

VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

Bakalauro baigiamasis darbas

Lee-Carter modelis Baltijos šalims

Lee-Carter Model for Baltic Countries

Jovita Andrušaitytė
Rugilė Tučiūtė

VILNIUS 2016

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
MATEMATINĖS ANALIZĖS KATEDRA

Darbo vadovas prof. habil. dr. Jonas Šiaulys _____

Darbo recenzentas _____

Darbas apgintas _____

Darbas įvertintas _____

Registravimo NR. _____

2016-05-27

Turiny

1	Santrauka/Abstrac	2
2	Įvadas	3
3	Teorinė dalis	4
3.1	Duomenys	4
3.2	Lee-Carter modelis	5
3.3	Matricos skaidymas singuliariomis reikšmėmis	7
3.4	Vienetinės šaknies testas	9
3.5	Normalumo testai	10
3.5.1	χ^2 suderinamumo kriterijus	10
3.5.2	Kolmogorov-Smirnov testas	11
3.6	Nepriklausomumo testai	11
3.6.1	Ljung-Box testas	11
3.6.2	Spirmeno koreliacijos kriterijus	12
4	Empirinė duomenų analizė	13
5	Mirtingumo prognozavimas	17
5.1	Lietuva	17
5.2	Latvija	20
5.3	Estija	23
6	Šalių palyginimas	26
6.1	Modelio ir prognozės tikslumas	26
6.2	Vidutinė tikėtina likusio gyvenimo trukmė	35
7	Išvados	37
	Literatūra	38
A	Priedai	39
A.1	Lentelės	39
A.2	Programos kodas	46

Lee-Carter modelis Baltijos šalims

Santrauka

Darbe nagrinėjamas Lee-Carter modelis mirtingumui prognozuoti. Tiriamos modelio liekanos bei pateikiamos logaritminės mirtingumo normos prognozės Lietuvai, Latvijai ir Estijai. Palyginamas prognozės tikslumas ir vidutinė likusio gyvenimo trukmė.

Raktiniai žodžiai : Lee-Carter modelis, mirtingumo prognozavimas, Baltijos šalys

Lee-Carter Model for Baltic Countries

Abstract

In this paper, we focus on Lee-Carter mortality forecasting. Model residuals are explored and projections of the logit death rates for Lithuania, Latvia and Estonia are presented. The accuracy of forecasts and remaining life expectancies are compared.

Key words : Lee-carter model, mortality forecasting, Baltic countries

2 Įvadas

Pastaraisiais dešimtmečiais žmonių mirtingumas visame pasaulyje mažėja. Tam įtakos turi mokslo pažanga medicinos ir technologijų srityse bei žmonių gyvenimo būdo pasikeitimai. Populiacijai sparčiai senėjant mirtingumo prognozavimas tampa vis svarbesnis, ypač draudimo kompanijoms bei pensijų sistemai, nes netikslios prognozės gali sukelti milijoninius nuostolius.

Faktas, kad mirtingumas mažėja nebūtinai reiškia, kad mirtingumas tolygiai mažėja visose amžiaus grupėse. Dėl to yra labai svarbu teisingai nustatyti mirtingumo pasikeitimus kiekvienoje grupėje laikui bėgant. 1992 metais Lee ir Carter pasiūlė modelį, kuris atsižvelgia į laiko įtaką mirtingumui. Modelis pirmą kartą buvo panaudotas JAV mirtingumo prognozavimui. Laikui bėgant Lee-Carter modelis tapo labai populiarus ir buvo pritaikytas daugelio šalių mirtingumo prognozavimui skirtingais laiko periodais.

Vienas iš šio darbo tikslų buvo pritaikyti Lee-Carter modelį Lietuvos, Latvijos ir Estijos duomenims bei išsiaiškinti, ar šis modelis yra tinkamas kiekvienai iš šių šalių. Kitas tikslas buvo įvertinti vidutinę likusio gyvenimo trukmę ir nustatyti, kuriai iš Baltijos šalių ji yra ilgiausia.

Darbas susideda iš teorinės dalies, kurioje aprašomas Lee-Carter modelis, statistiniai kriterijai ir modelyje naudojami teoriniai faktai. Ketvirtame skyriuje analizuojami empiriniai duomenys. Penktą skyrių sudaro Lee-Carter modelio pritaikymas Baltijos šalių empiriniams mirtingumo duomenims, o šeštame skyriuje yra palyginami gauti rezultatai. Galiausiai, septintame skyriuje pateikiamos išvados.

3 Teorinė dalis

3.1 Duomenys

Duomenys modeliavimui paimti iš internetinės duomenų bazės „Human Mortality Database“ (www.mortality.org).

Duomenų bazė buvo pradėta kurti Berklyje esančios Kalifornijos universiteto Demografijos katedros (JAV) ir Max Planck Demografinių tyrimų instituto (Vokietija) iniciatyva. Prie tolimesnės duomenų bazės kūrimo prisijungė ir Prancūzijos Demografijos studijų institutas. „Human Mortality Database“ baigta kurti 2002 metų gegužę. Joje esantys duomenys yra prieinami visiems.

Šiuo metu duomenų bazėje pateikiami 38 šalių ilgaamžiškumo rodikliai. Jie suskirstyti į tokias grupes:

- Gimusių žmonių skaičius
- Mirčių skaičius
- Populiacijos dydis
- Pakoreguotas populiacijos dydis (angl. exposure-to-risk)
- Mirtingumo norma
- Mirtingumo lentelės

Čia pakoreguotas populiacijos dydis žymimas $ETR_{x,t}$ yra apibrėžiamas [11] kaip vidutinis x -mečių individų skaičius kalendoriniais metais t , pakoreguotas pagal tai kiek laiko individas yra populiacijoje. Vidutinis pakoreguotas populiacijos dydis apskaičiuojamas pagal formulę

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[ETR_{x,t}|L_{x,t} = l] &= l \int_{\xi=0}^1 (p_{x,t})^{\xi} d\xi \\ &= -\frac{l}{\mu_{x,t}}(1 - p_{x,t}) \\ &= \frac{-lq_{x,t}}{\ln(1 - q_{x,t})},\end{aligned}\tag{3.1}$$

kur $L_{x,t}$ yra skaičius individų sulaukusių amžiaus x iki t -ųjų metų sausio 1 dienos, $p_{x,t}$ - tikimybė, kad individas metais t būdamas amžiaus x išgyvens dar bent metus, o $q_{x,t}$ - tikimybė, kad toks individas mirs per sekančius metus. Tuo tarpu $\mu_{x,t}$ yra x - metų mirtingumo galia metais t , kuri apibrėžiama taip

$$\mu_{x,t} = \lim_{\Delta \searrow 0} \frac{\mathbb{P}[x < T_0(t-x) \leq x + \Delta | T_0(t-x) > x]}{\Delta},$$

čia $x, t \in \mathbb{R}$ ir $T_x(t)$ yra x -mečio likusio gyvenimo trukmė metais t . Formulė (3.1) galioja esant prielaidai, kad

$$\mu_{x+\xi_1, t+\xi_2} = \mu_{x,t}, \text{ kur } 0 \leq \xi_1, \xi_2 < 1 \text{ ir } x, t \in \mathbb{Z}_+.$$

Duomenys atskirose grupėse yra suskirstyti pagal lytį kartu ir atskirai, pagal amžių ir metus. Populiacijos dydis yra pateiktas 1x1 (pagal amžių ir metus) ir 5x1 (pagal 5 metų amžiaus grupes ir metus) formatais. Mirčių skaičius, pakoreguotas populiacijos dydis, mirtingumo norma ir mirtingumo lentelės yra pateiktos atitinkamais formatais:

- 1x1 (pagal amžių ir metus)
- 1x5 (pagal amžių ir 5 metų laiko intervalą)
- 1x10 (pagal amžių ir 10 metų laiko intervalą)
- 5x1 (pagal 5 metų amžiaus grupes ir metus)
- 5x5 (pagal 5 metų amžiaus grupes ir 5 metų laiko intervalą)
- 5x10 (pagal 5 metų amžiaus grupes ir 10 metų laiko intervalą)

Suskirstymas pagal amžių reiškia, kad duomenys pateikiami 0, 1, 2, ..., 109, 110+ amžiams. 5 metų amžiaus grupės pateikiamos formatu 0, 1-4, 5-9, 10-14, ..., 105-109, 110+.

3.2 Lee-Carter modelis

Tarkime, kad $m_{x,t}$ yra x -mečio mirtingumo norma metais t , t.y. santykis tarp metais t mirusių x -mečių skaičiaus ($D_{x,t}$) ir pakoreguoto x -mečių populiacijos dydžio metais t ($ETR_{x,t}$):

$$m_{x,t} = \frac{D_{x,t}}{ETR_{x,t}}.$$

1992 metais Ronald D. Lee ir Lawrence R. Carter [8] pasiūlė tiesinį modelį logaritminei mirtingumo normai $\eta_{x,t}$ rasti:

$$\eta_{x,t} = \ln(m_{x,t}) = \alpha_x + \beta_x k_t + \epsilon_{x,t}, \quad x = 1, \dots, A; t = 1, \dots, T, \quad (3.2)$$

kur α_x, β_x yra nuo amžiaus priklausantys parametrai, k_t yra nuo metų priklausantis parametras, o modelio paklaidos $\epsilon_{x,t}$ yra Gauso atsitiktiniai dydžiai $N(0, \sigma^2)$. Paklaidos $\epsilon_{x,t}$ atspindi amžiaus ir istorinio tarpsnio įtaką, kuri nebuvo užfiksuota modelio. Koeficientas α_x yra pagal amžių kintanti konstanta, kuri apibūdina nuo amžiaus priklausančio mirtingumo formą. Indeksas k_t nusako kaip keičiasi mirtingumas laikui bėgant. Koeficientas β_x atspindi kaip indekso k_t pasikeitimas paveikia skirtingas amžiaus grupes.

Nesunku pastebėti, kad lygtis (3.2) turi be galo daug sprendinių. Tarkime, kad vektoriai $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_A)$, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_A)$ ir $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_T)$ yra lygties sprendiniai. Tuomet bet kokiam skaičiui c , vektorių rinkiniai $(\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}c, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{k} + c)$ ir $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}c, \mathbf{k}/c)$ taip pat yra lygties sprendiniai. Tam, kad gautume vienintelę lygties sprendinį Lee ir Carter pasiūlė tokius apribojimus parametrams β_x ir k_t :

$$\sum_{x=1}^A \beta_x = 1; \quad \sum_{t=1}^T k_t = 0. \quad (3.3)$$

Iš apribojimo $\sum_{t=1}^T k_t = 0$ išplaukia, kad parametru α_x įvertiniai yra lygūs logaritminės mirtingumo normos vidurkiui pagal metus, t.y. $\tilde{\alpha}_x = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \eta_{x,t}$.

Tam, kad modeliui galėtume taikyti regresinę analizę reikia, kad jis turėtų priklausomą ir nepriklausomą kintamuosius, kurių reikšmės būtų žinomos. Iš to išplaukia, kad nagrinėjamam modeliui negalime pritaikyti regresinės analizės, nes jis turi tik priklausomąjį kintamąjį. Anot Lee ir Carter, optimalus būdas rasti modelio parametrų įvertinius yra SVD (Matricos skaidymas singuliariomis reikšmėmis) metodo pritaikymas centruotų pagal metus logaritminės mirtingumo normos reikšmių matricai $\mathbf{Z} = [z_{x,t}]_{x=1,\dots,A,t=1,\dots,T}$, kur $z_{x,t} = \eta_{x,t} - \tilde{\alpha}_x$. Naudojantis matrica $\mathbf{Z}$ galime apskaičiuoti normalizuotus tikrinius vektorius $\mathbf{u}_1 = [u_{1,1}, \dots, u_{1,T}]^T$ ir $\mathbf{v}_1 = [v_{1,1}, \dots, v_{1,A}]^T$ matricoms $\mathbf{Z}^T \mathbf{Z}$ ir $\mathbf{Z} \mathbf{Z}^T$ pagal jų didžiausią tikrinę reikšmę λ_1 . Tuomet, $\beta_x, x = 1, \dots, A$ įvertiniai tenkinantys (3.3) apibrojimą ir $k_t, t = 1, \dots, T$ įvertiniai randami pagal formules:

$$\hat{\beta} = (\hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_A)^T = \frac{\mathbf{v}_1}{\sum_{j=1}^A v_{1,j}}, \quad \tilde{\mathbf{k}} = (\tilde{k}_1, \dots, \tilde{k}_T)^T = \lambda_1 \left(\sum_{j=1}^A v_{1,j} \right) \mathbf{u}_1. \quad (3.4)$$

Parametrus k_t reikia iš naujo įvertinti, nes su įvertiniais $\tilde{\mathbf{k}}$ gautas mirčių skaičius nėra lygus stebėtam mirčių skaičiui. Naujus k_t įvertinius randame iš lygties:

$$D_t = \sum_{x=1}^A ETR_{x,t} \exp(\tilde{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \tilde{k}_t)_{1,\dots,T}, \quad (3.5)$$

kur $D_t = \sum_{x=1}^A D_{x,t}$ yra bendras mirčių skaičius metais t , o $ETR_{x,t}$ buvo apibrėžtas anksčiau.

Reikalinga dar viena paramaterų įvertinių transformacija, kad būtų tenkinami (3.3) apribojimai. Apibrėžkime

$$\hat{k}_t = \bar{k}_t - \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \bar{k}_t, t = 1, \dots, T, \quad \hat{\alpha}_x = \tilde{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \bar{k}_t, x = 1, \dots, A. \quad (3.6)$$

Norėdami prognozuoti logaritminę mirtingumo normą, Lee ir Carter tarė, kad parametrai α_x ir β_x yra pastovūs laikui bėgant, o k_t yra stochastinis procesas. Dėl to, $\eta_{x,t}$ prognozei rasti reikia prognozuoti tik parametro k_t reikšmes. Savo straipsnyje k_t modeliavimui jie pasiūlė naudoti atsitiktinį klaidžiojimą su poslinkiu, t. y.

$$\hat{k}_t = \hat{k}_{t-1} + \theta + \xi_t, t \geq 2, \quad (3.7)$$

kur ξ_t yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę Gauso atsitiktiniai dydžiai $N(0, \sigma_{ak}^2)$. Poslinkio parametro θ didžiausio tikėtino įvertinys yra:

$$\hat{\theta} = \frac{\hat{k}_T - \hat{k}_1}{T - 1}, \quad (3.8)$$

o dispersijos σ_{ak}^2 įvertinys atitinkamai lygus:

$$\hat{\sigma}_{ak}^2 = \frac{1}{T - 1} \sum_{t=1}^{T-1} (\hat{k}_{t+1} - \hat{k}_t - \hat{\theta})^2. \quad (3.9)$$

Įvertindami $\widehat{k}_{T+\Delta t}$ laiko momentu $T + \Delta t$ gauname, kad $\widehat{k}_{T+\Delta t} = \widehat{k}_T + (\Delta t)\widehat{\theta}\sqrt{\Delta t}\tilde{\xi}$, kur $\tilde{\xi} \approx N(0, \sigma_{ak}^2)$. Tuomet logaritminės mirtingumo normos prognozė sudaroma taip:

$$\widehat{\eta}_{x,T+\Delta t} = \widehat{\alpha}_x + \widehat{\beta}_x(\widehat{k}_T + (\Delta t)\widehat{\theta}) = \widehat{\alpha}_x + \widehat{\beta}_x \left(\widehat{k}_T + \Delta t \frac{\widehat{k}_T - \widehat{k}_1}{T - 1} \right). \quad (3.10)$$

3.3 Matricos skaidymas singulariomis reikšmėmis

Šiame skyrelyje aprašomas matricos skaidymo singulariomis reikšmėmis (SVD) principas, kuris naudojamas Lee-Carter modelio parametrų įvertinimui.

2.3.1 Apibrėžimas *Matrica A yra vadinama ortogonalia, jei $AA^T = A^T A = I$, kur I yra vienetinė matrica.*

2.3.2 Apibrėžimas *Vektoriai $\mathbf{x}$ ir $\mathbf{y}$ yra ortogonalūs, jei $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i = 0$.*

2.3.3 Apibrėžimas *Atvirkštinė kvadratinės matricos A matrica vadinama matrica A^{-1} , tenkinanti lygybę $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.*

2.3.4 Apibrėžimas *Kvadratinės matricos A tikriniu vektoriumi vadinamas nenulinis vektorius $\mathbf{v}$, kuris tenkina lygtį $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Skaičius λ yra vadinamas matricos A tikrine reikšme atitinkančia tikrinių vektorių $\mathbf{v}$.*

2.3.5 Apibrėžimas *Matricos A singularioji reikšmė vadinama kvadratinė šaknis iš matricos AA^T arba matricos $A^T A$ tikrinės reikšmės. Matricos A kairiuoju singulariuoju vektoriumi vadinamas matricos AA^T tikrinis vektorius, o dešiniuoju singulariuoju vektoriumi matricos $A^T A$ tikrinis vektorius.*

2.3.6 Apibrėžimas *Vektoriaus $\mathbf{x}$ norma Euklido erdvėje yra vadinamas skaičius $\|\mathbf{x}\| = (\mathbf{x}^T \mathbf{x})^{1/2}$.*

2.3.7 Apibrėžimas *Matricos A norma Euklido erdvėje yra $\|A\| = \sup_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}$.*

Teorema. *Tarkime A yra $(m \times n)$ matrica, kur $m \geq n$. Tuomet egzistuoja ortogonali matrica U $(m \times m)$ ir V $(n \times n)$ bei diagonalinė matrica $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ $(m \times n)$, kur $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$, tokios, kad*

$$A = U\Sigma V^T.$$

Matricos $U = [u_1, \dots, u_m]$ stulpeliai yra matricos A kairieji singularieji vektoriai, o $V = [v_1, \dots, v_n]$ stulpeliai yra matricos A dešinieji singularieji vektoriai. Reikšmės σ_i yra matricos A singulariosios reikšmės. Jeigu $\sigma_r > 0$ yra mažiausia singularioji reikšmė, tuomet matricos A rangas yra r .

▷ Įrodydami teoremą remsimės Ruhe [12]. Iš pradžių surandame matricos A pirmąją singulariąją reikšmę ir ją atitinkančius kairįjį ir dešinįjį singulariuosius vektorius, taip vienetu

sumažindami pradinės matricos A eilučių ir stulpelių skaičių. Toliau analogiškai kartosime šią procedūrą.

Remiantis (2.3.7) apibrėžimu, egzistuoja vienetinis vektorius $\mathbf{x}$, toks, kad

$$\mathbf{z} = A\mathbf{x}, \|\mathbf{z}\| = \|A\| =: \sigma_1.$$

Pažymėkime $\mathbf{y} := \mathbf{z}/\|\mathbf{z}\|$. Tuomet $A\mathbf{x} = \sigma_1\mathbf{y}$, kur $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\| = 1$. Toliau, vektoriui $\mathbf{x}$ ir analogiškai vektoriui $\mathbf{y}$ konstruojame ortogonalius vektorius, taip sudarydami matricas $V_1 = [\mathbf{x}, X_{n-1}]$ ir $U_1 = [\mathbf{y}, Y_{m-1}]$. Tuomet

$$A_1 = U_1^T A V_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{y}^T \\ X_{n-1}^T \end{bmatrix} A [\mathbf{x}, Y_{m-1}] = \begin{bmatrix} \mathbf{y}^T A \mathbf{x} & \mathbf{y}^T A X_{n-1} \\ Y_{m-1}^T A \mathbf{x} & Y_{m-1}^T A X_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \boldsymbol{\omega}^T \\ 0 & B \end{bmatrix},$$

nes $\mathbf{y}^T A \mathbf{x} = \mathbf{y}^T \sigma_1 \mathbf{y} = \sigma_1 \mathbf{y}^T \mathbf{y} = \sigma_1$ ir $Y_{m-1}^T A \mathbf{x} = \sigma_1 Y_{m-1}^T \mathbf{y} = 0$, kadangi $Y_{m-1} \perp \mathbf{y}$.

Tariame, kad $\boldsymbol{\omega}^T := \mathbf{y}^T A X_{n-1} = 0$. Įrodymui apskaičiuojame

$$A_1 \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \boldsymbol{\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 + \boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\omega} \\ B \boldsymbol{\omega} \end{pmatrix}$$

iš ko išplaukia, kad

$$\left\| A_1 \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \boldsymbol{\omega} \end{pmatrix} \right\|^2 = (\sigma_1^2 + \boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\omega})^2 + \|B \boldsymbol{\omega}\|^2 \geq (\sigma_1^2 + \boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\omega})^2.$$

Kadangi V ir U yra ortogonalios, tai

$$\sigma_1 = \|A\| = \|A_1\| \geq \frac{\left\| A_1 \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \boldsymbol{\omega} \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \boldsymbol{\omega} \end{pmatrix} \right\|} \geq \frac{((\sigma_1^2 + \boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\omega})^2 + \|B \boldsymbol{\omega}\|^2)^{1/2}}{(\sigma_1^2 + \boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\omega})^{1/2}} \geq (\sigma_1^2 + \boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\omega})^{1/2} \geq \sigma_1.$$

Matome, kad tik tuomet, kai $\boldsymbol{\omega} = 0$ visos nelygybės tampa lygybėmis. Taigi, gavome, kad

$$A_1 = U_1^T A V_1 = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

Toliau, analogiškus veiksmus atliekame matricai $B ((m-1) \times (n-1))$, po kurių gauname matricą $C ((m-2) \times (n-2))$. Procedūrą kartojame r kartų, kol apatiniam dešiniajame kampe gauname nulį, t.y.

$$U^T A V = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \sigma_r & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} = \Sigma, \quad (3.12)$$

kur matrica U yra matricų $U_1, U_2, \dots, U_r$ sandauga, kurioms prieš tai buvo atitinkamai pridėamos eilutės ir stulpeliai iš vienetinės matricos. Tuo tarpu matrica V analogiškai yra gauta iš $V_1, V_2, \dots, V_r$.

