**VILNIAUS UNIVERSITETAS**

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

TIKIMYBIŲ TEORIJOS IR SKAIČIŲ TEORIJOS KATEDRA

**Miglė Černiauskaitė**

# Algebrinių skaičių multiplikatyvusis priklausomumas

Bakalauro baigiamasis darbas

Leidžiu ginti .....

Darbo vadovas **doc. dr. Paulius Drungilas**

Vilnius 2016

# Turinys

# Įvadas

Algebrinių skaičių teorijos istorija visai atsitiktinai prasidėjo XIX a., detaliai nagrinėjant įprastą skaičių teoriją. Atradimas buvo labai sėkmingas ir jau XX a. tokios sąvokos kaip abstrakčioji žiedų, laukų bei vektorinių erdvių teorija papildė algebrinių skaičių tyrinėjimų atradimus.

Šiame darbe nagrinėjami algebriniai skaičiai - kompleksiniai skaičiai, kurie yra vieno kintamojo nenulinių polinomų su racionaliaisiais koeficientais šaknys.

Pagrindinis darbo tikstas yra pristatyti aibės

$$\{\alpha, \alpha+1, \alpha+2, \dots\}, \tag{1.1}$$

kur $\alpha$ – fiksuotas algebrinis skaičius, multiplikatyviojo priklausomo problemą. Manoma, kad ši aibė yra multiplikatyviai priklausoma su kiekvienu algebriniu skaičiumi $\alpha$. Dubickas [3] įrodė, kad (1.1) aibė yra multiplikatyviai priklausoma su kiekvienu sveikuoju kvadratiniu algebriniu skaičiumi $\alpha$. Šiame darbe pristatomas Drungilo ir Dubicko [1] įrodymas, kad (1.1) aibė yra multiplikatyviai priklausoma su kiekvienu kvadratiniu algebriniu skaičiumi $\alpha$.

Taip pat tiriamas ir aibės $\{\alpha + r \colon r \in \mathbb{Q}\}$ multiplikatyvusis priklausomumas. Darbe pristatytas įrodymas, kad ši aibė yra multiplikatyviai priklausoma su kiekvienu kubiniu algebriniu skaičiumi $\alpha$.

Ši algebrinių skaičių multiplikatyvaus nepriklausomumo teorija glaudžiai susijusi bei yra taikoma sprendžiant ir kitas matematikos problemas. Pavyzdžiui, (1.1) tipo aibės multiplikatyvusis priklausomumas susijęs su Lercho dzeta funkcijos nulių pasiskirstymo ir universalumo savybėmis. Be to, (1.1) tipo aibės multiplikatyvusis priklausomumas susijęs su Proke-Teri-Eskoto (Prouhet-Tarry-Escott) bei Erdiošo-Štrauso hipotezėmis.

## 1.1 Algebriniai ir transcendentieji skaičiai

**1 apibrėžimas** ([4]). *Kompleksinis skaičius $\alpha$ vadinamas* ***algebriniu****, jei jis yra kokio nors nenulinio polinomo su sveikaisiais koeficientais šaknis, t.y. jei egzistuoja toks nenulinis polinomas $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$, jog $f(\alpha) = 0$. Jei polinomo $f(x)$ vyriausias koeficientas lygus 1, tai skaičius $\alpha$ vadinamas* ***sveikuoju algebriniu skaičiumi****.*

Pavyzdžiui skaičiai 2 ir $\sqrt{3}$ yra sveikieji algebriniai skaičiai, nes jie yra atitinkamai polinomų $x - 1$ ir $x^2 - 3$ šaknys.

**2 pavyzdys.** *Įsitikinsime, jog skaičius $1/2$ yra algebrinis, bet nėra sveikasis algebrinis skaičius.*

**Sprendimas**. Skaičius $1/2$ yra algebrinis, nes jis yra polinomo $2x - 1$ šaknis. Tarkime, jog skaičius $1/2$ yra sveikasis algebrinis skaičius. Tuomet egzistuoja toks polinomas

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, a_j \in \mathbb{Z},$$

jog $f(1/2) = 0$, t.y.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \ldots + a_1\left(\frac{1}{2}\right) + a_0 = 0.$$

Abi šios lygybės puses padauginę iš $2^n$, gauname

$$1 + a_{n-1}2 + \ldots + a_1 2^{n-1} + a_0 2^n = 0.$$

Tačiau šios lygybės kairėje pusėje gavome nelyginį skaičių, o dešinioji lygybės pusė yra 0. Prieštara.

