

VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
TIKIMYBIŲ TEORIJOS IR SKAIČIŲ TEORIJOS KATEDRA

Dominykas Dabužinskas

Funkcinė lygtis periodinei Hurvico dzeta funkcijai

Bakalauro baigiamasis darbas

Leidžiu ginti

Darbo vadovas prof. dr. Antanas Laurinčikas

Vilnius 2016

Turiny

Įvadas	2
1 Funkcinė lygtis Lercho dzeta funkcijai	7
2 Funkcinė lygtis Hurvico dzeta funkcijai	8
3 Funkcinė lygtis periodinei Hurvico dzeta funkcijai	10
Summary	12
Literatūra	13

Įvadas

Tegul, kaip visada, $s = \sigma + it$ yra kompleksinis kintamasis, o a_m yra kurie nors kompleksiniai skaičiai. Tuomet eilutės

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m^s},$$

yra vadinamos Dirichlė eilutėmis. Šiomis eilutėmis yra skleidžiamos taip vadinamos beveik periodinės funkcijos, kurių klasė nėra plati. Todėl Dirichlė eilutės plačiai yra nagrinėjamos ne bendroje analizėje, o analizinėje skaičių teorijoje. Dirichlė eilučių svarba skaičių teorijoje yra paaiškinama tuo, kad šiomis eilutėmis yra apibrėžiamos dzeta funkcijos. Yra žinoma, kad Dirichlė eilutės konvergavimo bei absoliutaus konvergavimo sritis yra pusplotumė. Pavyzdžiui, garsioji Rymano zeta funkcija $\zeta(s)$ pusplotumėj $\sigma > 1$ yra apibrėžiama eilute

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s}.$$

Funkciją $\zeta(s)$ pusplotumėje $\sigma > 1$ galima užrašyti begaline Oilerio sandauga pagal pirminius skaičius

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

Funkcij $\zeta(s)$ yra analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plotumą išskyrus paprastąjį polių taške $s = 1$. Šiam analiziniam pratęsimui yra naudojama funkcijos $\zeta(s)$ funkcinė lygtis, kuri suriša kintamąjį s su $1 - s$. Tegul $\Gamma(s)$ yra Oilerio gamma funkcija. Tuomet ta funkcinė lygtis turi pavidalą

$$\pi^{\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{\frac{s-1}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s).$$

Ši funkcinė lygtis yra naudojama ir kitų uždavinių sprendimui. Paminėtus ir kitus rezultatus galima rasti [1] knygelėje, arba [5] monografijoje.

Be funkcijos $\zeta(s)$ bei kitų analogiškų funkcijų, turinčių Oilerio sandaugą pagal pirminius skaičius, yra ir dzeta funkcijų kurios tokios sandaugos neturi. Viena iš tokių funkcijų yra Hurvico dzeta funkcija. Tegul α , $0 < \alpha \leq 1$, yra fiksuotas parametras. Tuomet Hurvico dzeta funkcija $\zeta(s, \alpha)$ pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra apibrėžiama Dirichlė eilute

$$\zeta(s, \alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m + \alpha)^s}.$$

Iš šio apibrėžimo turime, kad

$$\zeta(s, 1) = \zeta(s)$$

ir

$$\zeta(s, \frac{1}{2}) = (2^s - 1)\zeta(s).$$

Taigi, kai $\alpha=1$ arba $\alpha = \frac{1}{2}$, tai $\zeta(s, \alpha)$ turi Oilerio sandaugą pagal pirminius skaičius, nes tokią sandaugą turi funkcija $\zeta(s)$. Funkcija $\zeta(s, \alpha)$, kaip ir funkcija $\zeta(s)$, yra analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą, išskyrus paprastąjį polių $s = 1$. Paminėsime dar vieną funkciją, kuri priklauso nuo dviejų parametrų ir bendruoju atveju negali būti užrašyta sandauga pagal pirminius skaičius. Tai yra Lercho dzeta funkcija. Tegul λ yra dar vienas realusis parametras, o α yra tas pats kaip ir Hurvico dzeta funkcijos atveju. Tuomet Lercho dzeta funkcija $L(\lambda, \alpha, s)$ pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra apibrėžiama Dirichlė eilute

$$L(\lambda, \alpha, s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \lambda s}}{(m + \alpha)^s}.$$

Matome, kad jei λ yra sveikasis skaičius, tai funkcija $L(\lambda, \alpha, s)$ tampa Hurvico dzeta funkcija, nes $e^{2\pi i k m} = 1$ su kiekvienu sveikuoju k . Funkcija $L(\lambda, \alpha, s)$ taip pat yra analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą, išskyrus paprastąjį polių $s = 1$, kai $\lambda = k$. Funkcijų $\zeta(\alpha, s)$ ir $L(\lambda, \alpha, s)$ teorija yra išdėstyta [2] monografijoje.