Kadangi matricos U ir V yra ortogonalios, t.y. $U^{-1} = U^T$ ir $V^{-1} = V^T$, gauname, kad $A = (U^T)^{-1} \Sigma V^{-1} = U \Sigma V^T$. $\triangleleft$

3.4 Vienetinės šaknies testas

3.4.1 Apibrėžimas *Atsitiktinių dydžių rinkinį $X_t = (X_t, t \in T)$ vadiname atsitiktiniu procesu, jei visi X_t yra apibrėžti vienoje tikimybinėje erdvėje (Ω, F, P) ir $T \subset \mathbb{R}$.*

3.4.2 Apibrėžimas *Atsitiktinis procesas X_t yra vadinamas stacionariu, jei jo tikimybės charakteristikos laike nekinta, t.y.*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_t) &= \mathbb{E}(X_{t-1}) = \mu, \forall t; \\ \mathbb{D}(X_t) &= \gamma_0 < \infty, \forall t; \\ \text{Cov}(X_t, X_{t-k}) &= \gamma_k, \forall t, \forall k.\end{aligned}$$

Dickey-Fuller testas [6] naudojamas proceso stacionarumui tikrinti. Įvertinius $\hat{k}_t$ galėsime modeliuoti kaip atsitiktinį klaidžiojimą su poslinkiu, jei testas patvirtins hipotezę, kad įvertiniai $\hat{k}_t$ sudaro nestacionarų procesą.

Pažymėkime atsitiktinio proceso šaknį simboliu ρ . Jei procesas turi vienetinę šaknį ($\rho = 1$), tai procesas yra nestacionarus, jei neturi vienetinės šaknies ($\rho \neq 1$), tai tuomet jis nėra nestacionarus.

Nagrinėjame modelius, kur $\rho \in \mathbb{R}$

- a) $Y_t = \rho Y_{t-1} + e_t, t = 1, 2, \dots$, kur $Y_0 = 0$;
- b) $Y_t = \varphi + \rho_\varphi Y_{t-1} + e_t, t = 1, 2, \dots$, kur $Y_0 = 0$;
- c) $Y_t = \varphi + \beta t + \rho_t Y_{t-1} + e_t, t = 1, 2, \dots$, kur $Y_0 = 0$.

Tarkime turime n stebėjimų $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$. Apibrėžiame $(n-1)$ dydžio vektorius $\mathbf{1}^T = (1, 1, 1, \dots, 1)$, $\mathbf{t}^T = (1-(n/2), 2-(n/2), 3-(n/2), \dots, n-1-(n/2))$, $\mathbf{Y}_t^T = (Y_2, Y_3, Y_4, \dots, Y_n)$, $\mathbf{Y}_{t-1}^T = (Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_{n-1})$.

Tegul $\mathbf{U}_1 = \mathbf{Y}_{t-1}$, $\mathbf{U}_2 = (\mathbf{1}, \mathbf{Y}_{t-1})$ ir $\mathbf{U}_3 = (\mathbf{1}, \mathbf{t}, \mathbf{Y}_{t-1})$. Tuomet ρ yra lygus

$$(\mathbf{U}_1^T \mathbf{U}_1)^{-1} \mathbf{U}_1^T \mathbf{Y}_t,$$

$\hat{\rho}_\varphi$ yra lygus paskutiniam vektoriaus

$$(\mathbf{U}_2^T \mathbf{U}_2)^{-1} \mathbf{U}_2^T \mathbf{Y}_t$$

elementui ir $\hat{\rho}_t$ yra paskutinis vektoriaus

$$(\mathbf{U}_3^T \mathbf{U}_3)^{-1} \mathbf{U}_3^T \mathbf{Y}_t$$

elementas. Tikriname hipotezę

$$\begin{cases} H_0 : \rho = 1, \\ H_1 : \rho \neq 1. \end{cases}$$

Testo statistika modeliui a) yra

$$\hat{\tau} = (\hat{\rho} - 1)(S_{e1}^2 c_1)^{-\frac{1}{2}},$$

atitinkamai modeliui b)

$$\hat{\tau}_\varphi = (\hat{\rho}_\varphi - 1)(S_{e2}^2 c_2)^{-\frac{1}{2}},$$

ir modeliui c)

$$\hat{\tau}_t = (\hat{\rho}_t - 1)(S_{e3}^2 c_3)^{-\frac{1}{2}}.$$

Čia $S_{ek}^2 = (n - k - 1)^{-1}[\mathbf{Y}_t^T(\mathbf{1} - \mathbf{U}_k(\mathbf{U}_k^T \mathbf{U}_k)^{-1} \mathbf{U}_k^T) \mathbf{Y}_t]$ ir c_k yra $(\mathbf{U}_k^T \mathbf{U}_k)^{-1}$ apatinis dešinysis elementas.

Jei statistikos reikšmė yra didesnė už atitinkamą Dickey-Fuller kritinę reikšmę, tuomet neturime pagrindo atmesti nulinės hipotezės. Priešingu atveju nulinę hipotezę atmetame.

3.5 Normalumo testai

Šiame skyrelyje aprašomi testai, kurie praktinėje darbo dalyje bus naudojami paklaidų normalumo tikrinimui.

3.5.1 χ^2 suderinamumo kriterijus

χ^2 suderinamumo kriterijus yra naudojamas hipotezėms apie atsitiktinio dydžio skirstinį tikrinti. χ^2 kriterijus parodo, ar empirinio ir teorinio skirstinių skirtumas yra reikšmingas, t.y. tikrinama, ar turimas empirinis skirstinys yra suderinamas su teoriniu modeliu. Daugiau informacijos apie šį kriterijų galima rasti [3]. Tarkime, turime n tolydaus a.d. X stebėjimų ir norime patikrinti ar jo skirstinys yra normalusis. Tokiu atveju tikriname hipotezę:

$$\begin{cases} H_0 : X \sim N(\mu, \sigma^2), \\ H_1 : X \not\sim N(\mu, \sigma^2). \end{cases}$$

Galimų reikšmių aibė suskirstyta į nesikertančius intervalus $(-\infty; c_1), [c_1, c_2), \dots, [c_{k-1}, +\infty)$, i-ajam intervalui priklauso o_i stebėjimų. Hipotezei tikrinti naudojama statistika

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i}, \quad (3.13)$$

čia

$$e_i = n \left(\Phi \left(\frac{c_i - \bar{x}}{s} \right) - \Phi \left(\frac{c_{i-1} - \bar{x}}{s} \right) \right).$$

Tarkime reikšmingumo lygmuo yra α . Jei $\chi^2 > \chi_\alpha^2(k-3)$, hipotezę H_0 atmetame (duomenys neleidžia teigti, kad stebime normalųjį atsitiktinį dydį). Jei $\chi^2 \leq \chi_\alpha^2(k-3)$, hipotezės H_0 neatmetame (duomenys leidžia teigti, kad stebime normalųjį atsitiktinį dydį). Čia $\chi_\alpha^2(k-3)$ yra χ^2 skirstinio su $k-3$ laisvės laipsnių α lygmens kritinė reikšmė.

3.5.2 Kolmogorov-Smirnov testas

Kaip ir χ^2 suderinamumo kriterijaus atveju, Kolmogorov - Smirnov testas naudojamas hipotezei apie atsitiktinio dydžio normalumą tikrinti. Tarkime, turime N atsitiktinio dydžio X stebėjimų $x_1, x_2, \dots, x_N$. Norime patikrinti ar šis atsitiktinis dydis yra pasiskirstęs pagal normalųjį skirstinį. Tuo tikslu tikriname hipotezę:

$$\begin{cases} H_0 : X \sim N(\mu, \sigma^2), \\ H_1 : X \not\sim N(\mu, \sigma^2). \end{cases}$$

Iš atsitiktinio dydžio stebėjimų įvertiname parametrus μ ir σ^2 :

$$\hat{\mu} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i,$$
$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \hat{\mu})^2.$$

Testo statistika apskaičiuojama pagal formulę:

$$D = \sup_x |F^*(x) - S_N(x)|,$$

kur $F_*(x)$ yra normaliojo atsitiktinio dydžio pasiskirstymo funkcija su parametrais $\hat{\mu}$ ir $\hat{\sigma}^2$, o $S_N(x)$ yra atsitiktinio dydžio X pasiskirstymo funkcija, kuri yra apibrėžiama taip:

$$S_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I_{x_i < x},$$

čia

$$I_{x_i < x} = \begin{cases} 1, & \text{kai } x_i < x \\ 0, & \text{kai } x_i \geq x \end{cases}.$$

Jei statistikos D reikšmė viršija kritinę reikšmę iš lentelės, tuomet atmetame nulinę hipotezę. Kritinių reikšmių lentelę ir daugiau informacijos apie testą galima rasti [9].

3.6 Nepriklausomumo testai

3.6.1 Ljung-Box testas

Laiko eilutėms pritaikius tam tikrą modelį visuomet yra gaunamos paklaidos. Jei modelis yra tinkamai parinktas, tai paklaidos turi būti tarpusavyje nepriklausomos. Šiai sąlygai patikrinti dažniausiai naudojamas Ljung-Box testas [10]. Praktinėje dalyje šį testą naudosime paklaidų, gautų po įvertinių $\hat{k}_t$ modeliavimo, nepriklausomumui tikrinti.

Tarkime, turime diskretaus laiko eilutę $\{w_t\}$, $t = 1, \dots, n$. Jai pritaikius bet kurį laiko eilučių modelį gauname paklaidas $\{\hat{e}_t\}$, $t = 1, \dots, n$. Tikriname hipotezę:

$$\begin{cases} H_0 : \{\hat{e}_t\} \text{ nepriklausomos,} \\ H_1 : \{\hat{e}_t\} \text{ priklausomos} \end{cases}$$

Hipotezei tikrinti naudojama statistika

$$Q = n(n-2) \sum_{k=1}^m \frac{\hat{r}_k^2}{n-k}, \quad (3.14)$$

kur

$$\hat{r}_k = \frac{\sum_{t=k+1}^n \hat{e}_t \hat{e}_{t-k}}{\sum_{t=1}^n \hat{e}_t^2}$$

yra paklaidų autokoreliacijos įvertinys laige k ($k=1, 2, \dots$), o m yra tikrinamų lagų skaičius.

Tarkime reikšmingumo lygmuo yra α . Nulinė hipotezė yra atmetama, jei $Q > \chi_{1-\alpha, m}^2$. Jeigu $Q < \chi_{1-\alpha, m}^2$, tai H_0 neatmetame. Čia $\chi_{1-\alpha, m}^2$ yra χ^2 skirstinio su m laisvės laipsnių α lygmens kritinė reikšmė. Kadangi testas yra taikomas paklaidoms, todėl laisvės laipsnių skaičius turi būti pakoreguotas pagal tai koks modelis buvo pritaikytas pradinei laiko eilutei.

3.6.2 Spirmeno koreliacijos kriterijus

Kriterijus naudojamas modelio paklaidų nepriklausomumui tikrinti. Tarkime, stebime tolydžių atsitiktinių dydžių porą (X, Y) ir norime patikrinti ar jie yra nepriklausomi. Stebėjimo metu gautus duomenis sudaro poros (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, n$. Abiejų a.d. reikšmės atskirai suranguojamos, t.y. R_{xi} yra x_i rangas, o R_{yi} - y_i rangas. Tuomet duomenis sudaro poros (R_{xi}, R_{yi}) , $i = 1, \dots, n$. Tikriname hipotezę:

$$\begin{cases} H_0 : X \text{ ir } Y \text{ nekoreliuoja,} \\ H_1 : X \text{ ir } Y \text{ koreliuoja} \end{cases}$$

Nulinė hipotezė H_0 reiškia, kad X ir Y yra nepriklausomi a.d., alternatyva H_1 - a.d. yra priklausomi. Hipotezei tikrinti naudojama statistika

$$T = r_s \sqrt{\frac{n-2}{1-r_s^2}}, \quad (3.15)$$

čia r_s - Spirmeno koreliacijos koeficientas, kuris yra aprašytas [4] ir yra apskaičiuojamas pagal formulę:

$$r_s = \frac{\sum_{i=1}^n (R_{xi} - \frac{n+1}{2}) (R_{yi} - \frac{n+1}{2})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (R_{xi} - \frac{n+1}{2})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (R_{yi} - \frac{n+1}{2})^2}}$$

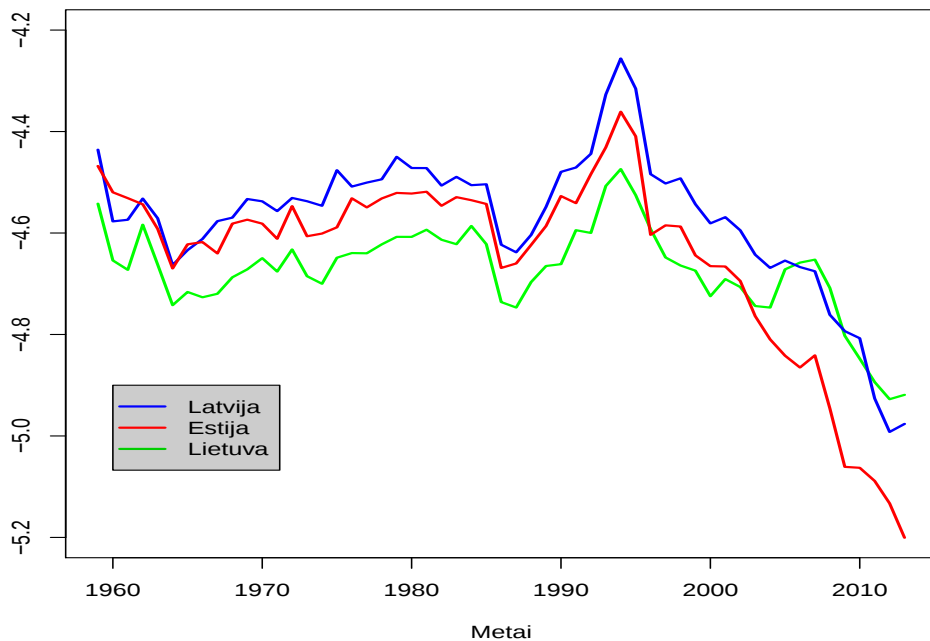
Tarkime reikšmingumo lygmuo yra α . Hipotezė H_0 atmetama, jeigu $|T| > t_{\alpha/2}(n-2)$. Jei $|T| \leq t_{\alpha/2}(n-2)$, tai hipotezės H_0 neatmetame. Čia $t_{\alpha/2}(n-2)$ yra Stjudento skirstinio su $(n-2)$ laisvės laipsnių $\alpha/2$ lygmens kritinė reikšmė.

4 Empirinė duomenų analizė

Tikriausiai daugelis tikisi, kad įvairūs Baltijos šalių rodikliai yra tarpusavyje panašūs. Ne išimtis yra ir logaritminė mirtingumo norma. 4.1 grafike pavaizduotos Baltijos šalių vidutinės empirinės logaritminės mirtingumo normos, kurios apskaičiuojamos pagal formulę

$$\bar{\eta}_{x,t} = \frac{1}{101} \sum_{x=0}^{100} \eta_{x,t}, \quad t = 1959, \dots, 2013.$$

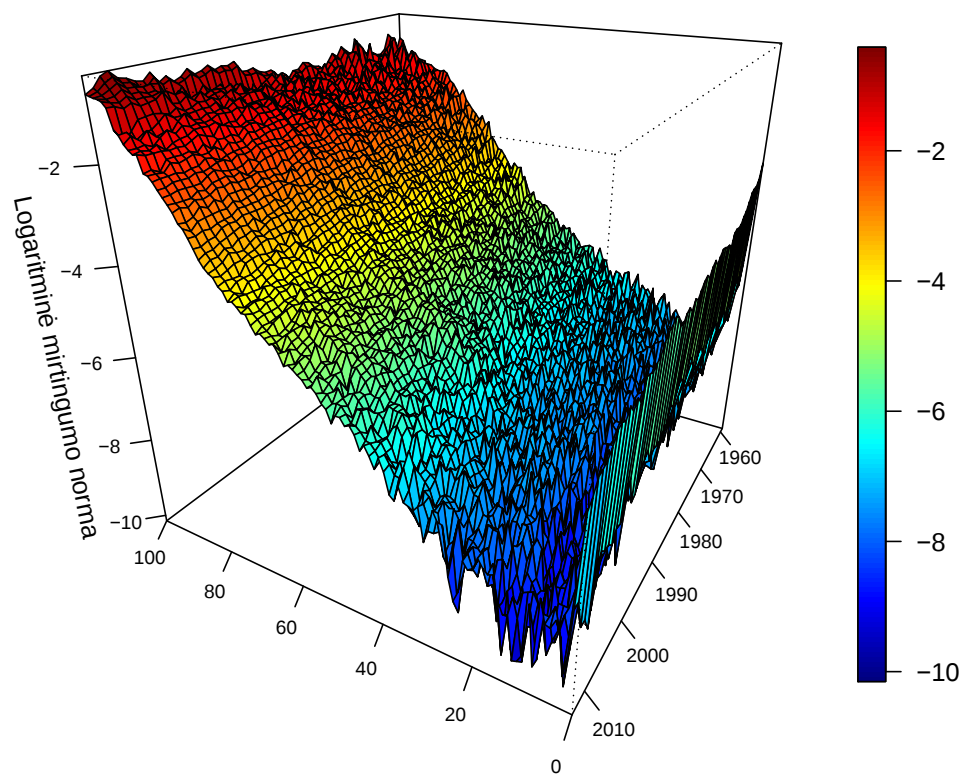
Galime matyti, kad visose trijose šalyse mirtingumo lygio svyravimai yra labai panašūs. Apytiksliai iki 2003 metų mažiausias mirtingumas buvo Lietuvoje, o didžiausias Latvijoje. Apie 2003 metus Lietuvos mirtingumo lygis, priešingai nei Estijos ir Latvijos, pradėjo augti ir tapo didžiausias tarp Baltijos šalių.



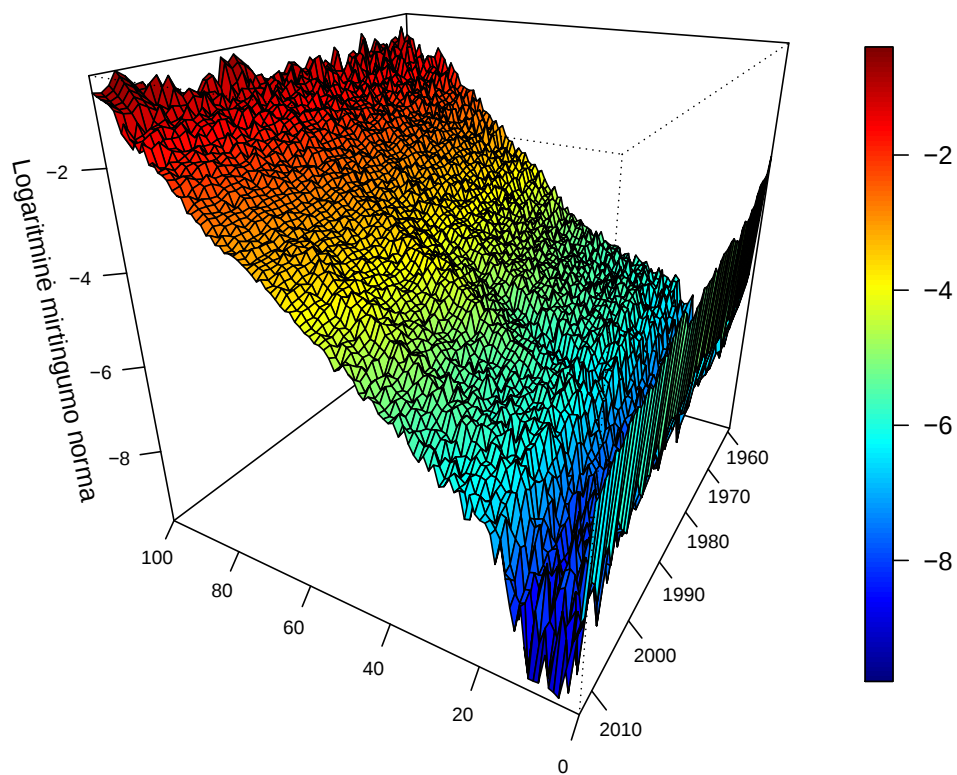
4.1 pav.: Vidutinė empirinė logaritminė mirtingumo norma

Modelio parametrų įvertinimui reikalinga mirtingumo norma, pakoreguotas populiacijos dydis ir mirčių skaičius. „Human mortality database“ duomenų bazėje šie duomenys Baltijos šalims yra prieinami 1959 - 2013 metams, tačiau nurodyta, kad Lietuvai duomenys gali būti nepatikimi 1959 - 1979 metais, Latvijai 1959 - 1969, o Estijai 1990 - 1999 metais. Bandant išvengti nepatikimų duomenų naudojimo turėtume atmesti visus duomenis iki 2000 metų, tačiau tada turėtume tik 9 metų intervalą parametrų įvertinimui. Remiantis Lee ir Carter [8], modeliavimui reikia ne mažiau nei 10 - 20 metų. Dėl šios priežasties parametrų įvertinimui pasirinkome duomenis nuo 1980 metų. Iš 4.2 - 4.4 paveikslėlių, kuriuose pavaizduoti Baltijos šalių empirinės logaritminės mirtingumo normos paviršiai moterų ir vyrų atveju, matome, kad kiekvienai šaliai modeliavimui tinkamiausias amžiaus intervalas apytiksliai yra nuo 30 iki 90 metų.