**3 apibrėžimas** ([4]). *Tarkime, jog $\alpha$ – algebrinis skaičius. Mažiausio laipsnio normuotas polinomas (kurio vyriausias keoficientas lygus 1) $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$, kurio šaknis yra $\alpha$, vadinamas algebrinio skaičiaus $\alpha$* ***minimaliuoju polinomu****, o jo laipsnis vadinamas algebrinio skaičiaus $\alpha$* ***laipsniu*** *ir žymimas* $\deg(\alpha)$.

Pavyzdžiui, bet kuris racionalusis skaičius $r \in \mathbb{Q}$ yra pirmojo laipsnio algebrinis skaičius.

**4 apibrėžimas** ([4]). *Kompleksinis skaičius vadinamas transcendenčiuoju, jei jis nėra algebrinis, t.y. nėra jokio polinomo su racionaliaisiais koeficientais šaknis.*

Galima nesunkiai įsitikinti, kad visų algebrinių skaičių aibė yra skaičioji. Kadangi $\mathbb{C}$ – kontinuumo galios aibė, tai „beveik visi“ kompleksiniai skaičiai yra transcendentieji. Tačiau įrodyti, kad pasirinktas konkretus skaičius yra transcendentusis dažniausiai yra sunku.

1873 m. Ermitas įrodė, kad skaičius $e$ yra transcendentusis, o 1882 m. Lindemanas įrodė, kad skaičius $\pi$ yra transcendentusis.

Jeigu $\alpha$ – transcendentusis skaičius, tai su bet kokia aibe $M \subset \mathbb{Q}$ skaičius $\alpha$ yra $M$-nepriklausomas. Sveikųjų skaičių didesnių arba lygių $t$ aibę žymėsime $\mathbb{Z}_t$.

## 1.2 Multiplikatyvusis priklausomumas

Tegul $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ir $\mathbb{C}$ – atitinkamai sveikųjų, racionaliųjų, realiųjų ir kompleksinių skaičių aibės.

**5 apibrėžimas** ([1])**.** *Sakykime, kad $M$ – bet koks racionaliųjų skaičių aibės poaibis. Kompleksinis skaičius $\alpha$ vadinamas $M$-priklausomu, jei egzistuoja tokie du skirtingi skaičių rinkiniai $x_1, \ldots, x_n \in M$ ir $y_1, \ldots, y_m \in M$ (t.y. $x_1, \ldots, x_n$ nėra $y_1, \ldots, y_m$ perstata), kad*

$$(\alpha + x_1) \ldots (\alpha + x_n) = (\alpha + y_1) \ldots (\alpha + y_m). \tag{1.2}$$

Jei $m = 0$, tai laikysime, kad (1.2) lygybės dešinioji pusė lygi 1. Mažiausias skaičius $n + m$, su kuriuo teisinga (1.2) lygybė žymimas $\ell(\alpha, M)$.

Pavyzdžiui, bet kuris sveikasis skaičius $\alpha \in \mathbb{Z}$ yra $\mathbb{Z}$-priklausomas. Iš tikrųjų, tegul $n = 1$, $x_1 = 1 - \alpha \in \mathbb{Z}$ ir $m = 0$. Tada $\alpha + x_1 = 1$. Taigi $\ell(\alpha, \mathbb{Z}) = 1$.

Skaičius $\sqrt{2}$ yra $\{-1, 1\}$-priklausomas, nes $\left(\sqrt{2} - 1\right)\left(\sqrt{2} + 1\right) = 1$. Be to, galima nesunkiai įsitikinti, kad $\ell\left(\sqrt{2}, \{-1, 1\}\right) = 2$.

