0) \in S_T$. Tada

$$\alpha_0(x_0, t_0) \frac{\partial\omega(x_0, t_0)}{\partial\nu} + \beta_0(x_0, t_0)\omega(x_0, t_0) \geq 0.$$

Jei $\alpha(x_0, t_0) = 0$, tai $\beta(x_0, t_0) > 0$ ir $\omega(x_0, t_0) \geq 0$. Remiantis (2.11) teorema, gauname prieštarą, kad $\omega(x_0, t_0) < 0$. Jeigu $\alpha_0(x_0, t_0) > 0$, tai $\frac{\partial\omega(x_0, t_0)}{\partial\nu} > 0$. Iš to išplaukia, kad ir $\omega(x, t) \geq 0$.

Nagrinėsime antrąjį atvejį, kai $\gamma \geq -c$. Apibrėžkime naują funkciją

$$v(x, t) = e^{-\gamma t} \omega(x, t).$$

Tada nelygybė

$$\omega_t - L\omega + c\omega = (ve^{\gamma t})_t - L(ve^{\gamma t}) + c(ve^{\gamma t}) =$$

$$v_t e^{\gamma t} + \gamma v e^{\gamma t} - L v e^{\gamma t} + c v e^{\gamma t} \geq 0.$$

Suprastinkime iš eksponentės. Tada

$$v_t - Lv + (\gamma + c)v \geq 0.$$

Be to, funkcijai v yra teisinga kraštinė sąlyga

$$\alpha_0 \frac{\partial v}{\partial \nu} + \beta_0 v \geq 0$$

ir pradinė sąlyga

$$v|_{t=0} = u(x, 0) \geq 0.$$

Kadangi $\gamma + c \geq 0$, tai $v \geq 0$. Iš to išplaukia, kad ir $\omega \geq 0$.

□

3 Aprioriniai įverčiai

3.1 apibrėžimas. *Sistemas (1), (2) sprendinys $a_1, a_2, \theta_1, \theta_2$ yra klasikinis sprendinys, jei $a_i \in C^{2,1}(\Omega \times (0, T]) \cap C(\overline{\Omega} \times [0, T])$, $\theta_i \in C^{2,1}(S_2 \times (0, T]) \cap C(\overline{S_2} \times [0, T])$, $i = 1, 2$ ir $\partial a \setminus \partial n$ yra tolydi paviršiuose $S_1 \times [0, T]$, $S_2 \times [0, T]$, o normalinė išvestinė $\partial \theta \setminus \partial \nu$ yra tolydi paviršiuje $\Sigma \times [0, T]$.*

Norint įrodyti sistemos (1), (2) klasikinio sprendinio egzistavimą ir vienatį iš pradžių reikia gauti šios sistemos sprendinių apriorinius įverčius.

3.1 Sistemos (2) aprioriniai įverčiai

3.2 lema. *Tarkime, kad funkcijos $a_i = a(x', t)$, $i = 1, 2$ yra tolydžios ir neneigiamos paviršiuje $\overline{S_2} \times [0, T]$ ir θ_i , $i = 1, 2$ yra (2) sistemos klasikinis sprendinys. Tada visiems $x' \in \overline{S_2}$ ir $t \in [0, T]$ galioja šie įverčiai:*

$$0 \leq \theta_i(x', t) \leq \max \left\{ \max_{x' \in \overline{S_2}} \theta_{i0}(x'), \frac{\kappa_i m'_i}{\kappa_i m'_i + \kappa_{ii}} \right\} := \theta_i^*, \quad (11)$$

kur

$$m'_i = \max_{(x', t) \in \overline{S_2} \times [0, T]} a_i(x', t).$$

Irodymas. Tarkime, kad (3.2) lemos prielaidos yra tenkinamos. Tada sistemos (2) pirmąją lygtį galime perrašyti taip

$$\theta'_i - \hat{k}_i \Delta \theta_i + (\kappa_i a_i + \kappa_{ii} + \kappa_{12} \theta_j) \theta_i = \kappa_i a_i \geq 0$$

