

VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
TIKIMYBIŲ TEORIJOS IR SKAIČIŲ TEORIJOS KATEDRA

Justinas Adomynas
HURVICO DZETA FUNKCIJOS APROKSIMAVIMAS
BAIGTINE SUMA
Bakalauro baigiamasis darbas

Leidžiu ginti.....

Darbo vadovas **prof. Antanas Laurinčikas**

VILNIUS 2016

Turiny

1 Įvadas.....	3
2 Sumavimo formulės.....	6
3 1.1 teoremos įrodymas.....	11
4 1.2 teoremos įrodymas.....	15
Literatūra.....	16
Summary.....	17

1 įvadas

Tegu $s = \sigma + it$ yra kompleksinis kintamasis, o α , $0 < \alpha \leq 1$, yra fiksuotas parametras. Hurvico dzeta funkcija $\zeta(s, \alpha)$ pusplokštumėje $\sigma > 1$ apibrėžiama Dirichlė eilute [2]

$$\zeta(s, \alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m + \alpha)^s}.$$

Be to, ši funkcija yra analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą, išskyrus paprastąjį polių taške $s=1$ su reziduumu 1.

Kai $\alpha = 1$, tai gauname Rymano dzeta funkciją

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s},$$

kuri taip pat turi analizinį pratęsimą į visą kompleksinę plokštumą, išskyrus tašką $s=1$, kuris yra paprastasis polius su reziduumu 1.

Tiek funkcija $\zeta(s)$, tiek ir $\zeta(s, \alpha)$ yra klasikinės analizinės skaičių teorijos funkcijos, naudojamos įvairių uždavinių sprendimui. Svarbesnė yra Rymano dzeta funkcija, ji yra pagrindinis analizinis įrankis pirminių skaičių pasiskirstymo nagrinėjime. Hurvitzo dzeta funkcija yra susijusi su Dirichlė funkcijomis, kurios yra naudojamos nagrinėjant pirminius skaičius, kurie priklauso duotai aritmetinei progresijai [3]. Funkcija $\zeta(s, \alpha)$ išreikštiniu pavidalu yra apibrėžta tikrai pusplotumėje $\sigma > 1$. Iš Dirichlė eilučių savybių išplaukia, kad funkcija $\zeta(s, \alpha)$ yra analizinė toje pusplotumėje. Kadangi funkcija $\zeta(s, \alpha)$ priklauso dar ir nuo parametro α , tai šio parametro aritmetinės savybės taip pat turi įtakos funkcijos analizinėms savybėms. Srityje, esančioje kairėje pusplotumės $\sigma > 1$ pusėje, funkcija $\zeta(s, \alpha)$ yra apibrėžiama analizinio pratęsimo pagalba, todėl yra sudėtinga nagrinėti jos analizes savybes, bei ją taikyti įvairių uždavinių sprendimui, todėl stengiamasi gauti funkcijos $\zeta(s, \alpha)$ nors ir apytiksles išreikštines išraiškas srityje, kuri nepriklauso pusplotumei $\sigma > 1$. Tokios išraiškos yra vadinamos funkcijos $\zeta(s, \alpha)$ artutinėmis funkcinėmis lygtimis. Bakalauro darbo tikslas yra įrodyti paprasčiausią tokią funkcinę lygtį, kuri dar yra vadinama funkcijos $\zeta(s, \alpha)$ aproksimacija baigtine suma.

Tegul $u(x) = \frac{1}{2} - \{x\}$, čia $\{x\}$ žymi skaičiaus x trupmeninę dalį. Pavyzdžiui, $\{5, 3\} = 0, 3$, o $\{-3, 2\} = 0, 8$. Įrodysime tokią teoremą.

1.1 teorema. *Tarkime, kad $\sigma > 0$, o $n \in \mathbb{N}$. Tuomet yra teisinga lygybė*

$$\zeta(s, \alpha) = \sum_{m=0}^n \frac{1}{(m + \alpha)^s} + \frac{1}{s - 1} \left(n + \frac{1}{2} + \alpha\right)^{1-s} + s \int_{(n+\frac{1}{2})}^{\infty} \frac{u(x)dx}{(x + \alpha)^{s+1}}.$$

Sudėtingesnę artutinę funkcinę lygtį galime rasti [1] monografijoje. Primename, kad lygybė $f(x) = O(g(x))$, $g(x) > 0$, $x \in X$, reiškia, kad egzistuoja tokia konstanta $c > 0$, kad su visais $x \in X$ yra teisinga nelygybė

$$|f(x)| \leq cg(x).$$

Taigi, $f(x) = O(g(x))$ iš tikrųjų yra ne lygybė, o nelygybė arba įvertis.