Manoma (žr. [3, 1]), kad teisinga tokia hipotezė.

**Hipotezė.** *Kiekvienas algebrinis skaičius yra $\mathbb{Z}_0$-priklausomas.*

Jei $\alpha$ yra šaknis iš vieneto, tai egzistuoja toks $n \in \mathbb{N}$, kad $\alpha_n = 1$. Todėl $\alpha$ yra $\mathbb{Z}_0$-priklausomas skaičius ir $\ell(\alpha, \mathbb{Z}_0) \leqslant n$.

Tarkime, kad $\alpha$ yra kvadratinis (antrojo laipsnio) sveikasis skaičius. Tada egzistuoja tokie sveikieji skaičiai $a$ ir $b$, kad $\alpha^2 + a\alpha + b = 0$. Šią lygybę galime perrašyti taip:

$$\alpha(\alpha + a + 1) = \alpha - b.$$

Taigi $\alpha$ yra $\mathbb{Z}$-priklausomas ir $\ell(\alpha, \mathbb{Z}) \leqslant 3$.

**6 teorema** ([3]). *Tegul $t$ – bet koks sveikasis skaičius.*

1. *Kiekvienas racionalusis skaičius $\alpha$ yra $\mathbb{Z}_t$-priklausomas ir $\ell(\alpha, \mathbb{Z}_t) \leqslant 4$.*

2. *Kiekvienas sveikasis kvadratinis algebrinis skaičius yra $\mathbb{Z}_t$-priklausomas ir*

$$\ell(\alpha, \mathbb{Z}_t) \leqslant 5.$$

Jei $\alpha \in \mathbb{C}$ yra $\mathbb{Z}$-priklausomas ir (1.2) lygybėje $n \neq m$, tai $\alpha$ yra **sveikasis** algebrinis skaičius. Vadinasi, jei $\alpha$ yra algebrinis skaičius, bet nėra sveikasis algebrinis skaičius, tai $n = m$, t.y. $\ell(\alpha, \mathbb{Z})$ – lyginis skaičius.

**7 teorema** ([1]). *Tegul $t \in \mathbb{Z}$. Kiekvienas kvadratinis algebrinis skaičius $\alpha$ yra $\mathbb{Z}_t$-priklausomas. Be to, $\ell(\alpha, \mathbb{Z}_t) \leqslant 8$.*

**8 teorema** ([1]). *Kiekvienas kubinis algebrinis skaičius $\alpha$ yra $\mathbb{Q}$-priklausomas. Be to, $\ell(\alpha, \mathbb{Q}) \leqslant 8$.*

Šiame darbe pateikiami 7 ir 8 teoremų įrodymai.

## 1.3 Kvadratinių polinomų multiplikatyvus priklausomumas

Tegul $M \subset \mathbb{C}$ yra kompleksinių skaičių aibė. Sakoma, kad aibė $M$ yra multiplikatyviai priklausoma, jeigu egzistuoja tokie $x_1, x_2, \ldots, x_s \in M$ $(x_i \neq x_j)$ bei $k_1, k_2, \ldots, k_s$ (ne visi lygūs nuliui), kad

$$\prod_{j=1}^{s} x_j^{k_j} = 1.$$

Tegul $\alpha$ yra $d$ laipsnio algebrinis skaičius, kurio minimalusis polinomas yra

$$P(x) = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_d),$$

kur $a > 0$. Aibės $\{n + \alpha \colon n \in \mathbb{Z}_0\}$ multiplikatyvusis priklausomumas yra glaudžiai susijęs su polinomo $P(x)$ reikšmių sveikuosiuose taškuose aibės multiplikatyviuoju priklausomumu.

