VILNIAUS UNIVERSITETAS

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

MATEMATINĖS STATISTIKOS KATEDRA

Egidija Rakauskaitė (parašas)

SUNKIAUODEGIŲ ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ GENERAVIMAS

Simulation of Heavy-Tailed Random Variables

Bakalauro baigiamasis darbas

Vilnius, *2016*

Darbo vadovas:

Doc. Marijus Vaičiulis (parašas)

Recenzentas:

Lekt. Viktor Skorniakov (parašas)

Registracijos Nr.: .....

Darbo gynimo data: .....

Turinys

Įvadas 4
1. Pagrindinis darbo rezultatas 6
1.2. Įrodymai 7
2. Pavyzdžiai 8
3. Pagrindinio rezultato taikymai 9
4. Pagrindinio rezultato Teoremos 2.1 įrodymas 16
4.1. (i) punktas 16
4.2. (ii) punktas 16
4.3. (iii) punktas 17
4.4. (iv) punktas 19
Išvados ir rekomendacijos 25
Pagalbiniai teiginiai 26
Santrauka 27
Summary 28
Literatūros sąrašas 29
Priedai 30
A priedas 30
B priedas 36

Įvadas

Tegul $F(x)$ yra neneigiamo atsitiktinio dydžio X pasiskirstymo funkcija, tai yra, $F(0) = 0$. Yra sakoma, kad pasiskirstymo funkcijos $F(x)$ dešinė uodega $1 - F(x)$ kinta reguliariai su ekstremalių reikšmių indeksu $\gamma > 0$, jei

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1-F(tx)}{1-F(x)} = t^{-1/\gamma} \tag{1.1}$$

visiems $t > 0$. Pavyzdžiui, atvirkštinis gamma, atvirkštinis beta, Burr, Frešė, Pareto, log-gamma ir daugelis kitų dėsnių tenkina (1.1) sąlygą.

Vienas iš matematinės statistikos uždavinių yra toks: reikia įvertinti parametrą, kai stebiniai $X_1,\ldots,X_n$ yra nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai su pasiskirstymo funkcija $F(x)$, tenkinančia (1.1) sąlygą. Mokslinėje literatūroje galima rasti virš 30 parametro įvertinių, žr. pvz. [1] apžvalginį straipsnį.

Šiame baigiamajame darbe mes naudosime kiek griežtesnį nei (1.1), pasiūlytą [2] ir [3] straipsniuose, apibrėžimą. Yra sakoma, kad pasiskirstymo funkcija $F(x)$ priklauso Pareto dėsnių Hall klasei (žymėsime $F \in Hall(C, \gamma, \beta, \rho)$), jei

$$1 - F(x) = \left(\frac{x}{C}\right)^{-1/\gamma} \left(1 + \frac{\beta}{\rho}\left(\frac{x}{C}\right)^{\rho/\gamma} + o(x^{\rho/\gamma})\right), x \to \infty, \tag{1.2}$$

kur $\gamma > 0$, skalės parametras $C > 0$, antros eilės skalės parametras $\beta \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ ir antros eilės parametras $\rho < 0$.

Prisiminkime, kad rašome $f(x) = o(g(x))$, jei

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Pavyzdžiui: $x = o(x^2)$, kai $x \to \infty$, $\ln x = o(e^x)$, kai $x \to \infty$.

Galima įsitikinti, kad jei pasiskirstymo funkcija $F(x)$ tenkina (1.2) sąlygą, tai ji tenkina ir (1.1) sąlygą. Skyrelyje „Pavyzdžiai“ pademonstruosime, kad Frešė ir Burr dėsniai, tenkina (1.2) sąlygą. Atvirkščias tvirtinimas gali būti neteisingas. Pvz., log-gama dėsnio uodega $1 - F(x)$ tenkina (1.1) sąlygą, tačiau netenkina (1.2) sąlygos, žr. 4 teiginį McElroy ir Politis straipsnyje [5].

Kaip taisyklė, siūlant naują ekstremalių reikšmių indekso $\gamma > 0$ įvertinį tiriamos jo asimptotinės savybės (pvz. asimptotinis normalumas) bei pateikiamas Monte-Karlo modeliavimas, kuriame lyginamos naujai siūlomo ir gerai žinomų įvertinių empirinės charakteristikos. Monte-Karlo

modeliavimuose apsiribojama keliais tikimybiniais dėsniais, imant Burr, Frešė bei dar kelis populiarius dėsnius. Pavyzdžiui, Frešė dėsnio pasiskirstymo funkcija

(1.3) $$F(x) = \exp\{-x^{-\frac{1}{\gamma}}\}, x \geq 0,$$

tenkina antros eilės sąlygą (1.2) su C=1 , $\beta = ½$, ir ρ = -1, o Burr dėsnio pasiskirstymo funkcija

(1.4) $$F(x) = 1 - (1 + x^{-\rho/\gamma})^{1/\rho}, x \geq 0,$$

priklauso Pareto dėsnių Hall klasei su $C = 1$, $\beta = 1$, ir ρ (Monte-Karlo modeliavimuose dažniausiai imama ρ = -1). Taigi, naudojant Monte-Karlo modeliavimuose tik kelis populiarius dėsnius sunku tinkamai palyginti kelis ekstremalių reikšmių indekso įvertinius.

Šiame baigiamajame darbe mes tirsime, kaip iš vieno tikimybinio dėsnio, tenkinančio sąlygą (1.2), gauti kitą, su tuo pačiu ekstremalių reikšmių indeksu, bet kitais parametrais C, β, ρ. Priminsime, kad Kumaraswamy dėsnio pasiskirstymo funkcija $F(x) = 1 - (1 - x^{a})^{b}$, $0 \leq x \leq 1$, kur a > 0 ir b > 0 yra dėsnio parametrai, žr. [4]. Nadarajah ir Eljabri [6] tyrė tikimybinio dėsnio $F(x) = 1 - (1 - (G(x))^{a})^{b}$, kur $G(x)$ yra apibendrinto Pareto dėsnio pasiskirstymo funkcija, savybes (neliečiant sunkiauodegiškumo). Šiame darbe, mes neapsiribosime apibendrintu Pareto dėsniu ir padarysime prielaidą, kad pasiskirstymo funkcija $G(x)$ tenkina sąlygą (1.2) bei ištirsime, kokie yra pasiskirstymo funkcijos

(1.5) $$F(x) = 1 - (1 - (G_{c\gamma}(x))^{a})^{b}$$

antros eilės parametrai, apsiribodami tik tais rinkiniais (a,b,c) $\in R_{+}^{3}$, kuriems pasiskirstymo funkcijos (1.5) ekstremalių reikšmių indeksas yra γ.

Pagrindinis darbo rezultatas suformuluotas sekančiame skyrelyje, jo taikymai pateikti trečiajame skyrelyje, pagrindinio rezultato įrodymas randasi ketvirtame skyrelyje, po to seka „Išvadų ir rekomendacijų“ skyrelis, pagalbinių teiginių skyrelis bei naudotos literatūros sąrašas.

1. Pagrindinis darbo rezultatas

Teorema 2.1.

Tegul $G_\gamma \in Hall(C, \gamma, \beta, \rho)$. Jei antros eilės parametras ρ yra parametro γ funkcija, tai pareikalaukime, kad santykis ρ / γ nebūtų tapatingai lygus kažkokiai neigiamai konstantai.

(i) Jei a = b = c = 1, tai $F \in Hall(\mathrm{C}, \gamma, \beta, \rho)$;

(ii) Jei a = 1, b ≠ 1 ir c = b, tai $F \in Hall(\mathrm{C}, \gamma, \beta, \rho/b)$;

(iii) Jei a ≠ 1 ir b = c = 1, tai $F \in Hall(a^\rho \mathrm{C}, \gamma, B(\rho), -1 \vee \rho)$, kur

$$\mathrm{B}(\rho) = \begin{cases} a^\rho \beta, & -1 < \rho < 0, \\ \frac{2\beta + a - 1}{2a}, & \rho = -1, \\ \frac{a-1}{2a}, & \rho < -1. \end{cases}$$

(iv) Jei a ≠ 1, b ≠ 1 ir c = b, tai $F \in Hall(a^{\rho b} \mathrm{C}, \gamma, B(\rho), (-1 \vee \rho)/b)$.

Pateiksime pora tikimybinių dėsnių, kurie netenkina 2.1. teiginio sąlygų, pavyzdžių.

1. Vienpusio Stjudento dėsnio su tankio funkcija

$$p_\gamma(x) = \frac{2\sqrt{\gamma}\Gamma((1+\gamma)/(2\gamma))}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{1}{2\gamma})}(1+\gamma x^2)^{-(1+\gamma)/(2\gamma)}, \; x > 0.$$

Pasiskirstymo funkcija G_γ tenkina sąryšį,

$$G_\gamma \in Hall\left(\mathrm{C}(\gamma), \gamma, \frac{1+\gamma}{(1+2\gamma)C^2(\gamma)}, -2\gamma\right),$$

kur

$$\mathrm{C}(\gamma) := \frac{2^\gamma \gamma^{\frac{1+2\gamma}{2}} \Gamma^\gamma(\frac{1+\gamma}{2\gamma})}{\pi^{\frac{\gamma}{2}} \Gamma^\gamma(\frac{1}{2\gamma})}.$$

2. Atvirkštinio-gamma dėsnio tankio funkcija yra

$$p(x) = \theta^{-1/\gamma}\Gamma^{-1}(1/\gamma)x^{-1-1/\gamma}exp\{-1/(\theta x)\}, x \geq 0, \text{ kur } \theta > 0$$

yra skalės parametras. Šis dėsnis priklauso Pareto dėsnių Hall klasei su $C = \theta^{-1}\Gamma^{-\gamma}(1+1/\gamma)$, $\rho = -\gamma$ ir

(2.1) $$\beta(\gamma) = \frac{\gamma}{1+\gamma}\Gamma^{\gamma}(1 + 1/\gamma).$$

1.2. Įrodymai

Pirmiausiai įrodykime įvade suformuluotą teiginį.

Teiginys. Jei pasiskirstymo funkcija $F(x), x \geq 0$ tenkina (1.2) sąlygą, tai ji tenkina ir (1.1) sąlygą.