Iš 1.1 teoremos išplaukia toks įvertis funkcijai $\zeta(s, \alpha)$.

1.2 teorema. *Tarkime, kad $\sigma > 0$, o $n \in \mathbb{N}$. Tuomet yra teisingas įvertis*

$$\zeta(s, \alpha) = \sum_{m=0}^n \frac{1}{(m + \alpha)^s} + \frac{1}{s - 1} (n + \frac{1}{2} + \alpha)^{1-s} + O\left(\frac{|s|}{\sigma} n^{-\sigma}\right).$$

2 Sumavimo formulės

1.1 teoremos įrodymui yra reikalinga dalinio sumavimo formulė. Dalinis sumavimas čia reiškia, kad į formulę įeina nariai, nusakomi integralais, taigi suma nėra galutinai tiksliai suskaičiuojama. Pradžioje įrodysime vieną pagalbinį rezultatą.

2.1 lema. *Tarkime, kad $g(x)$ yra funkcija, apibrėžta intervale $[a, b]$ ir šiaame intervale turinti tolydžią išvestinę. Tegul a_m yra bet kokie kompleksiniai skaičiai ir*

$$A(x) = \sum_{a < m \leq x} a_m.$$

Tuomet yra teisinga lygybė

$$\sum_{a < m \leq b} a_m g(m) = A(b)g(b) - \int_a^b A(x)g'(x)dx.$$

Lemos formulė yra naudinga, kai žinome sumą $A(x)$. Tuomet galime apskaičiuoti sandaugų $a_m g(m)$ sumą. Pirmasis formulės narys yra tikslus, o antrasis yra išreiškiamas integralu. Ši formulė yra naudinga, kai funkcija $g(x)$ turi savybes, leidžiančias įvertinti formules antrąjį narį užrašytą integralo pavidalu.

Įrodymas. Integralas, turintis pavidalą

$$\int_a^b f(x) dF(x),$$

yra vadinamas funkcijos $f(x)$ Stiltjeso integralu pagal funkciją $F(x)$. Jis yra apibrėžiamas panašiai kaip ir Rymano integralas, tik vietoj kintamojo x pokyčių integralinėje sumoje yra imami funkcijos $F(x)$ pokyčiai. Stiltjeso integralų egzistavimo sąlygų mes nenagrinėsime, tačiau pastebėsime, kad jei funkcija $F(x)$ yra trūki, tai tas integralas yra lygus sumai funkcijos $f(x)$ reikšmių funkcijos $F(x)$ trūkio taškuose, padaugintų iš funkcijos $F(x)$ trūkio dydžio. Remdamiesi šia savybe ir pastebėję, kad funkcija $A(x)$ yra trūki sveikuose taškuose, o trūkio dydis taške m yra lygus a_m , gauname, kad

$$\sum_{a < m \leq b} a_m g(m) = \int_a^b g(x) dA(x).$$

Užrašytą integralą integruojame dalimis ir gauname, kad

$$\begin{aligned}\int_a^b g(x)dA(x) &= g(x)A(x)\Big|_a^b - \int_a^b A(x)dg(x) = g(b)A(b) - g(a)A(a) \\ &\quad - \int_a^b A(x)g'(x)dx = g(b)A(b) - \int_a^b A(x)g'(x)dx,\end{aligned}$$

nes $A(a)=0$. Iš čia ir (2.1) gauname lemos tvirtinimą.

Dabar įrodysime sumavimo formulę

2.2 teorema. *Tarkime, kad $g(x)$ yra funkcija apibrėžta intervale $[a,b]$ ir tame intervale turi tolydžių išvestinę. Tegul $r(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$, čia $[x]$ žymi skaičiaus x sveikąją dalį. Tuomet yra teisinga formulė*

$$\sum_{a < m \leq b} g(m) = \int_a^b g(x)dx + \int_a^b r(x)g'(x)dx + r(a)g(a) - r(b)g(b).$$

Įrodymas. Taikome 2.1 lemą su $a_m \equiv 1$. Tuomet turime, kad

$$A(x) = \sum_{a < m \leq x} 1 = [x] - [a].$$

Todėl, pritaikę 2.1 lemą, gauname, kad

$$\begin{aligned} \sum_{a < m \leq b} g(m) &= ([b] - [a])g(b) - \int_a^b ([x] - [a])g'(x)dx = ([b] - [a])g(b) + [a] \int_a^b g'(x)dx \\ &\quad - \int_a^b [x]g'(x)dx = ([b] - [a])g(b) + [a](g(b) - g(a)) - \int_a^b [x]g'(x)dx. \end{aligned}$$