Tarkime, kad

$$\prod_{j=1}^{s} (x_j + \alpha)^{k_j} = 1.$$

Tada aišku, kad

$$\prod_{j=1}^{s}\left(x_j+\alpha_r\right)^{k_j}=1,\ r=2,3,\ldots,d.$$

Taigi gauname lygybę

$$1=\prod_{j=1}^{s}\prod_{j=1}^{d}\left(x_j+\alpha_r\right)^{k_j}=\prod_{j=1}^{s}\left(\left(-1\right)^d P\left(-x_j\right)/a\right)^{k_j}.$$

Jei $\sum_{j=1}^{s}k_j=0$, tai

$$\prod_{j=1}^{s}P\left(-x_j\right)^{k_j}=1.$$

Taigi aibė $\{\ldots,P\left(-2\right),P\left(-1\right),P\left(0\right),P\left(1\right),P\left(2\right),\ldots\}$ yra multiplikatyviai priklausoma.

Tarkime, kad $\alpha$ yra racionalusis skaičius $\alpha=c/b$, kur $c\in\mathbb{Z}$, $b\in\mathbb{N}$. Tada su kiekvienu sveikuoju $n_0$ aibė $\{n+\alpha\colon n\in\mathbb{Z},n\geqslant n_0\}$ yra multiplikatyviai priklausoma. Tai išplaukia iš tapatybės

$$\left(t+\frac{c}{b}\right)\left(\left(t+1\right)\left(b+1\right)+c+\frac{c}{b}\right)=\left(t+1+\frac{c}{b}\right)\left(t\left(b+1\right)+c+\frac{c}{b}\right).$$

## 1.4 Teoremų įrodymai

7 teoremos įrodymui reikės tokio klasikinio rezultato:

**9 teorema** (Dirichlė)**.** *Tegul $a$ ir $d$ – tarpusavyje pirminiai sveikieji skaičiai. Tada aritmetinėje progresijoje $a+dn,n\in\mathbb{N}$, yra be galo daug pirminių skaičių.*

**10 apibrėžimas.** *Tegul $p$ – nelyginis pirminis skaičius. Sveikasis skaičius $a$ vadinamas kvadratine liekana moduliu $p$, jei lyginys $x^2\equiv a\pmod p$ yra išsprendžiamas. Priešingu atveju skaičius $a$ vadinamas kvadratine neliekana moduliu $p$. Apibrėžkime funkciją $\left(\frac{\cdot}{p}\right):\mathbb{Z}\to\{-1,0,1\}$:*

$$\left(\frac{a}{p}\right)=\begin{cases}1 & \text{jei } a \text{ – kvadratinė liekana moduliu } p \text{ ir } a\not\equiv 0 \pmod p\\ -1 & \text{jei } a \text{ - kvadratinė neliekana moduliu } p\\ 0 & \text{jei } a\equiv 0 \pmod p\end{cases}$$

*Ši funkcija vadinama Ležandro simboliu.*

Ležandro simbolis yra atskiras atvejis bendresnės funkcijos – Jakobio simbolio.

**11 apibrėžimas.** *Tegul $n > 1$ – nelyginis natūralusis skaičius. Jakobio simboliu vadinama funkcija $(\frac{\cdot}{n}) : \mathbb{Z} \to \{-1, 0, 1\}$, apibrėžta tokiu būdu: jei natūraliojo skaičiaus $n$ kanoninė išraiška yra $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, tai*

$$\left(\frac{a}{n}\right) := \left(\frac{a}{p_1}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{a}{p_2}\right)^{\alpha_2} \dots \left(\frac{a}{p_k}\right)^{\alpha_k},$$

*kur $(\frac{a}{p_j})$ – Ležandro simboliai.*

*7 teoremos įrodymas.* Turime lygybę $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$, kuroje $a, b$ ir $c$ yra sveikieji skaičiai, tenkinantys sąlygas: $a > 0, c \neq 0$ ir lygties diskriminantas $D = b^2 - 4ac \neq 0$. Pirmiausia įrodysime, kad egzistuoja toks teigiamas sveikasis skaičius $k$, kad $b^2k^2 + 2ck$ yra kvadratinė liekana moduliu $2ak + 1$.

Tarkime, kad $h \in \mathbb{Z}$ ir nelyginis sveikasis skaičius $P > 1$. Tegul $\left(\frac{h}{P}\right)$ – Jakobio simbolis.