Įrodymas. Pažymėkime $L(x) = 1 + \frac{\beta}{\rho}\left(\frac{x}{C}\right)^{\rho/\gamma} + g(x), x \geq 0$, kur funkcija $g(x)$ tenkina sąlygą $g(x) = o\left(x^{\rho/\gamma}\right), x \to \infty$. Tegul $t > 0$. Tada

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{L(xt)}{L(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{\beta}{\rho}\left(\frac{x}{C}\right)^{\rho/\gamma} t^{\rho/\gamma} + g(xt)}{1+\frac{\beta}{\rho}\left(\frac{x}{C}\right)^{\frac{\rho}{\gamma}} + g(x)}.$$

Prisiminkime, kad $\gamma > 0$ ir $\rho < 0$. Todėl

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x^{\rho/\gamma}} x^{\rho/\gamma} = \lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x^{\rho/\gamma}} \cdot \lim_{x\to\infty} x^{\rho/\gamma} = 0.$$

Analogiškai galima įsitikinti, kad $\lim_{x\to\infty} g(tx) = 0$. Vadinasi, $\lim_{x\to\infty} \frac{L(xt)}{L(x)} = 1$. Liko apskaičiuoti

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1-F(xt)}{1-F(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\frac{xt}{C}\right)^{\frac{\rho}{\gamma}} L(tx)}{\left(\frac{x}{C}\right)^{\frac{\rho}{\gamma}} L(x)} = t^{\rho/\gamma} \lim_{x\to\infty} \frac{L(xt)}{L(x)} = t^{\rho/\gamma}.$$

Įrodymo pabaiga.

2. Pavyzdžiai

1 Pavyzdys

Parodysime, kad Frešė pasiskirstymo funkcija (1.3) tenkina (1.2) sąlygą. Pasinaudoję eksponentinės funkcijos skleidiniu gauname

$$1 - F(x) = 1 - \exp\{-x^{-1/\gamma}\} = x^{-\frac{1}{\gamma}} - \frac{x^{-\frac{2}{\gamma}}}{2!} + o\left(x^{-\frac{2}{\gamma}}\right), x \to \infty.$$

Iškėlę $x^{-\frac{1}{\gamma}}$ gauname

$$1 - F(x) = \left(\frac{x}{1}\right)^{-1/\gamma}\left(1 - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{\gamma}} + o\left(x^{-\frac{1}{\gamma}}\right)\right), x \to \infty.$$

Liko pastebėti, kad Frešė pasiskirstymo funkcija tenkina (1.2) sąlygą su $\rho = -1$, $C = 1$ ir $\beta = \frac{1}{2}$.

2 Pavyzdys

Parodysime, kad Burr pasiskirstymo funkcija (1.4) tenkina (1.2) sąlygą. Turime

$$1 - F(x) = 1 - 1 + \left(1 + x^{-\rho/\gamma}\right)^{1/\rho} = \left(1 + x^{-\rho/\gamma}\right)^{1/\rho}, x \geq 0.$$

Iškėlę $x^{-\rho/\gamma}$ gauname

$$1 - F(x) = \left\{x^{-\rho/\gamma}\left(x^{\rho/\gamma} + 1\right)\right\}^{1/\rho} = x^{-1/\gamma}\left(x^{\rho/\gamma} + 1\right)^{1/\rho}, x \geq 0.$$

Pasinaudoję laipsninės funkcijos skleidiniu gauname

$$1 - F(x) = x^{-1/\gamma}(1 + \frac{1}{\rho}x^{\rho/\gamma} + o(x^{\rho/\gamma})), x \geq 0.$$

Surandame β reikšmę

$$\frac{\beta}{\rho} = \frac{1}{\rho},$$

$$\beta = 1.$$

Taigi, gavome, kad Burr pasiskirstymo funkcija tenkina (1.2) sąlygą su parametrais $\gamma = \gamma$, $\beta = 1$, $\rho = \rho$ ir $C = 1$.

3. Pagrindinio rezultato taikymai

Šiame skyrelyje pateiksime 2.1. teoremos taikymus naudodami SAS programą.

1 pavyzdys

Imkime Fisk pasiskirstymo funkciją $G_\gamma = \left(1 + x^{-1/\gamma}\right)^{-1}, x > 0$. Šiai pasiskirstymo funkcijai galioja sąryšis $G_\gamma \in Hall(1, \gamma, 1, -1)$. Pritaikę 2.1. teoremos (ii) punktą gauname, kad pasiskirstymo funkcija

$$F(x) = 1 - \left(1 - \left(1 + x^{-\frac{1}{b\gamma}}\right)^{-1}\right)^b, x > 0 \tag{2.2}$$

tenkina sąryšį $F \in Hall(1, \gamma, 1, -b)$. Pastebėkime, kad kai $b = 1$, tai $F(x)$ ir G_γ sutampa. Taigi, kai $b \neq 1$, tai pažymėję $\tilde{\rho} = -b$ ir pritaikę inversijos metodą gauname, kad atsitiktinio dydžio

$$X = \left(\left(1 - U^{-1/\tilde{\rho}}\right)^{-1} - 1\right)^{\gamma\tilde{\rho}} \tag{2.3}$$

pasiskirstymo funkcija $F(x)$ tenkina sąryšį $F \in Hall(1, \gamma, 1, \tilde{\rho})$.

Sprendžiame dvejais atvejais, kai

a) $\tilde{\rho} = -0{,}7, \gamma = \frac{1}{2}$.

b) $\tilde{\rho} = -0{,}7, \gamma = 1$.

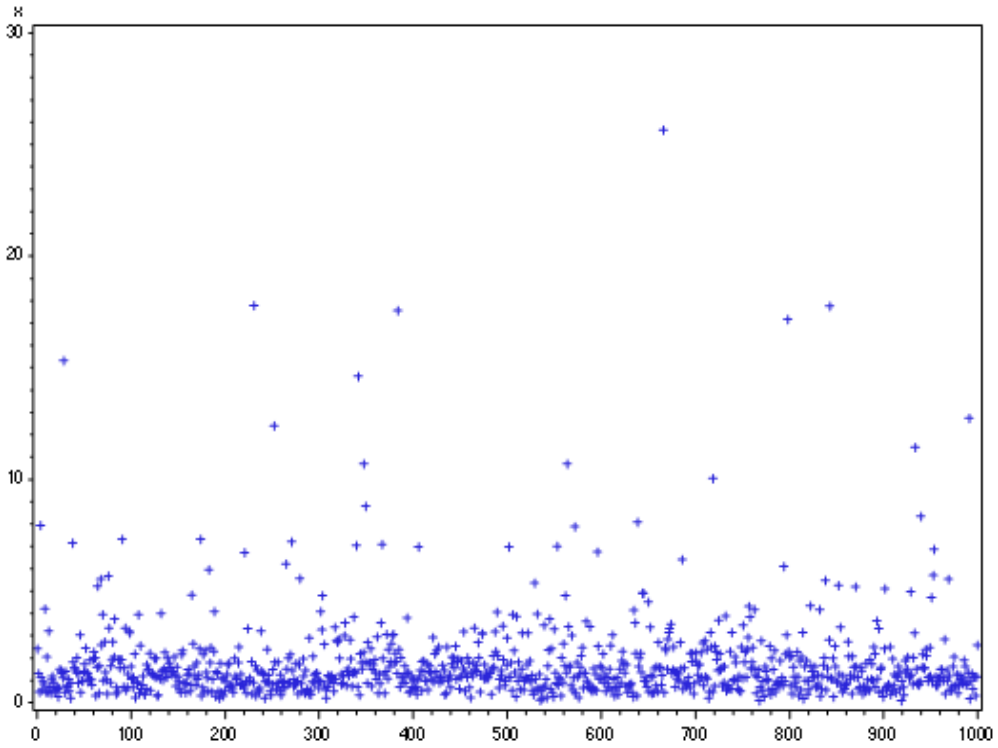
Programos kodas pateiktas A priede. Tam, kad pademonstruotume, kaip veikia programa, pirmiausiai sugeneruosime 1000 atsitiktinių dydžių su a) ir b) parametrais.

Paleidę programas gauname tokius rezultatus:

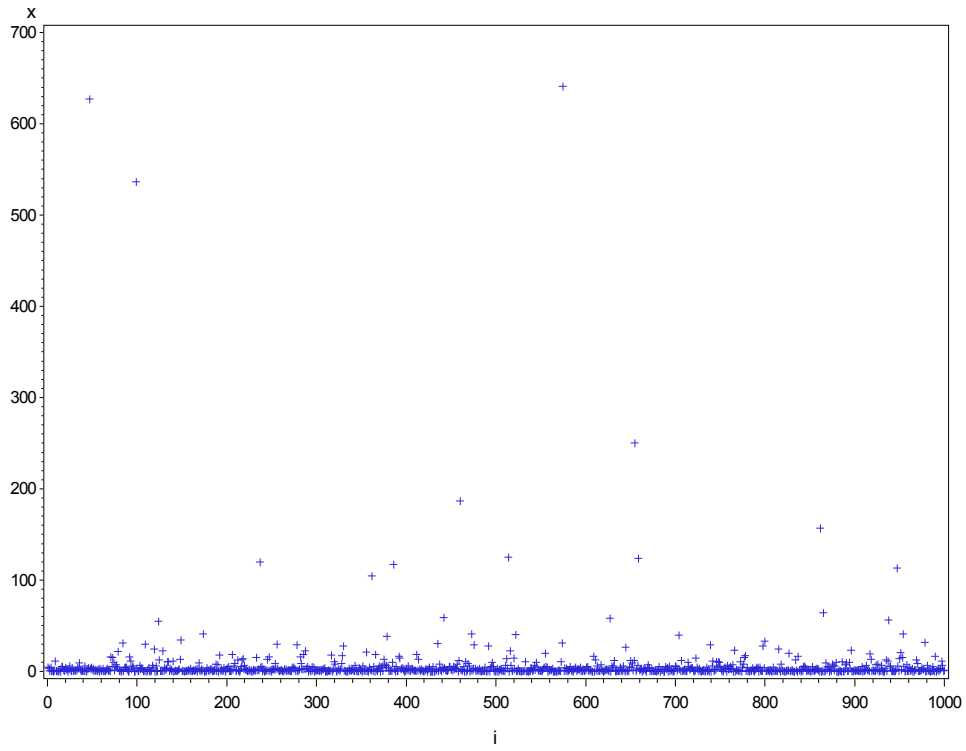
su a) parametrais		su b) parametrais	
1	2.3050732237	1	0.2728810746
2	0.9792852717	2	1.6523556529
3	1.9920519496	3	1.3018409027
4	1.0928487943	4	4.6706550943

5	6.1045589707	5	0.1712345822
6	0.7192537071	6	0.1894965432
7	1.8281807572	7	0.8633531474
8	0.5054872312	8	5.9382537661
9	1.4156541155	9	0.6930844432
10	1.5246562741	10	0.2830305385
...	...	...	...

