Turinys

VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ IR SKAIČIAVIMO MATEMATIKOS KATEDRA

Martynas Kupšys

Antrosios eilės diferencialinės lygtys paprastuose grafuose

Baigiamasis Magistro darbas

Leidžiu ginti . . . .
Darbo vadovas **doc. dr.(HP) Artūras Štikonas**

Vilnius, 2016

Antrosios eilės diferencialinės lygtys paprastuose grafuose

Santrauka

Šiame darbe nagrinėjamos antros eilės diferencialinės lygtys paprastuose grafuose. Sudaromi diferencialiniai uždaviniai, kur sąlygos užrašomos priklausomai nuo grafo viršūnių tipų (kraštinis, vidinis). Pateikiami būdai, kaip galima diferencialinius uždavinius spręsti grafuose atlikus tam tikrus pertvarkymus (parametrizaciją). Vienas būdas pateikiamas detaliai. Nagrinėjami tikrinių reikšmių spektrai, gauti iš diferencialinių uždavinių. Nustatomos sąlygos, kada gauti tikrinių reikšmių spektrai turi bendrų taškų. Nustatoma, nuo ko priklauso tikrinių reikšmių spektrų skaičius.

The second order differencial equations on simple graphs

Abstract

In this thesis we analyze the second order differencial equations on simple graphs. The differencial problems are composed, where conditions are written accordingly to the type of graph's vertex (bordering, internal). We present several ways to solve differencial problems on graphs after having done certain rearrangement - parameterisation. One of the manners is presented in detail. The study of spectrums of eigenvalues from differential problems are included. We are fixing the conditions, when spectrums of eigenvalues have common points and determine the dependence of the quantity of eigenvalues spectrums.

Įvadas

Darbas yra apie antros eilės diferencialinius uždavinius paprastuose grafuose. Bendra diferencialinio uždavinio formuluotė yra

$$
\begin{aligned}
&-(pu')' + qu = f, && x \in R(\Gamma),\\
&-\sum_{\gamma \subset \Gamma(a)} \alpha_\gamma(a) \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\gamma}(a) + q(a)u(a) = f(a), && a \in J(\Gamma),\\
&u(a) = 0, && a \in (\partial\Gamma),
\end{aligned}
$$

Šio darbo užduotis yra išnagrinėti straipsnius:

1) A. Krylovas. *DISKREČIOJI MATEMATIKA, Mokomoji knyga*. Vilnius: Technika, 2004. (1)

2) Yu. V. Pokornyi, V. L. Pryadiev, "The qualitative Sturm-Liouville theory on spatial network,"Journal of Mathematical Sciences, Vol 119, No. 6, 2004(2)

3) Yu. V. Pokornyi and A. V. Borovskikh, *Differential Equations on Networks (Geometric graphs)*, Journal of Mathematical Sciences, Vol. 119, No. 6, 2004.(3)

4) F. V. Atkinson, *Discrete and Continuous Boundary Problems*, Academic Press, New York (1964).(4)

5) E. A. Coddington and N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill, New York (1955).(5)

Medžiagos buvo ieškoma ir knygose, ir internete. Nagrinejant šią turimą medžiagą, reikėjo išsiaiškinti, kokios klasikinės grafų teorijos sąvokos ir apibrėžimai naudojami diferencialinėse uždaviniuose ant grafų. Taip pat, kokie grafai naudojami sprendžiant diferencialinių uždavinių problemas, kaip grafų teorija pritaikoma diferencialiuose uždaviniuose grafuose. Išsiaiškinti, kokiais būdais galima spręsti diferencialinius uždavinius grafuose bei kaip pasikeičia uždavinys naudojant kurį nors būdą. Taip pat nagrinėjami diferencialinių uždavinių tikrinių reikšmių spektrai. Diferencialinės lygtys grafuose yra pritaikomos fizikoje, chemijoje, medicinoje.

Darbas sudarytas iš trijų skyrių, literatūros sąrašo. Pirmajame skyriuje pateikiami klasikinės grafų teorijos apibrežimai ir sąvokos. Nagrinėjama, kaip grafų teorija pritaikoma sprendžiant diferencialinius uždavinius.

Antrajame skyriuje pateikiama, kokie būdai gali būti pritaikyti sprendžiant diferencialinius uždavinius grafuose. Pateikiamas vienas detalus pavyzdys, išspręstas netaikant jokio aprašyto būdo, pritaikant vieną iš pasirinktų būdų.