Iš tapatybės

$$4a^2 \left(b^2k^2 + 2ck\right) = b^2 (2ak + 1)^2 - 2 \left(b^2 - 2ck\right) (2ak + 1) + D$$

gauname, kad

$$\left(\frac{b^2k^2 + 2ck}{2ak + 1}\right) = \left(\frac{D}{2ak + 1}\right).$$

Remiantis Dirichlė teorema, galima parinkti tokį $k' \in \mathbb{Z}$, kad $Dk' > 0$ ir skaičius $p = 4aDk' + 1$ būtų pirminis. Tegul $k = 2Dk'$. Tada $p = 2ak + 1$. Užtenka parodyti, jog

$$\left(\frac{D}{p}\right) = 1. \tag{1.3}$$

Kadangi $p$ – pirminis skaičius, čia Jakobio simbolis tampa Ležandro simboliu.

Pažymėkime $D = 2^s D'\epsilon$, kur $s \in \mathbb{Z}_0, D' > 0$ yra nelyginis skaičius ir $\epsilon = \pm 1$. Tada gauname

$$\left(\frac{D}{p}\right) = \left(\frac{2^s}{p}\right) \left(\frac{D'}{p}\right) \left(\frac{\epsilon}{p}\right) \tag{1.4}$$

Kadangi $p \equiv 1 \pmod 4$ ir $p \equiv 1 \,(mod D')$, tai

$$\left(\frac{D'}{p}\right) = \left(\frac{p}{D'}\right) = 1$$

ir $\left(\frac{\epsilon}{p}\right) = 1$. Taip pat su kiekvienu lyginiu $s$ teisinga lygybė

$$\left(\frac{2^s}{p}\right) = 1.$$

Jeigu $s$ yra nelyginis, pastaroji lygybė išplaukia iš $\left(\frac{2}{p}\right) = 1$, nes $p \equiv 1 \pmod 8$. Gauname, kad visi trys Ležandro simboliai dešiniojoje (1.4) lygybės pusėje yra lygūs

1. Todėl teisinga ir (1.3) lygybė. Vadinasi, $b^2k^2+2ck$ yra kvadratinė liekana moduliu $2ak+1$.

Toliau parodysime, kad lygtis

$$(2ak+1)(\alpha+x_1)(\alpha+x_2)=(\alpha+y_1)(\alpha+y_2) \tag{1.5}$$

turi be galo daug sveikųjų sprendinių $x_1, x_2, y_1, y_2 > t$. Kadangi $a\alpha^2 = -b\alpha - c$, tai (1.5) lygybė yra teisinga, jeigu

$$y_1+y_2=(2ak+1)(x_1+x_2)-2bk$$

ir

$$y_1y_2=(2ak+1)x_1x_2-2ck.$$

Jeigu $y_1$ ir $y_2$ pažymėsime atitinkamai $y_1 = x_2-1, y_2 = (2ak+1)x_1+2akx_2-2bk+1$, gausime, kad užrašyta suma yra teisinga.

Pakanka įrodyti, jog lygtis

$$((2ak+1)x_1+2akx_2-2bk+1)(x_2-1)=(2ak+1)x_1x_2-2ck$$

turi sprendinių su pakankamai dideliais $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$. Pastarąją lygybę užrašykime forma

$$x_1(2ak+1)=(2ak+1)x_2(x_2-1)-(x_2-1+bk)^2+b^2k^2+2ck. \tag{1.6}$$

Pagal ją, egzistuoja toks $x_0 \in \mathbb{Z}$, kad $x_0^2-b^2k^2-2ck$ dalijasi iš $2ak+1$. Atitinkamai, egzistuoja toks pakankamai didelis $x_2 \in \mathbb{Z}$, kad $(x_2-1+bk)^2-b^2k^2-2ck$ dalijasi iš $2ak+1$. Aišku, kad su tokiu $x_2$ ir su

$$x_1=x_2(x_2-1)-\frac{(x_2-1+bk)^2-b^2k^2-2ck}{(2ak+1)} \in \mathbb{Z}$$

lygybė (1.6) yra teisinga. Aišku, jei $x_2$ yra pakankamai didelis, toks yra ir $x_1$. Paimkime du sveikuosius (1.5) lygties sprendinius, $x_1, x_2, y_1, y_2 > t$ ir $y_3, y_4, x_3, x_4 > \max\{x_1, x_2, y_1, y_2\}$. Panariui sudauginę lygybes