Apskaičiuotas reikšmes galime matyti dešiniajame stulpelyje. Iš gautų reikšmių, galime nubraižyti funkcijų grafikus, tam pasinaudosime SAS programos procedūra PROC GPLOT.



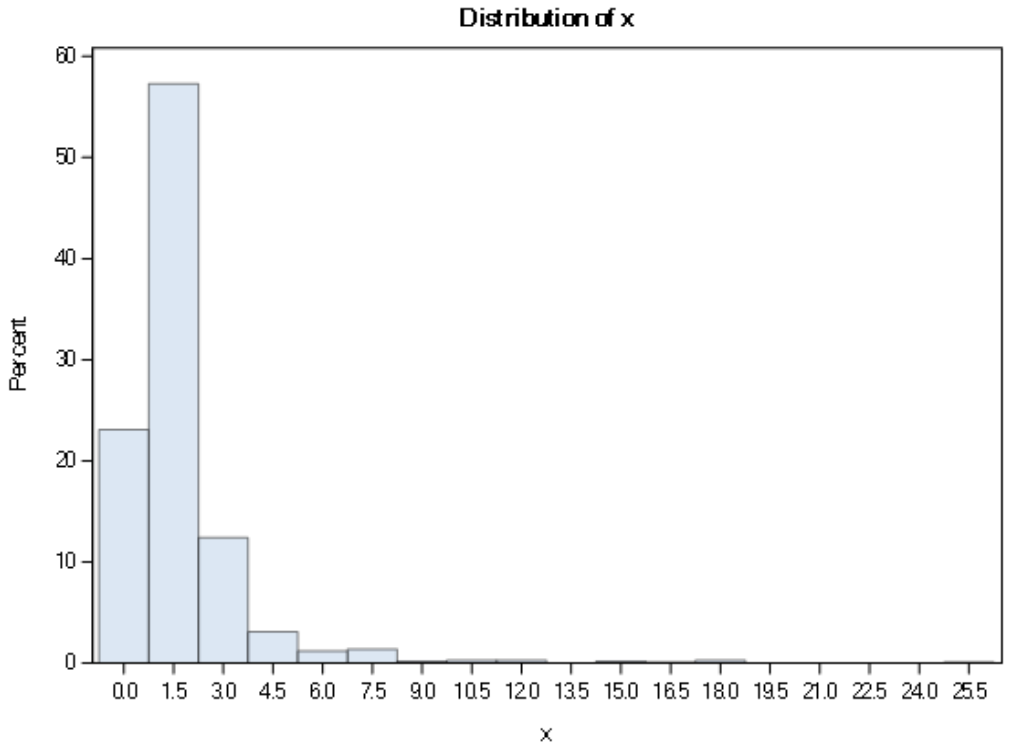
1 pav. (2.3) atsitiktinių dydžių su a) parametrais grafikas



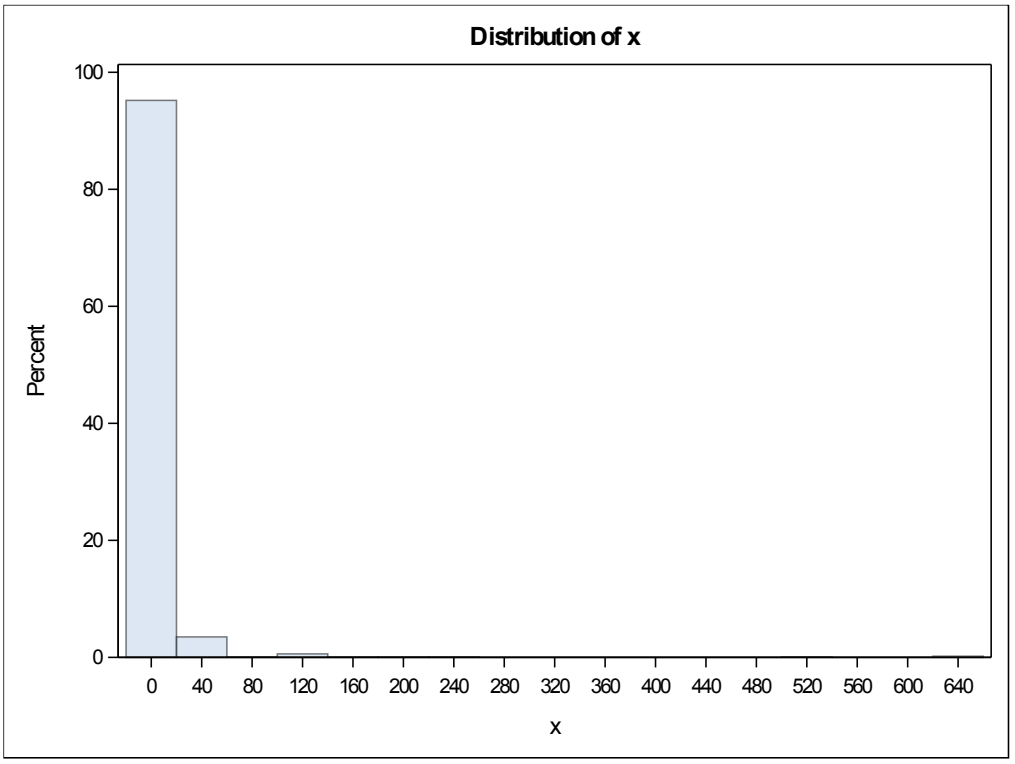
2 pav. (2.3) atsitiktinių dydžių su b) parametrais grafikas

Horizontalioje ašyje galime matyti išdėstytas parametro i, o vertikalioje X reikšmes. Lyginant grafikus (žr. 1 pav.) ir (žr. 2 pav.), matome, kad kai γ reikšmė yra mažesnė, tada ir X-sai įgyja mažesnes reikšmes. Šiuo atveju, kai $\gamma = \frac{1}{2}$, tai X-so reikšmės išsidėsčiuosios intervale $[0: 30]$, o kai $\gamma = 1$, tai X-so reikšmės išsidėsčiuosios $[0: 700]$ intervale. Pavienės atitrūkusios reikšmės yra sunkiauodegių dėsnių charakteristika.

Iš gautų X reikšmių braižome histogramas, tam naudojame SAS programos procedūrą PROC UNIVARIATE.



3 pav. (2.3) a) reikšmių histograma



4 pav. (2.3) b) reikšmių histograma

Nubraižytos histogramos atsitiktinai išskirdamos ribas, parodo, kiek procentų X-sų reikšmių yra išsidėstę tam tikruose rėžiuose. Horizontalioje ašyje išdėstytos X-so reikšmės, vertikalioje

ašyje procentai. Kaip ir iš taškinių grafikų, taip ir iš histogramų, matome, kad daugiausiai narių įgyja mažiausias reikšmes. Galime matyti, kad daugiausiai reikšmių yra pirmuose intervaluose, o kituose intervaluose jų gerokai mažiau.

2 pavyzdys

Frešė pasiskirstymo funkcija (1.3) tenkina sąryšį $G_\gamma(x) \in Hall\left(1, \gamma, \frac{1}{2}, -1\right)$. Pritaikę 2.1. teoremos (ii) punktą gauname, kad pasiskirstymo funkcija

(2.4) $$F(x) = 1 - \left\{1 - G_{\gamma b}(x)\right\}^b$$

tenkina sąryšį $F(x) \in Hall\left(1, \gamma, \frac{1}{2}, \frac{-1}{b}\right)$. Pažymėję $\tilde{\rho} = \frac{-1}{b}$ gauname, kad $F(x) \in Hall\left(1, \gamma, \frac{1}{2}, \tilde{\rho}\right)$. Įstatę $\tilde{\rho} = \frac{-1}{b}$ į (2.4) gauname

(2.5) $$F(x) = 1 - \left(1 - \exp\left\{-x^{\frac{\tilde{\rho}}{\gamma}}\right\}\right)^{-\frac{1}{\tilde{\rho}}},\ x \geq 0.$$

Pritaikę inversijos metodą (2.5) gauname, kad atsitiktinis dydis

(2.6) $$X = \left(\ln\left(\frac{1}{1-U^{-\tilde{\rho}}}\right)\right)^{\gamma/\tilde{\rho}}$$

yra pasiskirstęs pagal (2.4) dėsnį su $\tilde{\rho} = \frac{-1}{b}$.

Programos kodas pateiktas B priede. Pasinaudoję analogiškomis SAS programos procedūromis, kaip ir 1 pavyzdyje. Generuojame 1000 atsitiktinių dydžių bei pasirenkame, kad $\gamma = 0{,}7$ ir $\rho = -0{,}2$.