Moterys

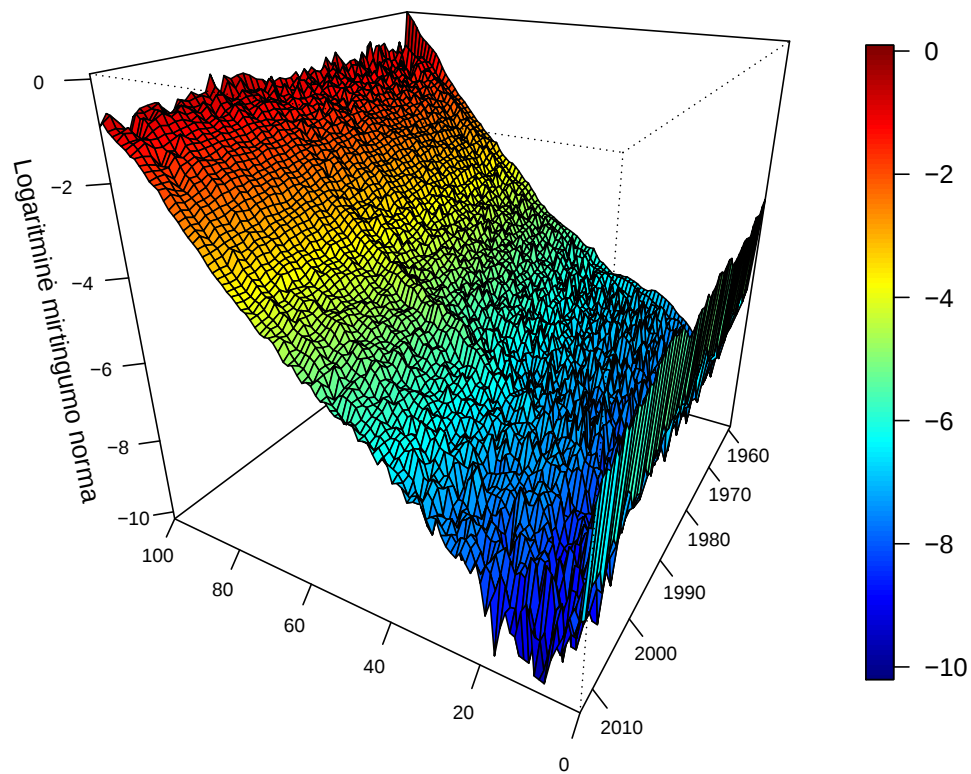


Vyrai

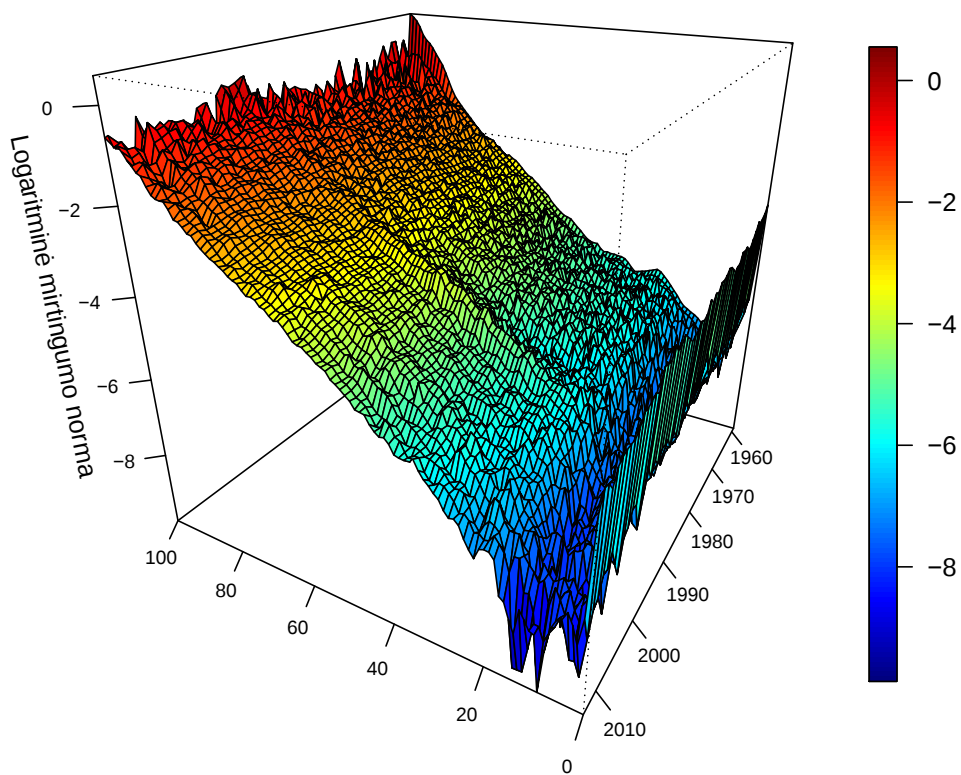


4.2 pav.: Empirinės logaritminės mirtingumo normos paviršiai (Lietuva)

Moterys

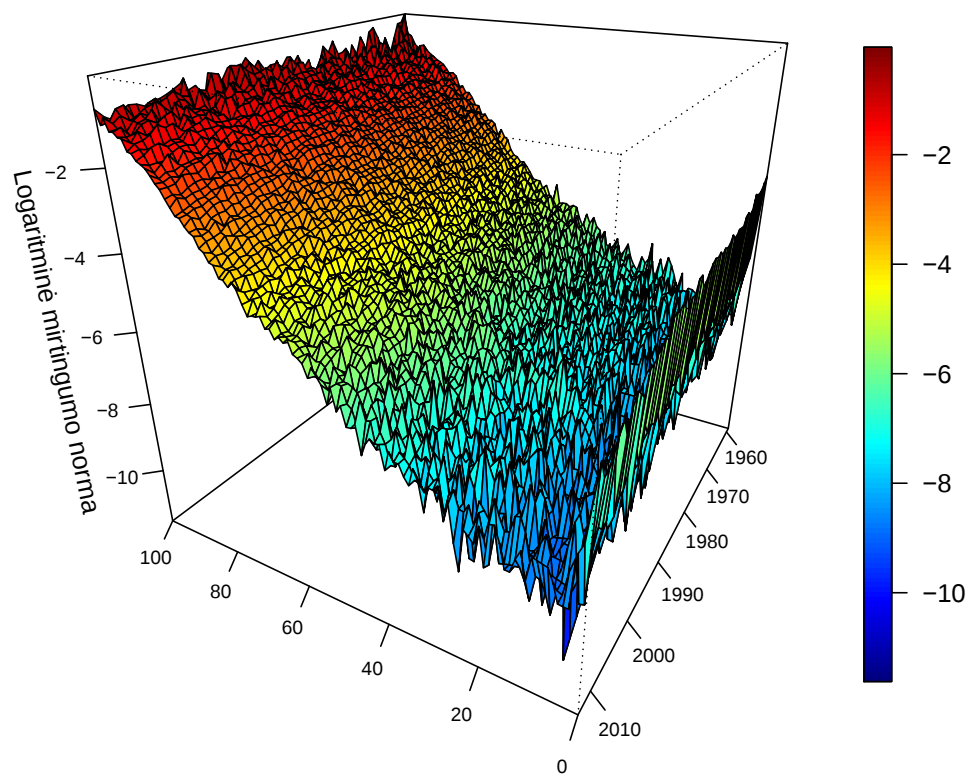


Vyrai

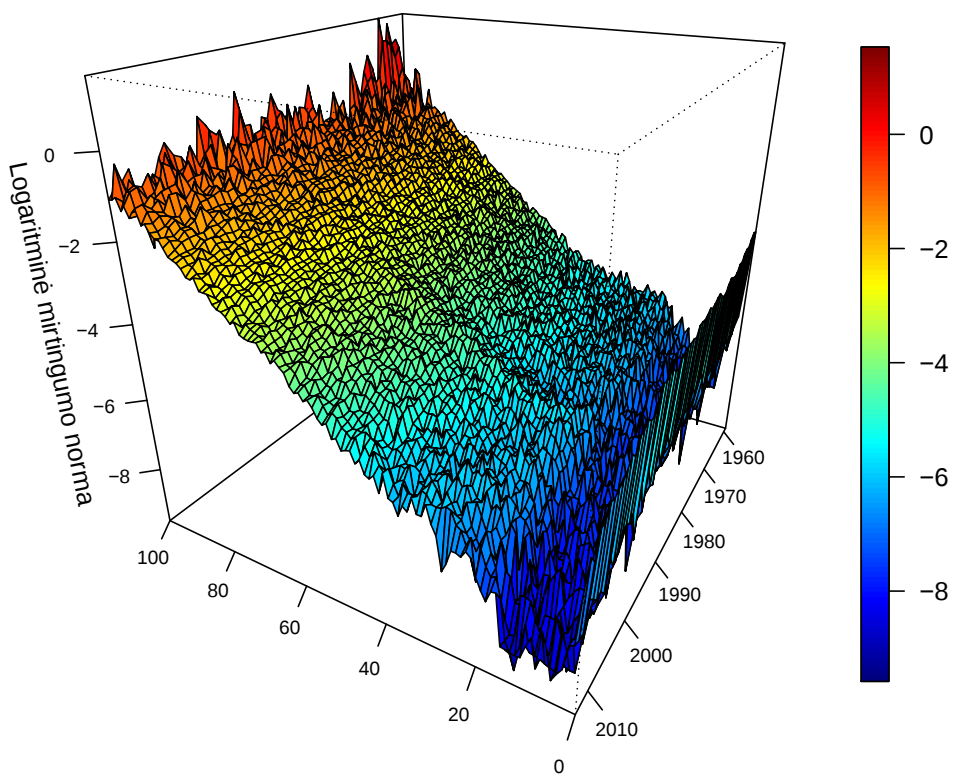


4.3 pav.: Empirinės logaritminės mirtinumo normos paviršiai (Latvija)

Moterys



Vyrai



4.4 pav.: Empirinės logaritminės mirtingumo normos paviršiai (Estija)

5 Mirtingumo prognozavimas

Kiekvienai šaliai išskiriame dvi duomenų imtis:

- 1-oji imtis: 1980 - 2008 metai,
- 2-ojo imtis: 2009 - 2013 metai.

Iš pirmosios imties įvertinsime modelio parametrus ir gautus logaritminės mirtingumo normos įverčius palyginsime su empiriniais duomenimis. Tuomet 2009 - 2013 metams atlikime logaritminės mirtingumo normos prognozę ir gautus rezultatus taip pat palyginsime su realiais (žinomais) duomenimis.

5.1 Lietuva

Iš lygybių (3.3) - (3.6) Lietuvai apskaičiuojame $\hat{\alpha}_x, \hat{\beta}_x, x = 30, \dots, 90$ ir $\hat{k}_t, t = 1980, \dots, 2008$. Gauti įverčiai pateikti 5.1 paveikslėlyje. Laikydami $\hat{k}_t, t = 1981, \dots, 2008$ pirmos eilės autoregresiniu procesu, tikriname vienatinės šaknies egzistavimą naudodamiesi Dickey-Fuller (DF) testu. Gautos testo p-reikšmės pateiktos 6.5 lentelėje

	DF
Moterys	0,6365
Vyrai	0,6287

5.1 lentelė: Vienatinės šaknies testo p-reikšmės

Akivaizdu, kad esant reikšmingumo lygmeniui 0,05 nei vyrams nei moterims, negalime atmesti nulinės hipotezės apie vienatinės šaknies egzistavimą. Dėl to, $\hat{k}_t$ modeliuojame kaip atsitiktinį klaidžiojimą su poslinkiu. Naudodamiesi (3.8) formule gauname, kad moterims $\hat{\theta} = -0,4802$, o vyrams $\hat{\theta} = 0,1278$. Toliau tikriname ar paklaidos ξ_t yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę Gauso atsitiktiniai dydžiai $N(0, \sigma_{ak}^2)$. Rezultatai pateikiami 5.2 lentelėje

	K-S	χ^2	L-B
Moterys	0,3050	0,5494	0,7389
Vyrai	0,4495	0,0175	0,3070

5.2 lentelė: Kolmogorov-Smirnov (K-S), χ^2 normalumo ir Ljung-Box (L-B) nepriklausomumo testų p-reikšmės

Matome, kad moterims negalime atmesti hipotezių apie paklaidų normalumą ir nepriklausomumą. Tuo tarpu vyrams, remiantis χ^2 suderinamumo kriterijumi, hipotezę apie paklaidų normalumą turėtume atmesti, kai reikšmingumo lygmuo $\alpha > 0.0175$. Paklaidų ξ_t vidurkiai yra lygūs 0, o standartinių nuokrypių įvertiniai $\hat{\sigma}_{ak}$, atitinkamai moterims ir vyrams, yra lygūs 2,7712 ir 3,3509.

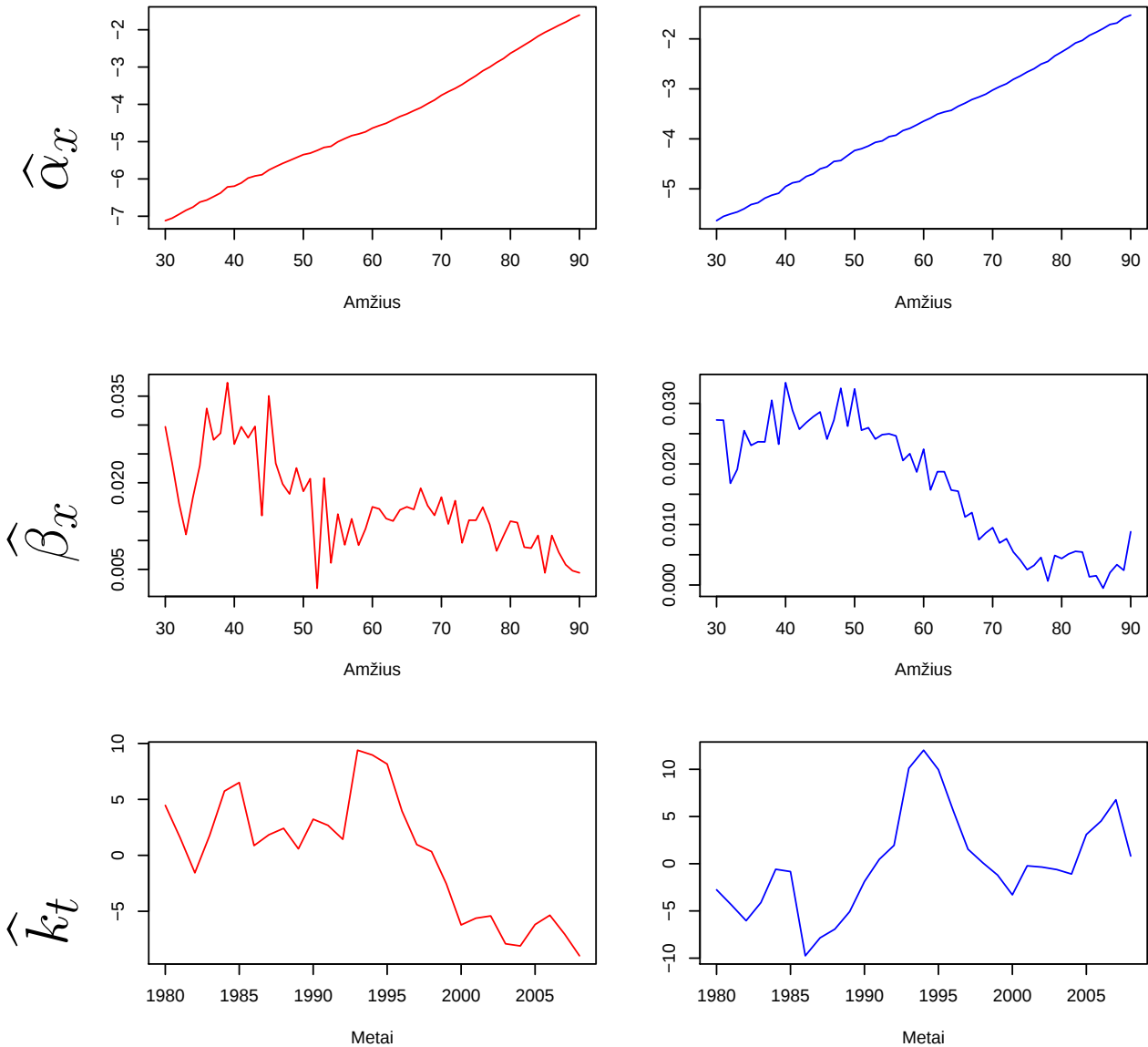
Kalbant apie modelio paklaidas $\epsilon_{x,t}$, jos taip pat turėtų būti nepriklausomi Gauso a.d. $N(0, \sigma^2)$. Paklaidų normalumą patikriname tiek pagal metus tiek pagal amžių, t.y. kiekvieniems metams nuo 1980 iki 2008 ir amžiams nuo 30 iki 90. Po to, analogiškai pagal metus ir

pagal amžių patikriname ar paklaidos poromis tarpusavyje yra nepriklausomos. Rezultatai pateikti A.1 ir A.2 lentelėse. Gauname, kad moterims negalime atmesti 90,98% hipotezių apie paklaidų normalumą pagal amžių, 62,07% hipotezių pagal metus bei 66,00% hipotezių apie paklaidų nepriklausomumą pagal amžių ir 64,68% hipotezių pagal metus. Tuo tarpu vyrams apie paklaidų normalumą gauname tokius rezultatus: 98,36% pagal amžių, 79,31% pagal metus, o apie paklaidų nepriklausomumą: 82,67% pagal amžių ir 72,06% pagal metus.

Toliau atliekame logaritminės mirtingumo normos $\eta_{x,t}$ prognozę sekantiems 5 metams, t.y. 2009-2013 metams. Gauti rezultatai kartu su tikrosiomis $\eta_{x,t}$ reikšmėmis vyrams ir moterims pateiki 5.3 ir 5.4 lentelėse.

Moterys

Vyrai



5.1 pav.: $\hat{\alpha}_x$, $\hat{\beta}_x$, $\hat{k}_t$ moterims ir vyrams (Lietuva)

	Empirinė					Modelio				
	2009	2010	2011	2012	2013	2009	2010	2011	2012	2013
30	-7,19677	-7,28027	-7,29784	-7,36821	-7,71295	-7,39929	-7,41355	-7,42781	-7,44208	-7,45634
35	-6,60839	-6,93925	-6,19383	-6,44276	-6,71466	-6,83936	-6,85040	-6,86143	-6,87247	-6,88350
40	-6,06576	-6,42471	-6,41306	-6,46757	-6,53413	-6,44682	-6,45963	-6,47245	-6,48527	-6,49808
45	-5,96074	-5,76672	-5,70538	-5,92269	-5,80118	-6,09181	-6,10864	-6,12546	-6,14229	-6,15911
50	-5,41216	-5,84339	-5,39836	-5,62073	-5,63267	-5,52347	-5,53236	-5,54125	-5,55014	-5,55904
55	-5,17929	-5,10671	-5,19829	-5,27617	-5,18875	-5,14211	-5,14910	-5,15610	-5,16309	-5,17009
60	-4,59354	-4,73244	-4,74939	-4,85197	-4,80741	-4,78740	-4,79500	-4,80261	-4,81021	-4,81781
65	-4,44971	-4,47020	-4,49122	-4,47335	-4,56393	-4,40683	-4,41443	-4,42203	-4,42964	-4,43724
70	-4,07961	-4,05751	-4,04567	-4,01096	-4,04219	-3,92277	-3,93118	-3,93959	-3,94800	-3,95641
75	-3,47016	-3,40753	-3,52829	-3,58358	-3,60981	-3,35995	-3,36643	-3,37292	-3,37941	-3,38590
80	-2,81734	-2,82717	-2,84418	-2,96956	-2,86234	-2,75710	-2,76350	-2,76991	-2,77632	-2,78272
85	-2,21589	-2,20102	-2,19275	-2,24277	-2,23790	-2,11070	-2,11282	-2,11493	-2,11705	-2,11916
90	-1,76227	-1,62396	-1,68884	-1,64930	-1,67614	-1,64832	-1,65044	-1,65256	-1,65468	-1,65680

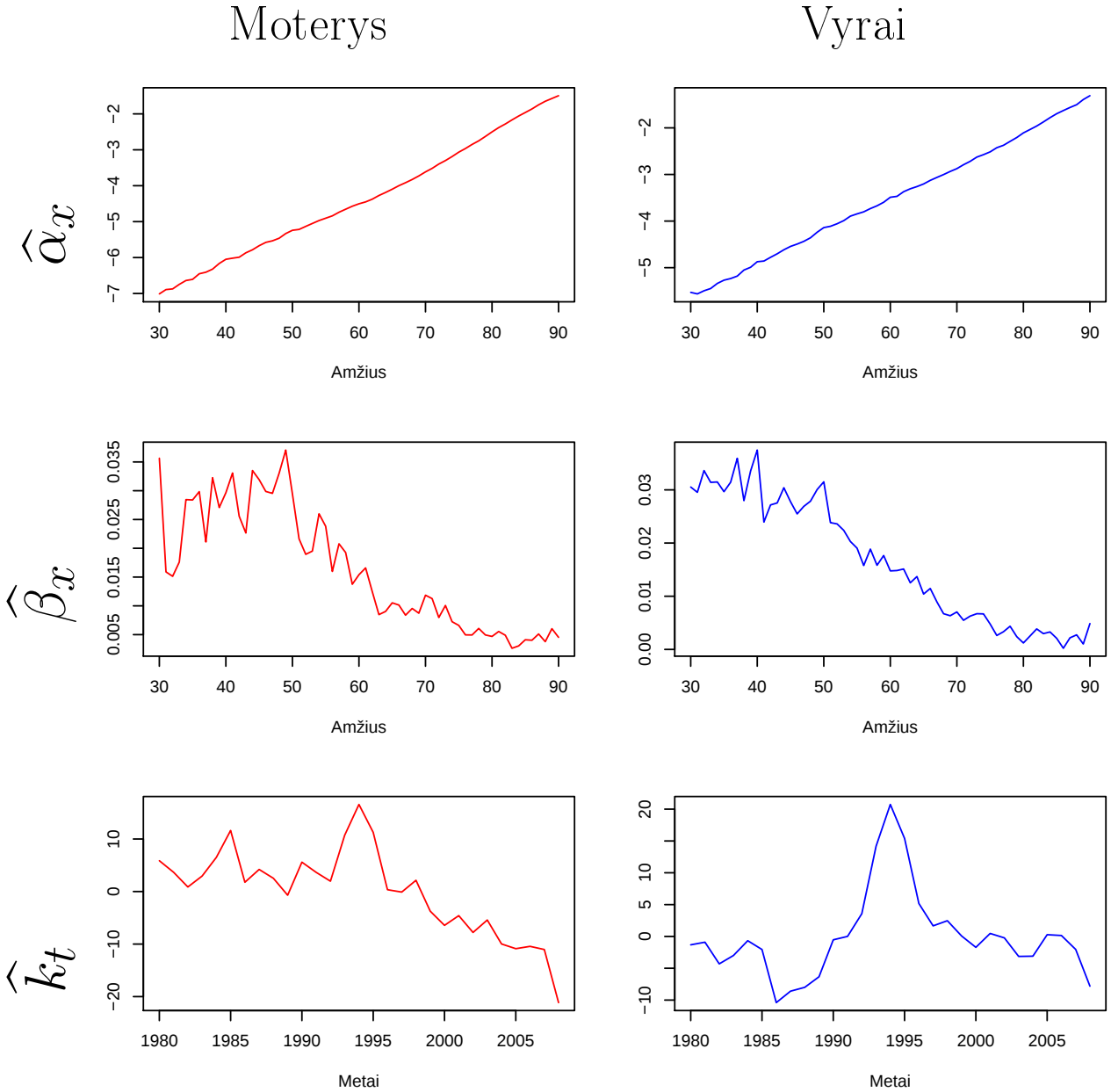
5.3 lentelė: Empirinė ir modelio logaritminė mirtingumo norma moterims 2009-2013 metais (Lietuva)