$$(2ak+1)(\alpha+x_1)(\alpha+x_2)=(\alpha+y_1)(\alpha+y_2)$$

ir

$$(2ak+1)(\alpha+y_3)(\alpha+y_4)=(\alpha+x_3)(\alpha+x_4)$$

bei abi antros lygybės puses suprastinę iš $2ak+1$ gauname

$$(\alpha+x_1)(\alpha+x_2)(\alpha+x_3)(\alpha+x_4)=(\alpha+y_1)(\alpha+y_2)(\alpha+y_3)(\alpha+y_4),$$

kur $y_3 \neq x_1, x_2$. Taip pat $y_3 \neq x_3$, nes priešingu atveju $(2ak+1)(\alpha+y_4) = \alpha + x_4$, o taip būti negali, nes $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Panašiai gauname, kad ir $y_3 \neq x_4$. Todėl $x_1, x_2, x_3, x_4$ nėra skaičių $y_1, y_2, y_3, y_4$ perstata. Teorema įrodyta. □

*8 teoremos įrodymas.* Prie $\alpha$ pridedant racionalųjį skaičių, galime tarti, jog $\alpha$ yra lygites $z^3 + pz + q = 0$ , kur $p, q \in \mathbb{Q}, q \neq 0$, šaknis. Jeigu $p = 0$, tada $\alpha^3 = -q$ ir tapatybė

$$(\alpha+1)^2 (\alpha-1)^2 \alpha^2 = (\alpha+q)^2$$

parodo, jog $\alpha$ yra $\mathbb{Q}$-priklausoma ir $\ell(\alpha, \mathbb{Q}) \leqslant 6+2 = 8$. Jeigu $p \neq 0$, tada panaudoję lygybę $\alpha^3 = -p\alpha - q$, gauname tapatybę

$$(\alpha + 2q/p)^3 (\alpha - 2q/p) = \alpha^3 \left(\alpha + 4q\left(4q^2 + p^3\right)/p^4\right).$$

Taigi ir šiuo atveju $\alpha$ yra $\mathbb{Q}$-priklausoma ir $\ell(\alpha, \mathbb{Q}) \leqslant 4+4 = 8$. Teorema įrodyta. □

## 1.5 Ryšiai su kitomis problemomis

Algebrinių skaičių multiplikatyvusis priklausomumas yra pritaikomas sprendžiant kitas matematines problemas. Pavyzdžiui, Hurvico dzeta funkcijos

$$\zeta(\alpha, s) = \sum_{j=0}^{\infty} (j+\alpha)^{-s}$$

teorijoje svarbu, ar algebrinis skaičius $\alpha$ yra $\mathbb{Z}_0$-priklausomas. Jis taip pat svarbus tiriant Lercho dzeta funkcijos

$$L(\lambda, \beta, s) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\exp\left\{2\pi\lambda j\sqrt{-1}\right\}}{(j+\alpha)^s}$$

nulių pasiskirstymą ir universalumo savybę (žr. [5, 6]).

Toliau parodysime, kad kai kurie algebrinių skaičių multiplikatyvaus nepriklausomumo atvejai apie multiplikatyvaus priklausomumo ilgį yra glaudžiai susiję su Proke-Teri-Eskoto bei Erdiošo-Štrauso peoblemomis.

Iš pradžių panagrinėsime Proke-Teri-Eskoto problemą, kuri yra ekvivalenti tokiam klausimui: *ar egzistuoja du skirtingi vektoriai* $X = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{Z}^d$ *bei* $Y = (y_1, \ldots, y_d) \in \mathbb{Z}^d$ *tokie, kad*

$$\sigma_1(X) = \sigma_1(Y), \ldots, \sigma_{d-1}(X) = \sigma_{d-1}(Y) \text{ ir } \sigma_d(X) \neq \sigma_d(Y),$$

*čia* $\sigma_1(X) = x_1 + \ldots + x_d$, $\sigma_2(X) = x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{d-1}x_d, \ldots$, $\sigma_d(X) = x_1x_2\ldots x_d$ *ir atitinkamai* $\sigma_j(Y), j = 1, 2, \ldots, d$, *yra elementarieji simetriniai polinomai.*

Ši problema įrodyta visiems $d \leqslant 10$, tačiau neaišku, ar ji teisinga su $d > 10$ (žr. [2]).