Ši nelygybė yra teisinga, nes a_i yra neneigiama funkcija, o κ_i teigiama konstanta. Be to funkcija θ_i tenkina kraštinę sąlygą

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial \mu} = 0, \quad (x, t) \in \Sigma \times (0, T]$$

ir pradinę sąlygą

$$\theta_i|_{t=0} = \theta_{i0} \geq 0, \quad (x, t) \in \overline{S_2}.$$

Remiantis pozitivumo lema, funkcija θ_i paviršiuje $S_2 \times [0, T]$ negali įgyti neigiamo minimumo ir $\theta_i(x', t) \geq 0$ paviršiuje $S_2 \times [0, T]$.

Tegu $p_i = \theta_i^* - \theta_i$. Tada $\theta_i = \theta_i^* - p_i$

$$-p'_i + \hat{k}_i \Delta p_i + (\kappa_i a_i + \kappa_{ii} + \kappa_{12} \theta_j)(\theta_i^* - p_i) = \kappa_i a_i$$

ir

$$p'_i - \hat{k}_i \Delta p_i + (\kappa_i a_i + \kappa_{ii} + \kappa_{12} \theta_j) p_i = -\kappa_i a_i + (\kappa_i a_i + \kappa_{ii} + \kappa_{12} \theta_j) \theta_i^* =$$

$$(\kappa_i a_i + \kappa_{ii} + \kappa_{12} \theta_j) \left(\theta_i^* - \frac{\kappa_i a_i}{\kappa_i a_i + \kappa_{ii} + \kappa_{12} \theta_j} \right) \geq 0,$$

nes

$$\frac{\kappa_i a_i}{\kappa_i a_i + \kappa_{ii} + \kappa_{12} \theta_j} \leq \frac{\kappa_i m'_i}{\kappa_{ii} m'_i + \kappa_{ii}}.$$

Be to, funkcija p_i tenkina kraštinę sąlygą

$$\frac{\partial p_i}{\partial \mu} = 0, \quad (x, t) \in \Sigma \times (0, T],$$

ir pradinę sąlygą

$$p_i|_{t=0} = \theta^* - \theta_{i0} \geq 0, \quad \text{kai } x \in \overline{S_2}.$$

Remiantis pozityvumo lema, funkcija p_i paviršiuje $\overline{S_2} \times [0, T]$ negali įgyti neigiamo minimumo. Todėl $p_i = \theta_i^* - \theta_i \geq 0$ ir

$$\theta_i(x', t) \leq \max \left\{ \max_{x' \in \overline{S_2}} \theta_{i0}(x'), \frac{\kappa_i m'_i}{\kappa_i m'_i + \kappa_{ii}} \right\}.$$

Lema įrodyta. □

3.2 Sistemos (1) aprioriniai įverčiai

3.3 lema. Tegu funkcijos $\theta_i \in C(\overline{S_2} \times [0, T])$, $i = 1, 2$ tenkina nelygybes $0 \leq \theta_i(x', t) < 1$, $\forall x' \in \overline{S_2}$, $t \in [0, T]$. Taip pat tegu a_i yra klasikinis (1) uždavinio sprendinys. Tuomet kiekvienam $x \in \overline{\Omega}$ ir $t \in [0, T]$ yra teisingi aprioriniai įverčiai

$$0 \leq a_i(x, t) \leq \max \left\{ \max_{x \in \overline{\Omega}} a_0(x), \frac{\kappa_{ii} \theta_i^*}{\kappa_i (1 - \theta_i^*)} \right\} := m_i, \quad (12)$$

kur

$$\theta_i^* = \max_{(x', t) \in \overline{S_2} \times [0, T]} \theta_i(x', t).$$