	Empirinė					Modelio				
	2009	2010	2011	2012	2013	2009	2010	2011	2012	2013
30	-5,87921	-5,71262	-6,09549	-5,69225	-5,98469	-5,61032	-5,60684	-5,60336	-5,59988	-5,59640
35	-5,43896	-5,41485	-5,65528	-5,53000	-5,27714	-5,29274	-5,28980	-5,28685	-5,28391	-5,28096
40	-5,15664	-5,09652	-5,20866	-5,24478	-5,21526	-4,92204	-4,91777	-4,91350	-4,90924	-4,90497
45	-4,70267	-4,64277	-4,77170	-4,85107	-4,72159	-4,57366	-4,57002	-4,56637	-4,56272	-4,55907
50	-4,46055	-4,39540	-4,35628	-4,53369	-4,46289	-4,20238	-4,19824	-4,19411	-4,18997	-4,18584
55	-3,90103	-3,94988	-4,02217	-4,11788	-4,13186	-3,93201	-3,92883	-3,92564	-3,92245	-3,91926
60	-3,63689	-3,57487	-3,60439	-3,61958	-3,75909	-3,62474	-3,62188	-3,61902	-3,61615	-3,61329
65	-3,16776	-3,31039	-3,32794	-3,29627	-3,42565	-3,33373	-3,33175	-3,32977	-3,3278	-3,32582
70	-3,09677	-3,13833	-3,09726	-3,04125	-3,07164	-3,01521	-3,01400	-3,01279	-3,01158	-3,01038
75	-2,73165	-2,74978	-2,75113	-2,89489	-2,79688	-2,65963	-2,65931	-2,65899	-2,65866	-2,65834
80	-2,39844	-2,38735	-2,34656	-2,37768	-2,48952	-2,25724	-2,25668	-2,25612	-2,25556	-2,25500
85	-1,87477	-1,89863	-2,04755	-1,90374	-1,90859	-1,86504	-1,86484	-1,86464	-1,86445	-1,86425
90	-1,50618	-1,48451	-1,63924	-1,56051	-1,59071	-1,51529	-1,51417	-1,51304	-1,51192	-1,51079

5.4 lentelė: Empirinė ir modelio logaritminė mirtingumo norma vyrams 2009-2013 metais (Lietuva)

5.2 Latvija

Apskaičiuojame $\hat{\alpha}_x$, $\hat{\beta}_x$, $x = 30, \dots, 90$ ir $\hat{k}_t$, $t = 1980, \dots, 2008$ Latvijos duomenims. Gauti įverčiai pateikti 5.2 paveikselyje.



5.2 pav.: $\hat{\alpha}_x$, $\hat{\beta}_x$, $\hat{k}_t$ moterims ir vyrams (Latvija)

Analogiškai kaip ir Lietuvai tikriname hipotezę apie $\hat{k}_t$, $t = 1981, \dots, 2008$ vienetinės šaknies egzistavimą. Gauti duomenys pateikti 5.5 lentelėje.

	DF
Moterys	0,6205
Vyrai	0,8186

5.5 lentelė: Vienetinės šaknies testo p-reikšmės

Matome, kad nei vyrams nei moterims negalime atmesti nulinės hipotezės apie vienetinės šaknies egzistavimą. Vadinasi, galime teigti, kad $\hat{k}_t$ sudaro atsitiktinį klaidžiojimą su poslinkiu. Poslinkis $\hat{\theta}$ moterims yra lygus -0,9649, o vyrams -0,2319. Tikrindami paklaidų ξ_t nepriklausomumą ir normalumą gauname tokius rezultatus:

	K-S	χ^2	L-B
Moterys	0,5653	0,9893	0,7193
Vyrai	0,6576	0,4704	0,0537

5.6 lentelė: Kolmogorov-Smirnov (K-S), χ^2 normalumo ir Ljung-Box (L-B) nepriklausomumo testų p-reikšmės

Nei vyrų nei moterų atveju negalime atmesti hipotezės apie paklaidų normalumą ir nepriklausomumą esant reikšmingumo lygmeniui $\alpha = 0,05$. Tuo tarpu paklaidų ξ_t vidurkiai vyrams ir moterims yra lygūs 0, standartinio nuokrypio įvertinys moterims yra $\hat{\sigma}_{ak} = 4,7870$, o vyrams $\hat{\sigma}_{ak} = 4,2916$.

Modelio paklaidos $\epsilon_{x,t}$ taip pat turėtų būti nepriklausomi Gauso a.d. $N(0, \sigma^2)$. Testų rezultatai pateikti A.3 ir A.4 lentelėse. Gauname, kad moterims negalime atmesti 95,08% hipotezių apie paklaidų normalumą pagal amžių, 31,03% hipotezių pagal metus bei 43,27% hipotezių apie paklaidų nepriklausomumą pagal amžių ir 25,68% hipotezių pagal metus. Tuo tarpu vyrams apie paklaidų normalumą gauname tokius rezultatus: 90,16% pagal amžių, 87,93% pagal metus, o apie paklaidų nepriklausomumą: 74,23% pagal amžių ir 57,07% pagal metus.

Po to, laikydami, kad $\hat{\alpha}_x$ ir $\hat{\beta}_x$ bėgant metams nekinta bei naudodamiesi (3.10) formule, prognozuojame logaritminę mirtingumo normą 2009-2013 metams. Gauti rezultatai matomi 5.7 ir 5.8 lentelėse.

	Empirinē					Modelio				
	2009	2010	2011	2012	2013	2009	2010	2011	2012	2013
30	-7,19677	-7,28027	-7,29784	-7,36821	-7,71295	-7,39929	-7,41355	-7,42781	-7,44208	-7,45634
35	-6,60839	-6,93925	-6,19383	-6,44276	-6,71466	-6,83936	-6,85040	-6,86143	-6,87247	-6,88350
40	-6,06576	-6,42471	-6,41306	-6,46757	-6,53413	-6,44682	-6,45963	-6,47245	-6,48527	-6,49808
45	-5,96074	-5,76672	-5,70538	-5,92269	-5,80118	-6,09181	-6,10864	-6,12546	-6,14229	-6,15911
50	-5,41216	-5,84339	-5,39836	-5,62073	-5,63267	-5,52347	-5,53236	-5,54125	-5,55014	-5,55904
55	-5,17929	-5,10671	-5,19829	-5,27617	-5,18875	-5,14211	-5,14910	-5,15610	-5,16309	-5,17009
60	-4,59354	-4,73244	-4,74939	-4,85197	-4,80741	-4,78740	-4,79500	-4,80261	-4,81021	-4,81781
65	-4,44971	-4,47020	-4,49122	-4,47335	-4,56393	-4,40683	-4,41443	-4,42203	-4,42964	-4,43724
70	-4,07961	-4,05751	-4,04567	-4,01096	-4,04219	-3,92277	-3,93118	-3,93959	-3,94800	-3,95641
75	-3,47016	-3,40753	-3,52829	-3,58358	-3,60981	-3,35995	-3,36643	-3,37292	-3,37941	-3,38590
80	-2,81734	-2,82717	-2,84418	-2,96956	-2,86234	-2,75710	-2,76350	-2,76991	-2,77632	-2,78272
85	-2,21589	-2,20102	-2,19275	-2,24277	-2,23790	-2,11070	-2,11282	-2,11493	-2,11705	-2,11916
90	-1,76227	-1,62396	-1,68884	-1,64930	-1,67614	-1,64832	-1,65044	-1,65256	-1,65468	-1,65680

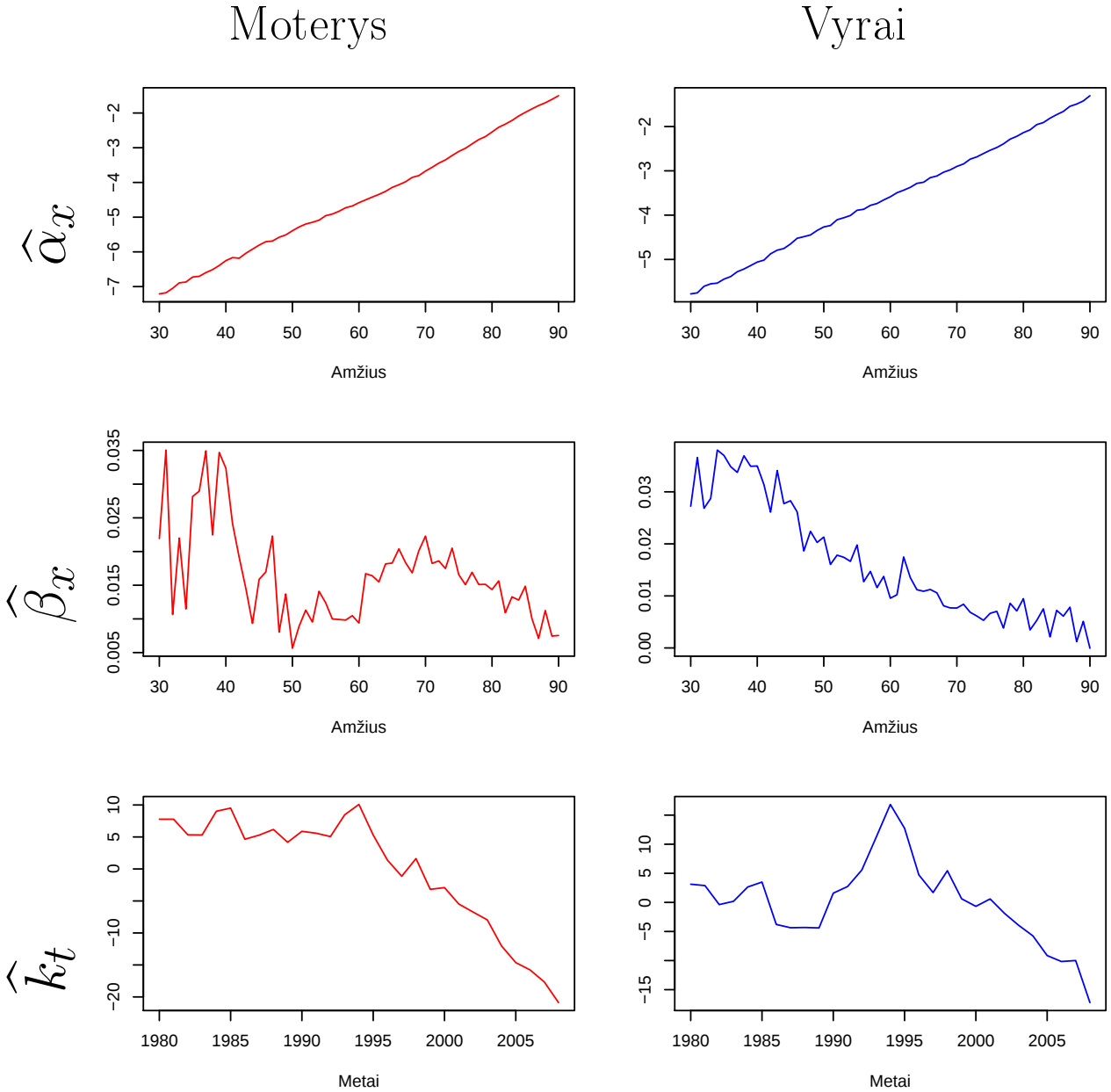
5.7 lentelē: Empirinē ir modelio logaritminē mirtingumo norma moterims 2009-2013 metams (Latvija)

	Empirinē					Modelio				
	2009	2010	2011	2012	2013	2009	2010	2011	2012	2013
30	-5,87921	-5,71262	-6,09549	-5,69225	-5,98469	-5,61032	-5,60684	-5,60336	-5,59988	-5,59640
35	-5,43896	-5,41485	-5,65528	-5,53000	-5,27714	-5,29274	-5,28980	-5,28685	-5,28391	-5,28096
40	-5,15664	-5,09652	-5,20866	-5,24478	-5,21526	-4,92204	-4,91777	-4,91350	-4,90924	-4,90497
45	-4,70267	-4,64277	-4,77170	-4,85107	-4,72159	-4,57366	-4,57002	-4,56637	-4,56272	-4,55907
50	-4,46055	-4,39540	-4,35628	-4,53369	-4,46289	-4,20238	-4,19824	-4,19411	-4,18997	-4,18584
55	-3,90103	-3,94988	-4,02217	-4,11788	-4,13186	-3,93201	-3,92883	-3,92564	-3,92245	-3,91926
60	-3,63689	-3,57487	-3,60439	-3,61958	-3,75909	-3,62474	-3,62188	-3,61902	-3,61615	-3,61329
65	-3,16776	-3,31039	-3,32794	-3,29627	-3,42565	-3,33373	-3,33175	-3,32977	-3,3278	-3,32582
70	-3,09677	-3,13833	-3,09726	-3,04125	-3,07164	-3,01521	-3,01400	-3,01279	-3,01158	-3,01038
75	-2,73165	-2,74978	-2,75113	-2,89489	-2,79688	-2,65963	-2,65931	-2,65899	-2,65866	-2,65834
80	-2,39844	-2,38735	-2,34656	-2,37768	-2,48952	-2,25724	-2,25668	-2,25612	-2,25556	-2,25500
85	-1,87477	-1,89863	-2,04755	-1,90374	-1,90859	-1,86504	-1,86484	-1,86464	-1,86445	-1,86425
90	-1,50618	-1,48451	-1,63924	-1,56051	-1,59071	-1,51529	-1,51417	-1,51304	-1,51192	-1,51079

5.8 lentelē: Empirinē ir modelio logaritminē mirtingumo norma vyrams 2009-2013 metams (Latvija)

5.3 Estija

Analogiškai kaip Lietuvos ir Latvijos atveju, pirmiausia apskaičiuojame $\hat{\alpha}_x$, $\hat{\beta}_x$, $x = 30, \dots, 90$ ir $\hat{k}_t$, $t = 1980, \dots, 2008$ reikšmes. Rezultatai pavaizduoti 5.3 paveikslėlyje.



5.3 pav.: $\hat{\alpha}_x$, $\hat{\beta}_x$, $\hat{k}_t$ moterims ir vyrams (Estija)

Toliau tikriname hipotezę apie laiko eilutės $\hat{k}_t$, $t = 1981, \dots, 2008$ vienetinės šaknies egzistavimą. Dickey-Fuller testo p-reikšmės pateiktos 5.9 lentelėje.

	ADF
Moterys	0,9220
Vyrai	0,9525

5.9 lentelė: Vienetinės šaknies testo p-reikšmės

Akivaizdu, kad nei vyrams nei moterims negalime atmesti nulinės hipotezės apie vienetinės šaknies egzistavimą esant reikšmingumo lygmeniui $\alpha = 0,05$. Vadinasi, $\hat{k}_t$ galime modeliuoti kaip atsitiktinį klaidžiojimą su poslinkiu. Gauname, kad poslinkis $\hat{\theta}$ moterims yra -1,0237, o vyrams $\hat{\theta} = -0,7269$. Tikrindami paklaidų ξ_t normalumą ir nepriklausomumą pastebime, kad tiek vyrų tiek moterų atveju gautos paklaidos yra normalios ir nepriklausomos su vidurkiu 0 ir standartiniu nuokrypiu $\hat{\sigma}_{ak} = 2,3967$ moterims ir $\hat{\sigma}_{ak} = 3,6574$ vyrams. Testų p-reikšmės parodytos 5.10 lentelėje

	K-S	χ^2	L-B
Moterys	0,9454	0,3987	0,9489
Vyrai	0,9090	0,8871	0,2935

5.10 lentelė: Kolmogorov-Smirnov (K-S), χ^2 normalumo ir Ljung-Box (L-B) nepriklausomumo testų p-reikšmės

Toliau patikriname ar modelio paklaidos $\epsilon_{x,t}$ yra nepriklausomos ir normalios. Iš A.5 ir A.6 lentelėse pateiktų testų rezultatų matome, kad moterims negalime atmesti 95,08% hipotezių apie paklaidų normalumą pagal amžių, 25,86% hipotezių pagal metus bei 81% hipotezių apie paklaidų nepriklausomumą pagal amžių ir 68,01% hipotezių pagal metus. Tuo tarpu vyrams apie paklaidų normalumą gauname tokius rezultatus: 94,26% pagal amžių, 84,48% pagal metus, o apie paklaidų nepriklausomumą: 71,32% pagal amžių ir 49,70% pagal metus.

Belieka atlikti logaritminės mirtingumo normos prognozę 2008-2013 metams. Rezultatai pateikti 5.11 ir 5.12 lentelėse.

	Empirinė					Modelio				
	2009	2010	2011	2012	2013	2009	2010	2011	2012	2013
30	-7,71072	-7,71072	-7,71295	-7,31272	-7,32935	-7,69066	-7,71311	-7,73556	-7,75801	-7,78047
35	-6,71962	-7,32025	-7,02317	-7,15110	-7,28609	-7,34194	-7,37077	-7,39960	-7,42843	-7,45726
40	-6,22871	-6,65855	-6,84666	-6,83451	-6,70727	-6,96153	-6,99466	-7,02779	-7,06093	-7,09406
45	-5,99067	-6,33227	-6,57989	-5,95263	-6,41672	-6,15325	-6,16949	-6,18574	-6,20199	-6,21824
50	-5,7087	-5,50190	-5,81449	-5,74899	-5,72664	-5,51486	-5,52064	-5,52642	-5,53219	-5,53797
55	-5,39241	-5,42320	-5,51003	-5,74805	-5,67899	-5,22867	-5,24134	-5,25401	-5,26668	-5,27936
60	-5,06514	-4,90655	-5,04259	-5,08822	-5,01224	-4,78862	-4,79824	-4,80785	-4,81746	-4,82708
65	-4,50650	-4,36105	-4,55353	-4,65163	-4,54907	-4,54281	-4,56153	-4,58025	-4,59897	-4,61769
70	-4,08335	-4,30255	-4,26563	-4,22557	-4,08335	-4,16096	-4,18377	-4,20657	-4,22938	-4,25219
75	-3,54074	-3,57537	-3,61222	-3,76771	-3,65097	-3,47082	-3,48778	-3,50474	-3,52170	-3,53866
80	-2,88392	-2,92468	-3,10801	-3,02343	-3,03835	-2,86135	-2,87605	-2,89074	-2,90544	-2,92013
85	-2,27708	-2,33791	-2,43403	-2,36533	-2,40706	-2,30662	-2,32182	-2,33701	-2,35221	-2,36740
90	-1,70068	-1,83425	-1,81882	-1,82094	-1,74654	-1,66616	-1,67388	-1,6816	-1,68931	-1,69703

5.11 lentelė: Empirinė ir modelio logaritminė mirtingumo norma moterims 2009-2013 metais (Estija)

	Empirinė					Modelio				
	2009	2010	2011	2012	2013	2009	2010	2011	2012	2013
30	-5,68163	-6,31664	-5,78771	-6,01740	-5,87564	-6,26673	-6,28653	-6,30633	-6,32612	-6,34592
35	-6,10396	-5,96463	-6,19923	-5,96736	-6,13626	-6,10864	-6,13552	-6,16241	-6,18930	-6,21618
40	-5,61605	-5,80482	-5,72388	-5,69522	-6,04825	-5,68765	-5,71307	-5,73848	-5,76390	-5,78931
45	-5,11934	-5,47339	-5,03166	-5,54166	-5,53404	-5,15878	-5,17934	-5,19990	-5,22046	-5,24102
50	-4,51387	-4,81639	-4,83975	-4,76066	-5,14388	-4,64901	-4,66450	-4,67998	-4,69547	-4,71096
55	-4,17313	-4,37851	-4,45365	-4,41389	-4,39726	-4,24596	-4,26034	-4,27473	-4,28911	-4,30349
60	-3,69397	-3,87088	-3,88553	-3,92334	-3,92973	-3,75718	-3,76412	-3,77106	-3,77801	-3,78495
65	-3,44794	-3,53530	-3,55522	-3,56588	-3,62279	-3,45313	-3,46105	-3,46896	-3,47688	-3,48480
70	-3,02741	-3,17374	-3,27979	-3,21364	-3,36587	-3,03835	-3,04392	-3,0495	-3,05508	-3,06066
75	-2,81130	-2,76264	-2,81827	-2,75398	-2,93122	-2,65516	-2,6600	-2,66483	-2,66966	-2,67450
80	-2,36152	-2,31794	-2,39794	-2,44746	-2,34772	-2,30781	-2,31469	-2,32157	-2,32845	-2,33533
85	-1,86687	-2,02115	-2,01970	-2,02886	-2,06995	-1,86130	-1,86656	-1,87181	-1,87706	-1,88231
90	-1,47394	-1,43847	-1,56508	-1,61600	-1,57735	-1,30299	-1,30295	-1,30290	-1,30286	-1,30281

5.12 lentelė: Empirinė ir modelio logaritminė mirtingumo norma vyrams 2009-2013 metais (Estija)

6 Šalių palyginimas

6.1 Modelio ir prognozės tikslumas

Pirmiausia kiekvienai šaliai norime patikrinti kaip tiksliai įverčiai $\hat{\eta}_{x,t}$ atitinka tikrąsias parametro $\eta_{x,t}$ reikšmes. Po to naudodamiesi gautais rezultatais nustatysime, kuriai šaliai Lee-Carter modelis tinka labiausiai. Įverčių tikslumui įvertinti naudosime šaknies iš MSE (Mean squared error) koeficientą, kuris yra lygus:

$$\sqrt{MSE} = \sqrt{\frac{1}{61} \sum_{x=30}^{90} (\hat{\mu}_{x,t} - \mu_{x,t})^2}, \quad (6.1)$$

kur $t=1980, \dots, 2008$ modelio paklaidoms ir $t=2009, \dots, 2013$ prognozės paklaidoms.