Gauname tokius rezultatus:

1 0.0094548103

2 0.0164055485

3 0.0598919104

4 0.0822150333

5 0.1997472922

6 1.3827829211

7 0.0008553171

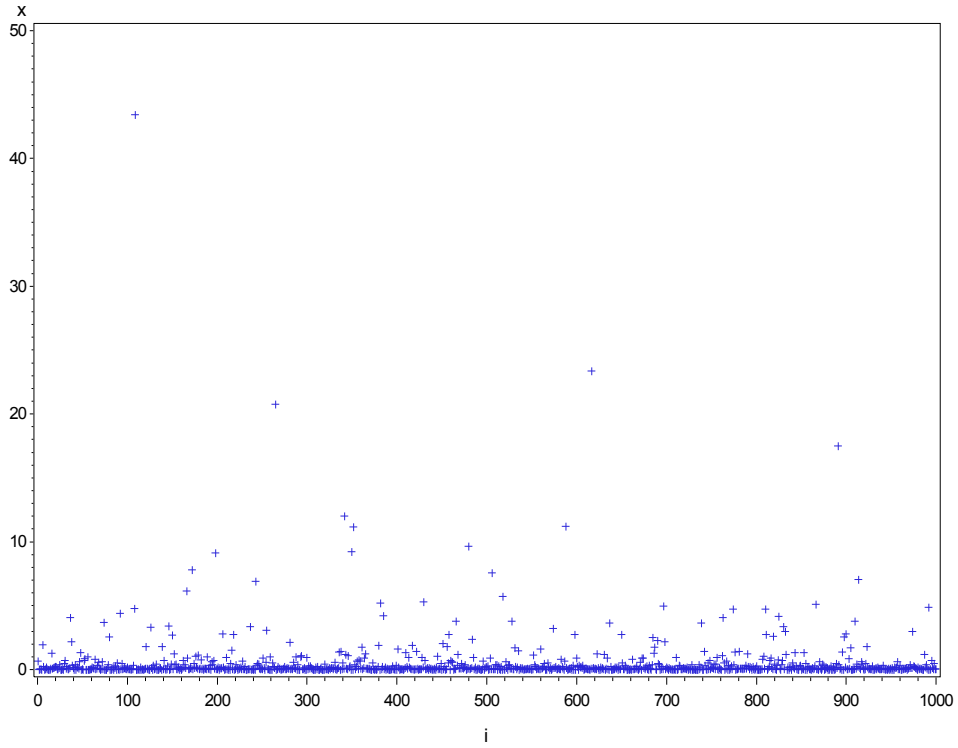
8 0.3816652238

9 0.0241512853

10 2.0456462231

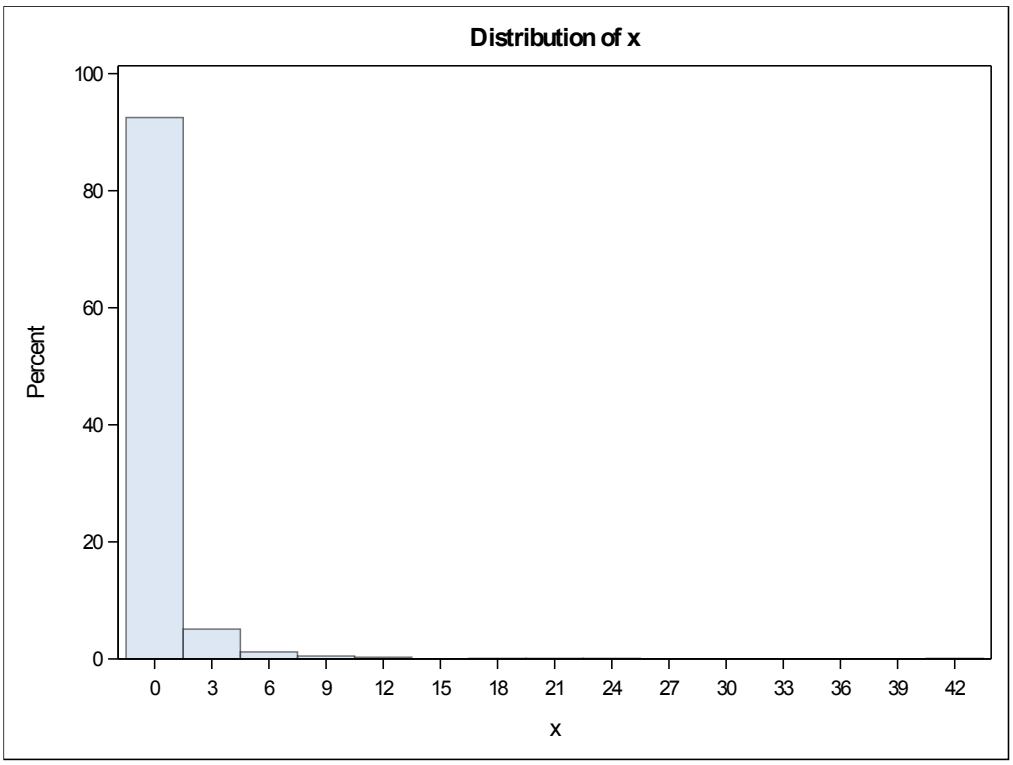
... ...

Turėdami X-ų reikšmes, jų sklaidą, galime pavaizduoti taškiniame grafike.



5 pav. Atsitiktinių dydžių (2.6) grafikas

Horizontalioje ašyje galime matyti išdėstytas parametro i, o vertikalioje X reikšmes. Atsitiktines reikšmes įstatę į (2.6) formulę gavome, kad X-o reikšmės išsidėsčiusios intervale $[0: 50]$. Tačiau daugiausiai narių yra intervale $[0: 1{,}5]$. Histograma padės tai aiškiau pamatyti.



6 pav. (2.6) histograma

Horizontalioje ašyje išdėstyta X-o reikšmės, vertikalioje - procentai. Matome (žr. 6 pav.), kad daugiausiai X-ų reikšmių išsidėstę intervale nuo 0 iki 1,5 apytiksliai virš 90%. Pavienės reikšmės, esančios tolimesniuose intervaluose, yra sunkiauodegių dėsnių charakteristika.

3 pavyzdys

Imkime Burr dėsnį, kurio pasiskirstymo funkcija yra (1.4). Taikydami 2.1. teoremos (ii) punktą, gauname, kad pasiskirstymo funkcija

$$F(x) = 1 - \left(1 + x^{-\rho/b\gamma}\right)^{b/\rho}, x > 0$$

tenkina sąryšį $F \in Hall\left(1, \gamma, 1, \frac{\rho}{b}\right)$. Tada, akivaizdžiai matome, kad $F(x)$ yra Burr pasiskirstymo funkcija, tik su parametru $\tilde{\rho} = \frac{\rho}{b}$. Taigi, šiuo atveju naudodami (1.5) kito dėsnio negauname.

4. Pagrindinio rezultato Teoremos 2.1 įrodymas

4.1. (i) punktas

Tegul $G_\gamma \in \text{Hall}(C, \gamma, \beta, \rho)$. Jei parametras $\rho = \rho(\gamma)$, tai pareikalaukime, kad santykis ρ / γ nebūtų lygus neigiamai konstantai. Iš pradžių nagrinėsime atvejį, kai $a = b = c = 1$.

Įrodymas. Įstatę nurodytus parametrus į (1.5) lygybę, $a = b = c = 1$, gauname, kad

$$F(x) = 1 - \{1 - G_\gamma(x)\} = 1 - 1 + G_\gamma(x) = G_\gamma(x). \tag{3.1}$$

Liko pastebėti, kad transformuojant šį dėsnį su nurodytais parametrais, antros eilės parametrai išlieka tokie pat, t. y.,

$$C_F = C_G, \ \beta_F = \beta_G,$$

$$\rho_F = \rho_G, \ \gamma_F = \gamma_G.$$

Įrodymo pabaiga.

4.2. (ii) punktas

Įrodysime, kad transformuojant Hall klasei priklausantį dėsnį $G_\gamma \in \text{Hall}(C, \gamma, \beta, \rho)$ gausime kitą dėsnį $F(x)$, kuris turės tokį patį ekstremalių reikšmių indeksą γ, bet kitokį parametrą ρ. Spręsime atvejį, kai $a = 1$, $b \neq 1$ ir $c = b$.

Įrodymas. Įstatę į (1.5) sąlygą šiuos parametrus gauname

$$F(x) = 1 - \{1 - G_{\gamma b}(x)\}^{b}. \tag{3.2}$$

Turime (3.2) lygtį suvesti į (1.2) pavidalą. Vienetą perkėlę į kitą pusę bei kintamuosius pakėlę b laipsniu gauname

$$\{1 - G_{\gamma b}(x)\}^{b} = \left\{ \left(\frac{x}{C}\right)^{-1/\gamma b} \left(1 + \frac{\beta}{\rho}\left(\frac{x}{C}\right)^{\rho/\gamma b} + o(x^{\rho/\gamma b})\right)\right\}^{b} = \tag{3.3}$$

$$\left(\frac{x}{C}\right)^{-1/\gamma} \left(1 + \frac{\beta}{\rho}\left(\frac{x}{C}\right)^{\rho/\gamma b} + o(x^{\rho/\gamma b})\right)^{b}.$$

Pažymėkime $\frac{\beta}{\rho}\left(\frac{x}{C}\right)^{\rho/\gamma b} + o(x^{\rho/\gamma b}) = z$, kai $x \to \infty$, tai $z \to 0$. Vadinasi,

(3.4) $$\{1- G_{\gamma b}(x)\}^{\mathrm{b}} = \left(\frac{x}{\mathrm{C}}\right)^{-1/\gamma}(1+\mathrm{z})^{\mathrm{b}}\,.$$

Įstatę į (3.4) lygybę z reikšmę ir pasinaudoję laipsninės funkcijos skleidiniu gauname

$$\{1- G_{\gamma b}(x)\}^{\mathrm{b}} = \left(\frac{x}{\mathrm{C}}\right)^{-1/\gamma}(1+\mathrm{z})^{\mathrm{b}} = \left(\frac{x}{\mathrm{C}}\right)^{-1/\gamma}\left(1+\frac{\beta}{\rho/\mathrm{b}}\left(\frac{x}{\mathrm{C}}\right)^{\rho/\mathrm{b}\gamma}+\ \mathrm{o}(x^{\rho/\mathrm{b}\gamma})\right), x\to\infty,$$

o tuo pačiu ir

(3.4.1) $$1-F(x) = \left(\frac{x}{\mathrm{C}}\right)^{-1/\gamma}\left(1+\frac{\beta}{\rho/\mathrm{b}}\left(\frac{x}{\mathrm{C}}\right)^{\rho/\mathrm{b}\gamma}+\ \mathrm{o}(x^{\rho/\mathrm{b}\gamma})\ \right), x\to\infty.$$

Liko pastebėti, jog po tokios transformacijos dėsniui (3.4.1), lyginant su dėsniu $G_\gamma \in \mathrm{Hall}(C,\gamma,\beta,\rho)$, pasikeičia tik parametras $\rho_F = \frac{\rho_G}{b}$.