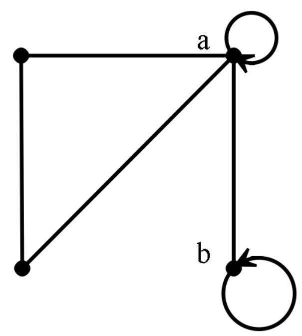
Trečiajame skyriuje nagrinėjami atvejai, kai duotas konkretus grafas: aprašytas diferencialinis uždavinys su sąlygomis, kurių forma priklauso nuo grafo viršūnių tipo. Nagrinėjami tikrinių reikšmių spektrai. Nustatoma, kada spektrai turi bendrų taškų, nuo ko priklauso gautų spektrų skaičius.

1. Grafų teorijos Apibrėžimai ir sąvokos. Funkcijos ant grafų

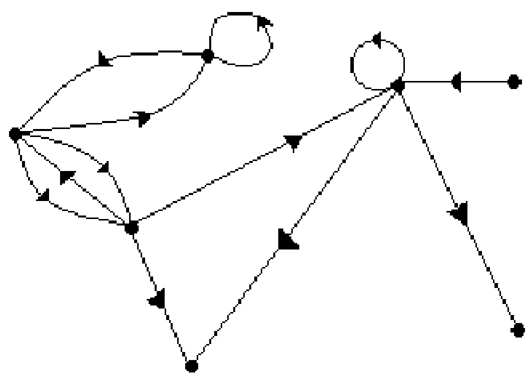
Šiame skyriuje pateiksime pagrindinius grafų teorijos apibrėžimus ir jų pritaikymą diferencialinių uždavinių sprendimui.

1.1. Klasikinės grafų teorijos apibrėžimai

Iš klasikinės grafų teorijos [1] žinome, kad grafus sudaro *viršūnės (taškai)* ir *briaunos (kraštinės, lankai)*, kuriomis sujungiamos minėtosios *viršūnės*. Šalia viena kitos esančios viršūnės gali būti sujungtos keliomis ligiagrečiomis briaunomis. Briauna, kurios pradžia ir galas sutampa, vadinama kilpa (žr. 1 pav.). Toks grafas, kuris yra sudarytas iš išvardintų elementų vadinamas *multigrafu* (žr. 2 pav.).

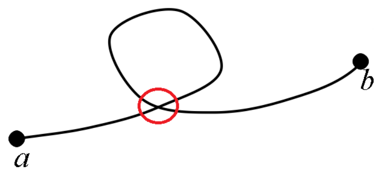


1 pav.: Briaunos (a, a) ir (b, b).



2 pav.: Multigrafas.

Taigi, tokių grafų šiame darbe mes nenagrinėsime. Bus nagrinėjami grafai, kurių briaunos neturi savikirtų. Briaunos savikirta iliustruojama žemiau pateiktame paveiksliuke (žr. 3 pav.).



3 pav.: Briaunos atkarpa (a,b), kertasi pati su savimi.

1.1 Apibrėžimas. Multigrafas be lygiagrečių briaunų ir kilpų vadinamas *paprastuoju grafu*.

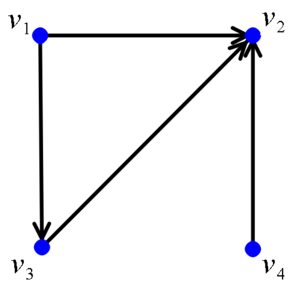
Toliau šiame darbe bus nagrinėjami *paprastieji* grafai. T.y. darbe paminėtuose grafų teorijos apibrėžimuose visi grafai yra *paprastieji*.

1.2 Apibrėžimas. (Bendrasis grafo apibrėžimas). Orientuotu grafu Γ vadiname porą (V,E), kur V yra baigtinė aibė $V = v_1,v_2,\ldots,v_n$, o $E \subset V \times V$ yra aibė sudaryta iš V elementų porų. Aibė V yra vadinama viršūnių aibe, o E yra vadinama briaunų aibe.