Tikriname modelio ir prognozės $\sqrt{MSE}$. Rezultatai kiekvienai šaliai pateikti 6.1 - 6.2 lentelėse ir 6.1 paveikslėlyje.

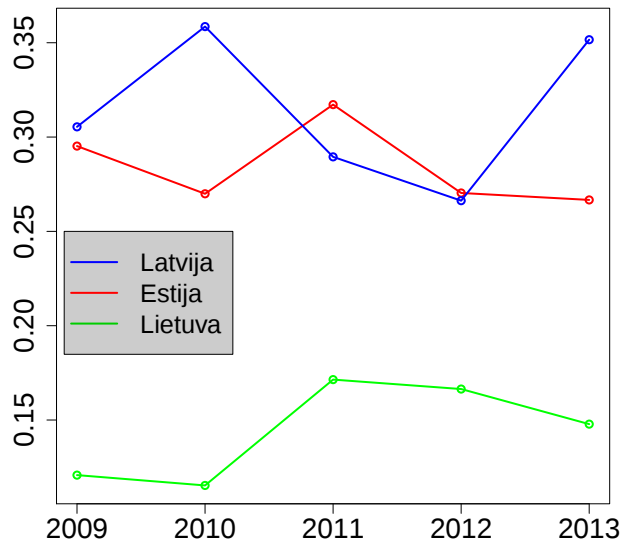
	Lietuva		Latvija		Estija	
	Moterys	Vyrai	Moterys	Vyrai	Moterys	Vyrai
Vidurkis	0,1322	0,0839	0,1552	0,0810	0,1809	0,1149

6.1 lentelė: Modelio $\sqrt{MSE}$ amžiams 30 - 90

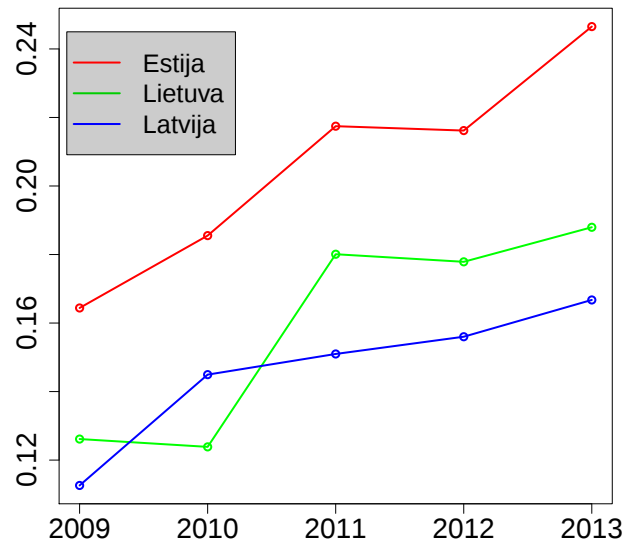
	Lietuva		Latvija		Estija	
	Moterys	Vyrai	Moterys	Vyrai	Moterys	Vyrai
2009	0,1208	0,1261	0,3054	0,1126	0,2952	0,1644
2010	0,1153	0,1239	0,3586	0,1449	0,2699	0,1855
2011	0,1714	0,1801	0,2895	0,1510	0,3172	0,2175
2012	0,1664	0,1779	0,2663	0,1560	0,2704	0,2162
2013	0,1478	0,1880	0,3516	0,1667	0,2667	0,2465
Vidurkis	0,1444	0,1592	0,3143	0,1463	0,2839	0,2060

6.2 lentelė: Prognozės $\sqrt{MSE}$ amžiams 30 - 90

Moterys



Vyrai



6.1 pav.: Prognozės $\sqrt{MSE}$ amžiams 30 - 90

Matome, kad vyrų atveju Lee-Carter modeliu įvertinta logaritminė mirtingumo norma tiksliau atitinka stebėtą logaritminę mirtingumo normą.

Kalbant apie prognozės $\sqrt{MSE}$, pastebime, kad skirstant šalis pagal prognozės tikslumą neišskiriant lyčių, tiksliausia prognozė gaunama Lietuvai, o netiksliausia Estijai. Tuo tarpu vertinant tikslumą atsižvelgus į šalį ir lytį, gauname, kad vyrams tiksliausia prognozė yra Latvijoje, o netiksliausia Estijoje. Kalbant apie moteris, tiksliausia prognozė gaunama Lietuvos moterims, o mažiausiai tikslu - Latvijos. Iš to galime daryti išvadą, kad parinktas pradinis amžių intervalas nuo 30 iki 90 nėra tinkamiausias visoms Baltijos šalims. Tam, kad gautume tikslesnę logaritminę mirtingumo normos prognozę, pabandydysime kiekvienai šaliai surasti optimaliausią modeliavimui tinkantį amžių intervalą, pradinio intervalo kraštus sumažindami bei padidindami 5 ar 10 metų. Radus tokius intervalus patikrinsime ar juose išpildytos modelio prielaidos. Gautos mažiausios prognozės $\sqrt{MSE}$ reikšmės pateiktos 6.3 ir 6.4 lentelėse.

	Lietuva		Latvija		Estija	
	Moterys	Vyrai	Moterys	Vyrai	Moterys	Vyrai
2009	0,1419	0,1623	0,1845	0,1518	0,4261	0,2093
2010	0,1653	0,2025	0,2117	0,1802	0,3790	0,2355
2011	0,2153	0,2323	0,1914	0,2368	0,4301	0,2516
2012	0,2831	0,2527	0,2055	0,2546	0,3555	0,2460
2013	0,2462	0,2558	0,2374	0,3172	0,3656	0,3178
Vidurkis	0,2104	0,2211	0,2061	0,2281	0,3913	0,2520

6.3 lentelė: Prognozės $\sqrt{MSE}$ amžiams 20 - 80

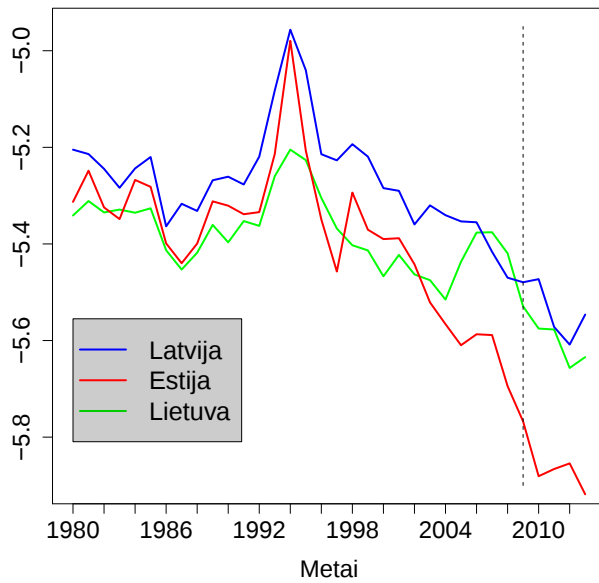
	Lietuva		Latvija		Estija	
	Moterys	Vyrai	Moterys	Vyrai	Moterys	Vyrai
2009	0,1082	0,1142	0,2836	0,1179	0,2541	0,1159
2010	0,1112	0,1171	0,3238	0,1428	0,2584	0,1407
2011	0,1258	0,1406	0,2832	0,1514	0,2298	0,1804
2012	0,1204	0,1739	0,2349	0,1457	0,2460	0,1855
2013	0,1286	0,1651	0,3098	0,1673	0,2815	0,2278
Vidurkis	0,1188	0,1422	0,2870	0,1450	0,2540	0,1701

6.4 lentelė: Prognozės $\sqrt{MSE}$ amžiams 40 - 90

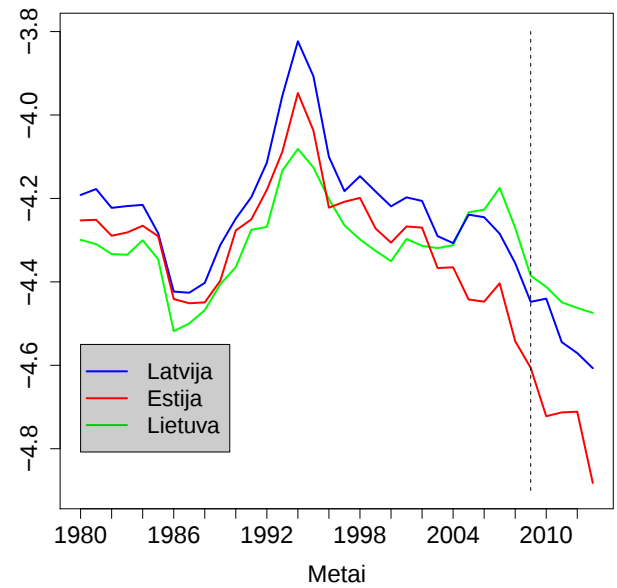
Pastebime, kad bėgant metams visų Baltijos šalių vyrų logaritminės mirtingumo normos prognozės tikslumas palaipsniui mažėja, tuo tarpu moterų prognozės tikslumas svyruoja didėjant prognozės laikotarpiui.

Matome, kad nuo pradinio intervalo atmetus 10 pirmųjų metų Lietuvos, Estijos ir Latvijos vyrams gaunama tikslesnė prognozė nei prieš tai buvusi. Kalbant apie Latvijos moteris, amžiaus intervalas nuo 40 iki 90 metų duoda šiek tiek tikslesnę prognozę, tačiau paėmus amžius nuo 20 iki 80 galime gauti dar geresnius rezultatus. Dėl to, galime manyti, kad 2009-2013 metų intervale tarp vyresnio amžiaus Latvijos moterų buvo ryškių mirtingumo pokyčių, dėl kurių prognozė amžiams nuo 40 iki 90 gaunama mažiau tiksliai. Į prognozę įtraukus jaunesnius amžius minėti pokyčiai tampa ne tokie ryškūs, todėl prognozė šiems amžiams gaunama tikslesnė. Tą galima matyti ir iš 6.2 ir 6.3 grafikų, kuriuose pavaizduotas tikrosios logaritminės mirtingumo normos vidurkis amžiams 20 - 80 ir 40 - 90.

Moterys

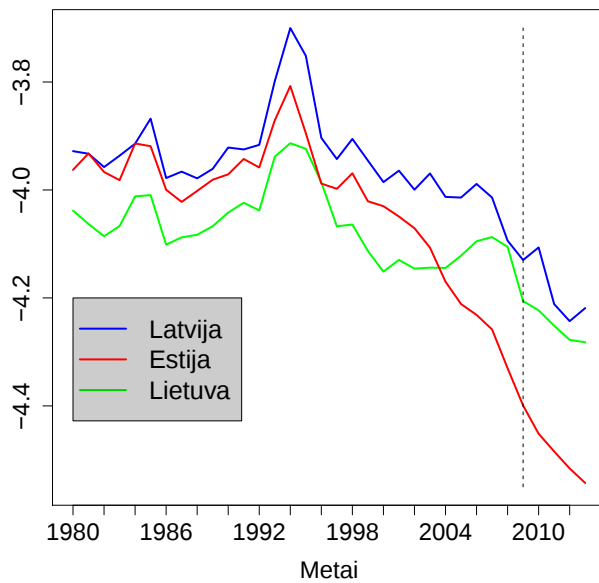


Vyrai

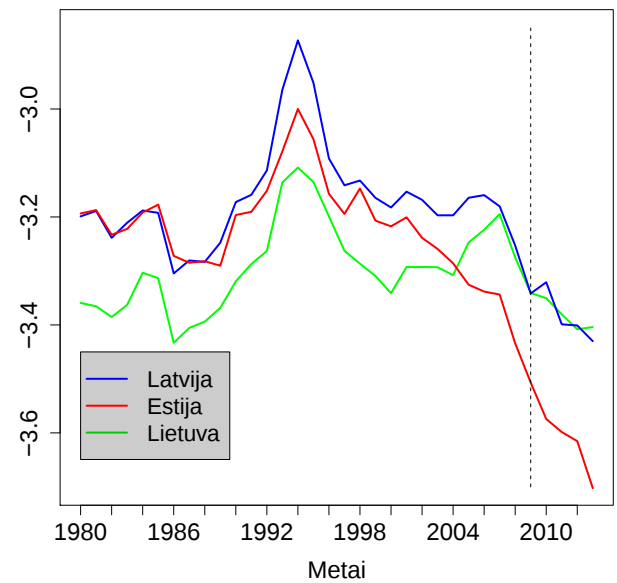


6.2 pav.: Vidutinė logaritminė mirtingumo norma amžiams 20 - 80

Moterys



Vyrai

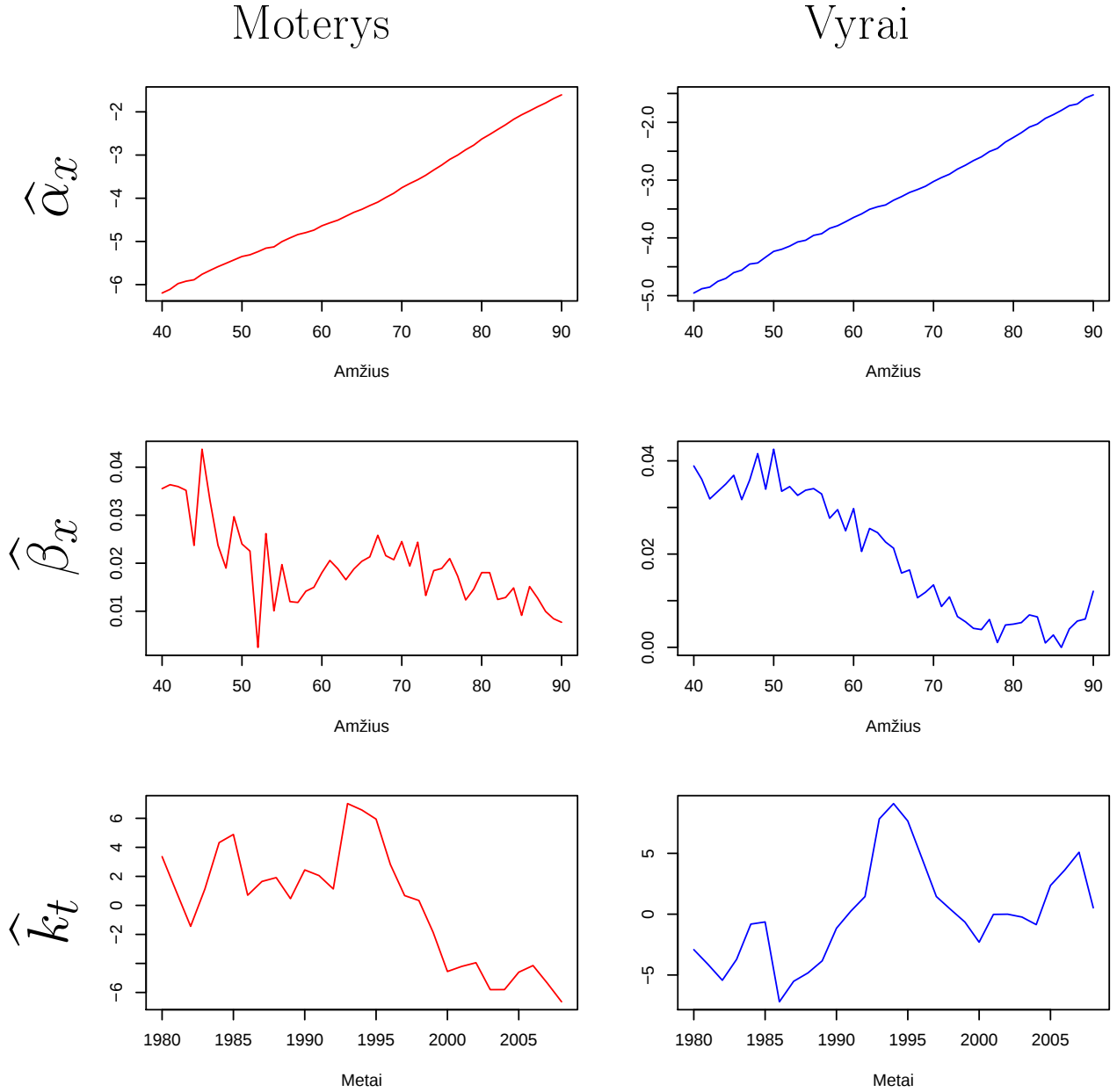


6.3 pav.: Vidutinė logaritminė mirtingumo norma 40 - 90

Toliau tikriname modelio prielaidas naujuose amžių intervaluose.

- **Lietuva**

Iš lygybių (3.3) - (3.6) apskaičiuojame $\hat{\alpha}_x$, $\hat{\beta}_x$, $x = 40, \dots, 90$ ir $\hat{k}_t$, $t = 1980, \dots, 2008$. Gauti įverčiai pateikti 6.4 paveikslėlyje.



6.4 pav.: $\hat{\alpha}_x$, $\hat{\beta}_x$, $\hat{k}_t$ moterims ir vyrams (Lietuva)

Vienetinės šaknies teso p-reikšmės pateiktos 6.5 lentelėje.

	DF
Moterys	0,6303
Vyrai	0,6364

6.5 lentelė: Vienetinės šaknies testo p-reikšmės

Akivaizdu, kad nei vyrams nei moterims, negalime atmesti nulinės hipotezės apie vienetinės šaknies egzistavimą. Naudodamiesi (3.8) formule gauname, kad moterims $\hat{\theta} = -0,3573$, o vyrams $\hat{\theta} = 0,1227$. Toliau tikriname ar paklaidos ξ_t yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę Gauso atsitiktiniai dydžiai $N(0, \sigma_{ak}^2)$. Rezultatai pateikiami 6.6 lentelėje

	K-S	χ^2	L-B
Moterys	0,4091	0,6342	0,7793
Vyrai	0,6280	0,0837	0,3686

6.6 lentelė: Kolmogorov-Smirnov (K-S), χ^2 normalumo ir Ljung-Box (L-B) nepriklausomumo testų p-reikšmės

Matome, kad nei vyrams nei moterims negalime atmesti hipotezių apie paklaidų normalumą ir nepriklausomumą. Paklaidų ξ_t vidurkiai yra lygūs 0, o standartinių nuokrypių įvertiniai $\hat{\sigma}_{ak}$, atitinkamai moterims ir vyrams, yra lygūs 2,0771 ir 2,5448.