Įrodymo pabaiga.

4.3. (iii) punktas

Nagrinėkime atvejį, kai $\mathrm{a}\neq 1$, $\mathrm{b}=\mathrm{c}=1$. Papildomai pareikalaukime, kad $a\neq 1-2\beta$ atveju, kai $\rho=-1$. Tada paimame Hall klasei priklausantį dėsnį $G_\gamma \in \mathrm{Hall}(C,\gamma,\beta,\rho)$, transformuojame jį naudodami (1.5) ir gauname kitą dėsnį F(x). Ieškome dėsnio F(x) antros eilės parametrų.

Įrodymas. Taigi, šiuo atveju turime

$$1-F(x) = 1-\left(1-\{1-G_\gamma(x)\}\right)^a.$$

Iš prielaidos $G_\gamma \in Hall(C,\gamma,\beta,\rho)$ išplaukia, kad $1-G_\gamma(x)\to 0$, kai $x\to\infty$. Pasinaudoję laipsninės funkcijos asimptotiniu skleidiniu gauname, kad

$$1-F(x) = a\{1-G_\gamma(x)\} - \frac{a(a-1)}{2}\{1-G_\gamma(x)\}^2 + o\left(\{1-G_\gamma(x)\}^2\right), x\to\infty.$$

Kombinuodami (1.2) bei sąryšį $G_\gamma \in Hall(C,\gamma,\beta,\rho)$ gauname, kad

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\{1-G_\gamma(x)\}^2}{(x/C)^{-2/\gamma}} = 1,$$

todėl

$$1-F(x)=a\left(\frac{x}{C}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}\left(1+\frac{\beta}{\rho}\left(\frac{x}{C}\right)^{\frac{\rho}{\gamma}}+o\left(x^{\frac{\rho}{\gamma}}\right)\right)-\frac{a(a-1)}{2}\left\{\left(\frac{x}{C}\right)^{-\frac{2}{\gamma}}+o\left(x^{-\frac{2}{\gamma}}\right)\right\}+o\left(x^{-\frac{2}{\gamma}}\right),$$

kai $x\to\infty$. Iškėlę a$(x/C)^{-1/\gamma}$ prieš skliaustus gauname

$$1-F(x)=a\left(\frac{x}{C}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}\left(1+\frac{\beta}{\rho}\left(\frac{x}{C}\right)^{\frac{\rho}{\gamma}}-\frac{a-1}{2}\left(\frac{x}{C}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}+o\left(x^{\frac{\rho}{\gamma}}\right)+o\left(x^{-\frac{1}{\gamma}}\right)\right),\text{ kai } x\to\infty.$$

Toliau atskirai tirkime atvejus $(a)-1<\rho<0, (b)\ \rho=-1$ ir $(c)\ \rho<-1$.

(a) mes gauname

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x/C)^{-1/\gamma}}{(x/C)^{\rho/\gamma}}=\lim_{x\to\infty}(x/C)^{-(\rho+1)/\gamma}=0,$$

nes $\rho+1>0$. Taigi, šiuo atveju

$$1-F(x)=a\left(\frac{x}{C}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}\left(1+\frac{\beta}{\rho}\left(\frac{x}{C}\right)^{\frac{\rho}{\gamma}}+o\left(x^{\frac{\rho}{\gamma}}\right)\right)=\left(\frac{x}{a^{\gamma}C}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}\left(1+\frac{a^{\rho}\beta}{\rho}\left(\frac{x}{a^{\gamma}C}\right)^{\frac{\rho}{\gamma}}+o\left(x^{\frac{\rho}{\gamma}}\right)\right), x\to\infty, \text{ o}$$

tai reiškia, kad $1-F(x)\in Hall(a^{\gamma}C,\gamma,a^{\rho}\beta,\rho)$.

Pereikime prie atvejo (b). Šiuo atveju

$$1-F(x)=a\left(\frac{x}{C}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}\left(1+\left\{\frac{\beta}{-1}+\frac{a-1}{2\cdot(-1)}\right\}\left(\frac{x}{C}\right)^{\frac{-1}{\gamma}}+o\left(x^{\frac{-1}{\gamma}}\right)\right)=\left(\frac{x}{a^{\gamma}C}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}\left(1+\frac{\frac{2\beta+a-1}{2a}}{-1}\left(\frac{x}{a^{\gamma}C}\right)^{\frac{-1}{\gamma}}+\right.$$

$$\left.o\left(x^{\frac{-1}{\gamma}}\right)\right),\text{ kai } x\to\infty.$$

Gavome, kad $F\in Hall\left(a^{\gamma}C,\gamma,\frac{\frac{2\beta+a-1}{2a}}{-1},-1\right)$.

Liko (c) atvejis, kai $\rho<-1$. Šiuo atveju

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x/C)^{\rho/\gamma}}{(x/C)^{-1/\gamma}}=\lim_{x\to\infty}(x/C)^{\rho+1/\gamma}=0.$$

Taigi turime

$$1-F(x)=a\left(\frac{x}{C}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}\left(1+\frac{a-1}{2\cdot(-1)}\left(\frac{x}{C}\right)^{\frac{-1}{\gamma}}+o\left(x^{\frac{-1}{\gamma}}\right)\right)=\left(\frac{x}{a^{\gamma}C}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}\left(1+\frac{(a-1)/(2a)}{-1}\left(\frac{x}{a^{\gamma}C}\right)^{\frac{-1}{\gamma}}+o\left(x^{\frac{-1}{\gamma}}\right)\right),\text{ kai } x\to\infty.$$

Iš čia gauname, kad $F\in Hall(a^{\gamma}C,\gamma,(a-1)/(2a),-1)$. Kadangi esame pareikalavę, kad $a\neq 1$, tai iš šio reikalavimo išplaukia, kad $(a-1)/(2a)\neq 0$.

Įrodymo pabaiga.

4.4. (iv) punktas

Įrodysime, kad transformuojant dėsnį $G_{\gamma}(x)$, remiantis (1.5), galime gauti kitą dėsnį $F(x)$, kuris priklauso Hall klasei ir turi ekstremalių reikšmių indeksą γ, bet skirtingus ρ,β,C. Nagrinėsime atvejį, kai a ≠ 1, b ≠ 1 ir b = c. Naudodamiesi (1.5) išraiška įstatome dėmenis

(4.1) $$F(x)=1\text{-}\{1\text{-}(G_{\gamma b})^{a}\}^{b}.$$

Įrodymas. Norėdami (4.1) lygtį suvesti kaip (1.2.), pirmiausiai, $G_{b\gamma}$ pakeliame a laipsniu

$$\{G_{\gamma b}(x)\}^{a}=\left\{1-\left(\frac{x}{\mathrm{C}}\right)^{-1/\gamma\mathrm{b}}\left(1+\frac{\beta}{\rho}\left(\frac{x}{\mathrm{C}}\right)^{\rho/\gamma\mathrm{b}}+\mathrm{o}(x^{\rho/\gamma\mathrm{b}})\right)\right\}^{a}.$$

Pažymėkime, $\left(\frac{x}{\mathrm{C}}\right)^{-1/\gamma\mathrm{b}}\left(1+\frac{\beta}{\rho}\left(\frac{x}{\mathrm{C}}\right)^{\rho/\gamma\mathrm{b}}+\mathrm{o}(x^{\rho/\gamma\mathrm{b}})\right)=\mathrm{z}$, kai $x\to\infty$, tai $\mathrm{z}\to 0$.

Persirašome

(4.2) $$\{G_{\gamma b}(x)\}^{a}=(1\text{ - z})^{a}.$$

Įstatę į (4.2) lygybę z ir pasinaudoję laipsninės funkcijos skleidiniu gauname

(4.3) $$\{G_{\gamma b}(x)\}^{a}=1-\mathrm{a}\left(\frac{x}{\mathrm{C}}\right)^{-1/\gamma\mathrm{b}}\left(1+\frac{\beta}{\rho}\left(\frac{x}{\mathrm{C}}\right)^{\rho/\gamma\mathrm{b}}+\mathrm{o}(x^{\rho/\gamma\mathrm{b}})\right)+\frac{\mathrm{a(a-1)}}{2}\left(\left(\frac{x}{\mathrm{C}}\right)^{-1/\gamma\mathrm{b}}\left(1+\frac{\beta}{\rho}\left(\frac{x}{\mathrm{C}}\right)^{\rho/\gamma\mathrm{b}}+\mathrm{o}(x^{\rho/\gamma\mathrm{b}})\right)\right)^{2}+\mathrm{o}\left(\left(\frac{x}{\mathrm{C}}\right)^{-1/\gamma\mathrm{b}}\left(1+\frac{\beta}{\rho}\left(\frac{x}{\mathrm{C}}\right)^{\rho/\gamma\mathrm{b}}+\mathrm{o}(x^{\rho/\gamma\mathrm{b}})\right)\right)^{2}.$$

Siekdami (4.3) suvesti į (1.2) pavidalą, (4.3) o mažojo sąryšio skliaustų narius pasižymime, a = 1, b = $\frac{\beta}{\rho}\left(\frac{x}{C}\right)^{\rho/\gamma b}$ ir c = o($x^{\rho/\gamma b}$).