Remdamiesi žymeniu $r(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$, galime parašyti, kad

$$[x] = x - \frac{1}{2} - r(x)$$

Įrašę šią išraišką į (2.2) formules integralą ir integruodami dalimis, randame, kad

$$\begin{aligned}\int_a^b [x]g'(x)dx &= \int_a^b (x - \frac{1}{2} - r(x))g'(x)dx = \int_a^b xg'(x)dx - \frac{1}{2} \int_a^b g'(x)dx - \\ \int_a^b r(x)g'(x)dx &= xg(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)dx - \frac{1}{2}(g(b) - g(a)) - \int_a^b r(x)g'(x)dx = \\ &= bg(b) - ag(a) - \int_a^b g(x)dx - \frac{1}{2}(g(b) - g(a)) - \int_a^b r(x)g'(x)dx.\end{aligned}$$

Įrašę šią integralo išraišką į (2.2), randame, kad

$$\begin{aligned}\sum_{a < m \leq b} g(m) &= ([b] - [a])g(b) + [a](g(b) - g(a)) - bg(b) + ag(a) + \int_a^b g(x)dx + \\ \frac{1}{2}(g(b) - g(a)) &+ \int_a^b r(x)g'(x)dx = \int_a^b g(x)dx + \int_a^b r(x)g'(x)dx - g(a)([a] - a + \frac{1}{2}) - \\ g(b)([a] - [a] + b - \frac{1}{2} &+ [b]) = \int_a^b g(x)dx + \int_a^b r(x)g'(x)dx + r(a)g(a) - r(b)g(b).\end{aligned}$$

Teorema įrodyta.

3 1.1 teoremos įrodymas

Imame du skaičius $M, N \in \mathbb{N}$. Tegul apibrėžtumo dėlei $M > N$. Taikome 2.2 teoremą funkcijai

$$g(m) = \frac{1}{(m + \alpha)^s}$$

su $a = N + \frac{1}{2}$ ir $b = M + \frac{1}{2}$. Pritaikę šią teoremą, gauname, kad

$$\begin{aligned} \sum_{N+\frac{1}{2} < m \leq M+\frac{1}{2}} \frac{1}{(m + \alpha)^s} &= \int_{N+\frac{1}{2}}^{M+\frac{1}{2}} \frac{du}{(u + \alpha)^s} + \int_{N+\frac{1}{2}}^{M+\frac{1}{2}} r(u) \left(\frac{1}{(u + \alpha)^s} \right)' du + \\ & r\left(N + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{(N + \frac{1}{2} + \alpha)^s} - r\left(M + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{(M + \frac{1}{2} + \alpha)^s}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Kadangi

$$r(x) = \frac{1}{2} - \{x\},$$

tai turime, kad

$$r(N + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

ir

$$r(M + \frac{1}{2}) = 0.$$

Todėl iš (3.1) lygybes randame, kad

$$\sum_{N+\frac{1}{2} < m \leq M+\frac{1}{2}} \frac{1}{(m+\alpha)^s} = \int_{N+\frac{1}{2}}^{M+\frac{1}{2}} \frac{du}{(u+\alpha)^s} - s \int_{N+\frac{1}{2}}^{M+\frac{1}{2}} r(u) \frac{1}{(u+\alpha)^{s+1}} du \quad (3.2)$$

Pirmąjį integralą (3.2) lygybėje galime suintegruoti. Integruodami gauname

$$\begin{aligned} \int_{N+\frac{1}{2}}^{M+\frac{1}{2}} \frac{du}{(u+\alpha)^s} &= \int_{N+\frac{1}{2}}^{M+\frac{1}{2}} (u+\alpha)^{-s} d(u+\alpha) = \frac{(u+\alpha)^{1-s}}{1-s} \Big|_{N+\frac{1}{2}}^{M+\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{1}{1-s} (M + \frac{1}{2} + \alpha)^{1-s} + \frac{1}{s-1} (N + \frac{1}{2} + \alpha)^{1-s}. \end{aligned}$$

Iš čia ir (3.2) randame, kad

$$\sum_{N+\frac{1}{2} < m \leq M+\frac{1}{2}} \frac{1}{(M+\alpha)^s} = \frac{1}{1-s} (M+\frac{1}{2}+\alpha)^{1-s} + \frac{1}{1-s} (N+\frac{1}{2}+\alpha)^{1-s} -$$

$$s \int_{N+\frac{1}{2}}^{M+\frac{1}{2}} r(u) \frac{1}{(u+\alpha)^{s+1}} du. \quad (3.3)$$