Bakalauro darbo objektas yra Lercho dzeta funkcijos apibendrinimas, vadinamoji periodinė Hurvico dzeta funkcija. Tegul

$$\mathfrak{a} = \{a_m : m \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}\}$$

yra periodinė kompleksinių skaičių seka su minimaliuoju periodu $q \in \mathbb{N}$, tai yra, su visais $m \in \mathbb{N}_0$ yra teisinga lygybė

$$a_{m+q} = a_m.$$

Pavyzdžiui, $a_m = (-1)^m$ yra periodinė seka su periodu $q = 2$. Seka $a_m = i^m$, $i = \sqrt{-1}$, yra taip pat periodinė su periodu $q = 4$, nes $i^0 = 1, i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$. Periodinė Hurvico dzeta funkcija $\zeta(s, \lambda, \mathbf{a})$ pusplokštumėj $\sigma > 1$ yra apibrėžiama Dirichlė eilute

$$\zeta(s, \alpha, \mathbf{a}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m}{(m + \alpha)^s}.$$

Čia α kaip ir ankščiau apibrėžtose funkcijose yra fiksuotas parametras, $0 < \alpha \leq 1$.

Iš sekos $\mathbf{a}$ periodiškumo turime, kad visi jos nariai a_m yra aprėžti baigtine konstanta $c > 0$, tai yra $|a_m| \leq c$, nes sekoje $\mathbf{a}$ yra tik baigtinis skaičius q skirtingų narių.

Vėl remdamiesi sekos $\mathbf{a}$ periodiškumu, išreikšime funkciją $\zeta(s, \alpha, \mathbf{a})$ Hurvico dzeta funkcijomis. Tegul $\sigma > 1$. Tuomet

$$\zeta(s, \alpha, \mathbf{a}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m}{(m + \alpha)^s}.$$

Visus skaičius $m \in \mathbb{N}_0$ suskaidome į klases modulių $q \equiv m \pmod{q}$. Iš čia turime, kad $m = k + rq$ su $k = 0, 1, \dots, q-1$, o $r \in \mathbb{N}_0$. Taigi

$$\begin{aligned} \zeta(s, \alpha, \mathbf{a}) &= \sum_{k=0}^{q-1} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{a_{k+rq}}{(k + rq + \alpha)^s} = \\ &= \sum_{k=0}^{q-1} a_k \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{q^s \left(r + \frac{k+\alpha}{q}\right)^s} = \frac{1}{q^s} \sum_{k=0}^{q-1} a_k \zeta\left(s, \frac{k+\alpha}{q}\right), \end{aligned} \quad (1)$$

Kadangi Hurvico dzeta funkcija $\zeta(s, \alpha, \mathbf{a})$ turi analizinę pratęsimą į visą kompleksinę plokštumą (išskyrus paprastąjį polių taške $s = 1$), tai iš čia gauname, kad ir funkcija $\zeta(s, \alpha, \mathbf{a})$ taip pat gali būti pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą išskyrus galimą polių taške $s = 1$.

Yra žinoma [2], kad

$$\text{Res}_{s=1} \zeta(s, \alpha) = 1$$

Todėl iš (1) gauname, kad

$$\text{Res}_{s=1} \zeta(s, \alpha, \mathfrak{a}) = \frac{1}{q} \sum_{k=0}^{q-1} a_k.$$

Jeigu pastaroji suma yra lygi 0, tuomet funkcijos $\zeta(s, \alpha, \mathfrak{a})$ reziduumas taške $s = 1$ yra lygus 0, todėl šiuo atveju funkcija $\zeta(s, \alpha, \mathfrak{a})$ visoje kompleksinėje plokštumoje neturi ypatingų taškų, ji yra analizinė visoje kompleksinėje plokštumoje.

Daugelis dzeta funkcijų, tarp kurių ir mūsų minėtos Hurvico dzeta ir Lercho dzeta funkcijos, turi funkcinę lygtį, kurios suriša kintamąjį s su $1 - s$. Bakalauro darbo tikslas yra gauti funkcinę lygtį periodinei Hurvico dzeta funkcijai. Naudosime žymenis

$$x^+ = 1 - \{x\},$$

$$x^- = \begin{cases} 1 & , \text{kai } x \in \mathbb{Z}, \\ \{x\} & , \text{kai } x \notin \mathbb{Z}, \end{cases}$$

ir

$$a_m^\pm = \sum_{k=0}^{q-1} a_k \exp\{\pm 2\pi i \frac{k+\alpha}{q}\}.$$

Čia $\{x\}$ žymi realaus skaičiaus x trupmeninę dalį. Įrodysime tokią teoremą.