Pasinaudodami pagalbine formule gauname

(4.4) $\{G_{\gamma b}(x)\}^{a}= 1-a\left(\frac{x}{C}\right)^{-1/\gamma b}\left(1+\frac{\beta}{\rho}\left(\frac{x}{C}\right)^{\rho/\gamma b}+\ o(x^{\rho/\gamma b})\right)+\frac{a(a-1)}{2}\left(\left(\frac{x}{C}\right)^{-2/\gamma b}(1+\left(\frac{x}{C}\right)^{2\rho/\gamma b}+\ o(x^{2\rho/\gamma b})+2\frac{\beta}{\rho}\left(\frac{x}{C}\right)^{\rho/\gamma b}+2\ o(x^{\rho/\gamma b})+2\frac{\beta}{\rho}\left(\frac{x}{C}\right)^{\rho/\gamma b}o(x^{\rho/\gamma b})\right)+o\left(\left(\frac{x}{C}\right)^{-2/\gamma b}(1+\left(\frac{\beta}{\rho}\right)^{2}\left(\frac{x}{C}\right)^{2\rho/\gamma b}+\ o(x^{2\rho/\gamma b})+2\frac{\beta}{\rho}\left(\frac{x}{C}\right)^{\rho/\gamma b}+2\ o(x^{\rho/\gamma b})+2\frac{\beta}{\rho}\left(\frac{x}{C}\right)^{\rho/\gamma b}o(x^{\rho/\gamma b})\right).$

Sekantis žingsnis, atrenkant o mažojo sąryšio dominuojančius narius, kuo labiau supaprastinti lygtį.

Turime,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{2\rho/b\gamma}}{x^{\rho/b\gamma}}=\lim_{x\to\infty}x^{2\rho/\gamma b}-x^{\rho/\gamma b}=\lim_{x\to\infty}x^{\rho/b\gamma}=0.$$

Gavome, kad riba lygi 0, vadinasi dominuojantis narys sumoje yra $x^{\rho/b\gamma}$.

Todėl galime užrašyti taip,

(4.5) $\{G_{\gamma b}(x)\}^{a}= 1-a\left(\frac{x}{C}\right)^{-1/b\gamma}\left(1+\frac{\beta}{\rho}\left(\frac{x}{C}\right)^{\rho/b\gamma}+\ o(x^{\rho/\gamma b})\right)+\frac{a(a-1)}{2}\left(\frac{x}{C}\right)^{-2/\gamma b}\left(1+2\frac{\beta}{\rho}\left(\frac{x}{C}\right)^{\rho/\gamma b}+\ o(x^{\rho/\gamma b})\right)=1-a\left(\frac{x}{C}\right)^{-1/\gamma b}-a\frac{\beta}{\rho}\left(\frac{x}{C}\right)^{-1/\gamma b+\rho/\gamma b}-a\left(\frac{x}{C}\right)^{-1/\gamma b}o(x^{\rho/\gamma b})+\frac{a(a-1)}{2}\left(\frac{x}{C}\right)^{-2/\gamma b}+\frac{a(a-1)}{2}2\frac{\beta}{\rho}\left(\frac{x}{C}\right)^{-2/b\gamma+\rho/\gamma b}+\frac{a(a-1)}{2}\left(\frac{x}{C}\right)^{-2/\gamma b}o(x^{\rho/\gamma b}).$

Darome analogiškai,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{-2/\gamma b}}{x^{-1/\gamma b}}=\lim_{x\to\infty}x^{-2/\gamma b}-x^{-1/\gamma b}=\lim_{x\to\infty}x^{-1/\gamma b}=0.$$

Pratęsiame (4.5) lygtį. Norėdami suvesti lygtį kaip (1.2) iškeliame prieš skliaustus $a\left(\frac{x}{C}\right)^{-1/\gamma b}$

(4.6) $=1-a\left(\frac{x}{C}\right)^{-1/\gamma b}\left\{1+\frac{\beta}{\rho}\left(\frac{x}{C}\right)^{\rho/\gamma b}+\ o(x^{\rho/\gamma b})-\frac{a(a-1)}{2}\left(\frac{x}{C}\right)^{-1/\gamma b}-\left(\frac{\beta}{\rho}\right)^{2}\frac{(a-1)}{2}\left(\frac{x}{C}\right)^{-1/\gamma b+\rho/\gamma b}-\frac{(a-1)}{2}\left(\frac{x}{C}\right)^{-1/\gamma b}o(x^{-1/\gamma b})\right\}.$

Toliau atskirai tirkime atvejus $(a)-1<\rho<0, (b)\ \rho<-1$ ir $(c)\ \rho=-1$.

(a) atveju mes gauname

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{\rho/\gamma b}}{x^{-1/b\gamma}} = \lim_{x\to\infty} x^{\rho/\gamma b} + x^{1/\gamma b} = \lim_{x\to\infty} x^{(1+\rho)/b\gamma} = 0.$$

nes $\rho + 1 > 0$. Taigi, šiuo atveju

$$(4.6.1) = 1 - a\left(\frac{x}{C}\right)^{-1/b\gamma}\left\{1 - \frac{(a-1)}{2}\left(\frac{x}{C}\right)^{-1/\gamma b} + o\,(x^{-1/\gamma b}) + o\,(x^{\rho/\gamma b}) + o\,(x^{-1/\gamma b}) + o\,(x^{-1/\gamma b})\right\}.$$

Pasinaudodami o sąryšio savybe sudedame vienodus narius. Norint gauti tokią, kaip (1.2) lygtį, mums reikia $a\left(\frac{x}{C}\right)^{-1/\gamma b}$ užrašyti kaip nurodytoje (1.2) lygtyje. Vadinasi a dėmenį reikia įkelti į skliaustus

$$1 - (G_{\gamma b}(x))^a = 1 - \left(\frac{x}{Ca^{\gamma b}}\right)^{-1/\gamma b}\left\{1 - \frac{(a-1)}{2}\left(\frac{x}{C}\right)^{-1/\gamma b} + o\,(x^{-1/\gamma b})\right\}.$$

Gautą rezultatą keliame b-tuoju laipsniu

$$\{1 - (G_{\gamma b}(x))^a\}^b = \left(1 - \left(\frac{x}{Ca^{\gamma b}}\right)^{-1/\gamma b}\left\{1 - \frac{(a-1)}{2}\left(\frac{x}{C}\right)^{-1/\gamma b} + o\,(x^{-1/\gamma b})\right\}\right)^b.$$

Pažymėkime, $\left(\frac{x}{Ca^{\gamma b}}\right)^{-1/\gamma b}\left(1 - \frac{a-1}{2}\left(\frac{x}{C}\right)^{-1/\gamma b} + o(x^{-1/\gamma b})\right) = z$, kai $x \to \infty$, tai $z \to 0$.

Įstatę pažymėjimą, pasinaudoję laipsninės funkcijos skleidiniu bei atrinkę dominuojančius narius gauname

$$\{1-(G_{\gamma b}(x))^a\}^b = (1 - z)^b = 1 - b\left(\frac{x}{Ca^{\gamma b}}\right)^{-1/\gamma b}\left(1 - \frac{a-1}{2}\left(\frac{x}{C}\right)^{-1/\gamma b} + o(x^{-1/\gamma b})\right) + o\left(\left(\frac{x}{Ca^{\gamma b}}\right)^{-1/\gamma b}\left(1 - \frac{a-1}{2}\left(\frac{x}{C}\right)^{-1/\gamma b} + o(x^{-1/\gamma b})\right)\right) = 1 - b\left(\frac{x}{Ca^{\gamma b}}\right)^{-1/\gamma b}\left(1 - \frac{a-1}{2}\left(\frac{x}{C}\right)^{-1/\gamma b} + o(x^{-1/\gamma b})\right).$$

Kad gautume, kaip (1.2) lygtį, perkeliame vienetą į kitą pusę. Norėdami nustatyti skalės parametrą C, dėmenį $\left(\frac{x}{C}\right)^{-1/\gamma b}$ padauginame iš $a^{\gamma b}$

$$F(x)= 1\text{-}\left(1 - \mathrm{b}\left(\frac{x}{\mathrm{Ca}^{\gamma\mathrm{b}}}\right)^{-1/\gamma\mathrm{b}}\left(1 - \frac{\mathrm{a}-1}{2}\left(\frac{x}{\mathrm{C}}\right)^{-1/\gamma\mathrm{b}} + \mathrm{o}(x^{-1/\gamma\mathrm{b}})\right)\right)= \mathrm{b}\left(\frac{x}{\mathrm{Ca}^{\gamma\mathrm{b}}}\right)^{-1/\gamma\mathrm{b}}\left(1 - \frac{\mathrm{a}-1}{2}\left(\frac{x\mathrm{a}^{\gamma\mathrm{b}}}{\mathrm{Ca}^{\gamma\mathrm{b}}}\right)^{-1/\gamma\mathrm{b}} + \mathrm{o}(x^{-1/\gamma\mathrm{b}})\right).$$

Gauname, kad $C_F = C_G a^{\gamma b}$. Dabar pereikime prie dėmens $\frac{\mathrm{a}-1}{2}\left(\frac{x\mathrm{a}^{\gamma\mathrm{b}}}{\mathrm{Ca}^{\gamma\mathrm{b}}}\right)^{-1/\gamma\mathrm{b}}$. Jį reikia suvesti į pavidalą $\frac{\beta}{\rho}\left(\frac{x}{\mathrm{C}}\right)^{\rho/\gamma}$. Todėl $\mathrm{a}^{\gamma\mathrm{b}}$ iškeliame iš skaitiklio, taip surandame β reikšmę

$$F(x) = \mathrm{b}\left(\frac{x}{\mathrm{Ca}^{\gamma\mathrm{b}}}\right)^{-1/\gamma\mathrm{b}}\left(1 - \frac{\mathrm{a}-1}{2\mathrm{a}}\left(\frac{x}{\mathrm{Ca}^{\gamma\mathrm{b}}}\right)^{-1/\gamma\mathrm{b}} + \mathrm{o}(x^{-1/\gamma\mathrm{b}})\right)$$

$$\beta_F = \left(\frac{\mathrm{a}-1}{2\mathrm{a}}\right)\mathrm{b}.$$

Iš gautos lygties nesunku atrasti, kad $\gamma_F = \gamma_G$ ir $\rho_F = -1/\mathrm{b}$.

Taigi, $1 - F(x) \in Hall\left(a^{\gamma b}C, \gamma, \left(\frac{a-1}{2a}\right)b, -1/b\right)$.