Tarkime, kad $\alpha$ yra algebrinis skaičius su laipsniu $d-1$, kuris nėra algebrinis sveikasis skaičius, t.y. $a\alpha^{d-1} + b\alpha^{d-2} + \ldots + e\alpha + f = 0$ su sveikuoju skaičiumi $a \geqslant 2$, $f \neq 0, b, \ldots, e$. Tuomet (1.2) lygtis su sveikaisiais $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$ gali būti teisinga tik tuo atveju, jei $n = m \geqslant d$. Todėl $\ell(\alpha, \mathbb{Z}) \geqslant 2d$ tada ir tik tada, jeigu egzistuoja tokie du skirtingi vektoriai $X \in \mathbb{Z}^d$ ir $Y \in \mathbb{Z}^d$ ir $t \in \mathbb{Z}$, kad

$$(\sigma_1(X) - \sigma_1(Y), \sigma_2(X) - \sigma_2(Y), \ldots, \sigma_d(X) - \sigma_d(Y)) = (at, bt, \ldots, et, ft).$$

Pavyzdžiui, paėmus reikšmes $d = 3$, $X = (1, 1, 16)$ ir $Y = (0, -3, -11)$, gausime

$$(\sigma_1(X) - \sigma_1(Y), \sigma_2(X) - \sigma_2(Y), \sigma_3(X) - \sigma_3(Y)) = (2t, 0, t).$$

Taigi, abiems lygties $2\alpha^2 + 1 = 0$ šaknims gauname tapatybę

$$(\alpha + 1)^2(\alpha + 16) = \alpha(\alpha - 3)(\alpha - 11).$$

Tai reiškia, kad $l(\alpha, \mathbb{Z}) = 6$, kai $\alpha = \sqrt{-1/2}$. Taip pat, $\alpha$ tenkina lygybę $a\alpha^2 + c = 0$ su $a \geqslant 2$, $c \neq 0$, kurios $\mathbb{Z}$ – priklausomumas išplaukia iš tapatybės

$$(\alpha + 2c)(\alpha + 1 - 2c)(\alpha + 2c)(2c - 1) = \alpha^2\left(\alpha + 4ac(2c-1)^2 + 2c(2c-1) + 1\right).$$

Taip pat gauname $l(\alpha, \mathbb{Z}) = 6$, kai $\alpha = \sqrt{-c/a}$.

Toliau panagrinėsime Erdiošo-Štrauso problemą. Ji yra ekvivalenti teiginiui, jog kiekvienam pirminiam skaičiui $p$ egzistuoja trys teigiami sveikieji $x_1, x_2, x_3$ tokie, kad

$$1/x_1 + 1/x_2 + 1/x + 3 = 4/p.$$

Tegul $\alpha$ yra $\alpha^2 + 4\alpha + p = 0$ šaknis. Tada klausimas: *ar egzistuoja teigiami sveikieji skaičiai* $x_1, x_2, x_3$ *bei* $y_1 \in \mathbb{Z}$ *tokie, kad*

$$(\alpha + x_1)(\alpha + x_2)(\alpha + x_3) = \alpha^2(\alpha + y_1),$$

yra ekvivalentus Erdiošo-Štrauso problemai.

7 teorema reiškia, kad kubinio $\mathbb{Q}[z]$ polinomo $Q(z) = z^3 + bz^2 + cz + e \in \mathbb{Q}[z]$ neišpaprastinamos racionaliosios reikšmės yra multiplikatyviai priklausomos. Dar tiksliau, egzistuoja daugiausiai aštuoni racionalūs skaičiai $r_1, \ldots, r_8$ tenkinantys lygybę $Q(r_1)^{\pm 1} \ldots Q(r_8)^{\pm 1} = 1$.