• Latvija

Moterų atveju apskaičiuojame $\hat{\alpha}_x, \hat{\beta}_x$ amžiams nuo 20 iki 80 ir $\hat{k}_t$, $t = 1980, \dots, 2008$, o vyrų atveju amžiams nuo 40 iki 90. Gauti įverčiai pateikti 6.5 paveikselyje. Tikrinant hipotezę apie $\hat{k}_t$, $t = 1981, \dots, 2008$ vienetinės šaknies egzistavimą gaunami rezultatai pateikiami 6.7 lentelėje

	DF
Moterys	0,6407
Vyrai	0,8088

6.7 lentelė: Vienetinės šaknies testo p-reikšmės

Matome, kad nei vyrams nei moterims negalime atmesti nulinės hipotezės apie vienetinės šaknies egzistavimą. Poslinkis $\hat{\theta}$ moterims yra lygus -0,8318, o vyrams -0,1292. Paklaidų ξ_t nepriklausomumo ir normalumo tikrinimo testų p-reikšmės pateiktos 6.8 lentelėje

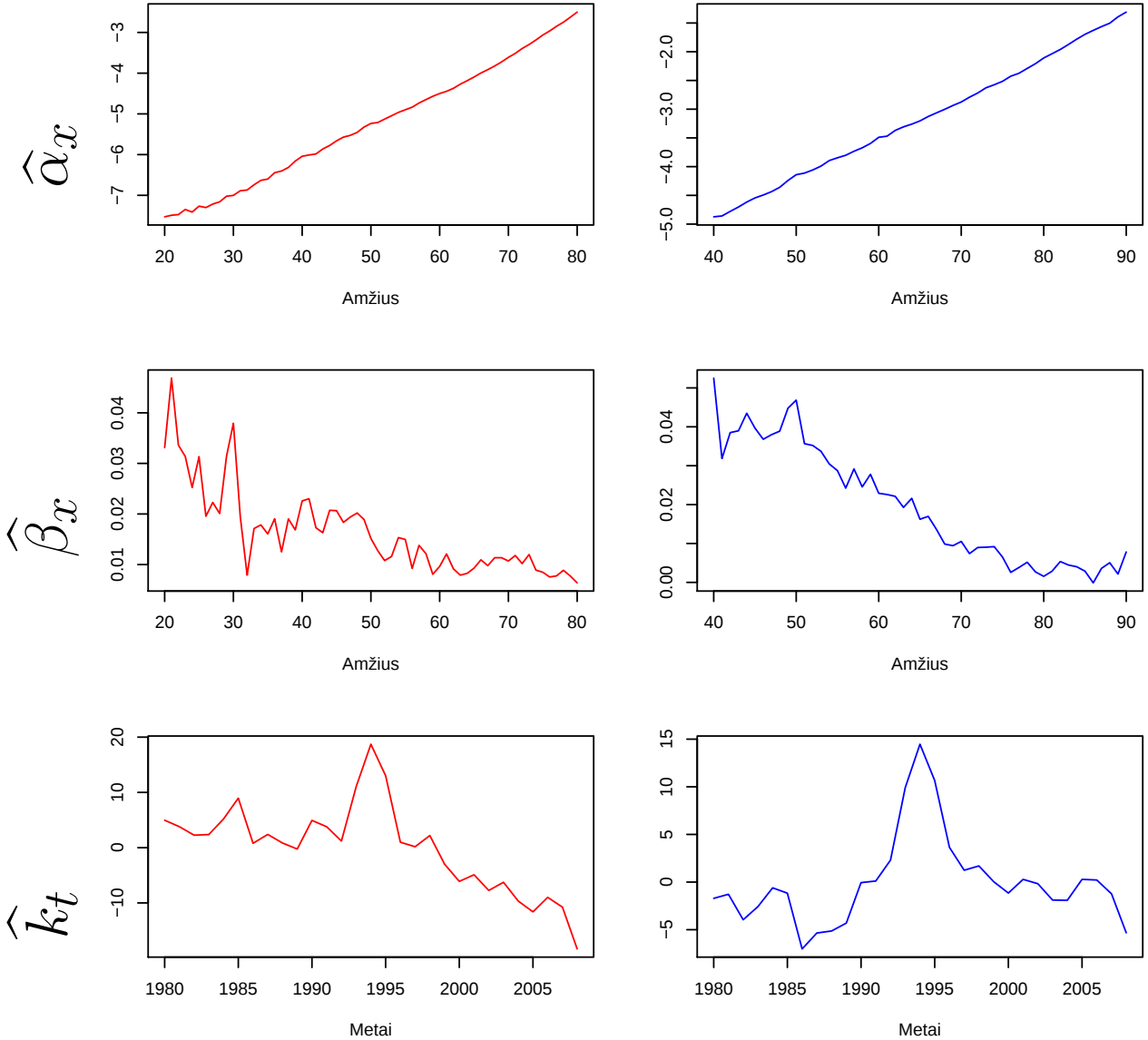
	K-S	χ^2	L-B
Moterys	0,4927	0,3987	0,7794
Vyrai	0,4180	0,3987	0,0906

6.8 lentelė: Kolmogorov-Smirnov (K-S), χ^2 normalumo ir Ljung-Box (L-B) nepriklausomumo testų p-reikšmės

Nei vyrų nei moterų atveju negalime atmesti hipotezių apie paklaidų normalumą ir nepriklausomumą. Paklaidų ξ_t vidurkiai vyrams ir moterims yra lygūs 0, tuo tarpu standartinio nuokrypio įvertinys moterims yra $\hat{\sigma}_{ak} = 4,5622$, o vyrams $\hat{\sigma}_{ak} = 3,0180$.

Moterys

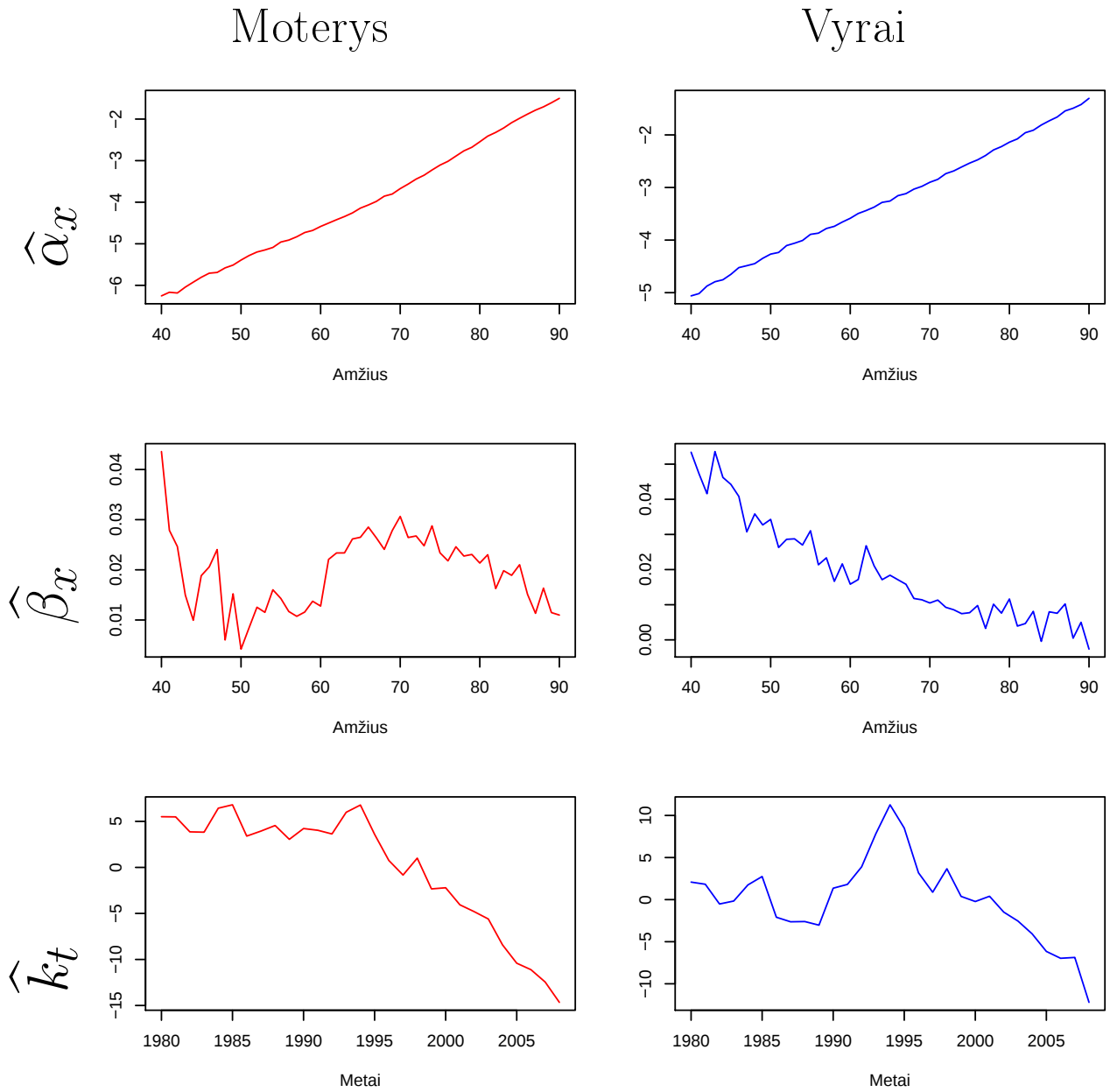
Vyrai



6.5 pav.: $\hat{\alpha}_x$, $\hat{\beta}_x$, $\hat{k}_t$ moterims ir vyrams (Latvija)

- Estija

Šiuo atveju apskaičiuojame $\hat{\alpha}_x$, $\hat{\beta}_x$, $x = 40, \dots, 90$ ir $\hat{k}_t$, $t = 1980, \dots, 2008$. Gauti įverčiai pateikti 6.6 paveikselyje.



6.6 pav.: $\hat{\alpha}_x$, $\hat{\beta}_x$, $\hat{k}_t$ moterims ir vyrams (Estija)

Laikydami $\hat{k}_t$, $t = 1981, \dots, 2008$ pirmos eilės autoregresiniu procesu, tikriname vienietinės šaknies egzistavimą naudodamiesi Dickey-Fuller (DF) testu. Gautos testo p-reikšmės pateiktos 6.9 lentelėje

	DF
Moterys	0,9182
Vyrai	0,9551

6.9 lentelė: Vienietinės šaknies testo p-reikšmės

Matome, kad nei vyrams nei moterims negalime atmesti nulinės hipotezės apie vienetinės šaknies egzistavimą esant reikšmingumo lygmeniui $\alpha = 0,05$. Tuo tarpu poslinkis $\hat{\theta}$ moterims yra $-0,7202$, o vyrams $\hat{\theta} = -0,5102$. Tikrindami paklaidų ξ_t normalumą ir nepriklausomumą pastebime, kad tiek vyrų tiek moterų atveju gautos paklaidos yra normalios ir nepriklausomos su vidurkiu 0 ir standartiniu nuokrypiu $\hat{\sigma}_{ak} = 1,6496$ moterims ir $\hat{\sigma}_{ak} = 2,5287$ vyrams. Testų p-reikšmės parodytos 6.10 lentelėje

	K-S	χ^2	L-B
Moterys	0,9655	0,8871	0,9581
Vyrai	0,9180	0,9502	0,3769

6.10 lentelė: Kolmogorov-Smirnov (K-S), χ^2 normalumo ir Ljung-Box (L-B) nepriklausomumo testų p-reikšmės

6.2 Vidutinė tikėtina likusio gyvenimo trukmė

Tarkime, kad ${}_k q_{x,t}$ yra tikimybė, jog individas metais t būdamas amžiaus x mirs per sekančius k metų. Tuo tarpu, ${}_k p_{x,t}$ yra tikimybė, kad toks individas išgyvens dar bent k metų. Žinome, kad $p_{x,t} = 1 - q_{x,t}$. Tikimybė $q_{x,t}$ pagal prasmę gali būti įvertinta jau anksčiau aprašytu dydžiu $m_{x,t} = e^{\hat{\eta}_{x,t}}$. Nesunku pastebėti, kad

$${}_k p_{x,t} = p_{x,t} \cdot p_{x+1,t+1} \cdot \dots \cdot p_{x+k-1,t+k-1}, \text{ visiems } k, x, t. \quad (6.2)$$

Norėdami apskaičiuoti x -mečio vidutinę tikėtiną likusio gyvenimo trukmę, naudojame formulę

$$e_x = \sum_{k=1}^{\infty} {}_k p_{x,t}. \quad (6.3)$$

Šios formulės išvedimas yra pateiktas [2].

Amžiams $x = 20, \dots, 90$ įvertinsime vidutinę tikėtiną likusio gyvenimo trukmę 2016 metais. Laikysime, kad maksimali gyvenimo trukmė yra 91 metai. Tuomet (6.3) galime užrašyti taip

$$\hat{e}_x = \sum_{k=1}^{91-x} {}_k p_{x,2016}, \quad (6.4)$$

kurią, pasinaudojus (6.2) išraiška, galima pertvarkyti į

$$\hat{e}_x = \sum_{k=1}^{91-x} \prod_{l=0}^{k-1} (1 - e^{\hat{\eta}_{x+l,2016+l}}). \quad (6.5)$$

Lentelėje 6.11 pateiktos gautos vidutinės tikėtinės likusio gyvenimo trukmės. Pastebime, kad likusi gyvenimo trukmė Lietuvos ir Latvijos moterims tarpusavyje nedaug skiriasi. Lyginant Lietuvos ir Latvijos vyrus, matome, kad jaunesniems Latvijos vyrams ši reikšmė yra apytiksliai 2,5 metų didesnė, tačiau vyresniuose amžiuose šis skirtumas palaipsniui pranyksta. Kalbant apie Estiją, matome, kad tiek vyrams tiek moterims vidutinė likusio gyvenimo trukmė yra didžiausia. Jaunesniuose amžiuose Estijos moterų vidutinė likusio gyvenimo trukmė yra apytiksliai 3 - 4 metais didesnė nei Lietuvos ir Latvijos, tačiau šis skirtumas vyresniuose amžiuose sumažėja iki 0,5 - 1,5 metų. Tuo tarpu jauni Estijos vyrai vidutiniškai gyvens 7 - 8 metais ilgiau nei Lietuvos vyrai bei 4 - 5 metais ilgiau negu Latviai. Analogiškai moterų atveju, skirtumai tarp kiekvienos šalies vyrų vidutinės likusio gyvenimo trukmės sumažėja.

Kiekvienoje šalyje atskirai tarpusavyje lyginant vyrus ir moteris, galime pastebėti, kad didžiausias skirtumas tarp vidutinės vyrų ir moterų likusio gyvenimo trukmės yra Lietuvoje. Šis skirtumas jaunuose amžiuose Lietuvoje siekia ~ 11 metų. Tuo tarpu mažiausias skirtumas yra Estijoje, kuris jaunuose amžiuose apytiksliai yra lygus 7 metams.

Amžius	Lietuva		Latvija		Estija		Lietuva		Latvija		Estija	
	Moterys	Vyrai	Moterys	Vyrai	Moterys	Vyrai	Moterys	Vyrai	Moterys	Vyrai	Moterys	Vyrai
20	61,95	50,01	62,47	53,21	65,86	58,42	56	26,19	18,78	25,85	19,03	28,17
21	60,91	49,03	61,41	52,16	64,80	57,33	57	25,31	18,08	24,93	18,30	27,21
22	59,87	48,08	60,35	51,12	63,73	56,24	58	24,42	17,40	24,02	17,57	26,24
23	58,83	47,13	59,28	50,07	62,66	55,15	59	23,53	16,73	23,12	16,87	25,29
24	57,79	46,18	58,22	49,02	61,59	54,06	60	22,66	16,08	22,24	16,16	24,34
25	56,74	45,23	57,17	47,98	60,52	53,00	61	21,79	15,44	21,36	15,49	23,41
26	55,70	44,28	56,11	46,94	59,46	51,93	62	20,93	14,82	20,48	14,83	22,46
27	54,66	43,34	55,05	45,91	58,39	50,85	63	20,07	14,21	19,62	14,20	21,52
28	53,63	42,40	53,99	44,88	57,32	49,78	64	19,21	13,61	18,78	13,57	20,61
29	52,61	41,45	52,94	43,86	56,25	48,72	65	18,36	13,03	17,94	12,96	19,69
30	51,58	40,52	51,88	42,84	55,19	47,67	66	17,51	12,45	17,10	12,38	18,80
31	50,55	39,58	50,83	41,83	54,12	46,62	67	16,67	11,89	16,27	11,80	17,89
32	49,52	38,66	49,77	40,82	53,05	45,57	68	15,84	11,34	15,45	11,24	16,99
33	48,50	37,75	48,73	39,81	51,98	44,53	69	15,02	10,80	14,64	10,70	16,09
34	47,48	36,83	47,69	38,81	50,91	43,47	70	14,21	10,27	13,83	10,17	15,21
35	46,46	35,92	46,65	37,82	49,84	42,40	71	13,40	9,74	13,04	9,63	14,34
36	45,46	35,03	45,61	36,84	48,78	41,33	72	12,60	9,22	12,25	9,12	13,50
37	44,44	34,13	44,58	35,85	47,72	40,25	73	11,82	8,69	11,49	8,60	12,66
38	43,43	33,24	43,55	34,86	46,66	39,18	74	11,05	8,19	10,73	8,09	11,84
39	42,42	32,35	42,53	33,89	45,59	38,12	75	10,29	7,70	10,00	7,60	11,02
40	41,42	31,48	41,51	32,92	44,53	37,07	76	9,56	7,23	9,29	7,12	10,24
41	40,42	30,60	40,49	31,96	43,47	36,01	77	8,83	6,76	8,61	6,66	9,48
42	39,43	29,75	39,47	31,02	42,42	34,96	78	8,13	6,30	7,94	6,22	8,73
43	38,44	28,90	38,47	30,08	41,36	33,93	79	7,45	5,86	7,30	5,79	8,02
44	37,46	28,07	37,46	29,15	40,31	32,90	80	6,80	5,42	6,67	5,36	7,32
45	36,49	27,22	36,46	28,23	39,27	31,89	81	6,17	4,99	6,07	4,96	6,63
46	35,52	26,40	35,46	27,33	38,24	30,87	82	5,55	4,57	5,48	4,55	5,97
47	34,56	25,59	34,48	26,44	37,21	29,89	83	4,98	4,16	4,90	4,13	5,34
48	33,61	24,80	33,49	25,56	36,17	28,92	84	4,40	3,74	4,35	3,71	4,70
49	32,67	24,00	32,51	24,69	35,15	27,94	85	3,84	3,34	3,81	3,28	4,08
50	31,71	23,22	31,54	23,83	34,14	26,99	86	3,29	2,92	3,26	2,85	3,45
51	30,77	22,44	30,57	22,98	33,15	26,04	87	2,72	2,49	2,71	2,42	2,85
52	29,84	21,69	29,61	22,15	32,14	25,14	88	2,14	2,00	2,13	1,94	2,24
53	28,92	20,94	28,66	21,35	31,14	24,23	89	1,49	1,42	1,51	1,40	1,56
54	28,01	20,21	27,71	20,55	30,15	23,33	90	0,81	0,80	0,81	0,78	0,84
55	27,10	19,49	26,78	19,78	29,16	22,45						

6.11 lentelė: Baltijos šalių vidutinė tikėtina likusio gyvenimo trukmė 2016 metais

7 Išvados

Kaip ir buvo galima tikėtis Baltijos šalių mirtingumo rodikliai svyruoja panašia kryptimi. Jei vienoje šalyje pastebimas žymus mirtingumo didėjimas ar mažėjimas, tai tą patį galime pastebėti ir kitose šalyse. Dėl šios priežasties buvo galima manyti, kad pritaikius Lee-Carter modelį kiekvienai iš šių šalių, gausime panašius rezultatus, tačiau paaiškėjo, kad Lee-Carter modelis yra labiausiai tinkamas Lietuvai, o mažiausiai - Estijai. Tokius rezultatus galima paaiškinti tuo, kad logaritminė mirtingumo norma Estijoje per pastaruosius dešimtmečius mažėjo sparčiau nei Lietuvoje. Vadinasi, nagrinėjamas modelis yra labiau tinkamas tokioms populiacijoms, kurių mirtingumo pokyčiai yra ne tokie staigūs, t.y. mirtingumas lėtai tolygiai didėja ar mažėja.

Prieš pritaikant Lee - Carter modelį, labai svarbu pasirinkti tinkamą amžių intervalą. Atlikus kiekvienos šalies prognozės analizę, pastebėjome, kad kiekvienai šaliai modeliavimui tinkamiausias intervalas skiriasi. Dėl to modelį pritaikius skirtingiems amžių intervalams, buvo galima gauti tikslesnes logaritmines mirtingumo normos prognozes.

Visoms trimis Baltijos šalims apskaičiavome vidutinę tikėtiną likusio gyvenimo trukmę ir palyginome gautus rezultatus. Kaip ir buvo galima tikėtis, gavome, kad moterims prognozuojama ilgesnė gyvenimo trukmė nei vyrams. Pastebėjome, kad skirtumas tarp vyrų ir moterų likusios gyvenimo trukmės Lietuvoje yra didžiausias, o Estijoje - mažiausias. Tuo tarpu tarpusavyje lyginant šalių vidutinę tikėtiną likusio gyvenimo trukmę, gavome, kad estams prognozuojama likusio gyvenimo trukmė yra žymiai didesnė nei Lietuvai ar Latvijai, kurių prognozės tarpusavyje yra panašios.