Pereikime prie (b) atvejo

$$\lim_{\mathrm{x}\to\infty}\frac{x^{-1/\gamma\mathrm{b}}}{x^{\rho/\gamma\mathrm{b}}} = \lim_{\mathrm{x}\to\infty} x^{-1/\gamma\mathrm{b}} - x^{\rho/\gamma\mathrm{b}} = \lim_{\mathrm{x}\to\infty} x^{(-1-\rho)/\gamma\mathrm{b}} = 0.$$

Tada

(4.6.2) $$=1 - \mathrm{a}\left(\frac{x}{\mathrm{C}}\right)^{-1/\gamma\mathrm{b}}\left\{1 + \frac{\beta}{\rho}\left(\frac{x}{\mathrm{C}}\right)^{\rho/\gamma\mathrm{b}} + \mathrm{o}(x^{\rho/\gamma\mathrm{b}}) + \mathrm{o}(x^{\rho/\gamma\mathrm{b}})\right\}= 1 - \mathrm{a}\left(\frac{x}{\mathrm{C}}\right)^{-1/\gamma\mathrm{b}}\left\{1 + \frac{\beta}{\rho}\left(\frac{x}{\mathrm{C}}\right)^{\rho/\gamma\mathrm{b}} + \mathrm{o}(x^{\rho/\gamma\mathrm{b}})\right\}.$$

Pagal duotą sąlygą, gautą (4.6.2) rezultatą, keliame b-tuoju laipsniu

$$\{1\text{-}(G_{\gamma b}(x))^{\mathrm{a}}\}^{\mathrm{b}}=\left(1 - \mathrm{a}\left(\frac{x}{\mathrm{C}}\right)^{-1/\gamma\mathrm{b}}\left\{1 + \frac{\beta}{\rho}\left(\frac{x}{\mathrm{C}}\right)^{\rho/\gamma\mathrm{b}} + \mathrm{o}(x^{\rho/\gamma\mathrm{b}})\right\}\right)^{b}.$$

Pažymėkime, $\mathrm{a}\left(\frac{x}{\mathrm{C}}\right)^{-1/\gamma\mathrm{b}}\left\{1 + \frac{\beta}{\rho}\left(\frac{x}{\mathrm{C}}\right)^{\rho/\gamma\mathrm{b}} + \mathrm{o}(x^{\rho/\gamma\mathrm{b}})\right\}$ = z, kai $x \to \infty$, tai $\mathrm{z} \to 0$.

Įstatę z reikšmę, naudojamės laipsninės funkcijos skleidiniu ir pritaikome o sąryšio savybes

$$\{1\text{-}(G_{\gamma b}(x))^{\mathrm{a}}\}^{\mathrm{b}}= 1 - \mathrm{ba}\left(\frac{x}{\mathrm{C}}\right)^{-1/\gamma\mathrm{b}}\left\{1 + \frac{\beta}{\rho}\left(\frac{x}{\mathrm{C}}\right)^{\rho/\gamma\mathrm{b}} + \mathrm{o}(x^{\rho/\gamma\mathrm{b}})\right\}+ \mathrm{o}\left(\mathrm{a}\left(\frac{x}{\mathrm{C}}\right)^{-1/\gamma\mathrm{b}}\left\{1 + \frac{\beta}{\rho}\left(\frac{x}{\mathrm{C}}\right)^{\rho/\gamma\mathrm{b}} + \mathrm{o}(x^{\rho/\gamma\mathrm{b}})\right\}\right)=1\text{-}\mathrm{ba}\left(\frac{x}{\mathrm{C}}\right)^{-1/\gamma\mathrm{b}}\left\{1 + \frac{\beta}{\rho}\left(\frac{x}{\mathrm{C}}\right)^{\rho/\gamma\mathrm{b}} + \mathrm{o}(x^{\rho/\gamma\mathrm{b}})\right\}.$$

Norėdami suvesti į (1.2) formulę vienetą perkeliame į kitą pusę. Pirmiausiai ieškodami C reikšmės į $\left(\frac{x}{C}\right)^{-1/\gamma b}$ skliaustus įkeliame a, o $\frac{\beta}{\rho}\left(\frac{x}{C}\right)^{\rho/\gamma b}$ tiek viršų, tiek apačią padauginame iš $a^{\gamma b}$

$$F(x)=1-\left(1-ba\left(\frac{x}{C}\right)^{-1/\gamma b}\left\{1+\frac{\beta}{\rho}\left(\frac{x}{C}\right)^{\rho/\gamma b}+o(x^{\rho/\gamma b})\right\}\right)=b\left(\frac{x}{Ca^{\gamma b}}\right)^{-1/\gamma b}\left(1+\frac{a^{\rho}\beta}{\rho}\left(\frac{x}{Ca^{\gamma b}}\right)^{\rho/\gamma b}+o(x^{\rho/\gamma b})\right).$$

Gauname, kad $C_F = C_G a^{\gamma b}$. Kitus parametrus taip pat surandame nesunkiai $\gamma_F = \gamma_G$, $\rho_F = \rho_G/b$, $\beta_F = \beta_G a^{\rho} b$.

Liko pastebėti, kad gautas dėsnis priklauso Hall klasei su tuo pačiu γ, kai $a \neq 1$, $b \neq 1$ ir $b = c$.

Liko (c) atvejis, kai $\rho = -1$.

Įstatę dominuojančius narius į pagrindinę (4.6) lygtį, pasinaudoję o sąryšio savybėmis, iškėlę bendrus narius gauname

(4.6.3) $$= 1-a\left(\frac{x}{C}\right)^{-1/\gamma b}\left\{1-\beta\left(\frac{x}{C}\right)^{-1/\gamma b}+o(x^{-1/\gamma b})-\frac{(a-1)}{2}\left(\frac{x}{C}\right)^{-1/\gamma b}+2\beta\frac{(a-1)}{2}\left(\frac{x}{C}\right)^{-2/\gamma b}+\frac{(a-1)}{2}\left(\frac{x}{C}\right)^{-1/\gamma b}o(x^{-1/\gamma b})\right\}=1-a\left(\frac{x}{C}\right)^{-1/\gamma b}\left\{1-\left(\frac{x}{C}\right)^{-1/\gamma b}\left[\beta+\frac{(a-1)}{2}\right]+o(x^{-1/\gamma b})\right\}.$$

Pažymėkime $a\left(\frac{x}{C}\right)^{-1/\gamma b}\left\{1-\left(\frac{x}{C}\right)^{-1/\gamma b}\left[\beta+\frac{(a-1)}{2}\right]+o(x^{-1/\gamma b})\right\} = z$, kai $x \to \infty$, tai $z \to 0$.

Pasinaudoję laipsninės funkcijos skleidiniu bei įstatę z reikšmes gauname

$$\{1-(G_{\gamma b}(x))^a\}^b = (1-z)^b = 1+b(-z)+o(z) = 1-ba\left(\frac{x}{C}\right)^{-1/\gamma b}\left\{1-\left(\frac{x}{C}\right)^{-1/\gamma b}\left[\beta+\frac{(a-1)}{2}\right]+o(x^{-1/\gamma b})\right\}+o\left(a\left(\frac{x}{C}\right)^{-1/\gamma b}\left\{1-\left(\frac{x}{C}\right)^{-1/\gamma b}\left[\beta+\frac{(a-1)}{2}\right]+o(x^{-1/\gamma b})\right\}\right).$$

Norėdami suvesti į pagrindinę (1.2) formulę, perkeliame vienetą į kitą pusę, supaprastiname lygtį

$$F(x) = 1-\left(1-ba\left(\frac{x}{C}\right)^{-1/\gamma b}\left\{1-\left(\frac{x}{C}\right)^{-1/\gamma b}\left[\beta+\frac{(a-1)}{2}\right]+o(x^{-1/\gamma b})\right\}\right) = ba\left(\frac{x}{C}\right)^{-1/\gamma b}\left\{1-\left(\frac{x}{C}\right)^{-1/\gamma b}\left[\beta+\frac{(a-1)}{2}\right]+o(x^{-1/\gamma b})\right\}.$$

Ieškodami C reikšmės a įkeliame į $\left(\frac{x}{\mathrm{C}}\right)^{-1/\gamma \mathrm{b}}$ skliaustus, o $\left(\frac{x}{\mathrm{C}}\right)^{-1/\gamma \mathrm{b}}$ viršų ir apačią padauginame iš $\mathrm{a}^{\gamma \mathrm{b}}$

$$\mathrm{F(x)} = \mathrm{b}\left(\frac{x}{\mathrm{Ca}^{\gamma \mathrm{b}}}\right)^{-1/\gamma \mathrm{b}} \left(1 - \frac{1}{a}\left(\frac{x}{\mathrm{C}}\right)^{-1/\gamma \mathrm{b}} \left[\beta + \frac{(\mathrm{a}-1)}{2}\right] + \mathrm{o}(x^{-1/\gamma \mathrm{b}})\right).$$

Gauname, kad $C_F = \mathrm{C}_G a^{\gamma b}$. Nesunku surasti, kad $\gamma_F = \gamma_G$, $\rho_F = -1/\mathrm{b}$. O ieškodami β reikšmės, tiesiog sudauginame bei sudedame narius

$$\beta_F = \frac{1}{\mathrm{a}}\mathrm{b}\left\{\beta + \frac{\mathrm{a}-1}{2}\right\} = \left(\frac{2\beta+\mathrm{a}-1}{2\mathrm{a}}\right)\mathrm{b}.$$

Taigi, gavome, kad F(x) dėsnis priklauso Hall klasei su ekstremalių reikšmių indeksu $\gamma_F = \gamma_G$ bei antros eilės parametrais $C_F = \mathrm{C}_G a^{\gamma b}$, $\rho_F = -1/\mathrm{b}$ ir $\beta_F = \left(\frac{2\beta+\mathrm{a}-1}{2\mathrm{a}}\right)\mathrm{b}$.

Įrodymo pabaiga.

Išvados ir rekomendacijos

Šiame baigiamajame darbe mes tyrėme, kaip iš vieno tikimybinio dėsnio, tenkinančio sąlygą (1.2), gauti kitą su tokiu pačiu ekstremalių reikšmių indeksu, bet kitokiais parametrais β ir ρ.