## 1.6 Keletas tapatybių

Metodas taikytas 7 teoremos įrodyme kelia prielaidą, jog egzistuoja leketas sudėtingesnių tapatybių tiriant, ar kiekvienas kvadratinis algebrinis skaičius yra $\mathbb{Q}$-priklausomas. Norint tai išsiaiškinti, reikia rasti (1.2) lygties racionaliuosius sprendinius panaudijant lygybę $\alpha^4 + p\alpha^2 + q\alpha + r = 0$, kur $p, q, r \in \mathbb{Q}$ ir $r \neq 0$.

Tegul $\epsilon = \pm 1$. Paprasčiausias ketvirtojo laipsnio atvejis, su kuriuo 7 turi ne trivialų sprendinį yra $p = 0, q = \epsilon$. Tuomet $\alpha^8 = (\alpha + \epsilon r)^2$.

Panagrinėsime atvejį su $p = -3/2, q = 0$. Gauname $(\alpha - 1/2)^3 (\alpha + 3/2) = \alpha - r - 3/16$. Pasirinkus $p = -6t^2, q = \epsilon - 8t^3$, kur $t \in \mathbb{Q}$, gauname

$$(\alpha + t)^6 (\alpha - 3t)^2 = \left(\alpha + \epsilon \left(3t^4 + r\right)\right)^2.$$

Panašiai ir su reikšmėmis $p = -(1 + u + u^2) t^2$, $q = \epsilon - (u + u^2) t^3$, kur $u, t \in \mathbb{Q}$, gauname

$$\alpha^2 (\alpha + t)^2 (\alpha + ut)^2 (\alpha - (1 + u) t)^2 = (\alpha + \epsilon r)^2.$$

Pagaliau, su reikšmėmis $p = -t^2$, $q = 0$, $r = \epsilon + 4t^4 (u^3 - u)^2 / (u^2 + 1)^4$, kur $u, t \in \mathbb{Q}$, reikiama tapatybė yra

$$(\alpha + vt)^2 (\alpha - vt)^2 (\alpha + wt)^2 (\alpha - wt)^2 = 1,$$

kur $v = (u^2 - 1) / (u^2 + 1)$, $w = 2u / (u^2 + 1)$. Su visais ketvirtojo laipsnio $\alpha$, kaip ir paminėta viršuje, gauname $\ell (\alpha, \mathbb{Q}) \leqslant 10$.

## 1.7 Summary

This work presents the problem of multiplicative dependence of shifted algebraic numbers, which is related to the theory of Hurwitz zeta-function as well as the zero-distribution and the universality property of the Lerch zeta-function. Dubickas [3] proved that the set $\{\alpha, \alpha+1, \alpha+2, \dots\}$ is multiplicatively dependent for every quadratic algebraic integer $\alpha$. The proof of a more general statement, obtained by Drungilas and Dubickas [1], is given. More precisely, it is shown that the set obtained by adding all sufficiently large integers to a fixed quadratic algebraic number is multiplicatively dependent. The same applies to the set obtained by adding rational numbers to a fixed cubic algebraic number.

# Literatūra


[1] P. Drungilas and A. Dubickas *Multiplicative dependence of shifted algebraic numbers,* Colloq. Math. **96** (1) (2003), 75–81.

[2] P. Borwein and C. Ingalls *The Prouhet-Tarry-Escott problem revisited,* Enseign, Math. **40** (2) (1994), 177–184.

[3] A. Dubickas *Multiplicative dependence of quadratic polynomials,* Lithuanian Math. J. **38** (1998), 225-231.

[4] P. Drungilas *Įvadas į algebrinę skaičių teoriją,* Paskaitų konspektas, 2012.

[5] A. Laurinčikas *Limit theorems for the Riemann zeta–function,* Kluwer, Dordrecht, 1996.

[6] A. Laurinčikas and K. Matsumoto *The joint universality and the functional independence of Lerch zeta–functions,* Nagoya Math. J. **157** (2000), 221–227.