Irodymas. Tegu (3.3) lemos prielaidos yra tenkinamos. Tada

$$a_i - k_i \Delta a_i = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T),$$

$$k_i \frac{\partial a_i}{\partial \nu} = 0, \quad (x, t) \in S_1 \times (0, T),$$

$$k_i \frac{\partial a_i}{\partial \nu} + \kappa_i \rho (1 - \theta_i) a_i = \kappa_{ii} \rho \theta_i \geq 0, \quad (x, t) \in S_2 \times (0, T),$$

$$a_i|_{t=0} = a_{i0}, \quad (x, t) \in \overline{\Omega}.$$

Pagal lemos prielaidą $\kappa_i \rho(1 - \theta_i) > 0$. Remiantis pozityvumo lema, funkcija a_i cilindre $\overline{\Omega} \times [0, T]$ negali įgyti neigiamo minimumo. Taigi $a_i(x, t) \geq 0 \ \forall x \in \Omega, t \in [0, T], i = 1, 2$. Tegu $q_i = m_i - a_i$. Tada $a_i = m_i - q_i$

$$-q_i + k_i \Delta q_i = 0 \quad \Rightarrow \quad q_i - k_i \Delta q_i = 0.$$

Funkcija q_i tenkina kraštines sąlygas

$$k_i \frac{\partial q_i}{\partial \nu} = 0,$$

$$k_i \frac{\partial q_i}{\partial \nu} - \kappa_i \rho(\theta_i - 1)q_i = m_i(\kappa_i \rho - \kappa_{ii} \rho \theta_i) - \kappa_{ii} \rho \theta_i =$$

$$m_i(\kappa_i \rho(1 - \theta_i)) - \kappa_{ii} \rho \theta_i = \kappa_i \rho(1 - \theta_i) \left(m_i - \frac{\kappa_{ii} \theta_i}{\kappa_i(1 - \theta_i)} \right) \geq 0,$$

nes

$$\frac{\kappa_{ii} \theta_i}{\kappa_i(1 - \theta_i)} \leq \frac{\kappa_{ii} \theta_i^*}{\kappa_i(1 - \theta_i^*)}.$$

Pradinė sąlyga taip pat yra teisinga

$$q_i|_{t=0} = m - a_{i0} \geq 0$$

Remiantis pozityvumo lema, $q_i = m_i - a_i \geq 0$ cilindre $\overline{\Omega} \times [0, T]$ negali įgyti neigiamo minimumo. Todėl galima teigti, kad $a(x, t) \leq m$ kiekvienam $x \in \overline{\Omega}, t \in [0, T]$ ir lemoje suformuluoti įverčiai yra teisingi. $\square$

Summary

In this thesis the main problem is described as a coupled system of parabolic equations. The main goal is to get a priori estimates for solutions of that system. The way of solving this problem is based on positivity lemma and maximum principle. Those theorems have been formulated and proved in the theory part of this thesis.

Literatūra

- [1] A. AMBRAZEVIČIUS, *Matematinės fizikos lygtys 1 dalis*, Aldorija, Vilnius (1996).
- [2] C. V. PAO, *Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations*, Plenum Press, New York (1999).
- [3] A. FRIEDMAN, *Partial Differential Equations of Parabolic Type*, Prentice Hall, Englewood Clifs, NJ (1964).
- [4] O. A. LADYZHENSKAYA, V. A. SOLONNIKOV, N. N. URALCEVA, *Linear and Quasi-linear Equation of Parabolic Type*, Am. Math. Soc. Transl., Providence , RI (1968).
- [5] A. M. ILYIN, A. S. KALASHNIKOV, O. A. OLEYNIK, Linea Second - Order Partial Differential Equations of the Parabolic Type *Journal of Mathematical Sciences*, Vol. 108, No. 4, 436 - 442 psl. (2002).
- [6] A. AMBRAZEVIČIUS, Solvability theorem for a model of a unimolecular heterogeneous reaction with adsorbate diffusion *Journal of Mathematical Sciences*, Vol. 184, No. 4, 383 - 398 psl. (2012).