Tvirtinome, kad pasiskirstymo funkcija $G_\gamma(x)$ tenkina sąlygą (1.2) bei ieškojome, kokie yra pasiskirstymo funkcijos (1.5) antros eilės parametrai, apsiribodami tik tais rinkiniais (a,b,c) ϵ R_+^3, kurių pasiskirstymo funkcijos (1.2) ekstremalių reikšmių indeksas yra γ. Teoremos taikymą pateikėme trečiame skyriuje, o jos įrodymą ketvirtame. Iš tiesų, jeigu tikimybinis dėsnis tenkina Pareto dėsnio Hall klasės sąlygas, tai pasinaudojant pagalbiniais teiginiais, nesunku įrodyti, kad iš vieno tikimybinio dėsnio su ekstremalių reikšmių indeksu γ, įmanoma gauti kitą, tik su kitokiais β, ρ parametrais.

Pagalbiniai teiginiai

Keletas reikalingų sąryšio o mažoji savybių:

- Jei $f_1(x) = o(g(x))$ ir $f_2(x) = o(g(x))$, tai $f_1(x) + f_2(x) = o(g(x))$, kai $x \to \infty$.
- Jei $f_1(x) = o(g_1(x))$ ir $f_2(x) = o(g_2(x))$, tai $f_1(x)f_2(x) = o(g_1(x)g_2(x))$, kai $x \to \infty$.
- $x^{\rho/\gamma}\, o(x^{\rho/\gamma}) = o(x^{2\rho/\gamma})$ $g(x) = o(x^{\delta})$, kai $x \to \infty$, jei $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x^{\delta}} = 0$.

Taip pat, remsimės pagalbiniais teiginiais:

- $(1 + y)^r = 1 + ry + \frac{r(r-1)y^2}{2!} + o(y^2)$.
- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2)$.
- $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$.

Santrauka

Šiame baigiamajame darbe yra nagrinėjamas sunkiauodegių atsitiktinių dydžių generavimas. Įrodoma, kaip iš vieno tikimybinio dėsnio, tenkinančio Pareto dėsnio Hall klasės sąlygas, pasinaudojant pagalbiniais teiginiais, gauti kitą, su tuo pačiu ekstremalių reikšmių indeksu γ, tik su kitokiais β, ρ parametrais. Įrodytos teoremos taikymai yra pateikiami naudojantis SAS programa.

Summary

Egidija Rakauskaitė. Simulation of Heavy-Tailed Random Variables.

This thesis analize the simulation of heavy-tailed random variables. It is proved how one distribution, which meets the conditions of Pareto Principle Hall class, with the help auxiliary proposition is derived into another distribution, which has the same extreme value index γ but other β, ρ. The applications of the proved theorem are presented through the SAS program.

Literatūros sąrašas

(1) M.I. Gomes, L. Canto e Castro, M.I. Fraga Alves, and D. Pestana, Statistics of extremes for iid data and breakthroughs in the estimation of the extreme value index: Laurens de Haan leading contributions, Extremes, 11:3-34, 2008.

(2) P. Hall. On some simple estimates of an exponent of regular variation. *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B*, 44:37–42, 1982.

(3) P. Hall and A.H. Welsh. Adaptive estimates of parameters of regular variation. *Ann. Statist.*, 13:331–341, 1985.

(4) Kumaraswamy, P. (1980). A generalized probability density function for doublebounded random-processes. Journal of Hydrology 46, 79-88.

(5) T. McElroy and D. N. Politis, Moment-based tail index estimation. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 137, 1389–1406, 2007.

(6) Nadarajah S. and Eljabri S., The Kumaraswamy GP Distribution, *Journal of Data Science*, 11, 739–766, 2013.

Priedai

A priedas

a)

```
%let NObs = 1000;

%let r = -0.7;

%let gam = 0.5;

data Trecias(keep=x i);

/*generuojami 1000 tolygiai intervale (0,1) pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių*/

do i = 1 to &NObs;

  u = rand("Uniform");

/*naudojama išsivesta (2.3) formulė*/

  x = (((1-u**(-1/&r))**-1)-1)**(&gam*&r);

  output;

end;

run;

/*brėžiamas atsitiktinių dydžių pasiskirstymo grafikas*/

proc gplot data = Trecias;

plot x*i;

run;

/*brėžiama histograma*/

proc univariate data=Trecias;

var x;

histogram x;

run;
```

A priedo a) lentelės:

Moments			
N	1000	**Sum Weights**	1000
Mean	1.75936094	**Sum Observations**	1759.36094
Std Deviation	2.034726	**Variance**	4.14010989
Skewness	5.19557545	**Kurtosis**	39.0468542
Uncorrected SS	7231.32069	**Corrected SS**	4135.96978
Coeff Variation	115.651425	**Std Error Mean**	0.06434369

Tests for Location: Mu0=0				
Test	**Statistic**		**p Value**	
Student's t	**t**	27.34318	**Pr > |t|**	<.0001
Sign	**M**	500	**Pr >= |M|**	<.0001
Signed Rank	**S**	250250	**Pr >= |S|**	<.0001

Basic Statistical Measures			
Location		**Variability**	
Mean	1.759361	**Std Deviation**	2.03473
Median	1.242415	**Variance**	4.14011
Mode	.	**Range**	25.57763
		Interquartile Range	1.19058

Quantiles (Definition 5)	
Level	**Quantile**
100% Max	25.6619715
99%	11.0733094
95%	4.8039369
90%	3.1945420
75% Q3	1.9740866
50% Median	1.2424149
25% Q1	0.7835066
10%	0.5031132
5%	0.3847306
1%	0.2097717
0% Min	0.0843437

Extreme Observations			
Lowest		**Highest**	
Value	**Obs**	**Value**	**Obs**
0.0843437	768	17.1577	798
0.0964967	919	17.5674	384
0.1239902	535	17.7546	843
0.1643608	992	17.8027	231
0.1723780	815	25.6620	666

b)

```
%let NObs = 1000;
%let r = -0.7;
%let gam = 1;
data Trecias(keep=x i);
/*generuojami 1000 tolygiai intervale (0,1) pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių*/
do i = 1 to &NObs;
  u = rand("Uniform");
/*naudojama išsivesta (2.3) formulė*/
  x = (((1-u**(-1/&r))**-1)-1)**(&gam*&r);
  output;
end;
run;
/*brėžiamas atsitiktinių dydžių pasiskirstymo grafikas*/
proc gplot data = Trecias;
plot x*i;
run;
/*brėžiama histograma*/
proc univariate data=Trecias;
var x;
histogram x;
run;
```

A priedo b) lentelės:

Moments			
N	1000	**Sum Weights**	1000
Mean	7.06233075	**Sum Observations**	7062.33075
Std Deviation	36.2583569	**Variance**	1314.66845
Skewness	14.1905747	**Kurtosis**	226.548241
Uncorrected SS	1363230.3	**Corrected SS**	1313353.78
Coeff Variation	513.404968	**Std Error Mean**	1.14658992

Basic Statistical Measures			
Location		**Variability**	
Mean	7.062331	**Std Deviation**	36.25836
Median	1.624905	**Variance**	1315
Mode	.	**Range**	640.77875
		Interquartile Range	3.64881

Extreme Observations			
Lowest		**Highest**	
Value	**Obs**	**Value**	**Obs**
0.0214742	607	186.578	460
0.0278671	679	250.618	655
0.0317115	323	536.659	99
0.0319620	90	627.314	47
0.0356005	817	640.800	575

Quantiles (Definition 5)	
Level	**Quantile**
100% Max	640.8002284
99%	115.3558093
95%	19.3686935
90%	10.9703539
75% Q3	4.2998738
50% Median	1.6249045
25% Q1	0.6510663
10%	0.2745943
5%	0.1596209
1%	0.0480568
0% Min	0.0214742

Tests for Location: Mu0=0				
Test	**Statistic**		**p Value**	
Student's t	**t**	6.159422	**Pr > |t|**	<.0001
Sign	**M**	500	**Pr >= |M|**	<.0001
Signed Rank	**S**	250250	**Pr >= |S|**	<.0001

B priedas

```
%let NObs = 1000;

%let gam = 0.7;

%let r = -0.2;

data Antras(keep= x i);

/*generuojami 1000 tolygiai intervale (0,1) pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių*/

do i = 1 to &NObs;

  u = rand("Uniform");

/* naudojama išsivesta (2.6) formulė*/

  x = (log(1/(1-(u**-&r))))**(&gam/&r);

  output;

end;

/*brėžiamas atsitiktinių dydžių pasiskirstymo grafikas */

proc gplot data = Antras;

plot x*i;

run;

quit;

run;

/*brėžiama histograma*/

proc univariate data=Antras;

var x;

histogram x;

run;
```

B programos lentelės:

Moments			
N	1000	**Sum Weights**	1000
Mean	0.56182008	**Sum Observations**	561.820083
Std Deviation	2.12573142	**Variance**	4.51873406
Skewness	11.758235	**Kurtosis**	192.913107
Uncorrected SS	4829.85713	**Corrected SS**	4514.21532
Coeff Variation	378.365153	**Std Error Mean**	0.06722153

Basic Statistical Measures			
Location		**Variability**	
Mean	0.561820	**Std Deviation**	2.12573
Median	0.081974	**Variance**	4.51873
Mode	.	**Range**	43.42741
		Interquartile Range	0.27007

Extreme Observations			
Lowest		**Highest**	
Value	**Obs**	**Value**	**Obs**
0.000255905	439	12.0302	342
0.000503238	724	17.4988	891
0.000640247	798	20.7554	265
0.001233991	271	23.3873	617
0.001393567	632	43.4277	109

Quantiles (Definition 5)	
Level	**Quantile**
100% Max	4.34277E+01
99%	8.44902E+00
95%	2.71660E+00
90%	1.11482E+00
75% Q3	2.98798E-01
50% Median	8.19744E-02
25% Q1	2.87282E-02
10%	8.75509E-03
5%	5.36144E-03
1%	1.75575E-03
0% Min	2.55905E-04

Tests for Location: Mu0=0				
Test	**Statistic**		**p Value**	
Student's t	**t**	8.35774	**Pr > |t|**	<.0001
Sign	**M**	500	**Pr >= |M|**	<.0001
Signed Rank	**S**	250250	**Pr >= |S|**	<.0001