Literatūra

- [1] Bertocchi M., Fabozzi F. J., Giacometti R., Rachev S. T. A comparison of the Lee-Carter model and AR-ARCH model for forecasting mortality rates. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2012, 50, p. 85-93.
- [2] Bowers N. L. Jr., Gerber H. U., Hickman J. C., Jones D. A., Nesbitt C. J. Actuarial mathematics. The society of actuaries, 1997, p. 68-69.
- [3] Čekanavičius V., Murauskas G. Statistika ir jos taikymai I. Vilnius: TEV 2006, p. 199-203.
- [4] Čekanavičius V., Murauskas G. Statistika ir jos taikymai II. Vilnius: TEV 2008, p. 33-36.
- [5] Debon A., Montes F., Puig F. Modelling and forecasting mortality in Spain. *European Journal of Operational Research*, 2008, 189, p. 624-637.
- [6] Dickey D. A., Fuller W.A. Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series With a Unit Root. *Journal of the American Statistical Association*, 1979, 74 (366), p. 427-431.
- [7] Ignatavičiūtė E., Mikalauskaitė-Arminienė R., Šiaulys J. Lee-Carter mortality forecasting. *Lithuanian Journal of Statistics*, 2012, 51(1), p. 5-13.
- [8] Lee R.D., Carter L. R. Modeling and morecasting U. S. mortality. *Journal of the American Statistical Association*, 1992, 87 (419) (September), p. 659-671.
- [9] Lilliefors H. W. On the Kolmogorov-Smirnov Test for Normality with Mean and Variance Unknown. *Journal of the American Statistical Association*, 1967, 62 (318), p. 399-402.
- [10] Ljung G. M., Box G. E. P. On a Measure of a Lack of Fit in Time Series Models. *Biometrika*, 1978, 65 (2), p. 297-303.
- [11] Pitacco M., Denuit M., Haberman S., Olivieri A. Modelling Longevity Dynamics for Pensions and Annuity Business. New York: Oxford University 2009, p. 95-97.
- [12] Ruhe.A. Topics in Numerical Linear Algebra. Royal Institute of Technology, Stockholm, 2005, p. 15-20.
<http://www.nada.kth.se/kurser/kth/2D1250/Linalgtop.pdf>

A Priedai

A.1 Lentelės

	Moterys			Vyrai		
Metai	K-S	χ^2	SPR	K-S	χ^2	SPR
1980	0,0267	0,1345	58,62	0,0964	0,2744	58,62
1981	0,5308	0,3930	75,86	0,1523	0,0258	48,28
1982	0,0304	0,3300	68,97	0,0081	0,1847	51,72
1983	0,1884	0,2260	72,41	0,0015	0,0539	55,17
1984	0,0106	0,0036	65,52	0,0610	0,2260	51,72
1985	0,1417	0,3300	48,28	0,4901	0,5384	72,41
1986	0,0664	0,0539	41,38	0,1283	0,5778	89,66
1987	0,0029	0	37,93	0,1098	0,0105	68,97
1988	0,0002	0,0001	51,72	0,7962	0,6985	68,97
1989	0,1932	0,0683	65,52	0,4365	0,8135	93,10
1990	0,0187	0,2744	48,28	0,9076	0,5384	65,52
1991	0,0037	0,1206	89,66	0,6378	0,4271	96,55
1992	0,1668	0,5778	93,10	0,2060	0,5000	86,21
1993	0,0211	0,2493	75,86	0,9470	0,7381	55,17
1994	0,0090	0,108	65,52	0,2150	0,4271	55,17
1995	0,5589	0,7381	58,62	0,1331	0,2260	86,21
1996	0,0491	0,0861	62,07	0,8338	0,9965	82,76
1997	0,1231	0,6985	89,66	0,5855	0,6179	86,21
1998	0,0051	0,0061	93,10	0,9994	0,9706	82,76
1999	0,1536	0,2045	93,10	0,0340	0,0002	82,76
2000	0,0078	0,1345	93,10	0,0024	0,0258	82,76
2001	0,0084	0,1847	65,52	0,0364	0,1497	72,41
2002	0,0906	0,2045	82,76	0,0489	0,2493	75,86
2003	0,1833	0,1206	34,48	0,0230	0,0031	86,21
2004	0,2230	0,7767	58,62	0,3508	0,2045	65,52
2005	0,7741	0,7381	48,28	0,1112	0,4628	65,52
2006	0,0198	0,1345	51,72	0,3230	0,8481	62,07
2007	0,0254	0,0080	41,38	0,7563	0,8800	86,21
2008	0,0197	0,0070	44,83	0,1074	0,2045	55,17

A.1 lentelė: Kolmogorov-Smirnov (K-S), χ^2 testų p-reikšmės ir Spearmano (SPR) nepriklausomumo testo rezultatai procentais pagal metus (Lietuva)

Amžius	Moterys			Vyrų			Amžius	Moterys			Vyrų		
	K-S	χ^2	L-B	K-S	χ^2	SPR		K-S	χ^2	L-B	K-S	χ^2	SPR
30	0,9165	0,8987	93,44	0,8261	0,4962	75,41	61	0,6601	0,0782	65,57	0,7159	0,4244	90,16
31	0,4666	0,3029	98,36	0,2692	0,4244	70,49	62	0,7184	0,1742	83,61	0,2207	0,2533	73,77
32	0,0296	0,2533	72,13	0,2110	0,8248	78,69	63	0,1574	0,3029	90,16	0,2017	0,1742	81,97
33	0,3203	0,4244	70,49	0,0642	0,3598	75,41	64	0,2584	0,3029	88,52	0,8267	0,1434	72,13
34	0,0353	0,4244	70,49	0,8772	0,7424	78,69	65	0,2601	0,7424	88,52	0,1493	0,1742	88,52
35	0,3124	0,4244	75,41	0,1260	0,1742	83,61	66	0,9311	0,2106	78,69	0,1495	0,1434	68,85
36	0,7998	0,8987	83,61	0,5540	0,3029	75,41	67	0,2410	0,0013	93,44	0,7227	0,4244	96,72
37	0,4467	0,0415	44,26	0,1569	0,1434	83,61	68	0,3798	0,2106	83,61	0,4842	0,7424	83,61
38	0,5312	0,4244	83,61	0,2505	0,2533	78,69	69	0,7030	0,8248	68,85	0,7913	0,8248	91,80
39	0,2729	0,0268	63,93	0,5781	0,6575	85,25	70	0,5323	0,3598	77,05	0,5909	0,6575	83,61
40	0,0643	0,1176	67,21	0,0445	0,0782	81,97	71	0,1503	0,1176	55,74	0,2842	0,0961	91,80
41	0,4861	0,9915	60,66	0,2232	0,3029	88,52	72	0,2069	0,4244	88,52	0,6240	0,4244	96,72
42	0,4292	0,4962	60,66	0,0636	0,1742	90,16	73	0,7269	0,9568	37,70	0,2483	0,2533	88,52
43	0,5103	0,3029	36,07	0,8650	0,7424	86,89	74	0,9098	0,7424	59,02	0,3470	0,8987	85,25
44	0,0562	0,2533	77,05	0,2186	0,1176	96,72	75	0,5566	0,4244	44,26	0,1114	0,3598	78,69
45	0,4829	0,5745	40,98	0,4942	0,4244	93,44	76	0,8217	0,6575	62,30	0,8457	0,4244	70,49
46	0,1309	0,0138	59,02	0,0744	0,3029	95,08	77	0,7183	0,9568	50,82	0,4390	0,2106	80,33
47	0,0565	0,1742	42,62	0,7374	0,4962	95,08	78	0,2872	0,7424	34,43	0,8385	0,3029	86,89
48	0,2513	0,0334	59,02	0,3776	0,0635	93,44	79	0,0939	0,3598	55,74	0,1512	0,4244	81,97
49	0,4501	0,8248	39,34	0,1210	0,2533	96,72	80	0,7582	0,6575	62,30	0,5485	0,4244	83,61
50	0,4662	0,3029	42,62	0,9755	0,3029	88,52	81	0,1978	0,2533	70,49	0,1430	0,5745	73,77
51	0,8010	0,9915	31,15	0,8430	0,8248	85,25	82	0,8827	0,6575	98,36	0,9098	0,7424	77,05
52	0,9916	0,8987	67,21	0,3619	0,2106	75,41	83	0,7011	0,8987	75,41	0,9066	0,6575	80,33
53	0,0705	0,0514	54,10	0,8524	0,8248	70,49	84	0,9276	0,9568	85,25	0,7255	0,8987	91,80
54	0,9405	0,8248	44,26	0,3193	0,0782	65,57	85	0,5485	0,2106	62,30	0,1112	0,0961	88,52
55	0,6337	0,1434	40,98	0,8657	0,8987	63,93	86	0,0942	0,2533	93,44	0,0527	0,0635	91,80
56	0,4467	0,5745	55,74	0,3567	0,3029	77,05	87	0,0253	0,0215	88,52	0,3322	0,2106	75,41
57	0,8301	0,3598	52,46	0,4880	0,8248	78,69	88	0,3001	0,1742	85,25	0,9799	0,9568	88,52
58	0,4983	0,4244	62,30	0,5251	0,4962	67,21	89	0,9293	0,7424	63,93	0,7168	0,2106	81,97
59	0,0213	0,0415	57,38	0,0232	0,0961	81,97	90	0,5772	0,0514	70,49	0,7900	0,9568	95,08
60	0,4169	0,6575	57,38	0,8718	0,8248	65,57							

A.2 lentelė: Kolmogorov-Smirnov (K-S), χ^2 testų p-reikšmės ir Spearmano (SPR) nepriklausomumo testo rezultatai procentais pagal amžių (Lietuva)

Metai	Moterys			Vyrų		
	K-S	χ^2	SPR	K-S	χ^2	SPR
1980	0,1642	0,0331	24,14	0,0781	0,1847	51,72
1981	0,0064	0,0539	37,93	0,0250	0,2493	37,93
1982	0,1690	0,2744	31,03	0	0,0136	58,62
1983	0,0242	0,0608	20,69	0,0289	0,0861	48,28
1984	0,0011	0	20,69	0,1783	0,0027	48,28
1985	0	0	6,90	0,6023	0,4271	41,38
1986	0,0027	0,0002	10,34	0,4515	0,2260	68,97
1987	0,0712	0,0375	20,69	0,0414	0,3606	58,62
1988	0,0025	0,0092	6,90	0,1714	0,0331	55,17
1989	0,0061	0,0200	44,83	0,0770	0,3606	89,66
1990	0,0146	0,0258	24,14	0,0542	0,1847	65,52
1991	0,1424	0,4628	24,14	0,9181	0,9830	79,31
1992	0,0534	0,2493	93,10	0,2176	0,7381	75,86
1993	0,1744	0,3606	62,07	0,2968	0,0965	62,07
1994	0,0003	0,0105	37,93	0,6281	0,1847	58,62
1995	0,0033	0,0258	13,79	0,2570	0,2744	82,76
1996	0,0180	0,0683	13,79	0,2543	0,2744	79,31
1997	0,2268	0,7381	51,72	0,2758	0,1497	89,66
1998	0,4580	0,7767	86,21	0,9377	0,8481	44,83
1999	0	0,0009	10,34	0,1164	0,3013	44,83
2000	0,0008	0,0001	10,34	0,2990	0,5000	34,48
2001	0,0032	0,0424	6,90	0,3767	0,6582	55,17
2002	0,0050	0,0136	10,34	0,1416	0,4271	62,07
2003	0,0002	0,0228	13,79	0,0951	0,8800	41,38
2004	0,0037	0,0155	17,24	0,2486	0,2260	55,17
2005	0,0241	0,0478	17,24	0,4136	0,3300	62,07
2006	0,0108	0,0080	10,34	0,3738	0,9333	24,14
2007	0,0138	0,1664	10,34	0,0542	0,0539	44,83
2008	0,0062	0,0006	6,90	0,4414	0,6582	34,48

A.3 lentelė: Kolmogorov-Smirnov (K-S), χ^2 testų p-reikšmės ir Spearmano (SPR) nepriklausomumo testo rezultatai procentais pagal metus (Latvija)

Amžius	Moterys			Vīrai			Moterys			Vīrai		
	K-S	χ^2	L-B	K-S	χ^2	SPR	Amžius	K-S	χ^2	L-B	K-S	χ^2
30	0,4169	0,2106	70,49	0,6549	0,7424	85,25	61	0,7828	0,1742	29,51	0,8773	0,3598
31	0,5747	0,6575	96,72	0,1934	0,0961	70,49	62	0,8442	0,2533	50,82	0,3355	0,4244
32	0,3653	0,2106	32,79	0,4036	0,4244	80,33	63	0,8067	0,4962	96,72	0,7415	0,5745
33	0,2458	0,3029	32,79	0,0257	0,0008	70,49	64	0,9046	0,8248	96,72	0,5338	0,4244
34	0,8085	0,6575	26,23	0,8264	0,3598	93,44	65	0,0831	0,7424	95,08	0,7693	0,5745
35	0,3474	0,8248	27,87	0,0490	0,0415	86,89	66	0,3966	0,4244	91,8	0,8075	0,1176
36	0,0383	0,3029	27,87	0,0002	0,0055	65,57	67	0,3776	0,4244	85,25	0,8329	0,4244
37	0,0313	0,1434	27,87	0,0061	0,0334	75,41	68	0,2471	0,3598	39,34	0,1763	0,2106
38	0,4171	0,7424	21,31	0,0442	0,3029	77,05	69	0,0817	0,4962	27,87	0,1224	0,0782
39	0,9554	0,9568	24,59	0,0709	0,3029	83,61	70	0,2805	0,4962	93,44	0,6208	0,7424
40	0,0494	0,0044	22,95	0,9910	0,8248	85,25	71	0,1983	0,1176	96,72	0,7389	0,8248
41	0,4356	0,0514	26,23	0,2505	0,5745	85,25	72	0,5123	0,3029	29,51	0,9342	0,8248
42	0,3255	0,8987	24,59	1,0000	0,8248	95,08	73	0,8379	0,4962	57,38	0,6417	0,9568
43	0,8384	0,9915	27,87	0,4393	0,4962	96,72	74	0,7383	0,6575	40,98	0,6655	0,6575
44	0,8481	0,8987	22,95	0,9379	0,7424	95,08	75	0,3900	0,3029	27,87	0,4878	0,4244
45	0,7821	0,5745	22,95	0,2151	0,0635	78,69	76	0,4203	0,2533	26,23	0,7603	0,5745
46	0,8881	0,0514	19,67	0,5076	0,3029	93,44	77	0,8385	0,5745	27,87	0,4942	0,4244
47	0,6072	0,5745	21,31	0,2090	0,0415	77,05	78	0,4929	0,2533	24,59	0,3924	0,4962
48	0,4466	0,6575	26,23	0,3843	0,3598	80,33	79	0,5863	0,7424	24,59	0,8672	0,9568
49	0,2336	0,3029	21,31	0,4800	0,2533	59,02	80	0,5550	0,7424	26,23	0,2982	0,0961
50	0,9328	0,4244	24,59	0,0513	0,0138	55,74	81	0,8668	0,6575	26,23	0,7786	0,4962
51	0,9557	0,7424	19,67	0,0044	0,0635	81,97	82	0,5047	0,3598	39,34	0,1752	0,5745
52	0,3945	0,4244	24,59	0,0701	0,7424	59,02	83	0,1839	0,1742	24,59	0,0740	0,3029
53	0,3865	0,5745	21,31	0,3781	0,6575	59,02	84	0,7118	0,8248	40,98	0,2912	0,4962
54	0,9308	0,9568	22,95	0,2590	0,2533	54,10	85	0,0642	0,5745	85,25	0,3516	0,1176
55	0,6268	0,3029	24,59	0,3816	0,3029	55,74	86	0,0696	0,4962	80,33	0,5366	0,4244
56	0,8061	0,6575	26,23	0,0610	0,0782	70,49	87	0,1851	0,4244	98,36	0,0785	0,0635
57	0,5843	0,3029	24,59	0,1077	0,4244	54,10	88	0,1103	0,3029	90,16	0,7897	0,4244
58	0,9347	0,6575	22,95	0,5130	0,8248	60,66	89	0,5967	0,0514	96,72	0,3526	0,1434
59	0,6897	0,1434	22,95	0,2179	0,5745	47,54	90	0,0342	0,0334	78,69	0,1788	0,2106
60	0,4545	0,0635	31,15	0,1719	0,0961	63,93						

A.4 lentele: Kolmogorov-Smirnov (K-S), χ^2 testu p-reikšmės ir Spearmano (SPR) nepriklausomumo testo rezultatai procentais pagal amžių (Latvija)

Metai	Moterys			Vyrai		
	K-S	χ^2	SPR	K-S	χ^2	SPR
1980	0,0499	0,3300	79,31	0,1797	0,0768	24,14
1981	0,0104	0,0375	62,07	0,4049	0,1664	27,59
1982	0,0006	0,0061	79,31	0,2071	0,2744	72,41
1983	0,0010	0,0424	72,41	0,0975	0,2260	79,31
1984	0,0002	0,0003	68,97	0,2192	0,3300	65,52
1985	0,0020	0,0092	58,62	0,6692	0,6582	27,59
1986	0,0165	0,0331	51,72	0,2938	0,6985	37,93
1987	0,0001	0,0002	34,48	0,5712	0,4628	27,59
1988	0,0001	0,0001	37,93	0,0900	0,0965	27,59
1989	0,0017	0,0608	82,76	0,1914	0,7767	55,17
1990	0,0431	0,2744	62,07	0,0249	0,0768	34,48
1991	0,0005	0,0176	89,66	0,0466	0,1206	65,52
1992	0,1942	0,6985	86,21	0,5250	0,9333	55,17
1993	0,0057	0,1206	89,66	0,0038	0,0031	75,86
1994	0,0113	0,0009	37,93	0,1676	0,3013	79,31
1995	0,0231	0,0092	55,17	0,1499	0,2045	62,07
1996	0,0604	0,5384	68,97	0,3239	0,2260	82,76
1997	0	0,0002	68,97	0,8710	0,9541	41,38
1998	0,0069	0,3013	55,17	0,1276	0,1664	58,62
1999	0,0356	0,1847	82,76	0,2715	0,1664	55,17
2000	0,0115	0,2744	41,38	0,3840	0,3930	44,83
2001	0,0046	0,0155	62,07	0,0011	0,0683	31,03
2002	0,0014	0,0539	65,52	0,9478	0,9541	34,48
2003	0	0	75,86	0,5000	0,2260	72,41
2004	0,0566	0,4628	93,10	0,5282	0,7767	34,48
2005	0,0028	0,0047	79,31	0,3653	0,4628	58,62
2006	0,0057	0,0331	79,31	0,0202	0,0013	41,38
2007	0,0011	0,0861	72,41	0,1756	0,1345	31,03
2008	0,0009	0,0015	79,31	0,0023	0,0478	37,93

A.5 lentelė: Kolmogorov-Smirnov (K-S), χ^2 testų p-reikšmės ir Spearmano (SPR) nepriklausomumo testo rezultatai procentais pagal metus (Estija)

Amžius	Moterys			Vyrų			Amžius	Moterys			Vyrų		
	K-S	χ^2	L-B	K-S	χ^2	SPR		K-S	χ^2	L-B	K-S	χ^2	SPR
30	0,0289	0,0961	81,97	0,7486	0,5745	88,52	61	0,8355	0,8987	78,69	0,2968	0,7424	72,13
31	0,2414	0,0961	90,16	0,6854	0,0334	90,16	62	0,1732	0,2106	95,08	0,0601	0,3029	86,89
32	0,0317	0,0782	96,72	0,5659	0,8248	93,44	63	0,5685	0,7424	95,08	0,8939	0,4244	90,16
33	0,5564	0,1176	85,25	0,7450	0,3598	95,08	64	0,0493	0,1434	93,44	0,8784	0,8987	90,16
34	0,3315	0,4962	91,80	0,5270	0,8248	93,44	65	0,7982	0,3598	95,08	0,1897	0,4244	91,80
35	0,8001	0,4962	54,10	0,4848	0,4962	86,89	66	0,4949	0,4244	93,44	0,2008	0,3029	98,36
36	0,8179	0,7424	67,21	0,1507	0,1742	83,61	67	0,5408	0,6575	93,44	0,6227	0,4244	93,44
37	0,6866	0,8248	54,10	0,7617	0,8248	95,08	68	0,4118	0,5745	91,80	0,5358	0,4244	93,44
38	0,7085	0,7424	65,57	0,7903	0,4244	93,44	69	0,6687	0,1742	95,08	0,3399	0,8248	90,16
39	0,0240	0,1434	59,02	0,4627	0,4244	72,13	70	0,5027	0,7424	77,05	0,2354	0,3598	88,52
40	0,5946	0,0782	81,97	0,7101	0,8248	78,69	71	0,4618	0,0514	96,72	0,5636	0,8987	67,21
41	0,4751	0,5745	67,21	0,5171	0,3598	81,97	72	0,9332	0,8248	91,80	0,0479	0,0027	70,49
42	0,4817	0,0782	85,25	0,6511	0,4962	42,62	73	0,2359	0,4244	95,08	0,6230	0,2533	67,21
43	0,3639	0,1434	62,30	0,9834	0,8987	70,49	74	0,4020	0,3598	91,80	0,9367	0,8248	80,33
44	0,8172	0,6575	91,80	0,1362	0,3029	49,18	75	0,2152	0,2106	91,80	0,5306	0,4244	59,02
45	0,7671	0,5745	77,05	0,3607	0,6575	67,21	76	0,6975	0,3029	93,44	0,1433	0,1176	65,57
46	0,7632	0,8987	68,85	0,8525	0,8248	54,10	77	0,6904	0,4244	90,16	0,2608	0,4962	62,30
47	0,0875	0,5745	60,66	0,9709	0,6575	44,26	78	0,7528	0,4244	67,21	0,4814	0,2106	55,74
48	0,5007	0,5745	65,57	0,8882	0,6575	54,10	79	0,8686	0,6575	59,02	0,0006	0,0268	55,74
49	0,0601	0,6575	62,30	0,6048	0,8987	62,30	80	0,2187	0,4244	77,05	0,4155	0,1434	73,77
50	0,5350	0,3029	78,69	0,6437	0,7424	50,82	81	0,2465	0,4962	78,69	0,0329	0,0172	52,46
51	0,9720	0,8987	73,77	0,8215	0,8248	50,82	82	0,6457	0,1176	78,69	0,7675	0,8987	50,82
52	0,0392	0,4962	65,57	0,9501	0,9568	47,54	83	0,1704	0,3598	72,13	0,8520	0,8987	59,02
53	0,3097	0,0961	80,33	0,8212	0,2533	55,74	84	0,4268	0,6575	83,61	0,2176	0,0782	40,98
54	0,9560	0,8248	77,05	0,5625	0,7424	65,57	85	0,7574	0,8248	96,72	0,1656	0,3029	54,10
55	0,2891	0,4244	63,93	0,8402	0,3029	63,93	86	0,0998	0,4962	91,80	0,8326	0,8248	40,98
56	0,9179	0,6575	85,25	0,8307	0,8248	86,89	87	0,5070	0,5745	81,97	0,9621	0,7424	45,90
57	0,6678	0,4962	73,77	0,2629	0,6575	67,21	88	0,9410	0,2533	96,72	0,6775	0,1434	81,97
58	0,0942	0,0268	67,21	0,2842	0,0635	95,08	89	0,7614	0,9915	85,25	0,3653	0,1742	40,98
59	0,8166	0,4962	88,52	0,9718	0,9568	91,80	90	0,2221	0,3598	95,08	0,2790	0,0635	67,21
60	0,9370	0,4244	95,08	0,0858	0,3598	91,80							

A.6 lentele: Kolmogorov-Smirnov (K-S), χ^2 testų p-reikšmės ir Spearmano (SPR) nepriklausomumo testo rezultatai procentais pagal amžių (Estija)

	Lietuva		Latvija		Estija	
	Moterys	Vyrai	Moterys	Vyrai	Moterys	Vyrai
1980	0,1440	0,1243	0,1651	0,1204	0,1826	0,1414
1981	0,1382	0,1100	0,1268	0,1119	0,1554	0,1228
1982	0,1295	0,1261	0,1518	0,1421	0,1496	0,1235
1983	0,1399	0,1043	0,1300	0,1028	0,1828	0,1074
1984	0,1509	0,0857	0,1807	0,0873	0,2107	0,1117
1985	0,1319	0,1051	0,2438	0,0968	0,1842	0,1338
1986	0,1420	0,0793	0,2192	0,0837	0,1931	0,1345
1987	0,2006	0,0923	0,2346	0,1234	0,2565	0,1276
1988	0,1734	0,0816	0,2076	0,1047	0,2391	0,1327
1989	0,1418	0,0745	0,1282	0,0790	0,1554	0,0920
1990	0,1008	0,0697	0,2127	0,1141	0,1556	0,0967
1991	0,0997	0,0748	0,1619	0,0837	0,1651	0,1037
1992	0,0997	0,0694	0,0931	0,0634	0,1164	0,1115
1993	0,1218	0,0777	0,0688	0,0824	0,1284	0,1124
1994	0,0987	0,0618	0,0615	0,0720	0,2021	0,0813
1995	0,0887	0,0619	0,0688	0,0530	0,1597	0,0981
1996	0,1078	0,0696	0,0950	0,0491	0,1713	0,1092
1997	0,1261	0,0717	0,0847	0,0600	0,2331	0,1025
1998	0,1514	0,0765	0,0563	0,0544	0,1382	0,0931
1999	0,1100	0,0811	0,1388	0,0569	0,1506	0,1017
2000	0,1127	0,0875	0,1238	0,0675	0,2141	0,1318
2001	0,1196	0,0696	0,1331	0,0517	0,2201	0,1239
2002	0,0873	0,0760	0,1374	0,0560	0,1997	0,1067
2003	0,1189	0,0794	0,1153	0,0726	0,2377	0,1044
2004	0,1051	0,0889	0,1803	0,0587	0,1636	0,1174
2005	0,1275	0,0769	0,1874	0,0635	0,1995	0,1166
2006	0,1701	0,0853	0,2357	0,0788	0,1669	0,1324
2007	0,1914	0,0789	0,2548	0,0835	0,1580	0,1248
2008	0,2043	0,0923	0,3034	0,0743	0,1556	0,1357
Vidurkis	0,1322	0,0839	0,1552	0,0810	0,1809	0,1149

A.7 lentelė: Modelio $\sqrt{MSE}$

A.2 Programos kodas

Programavimui buvo naudojama programa R 3.2.3. ir paketai: „npsp“, „nortest“, „tseries“. Pateiktas programos kodas yra Lietuvos duomenims (kitų šalių duomenims kodas analogiškas).