1 teorema. *Tarkime, kad $\sigma < 0$. Tuomet yra teisinga funkcinė lygtis*

$$\zeta(1-s, \alpha, \mathfrak{a}) = \frac{1}{q^{1-s}} \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s} \left(\exp\left(\frac{-\pi i s}{2}\right) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m^+}{m^s} + \exp\left(\frac{\pi i s}{2}\right) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m^-}{m^s} \right).$$

Teoremos įrodymui naudosime analogišką funkcinę lygtį Hurvico dzeta funkcijai, kuri išplaukia iš funkcinės lygties Hurvico dzeta funkcijai.

1 skyrius

Funkcinė lygtis Lercho dzeta funkcijai

Primename, kad Lercho dzeta funkcija $L(\lambda, \alpha, s)$ pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra apibrėžiama Dirichlė eilute

$$L(\lambda, \alpha, s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \lambda m}}{(m + \alpha)^s}$$

ir yra meromorfiškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą. Čia $\lambda \in \mathbb{R}$, o $0 < \alpha \leq 1$. Funkcinei lygčiai formuluoti naudosime žymenis

$$x^+ = 1 - \{x\}$$

ir

$$x^- = \begin{cases} 1 & , \text{kai } x \in \mathbb{Z}, \\ \{x\} & , \text{kai } x \notin \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Yra teisingas toks tvirtinimas.

1 lemma. *Tarkime, kad $\sigma < 0$. Tuomet yra teisinga funkcinė lygtis:*

$$\begin{aligned} L(\lambda, \alpha, 1-s) &= \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s} \left(\exp\left(2\pi i \left(\frac{s}{4} - \alpha\lambda^-\right)\right) L(\lambda^-, -\alpha, s) + \right. \\ &\quad \left. + \exp\left(2\pi i \left(-\frac{s}{4} + \alpha\lambda^+\right)\right) L(\lambda^+, \alpha, s) \right). \end{aligned}$$

Šia lygtį įrodė M.Lerchas [3]. Matome, kad funkcinė lygtis Lercho dzeta funkcijai suriša ne tik kintamuosius s ir $1-s$, bet ir parametrus λ ir α

2 skyrius

Funkcinė lygtis Hurvico dzeta funkcijai

Kadangi Hurvico dzeta funkcija yra atskiras atvejis Lercho dzeta funkcijos, tai jos funkcinė lygtis išplaukia iš 1 lemos. Teisingas yra toks tvirtinimas:

2 lemma. *Tarkime, kad $\sigma < 0$. Tuomet yra teisinga funkcinė lygtis:*

$$L(1-s, \alpha) = \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s} \left(\exp\left(\frac{\pi i s}{2}\right) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\exp(-2\pi i \alpha m)}{m^s} + \exp\left(\frac{-\pi i s}{2}\right) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\exp(2\pi i \alpha m)}{m^s} \right).$$

Pastebime, kad lemą galima įrodyti ir tiesiogiai. Tai yra padaryta [2] ir [4] monografiuose.

Įrodymas. Hurvico dzeta funkciją gauname paėmę Lercho dzeta funkcijos apibrėžime $\lambda \in \mathbb{Z}$. Taigi, šiuo atveju turime, kad $\lambda^+ = 1$, o $\lambda^- = 0$. Įrašę šias reikšmes į 1 lemmą, gauname, kad

$$L(1-s, \alpha) = \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s} \left(\exp(2\pi i \frac{s}{4}) L(-\alpha, 0, s) + \exp(2\pi i (-\frac{s}{4} + \alpha)) L(\alpha, 1, s) \right). \quad (2.1)$$

Tačiau

$$L(-\alpha, 0, s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\exp(-2\pi i m \alpha)}{m^s}$$

ir

$$L(\alpha, 1, s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\exp(2\pi i m \alpha)}{(m+1)^s} = \exp(-2\pi i \alpha) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\exp(2\pi i m \alpha)}{m^s}.$$

Įrašę šias reikšmes į (2.1) gauname, kad

$$\zeta(1-s, \alpha) = \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s} \left(\exp(\pi i \frac{s}{2}) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\exp(-2\pi i m \alpha)}{m^s} + \exp(-\pi i \frac{s}{2}) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\exp(2\pi i m \alpha)}{m^s} \right).$$

3 skyrius

Funkcinė lygtis periodinei Hurvico dzeta funkcijai

Šiame skyrelyje įrodysime įvade suformuluotą pagrindinį bakalauro darbo rezultatą – funkcinę lygtį periodinei Hurvico dzeta funkcijai.