Dabar laikome, kad $\sigma(\text{realioji dalis } s) > 1$ ir (3.3) lygybėje pereiname prie ribos, kai $M \rightarrow \infty$. Kadangi $\text{Re}(1-s) = 1-\sigma < 0$, tai

$$\lim_{M \rightarrow \infty} (M+\frac{1}{2}+\alpha)^{1-s} = 0.$$

Todėl (3.3) lygybė su $\sigma > 1$ tampa lygybe

$$\sum_{m > N+\frac{1}{2}} \frac{1}{(m+\alpha)^s} =$$

$$\frac{1}{s-1} (N+\frac{1}{2}+\alpha)^{1-s} - s \int_{N+\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{r(u) du}{(u+\alpha)^{s+1}}. \quad (3.4)$$

Kai $\sigma > 1$, tai

$$\zeta(s, \alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m + \alpha)^s} = \sum_{m=0}^N \frac{1}{(m + \alpha)^s} + \sum_{m=N}^{\infty} \frac{1}{(m + \alpha)^s}.$$

Todėl

$$\sum_{m > N + \frac{1}{2}} \frac{1}{(m + \alpha)^s} = \sum_{m=N}^{\infty} \frac{1}{(m + \alpha)^s} = \zeta(s, \alpha) - \sum_{m=0}^N \frac{1}{(m + \alpha)^s}.$$

Irašę šią išraišką į (3.4), gauname, kad, kai $\sigma > 1$,

$$\zeta(s, \alpha) = \sum_{m=0}^N \frac{1}{(m + \alpha)^s} + \frac{1}{s-1} (N + \frac{1}{2} + \alpha)^{1-s} - s \int_{N+\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{r(u) du}{(u + \alpha)^{s+1}}.$$

Kadangi funkcija $r(u)$ moduliui neviršija 1, tai (3.5) formulėje integralas konverguoja tolygiai, kai $\sigma \geq \epsilon$ su kiekvienu $\epsilon > 0$, todėl pusplokštumėje $\sigma > 0$ apibrėžia analizinę funkciją. Taigi, (3.5) lygtis yra teisinga pusplokštumėje $\sigma > 0$. Teorema įrodyta.

4 1.2 teoremos įrodymas

Iš 1.1 teoremos išplaukia, kad pakanka įvertinti tos teoremos formules nari

$$s \int_{n+\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{r(u)du}{(u+\alpha)^{s+1}}.$$

Tai gana paprasta, nes $|r(u)| \leq 1$, o

$$|(u+\alpha)^{s+1}| = (u+\alpha)^{\sigma+1}.$$

Todėl

$$\begin{aligned} |s \int_{n+\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{r(u)du}{(u+\alpha)^{s+1}}| &\leq |s| \int_{n+\frac{1}{2}}^{\infty} \left| \frac{r(u)}{(u+\alpha)^{s+1}} \right| du \leq |s| \int_{n+\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{du}{(u+\alpha)^{\sigma+1}} = \\ &= |s| \frac{(u+1)^{-\sigma}}{-\sigma} \Big|_{n+\frac{1}{2}}^{\infty} = 0 + |s| \frac{(n+\frac{3}{2})^{-\sigma}}{\sigma} = O\left(\frac{|s|}{\sigma} n^{-\sigma}\right), \end{aligned}$$

nes $\sigma > 0$, ir $(u+1)^{-\sigma} \rightarrow 0$, kai $u \rightarrow \infty$.

Literatūra

- 1 A.A. Karatsuba, S.M.Voronin, The Riemann Zeta-Function, de Gruyter, New York, 1992.
- 2 A. Laurinčikas, R. Garunkštis, The Lerch Zeta-function, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 2002.
- 3 K. Prachar, Primzahlverteilung, Springer, Berlin, 1957

Summary

Approximation of the Hurvitz zeta-function by a finite sum

Justinas Adomynas

Let $s = \sigma + it$ be a complex variable, and let α , $0 < \beta \leq 1$, be a fixed parameter. The Hurvitz zeta- function $\zeta(s, \alpha)$ is defined, for $\sigma > 1$, by the series

$$\zeta(s, \alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m + \alpha)^s},$$

and is meromorfically continued to the whole complex plane with unique simple pole at the point $s=1$ with residue 1.

In the bachelor work, we obtain the following formula

$$\zeta(s, \alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m + \alpha)^s} + \frac{1}{s-1} \left(n + \frac{1}{2} + \alpha\right)^{1-s} + s \int_{n+\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{\frac{1}{2} - \{x\}}{(x + \alpha)^{s+1}} dx,$$

where $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{N}$ and $\{x\}$ is the fractional part of x . From this, the formula

$$\zeta(s, \alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m + \alpha)^s} + \frac{1}{s-1} \left(n + \frac{1}{2} + x\right)^{1-s} + O\left(\frac{|s|}{\sigma} n^{-\sigma}\right)$$

follows.