Pirmiausia iš failų nuskaitytome duomenis.

```
lt<-read.table('Deaths ratesLT2.txt')
D<-read.table('DeathsLT2.txt')
N<-read.table('ExposureLT.txt')
```

Nulines mirtingumo normos reikšmes pakeičiame gretimų reikšmių vidurkiu.

```
for(k in 1:5555){
  for(l in 3:5){
    if(lt[k,l]==0){
      lt[k,l]=(lt[k-1,l]+lt[k+1,l])/2
    }
  }
}
```

```
i<-seq(0,100)
j<-seq(1959,2013)
```

Logaritmuodami mirtingumo normą gauname logaritminės mirtingumo normos reikšmes.

```
LT=matrix(log(lt[,5]), nrow=101, ncol=55, dimnames=list(i,j))
LT_m=matrix(log(lt[,3]), nrow=101, ncol=55, dimnames=list(i,j))
LT_v=matrix(log(lt[,4]), nrow=101, ncol=55, dimnames=list(i,j))
```

Logaritminės mirtingumo normos paviršiai moterims ir vyrams.

```
spersp(i, j, LT_m, s= LT_m, legend=TRUE, phi=25,theta=210, col=jet.colors(128),
  zlab="Logaritminė mirtingumo norma", xlab="", ylab="", main="Moterys")
spersp(i, j, LT_v, s= LT_v, legend=TRUE, phi=25,theta=210, col=jet.colors(128),
  zlab="Logaritminė mirtingumo norma", xlab="", ylab="", main="Vyrai")
```

Vidutinė logaritminė mirtingumo norma visiems amžiams.

```
LTmean<-colMeans(LT)
LTmean_m<-colMeans(LT_m)
LTmean_v<-colMeans(LT_v)
```

Vidutinė logaritminė mirtingumo norma amžiams 40-90.

```
LTmean_m_40_90<-colMeans(LT_m[41:91,])
LTmean_v_40_90<-colMeans(LT_v[41:91,])
```

Visų amžių vidutinės logaritminės mirtingumo galios grafikas (kiti grafikai gaunami analogiškai).

```
pdf(file="vidurkiai.pdf", enc="ISOLatin7")
plot(j, LTmean, type='l', ylab='', xlab='Metai', col="green", ylim=c(-5.2,-4.2),
     lwd=2)
lines(j, LATmean, col="blue", lwd=2)
lines(j, ESTmean, col="red", lwd=2)
legend(1960, -4.9, c("Latvija", "Estija", "Lietuva"), col=c(4,2,3), lty=c(1,1,1),
     lwd=c(2,2,2), merge=TRUE, bg="gray80")
dev.off()
```

Dabar skaičiuojame modelio parametrų įvertinius atskirai vyrams ir moterims. Pirmiausia nustatome amžius ir metus, kuriems skaičiuosime įvertinius.

```
min_a<-35
max_a<-90
min_m<-1980
max_m<-2008

i<-seq(0,100)
j<-seq(1959,2013)
```

Anksčiau nuskaitytus duomenis sudedame į matricas.

```
miu_mot_matrix<-matrix(log(lt[,3]), ncol=55, nrow=101, dimnames=list(i,j))
miu_vyr_matrix<-matrix(log(lt[,4]), ncol=55, nrow=101, dimnames=list(i,j))
D_mot_matrix<-matrix(D[,3], ncol=55, nrow=101, dimnames=list(i,j))
D_vyr_matrix<-matrix(D[,4], ncol=55, nrow=101, dimnames=list(i,j))
N_mot_matrix<-matrix(N[,3], ncol=55, nrow=101, dimnames=list(i,j))
N_vyr_matrix<-matrix(N[,4], ncol=55, nrow=101, dimnames=list(i,j))
```

Iš pradinių matricų išskiriame eilutes ir stulpelius, kurie atitinka nagrinėjamus amžius ir metus.

```
miu_mot<-miu_mot_matrix[((min_a+1):(max_a+1)),((min_m-1959+1):(max_m-1959+1))]
miu_vyr<-miu_vyr_matrix[((min_a+1):(max_a+1)),((min_m-1959+1):(max_m-1959+1))]
D_mot<-D_mot_matrix[((min_a+1):(max_a+1)),((min_m-1959+1):(max_m-1959+1))]
D_vyr<-D_vyr_matrix[((min_a+1):(max_a+1)),((min_m-1959+1):(max_m-1959+1))]
N_mot<-N_mot_matrix[((min_a+1):(max_a+1)),((min_m-1959+1):(max_m-1959+1))]
N_vyr<-N_vyr_matrix[((min_a+1):(max_a+1)),((min_m-1959+1):(max_m-1959+1))]
```

Moterims ir vyrams sudarome centruotų pagal metus logaritminės mirtingumo normos reikšmių matricas Z.

```
alfa_mot<-rowMeans(miu_mot)
Z_mot<-sweep(miu_mot, 1, alfa_mot, "-")

alfa_vyr<-rowMeans(miu_vyr)
Z_vyr<-sweep(miu_vyr, 1, alfa_vyr, "-")
```

Randame tikrines reikšmes ir jas atitinkančius tikrinius vektorius.

```
liambda_mot<-sqrt(eigen(t(Z_mot)%*%Z_mot)$values[1])
U_mot<-eigen(t(Z_mot)%*%Z_mot)$vectors[,1]
V_mot<-eigen(Z_mot%*%t(Z_mot))$vectors[,1]

liambda_vyr<-sqrt(eigen(t(Z_vyr)%*%Z_vyr)$values[1])
U_vyr<-eigen(t(Z_vyr)%*%Z_vyr)$vectors[,1]
V_vyr<-eigen(Z_vyr%*%t(Z_vyr))$vectors[,1]
```

Apskaičiuojame β įvertinius ir tarpinius k įvertinius.

```
beta_mot<-V_mot/sum(V_mot)
beta_vyr<-V_vyr/sum(V_vyr)

k_mot<-liambda_mot*sum(V_mot)*U_mot
k_vyr<-liambda_vyr*sum(V_vyr)*U_vyr

Sum_D_mot<-colSums(D_mot)
Sum_D_vyr<-colSums(D_vyr)

kk_vyr=NULL
kk_mot=NULL
for(i in 1:(max_m-min_m+1)){
  function_k_mot<-function(k){Sum_D_mot[i]-sum(N_mot[,i]*exp(alfa_mot+beta_mot*k))}
  kk_mot[i]<-uniroot(function_k_mot, c(-50,50), tol = 0.000000001)$root
  function_k_vyr<-function(k){Sum_D_vyr[i]-sum(N_vyr[,i]*exp(alfa_vyr+beta_vyr*k))}
  kk_vyr[i]<-uniroot(function_k_vyr, c(-50,50), tol = 0.000000001)$root
}
```

Apskaičiuojame galutinius α ir k įvertinius.

```
k_iv_mot<-kk_mot - mean(kk_mot)
k_iv_vyr<-kk_vyr - mean(kk_vyr)

alfa_iv_mot<-alfa_mot + beta_mot * mean(kk_mot)
alfa_iv_vyr<-alfa_vyr + beta_vyr * mean(kk_vyr)
```

α , β ir k įvertinių grafikai.

```
amzius <- c(min_a:max_a)
metai <- c(min_m:max_m)

pdf(file = "lt_30-90.pdf", enc = "ISOLatin7")
par(mfrow=c(3,2), mar = c(4, 3, 3, 2))
plot(amzius, alfa_iv_mot, type="l", col="red", lwd=1, xlab="Amžius", ylab="")
plot(amzius, alfa_iv_vyr, type="l", col="blue", lwd=1, xlab="Amžius", ylab="")

plot(amzius, beta_mot, type="l", col="red", lwd=1, xlab="Amžius", ylab="")
plot(amzius, beta_vyr, type="l", col="blue", lwd=1, xlab="Amžius", ylab="")
```

```
plot(metai, k_iv_mot, type="l", col="red", lwd=1, xlab="Metai", ylab="")
plot(metai, k_iv_vyr, type="l", col="blue", lwd=1, xlab="Metai", ylab="")
dev.off()
```

Poslinkio ir dispersijos įvertiniai.

```
T<-max_m-min_m+1
theta_mot<-(k_iv_mot[T]-k_iv_mot[1])/(T-1)
theta_vyr<-(k_iv_vyr[T]-k_iv_vyr[1])/(T-1)

sigma_mot<-sqrt(sum((diff(k_iv_mot) - theta_mot)^2)/(T-1))
sigma_vyr<-sqrt( sum((diff(k_iv_vyr) - theta_vyr)^2)/(T-1))
```

Po k modeliavimo gautos paklaidos ir jų vidurkiai.

```
RWDresiduals_mot=NULL
RWDresiduals_vyr=NULL
RWDresiduals_mot<-diff(k_iv_mot) - theta_mot
RWDresiduals_vyr<-diff(k_iv_vyr) - theta_vyr

mean(RWDresiduals_mot)
mean(RWDresiduals_vyr)
```

Tikriname vienetinės šaknies egzistavimą, paklaidų normalumą ir nepriklausomumą.

```
adf.test(k_iv_vyr, k=0)
adf.test(k_iv_mot, k=0)
```

```
lillie.test(RWDresiduals_vyr)
lillie.test(RWDresiduals_mot)
```

```
pearson.test(RWDresiduals_vyr)
pearson.test(RWDresiduals_mot)
```

```
Box.test(RWDresiduals_vyr, type="Ljung-Box")
Box.test(RWDresiduals_mot, type="Ljung-Box")
```

Randame modelio paklaidas ir apskaičiuojame jų MSE.

```
residuals_mot<-matrix(ncol = (max_m-min_m+1), nrow = (max_a-min_a+1),
  dimnames=list(min_a:max_a,min_m:max_m))
residuals_vyr<-matrix(ncol = (max_m-min_m+1), nrow = (max_a-min_a+1),
  dimnames=list(min_a:max_a,min_m:max_m))

for (k in 1:(max_a-min_a+1)){
  for (l in 1:(max_m-min_m+1)){
    residuals_mot[k,l]=miu_mot[k,l]-(alfa_iv_mot[k]+beta_mot[k]*k_iv_mot[l])
    residuals_vyr[k,l]=miu_vyr[k,l]-(alfa_iv_vyr[k]+beta_vyr[k]*k_iv_vyr[l])
  }
}
```

```
MSE_vyr_sqrt<-sqrt(colMeans(residuals_vyr^2))
MSE_mot_sqrt<-sqrt(colMeans(residuals_mot^2))
```

Modelio paklaidų normalumo tikrinimas pagal amžių.

```
pvalue_norm_amzius_mot=matrix(ncol=2, nrow = (max_a-min_a+1),
  dimnames=list((min_a:max_a), 1:2))
pvalue_norm_amzius_vyr=matrix(ncol=2, nrow = (max_a-min_a+1),
  dimnames=list((min_a:max_a), 1:2))
for (k in 1:(max_a-min_a+1)){
  pvalue_norm_amzius_mot[k,1]<-lillie.test(residuals_mot[k,])$p.value
  pvalue_norm_amzius_vyr[k,1]<-lillie.test(residuals_vyr[k,])$p.value
  pvalue_norm_amzius_mot[k,2]<-pearson.test(residuals_mot[k,])$p.value
  pvalue_norm_amzius_vyr[k,2]<-pearson.test(residuals_vyr[k,])$p.value
}

v_ks_amzius=0
m_ks_amzius=0
v_chi_amzius=0
m_chi_amzius=0
for (k in 1:(max_a-min_a+1)){
  if(pvalue_norm_amzius_vyr[k,1]>=0.05){
    v_ks_amzius=v_ks_amzius+1
  }
  if(pvalue_norm_amzius_mot[k,1]>=0.05){
    m_ks_amzius=m_ks_amzius+1
  }
  if(pvalue_norm_amzius_vyr[k,2]>=0.05){
    v_chi_amzius=v_chi_amzius+1
  }
  if(pvalue_norm_amzius_mot[k,2]>=0.05){
    m_chi_amzius=m_chi_amzius+1
  }
}

proc_norm_ks_vyr_amzius<-v_ks_amzius/(max_a-min_a+1)*100
proc_norm_ks_mot_amzius<-m_ks_amzius/(max_a-min_a+1)*100
proc_norm_chi_vyr_amzius<-v_chi_amzius/(max_a-min_a+1)*100
proc_norm_chi_mot_amzius<-m_chi_amzius/(max_a-min_a+1)*100
```

Modelio paklaidų normalumo tikrinimas pagal metus.

```
pvalue_norm_metai_mot=matrix(ncol=2, nrow = (max_m-min_m+1),
  dimnames=list((min_m:max_m), 1:2))
pvalue_norm_metai_vyr=matrix(ncol=2, nrow = (max_m-min_m+1),
  dimnames=list((min_m:max_m), 1:2))
```

```

for (l in 1:(max_m-min_m+1)){
  pvalue_norm_metai_mot[l,1]<-lillie.test(residuals_mot[,l])$p.value
  pvalue_norm_metai_vyr[l,1]<-lillie.test(residuals_vyr[,l])$p.value
  pvalue_norm_metai_mot[l,2]<-pearson.test(residuals_mot[,l])$p.value
  pvalue_norm_metai_vyr[l,2]<-pearson.test(residuals_vyr[,l])$p.value
}

v_ks_metai=0
m_ks_metai=0
v_chi_metai=0
m_chi_metai=0
for (k in 1:(max_m-min_m+1)){
  if(pvalue_norm_metai_vyr[k,1]>=0.05){
    v_ks_metai=v_ks_metai+1
  }
  if(pvalue_norm_metai_mot[k,1]>=0.05){
    m_ks_metai=m_ks_metai+1
  }
  if(pvalue_norm_metai_vyr[k,2]>=0.05){
    v_chi_metai=v_chi_metai+1
  }
  if(pvalue_norm_metai_mot[k,2]>=0.05){
    m_chi_metai=m_chi_metai+1
  }
}

proc_norm_ks_vyr_metai<-v_ks_metai/(max_m-min_m+1)*100
proc_norm_ks_mot_metai<-m_ks_metai/(max_m-min_m+1)*100
proc_norm_chi_vyr_metai<-v_chi_metai/(max_m-min_m+1)*100
proc_norm_chi_mot_metai<-m_chi_metai/(max_m-min_m+1)*100

```

Modelio paklaidų nepriklausomumo tikrinimas pagal amžių.

```

pvalue_nepr_amzius_mot=matrix(ncol = (max_a-min_a+1), nrow = (max_a-min_a+1),
  dimnames=list(min_a:max_a,min_a:max_a))
pvalue_nepr_amzius_vyr=matrix(ncol = (max_a-min_a+1), nrow = (max_a-min_a+1),
  dimnames=list(min_a:max_a,min_a:max_a))

for (k in 1:(max_a-min_a+1)){
  for (l in 1:(max_a-min_a+1)){
    pvalue_nepr_amzius_mot[k,l]<-cor.test(residuals_mot[k,],residuals_mot[l,],
      method = "spearman")$p.value
    pvalue_nepr_amzius_vyr[k,l]<-cor.test(residuals_vyr[k,],residuals_vyr[l,],
      method = "spearman")$p.value
  }
}

vyr_amzius_nepr=NULL
mot_amzius_nepr=NULL

```

```

v_amzius=0
m_amzius=0
for (k in 1:(max_a-min_a+1)){
  for (l in 1:(max_a-min_a+1)){
    if(pvalue_nepr_amzius_vyr[k,l]>=0.05){
      v_amzius=v_amzius+1
    }
    if(pvalue_nepr_amzius_mot[k,l]>=0.05){
      m_amzius=m_amzius+1
    }
  }
  vyr_amzius_nepr[k]<-v_amzius
  mot_amzius_nepr[k]<-m_amzius
  v_amzius=0
  m_amzius=0
}
proc_nepr_vyr_amzius<-vyr_amzius_nepr/(max_a-min_a+1)*100
proc_nepr_mot_amzius<-mot_amzius_nepr/(max_a-min_a+1)*100

```

Modelio paklaidų normalumo tikrinimas pagal metus.

```

pvalue_nepr_metai_mot=matrix(ncol = (max_m-min_m+1), nrow = (max_m-min_m+1),
  dimnames=list(min_m:max_m,min_m:max_m))
pvalue_nepr_metai_vyr=matrix(ncol = (max_m-min_m+1), nrow = (max_m-min_m+1),
  dimnames=list(min_m:max_m,min_m:max_m))

for (k in 1:(max_m-min_m+1)){
  for (l in 1:(max_m-min_m+1)){
    pvalue_nepr_metai_mot[k,l]<-cor.test(residuals_mot[,k],residuals_mot[,l],
      method = "spearman")$p.value
    pvalue_nepr_metai_vyr[k,l]<-cor.test(residuals_vyr[,k],residuals_vyr[,l],
      method = "spearman")$p.value
  }
}

vyr_metai_nepr=NULL
mot_metai_nepr=NULL
v_metai=0
m_metai=0
for (k in 1:(max_m-min_m+1)){
  for (l in 1:(max_m-min_m+1)){
    if(pvalue_nepr_metai_vyr[k,l]>=0.05){
      v_metai=v_metai+1
    }
    if(pvalue_nepr_metai_mot[k,l]>=0.05){
      m_metai=m_metai+1
    }
  }
}

```

```

    vyr_metai_nepr[k]<-v_metai
    mot_metai_nepr[k]<-m_metai
    v_metai=0
    m_metai=0
}
proc_nepr_vyr_metai<-vyr_metai_nepr/(max_m-min_m+1)*100
proc_nepr_mot_metai<-mot_metai_nepr/(max_m-min_m+1)*100

Prognozė 2009 - 2013 metams.

k<-seq(min_a,max_a)
l<-seq(2009,2013)

miu_prog_mot<-matrix(ncol = 5,nrow = (max_a-min_a+1), dimnames = list(k,l))
miu_prog_vyr<-matrix(ncol = 5,nrow = (max_a-min_a+1), dimnames = list(k,l))

for (i in 1:5){
  for (j in 1:(max_a-min_a+1)){
    miu_prog_mot[j,i]<-alfa_iv_mot[j] + beta_mot[j]*(k_iv_mot[T]+i*theta_mot)
    miu_prog_vyr[j,i]<-alfa_iv_vyr[j] + beta_vyr[j]*(k_iv_vyr[T]+i*theta_vyr)
  }
}

```

Prognozės paklaidos ir MSE.

```

miu2_mot<-miu_mot_matrix[((min_a+1):(max_a+1)),(51:55)]
miu2_vyr<-miu_vyr_matrix[((min_a+1):(max_a+1)),(51:55)]

residuals_prog_mot<-matrix(ncol = 5, nrow = (max_a-min_a+1),
  dimnames=list(min_a:max_a,2009:2013))
residuals_prog_vyr<-matrix(ncol = 5, nrow = (max_a-min_a+1),
  dimnames=list(min_a:max_a,2009:2013))

for (k in 1:(max_a-min_a+1)){
  for (l in 1:5){
    residuals_prog_mot[k,l] = miu2_mot[k,l] - miu_prog_mot[k,l]
    residuals_prog_vyr[k,l] = miu2_vyr[k,l] - miu_prog_vyr[k,l]
  }
}

```

```

MSE_prog_vyr_sqrt<-sqrt(colMeans(residuals_prog_vyr^2))
MSE_prog_mot_sqrt<-sqrt(colMeans(residuals_prog_mot^2))

```

Vidutinė tikėtina likusio gyvenimo trukmė.

```

e_mot = NULL
e_vyr = NULL

p_m<-1-exp(miu_prog_mot)
p_v<-1-exp(miu_prog_vyr)

```

```

sum_m=0
sum_m=0
for(x in min_a:max_a){
  sum_m=0
  sum_v=0
  for(k in 1:(91-x)){
    sand_m=1
    sand_v=1
    for (l in 0:(k-1)){
      sand_m=sand_m*p_m[((x-19)+1),(1+2)]
      sand_v=sand_v*p_v[((x-19)+1),(1+2)]
    }
    sum_m =sum_m+sand_m
    sum_v =sum_v+sand_v
  }
  e_mot[(x-19)]=sum_m
  e_vyr[(x-19)]=sum_v
}

```