1 teoremos įrodymas. Remsimės (1) formule

$$\zeta(s, \alpha, \mathfrak{a}) = \frac{1}{q^s} \sum_{k=0}^{q-1} a_k \zeta(s, \frac{k + \alpha}{q})$$

ir funkcinę lygtimi Hurvico dzeta funkcijai (2 lemma). Iš čia gauname, kad

$$\zeta(1-s, \alpha, \mathfrak{a}) = \frac{1}{q^{1-s}} \sum_{k=0}^{q-1} a^k \zeta(1-s, \frac{k + \alpha}{q}). \quad (3.1)$$

Iš 3.1 lemos turime, kad

$$\zeta(1-s, \frac{k + \alpha}{q}) = \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s} \left(\exp(\frac{\pi i s}{2}) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\exp\{\frac{-2\pi i m(k+\alpha)}{q}\}}{m^s} + \exp(\frac{-\pi i s}{2}) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\exp\{\frac{2\pi i m(k+\alpha)}{q}\}}{m^s} \right).$$

Įrašę šią išraišką į (3.1), gauname

$$\begin{aligned} \zeta(1-s, \alpha, \mathfrak{a}) &= \frac{1}{q^{1-s}} \sum_{k=0}^{q-1} a^k \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s} \left(\exp(\frac{\pi i s}{2}) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\exp\{\frac{-2\pi i m(k+\alpha)}{q}\}}{m^s} + \right. \\ &\quad \left. + \exp(\frac{-\pi i s}{2}) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\exp\{\frac{2\pi i m(k+\alpha)}{q}\}}{m^s} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\zeta(1-s, \alpha, \mathbf{a}) &= \frac{1}{q^{1-s}} \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s} \left(\exp\left\{\frac{\pi i s}{2}\right\} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sum_{k=0}^{q-1} a_k \exp\left\{\frac{-2\pi i m(k+\alpha)}{q}\right\}}{m^s} + \right. \\ &\quad \left. + \exp\left\{\frac{-\pi i s}{2}\right\} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sum_{k=0}^{q-1} a_k \exp\left\{\frac{2\pi i m(k+\alpha)}{q}\right\}}{m^s} \right). \quad (3.2)\end{aligned}$$

Kadangi esame pažymėję

$$a_m^{\pm} = \sum_{k=0}^{q-1} a_k \exp\left\{\pm 2\pi i \frac{k+\alpha}{q}\right\},$$

tai įrašę šias išraiškas į (3.2) lygybę gauname, kad

$$\zeta(1-s, \alpha, \mathbf{a}) = \frac{1}{q^{1-s}} \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s} \left(\exp\left\{\frac{\pi i s}{2}\right\} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m^-}{m^s} + \exp\left\{\frac{-\pi i s}{2}\right\} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m^+}{m^s} \right).$$

Teorema įrodyta.

Functional equation for the periodic Hurwitz zeta-function

Dominykas Dabužinskas

Summary

Let $s = \sigma + it$ be a complex number, and $\mathfrak{a} = \{a_m : m = 0, 1, 2, 3, \dots\}$ be a sequence of complex numbers with minimal period $q \in \mathbb{N}$. The periodic Hurwitz zeta-function $\zeta(s, \alpha, \mathfrak{a})$ is defined, for $\sigma > 1$, by the series

$$\zeta(s, \alpha, \mathfrak{a}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m}{(m + \alpha)^s}.$$

and is meromorphically continued to whole complex plane.

In the bachelor work, we prove the functional equation for the function $\zeta(s, \alpha, \mathfrak{a})$. Suppose that $\sigma < 0$. Then

$$\zeta(1 - s, \alpha, \mathfrak{a}) = \frac{1}{q^{1-s}} \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s} \left(\exp\left(\frac{-\pi i s}{2}\right) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m^+}{m^s} + \exp\left(\frac{\pi i s}{2}\right) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m^-}{m^s} \right).$$

Here

$$a_m^{\pm} = \sum_{k=0}^{q-1} a_k \exp\left\{\pm 2\pi i \frac{k + \alpha}{q}\right\}.$$

Literatūra

- [1] A. LAURINČIKAS, *Rymano dzeta funkcijos teorijos pagrindai*,
Vilniaus universiteto leidykla, Vilnius, 1990.
- [2] A. LAURINČIKAS, R. GARUNKŠTIS, *The Lerch Zeta- function*,
Kluwer, Dordrecht, Boston, 2002.
- [3] M. LERCH, *Note sur la fonction* $K(\omega, \lambda, s) = \sum_{n>0}^{\exp} \{2\pi i n \lambda\} (n + \omega)^{-s}$,
Acta Math, 11(1887), 19-24.
- [4] J. STEUDING, *Value-Distribution of Lerch Zeta- functions*,
Lecture Notes of Math, Springer, Berlin, 2007.
- [5] E.C. TITCHMARSH, *The Theory of the Riemann Zeta- Function*,
Oxford University Press, Oxford, 1986.