Orientuotą grafą $\Gamma = (V,E)$ galima grafiškai pavaizduoti plokštumoje atidėję $n = |V|$ taškų ir kiekvienai porai $(v_i,v_j) \in E$ priskyrę rodyklę einančią iš taško v_i į tašką v_j. Iš šio grafo $\Gamma = (V,E)$ galima sukonstruoti jo matricą, dar vadinama *gretimumo* matrica. Apibrėžiama:

$$M = (a_{ij}), \text{kur } a_{ij} = \begin{cases} 1, & (v_i,v_j) \in E, \\ 0, & (v_i,v_j) \notin E. \end{cases} \tag{1}$$

Orientuotas grafas pavaizduotąs žemiau esančiame paveiksliuke (žr. 4 pav.). *Parodysime, kaip atrodo jo matrica* M.



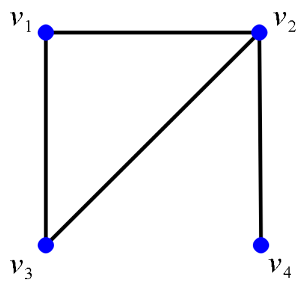
4 pav.: Orientuoto grafo pavyzdys.

Šio grafo gretimumo matrica užrašoma taip:

$$M = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \tag{2}$$

Galima pastebėti, kad vienetai eilutėse atitinka išeinančias iš j-osios viršūnės briaunas (jos numeris j sutampa su stulpelio numeriu). Vienetas stulpelyje atitinka įeinančią į i-ąja viršūnę. briauną.

1.3 Apibrėžimas. Neorientuotu grafu vadinama pora (V,E), kur E yra nesutvarkytų porų (v_i,v_j) aibė. Kitaip tariant, neorientuoto grafo atveju mes nelaikome, kad poromis (v_i,v_j) ir (v_j,v_i) nusakomos briaunos yra skirtingos.



5 pav.: Neorientuotas grafas.

Šio grafo (žr. 5 pav.) *gretimumo matrica*:

$$M = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \tag{3}$$

Matome, kad gretimumo matricos yra simetrinės, nes pagrindinę diagonalę sudaro 0.

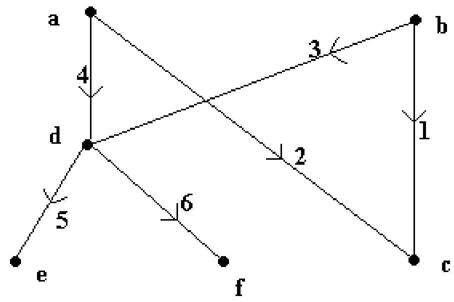
Dabar paimkime orientuotą grafą $\Gamma = (V,E)$ ir sunumeruokime briaunas $l_1, l_2, \ldots, l_m$, $m = |E|$.

1.4 Apibrėžimas. Grafo Γ *incidencijų matrica* $I = \|e_{ij}\|_{n\times m}$ apibrėžiama taip:

$$e_{ij} = \begin{cases} 1, & l_j = (v_i,w) \in E, \\ -1, & l_j = (w,v_i) \in E, \\ 0, & l_j \neq (v_i,w) \text{ ir } l_j \neq (w,v_i)\ \forall w \in V. \end{cases}$$

Taigi, incidencijų matricos elementai, lygūs vienetui, atitinka išeinančias briaunas, vienetai su minuso ženklu žymi įeinančias, o nuliai - kad briauna nėra incidenti atitinkamai grafo viršūnei.

Pavyzdžiui, pateiktame paveiksliuke (žr. 6 pav.) *esančio orientuoto grafo*



6 pav.: Orientuotas grafas.

incidencijų matricos pavidalą. Jis atrodo taip:

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

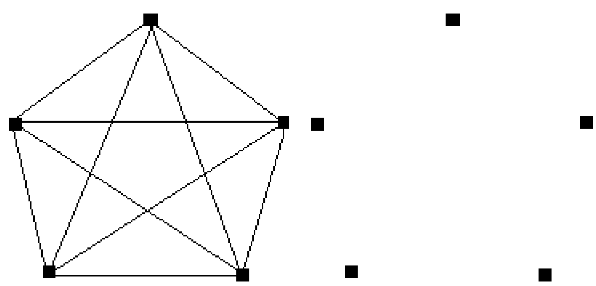
Kai grafas $\Gamma = (V,E)$ yra neorientuotasis grafas, incidencijų matricoje $I = \|e_{ij}\|_{n\times m}$ nerašome neigiamų elemtų:

$$e_{ij} = \begin{cases} 1, & l_j = (v_i,w) \in E, \\ 0, & l_j \neq (v_i,w)\,\forall w \in V. \end{cases}$$

1.5 Apibrėžimas. Grafo $\Gamma = (V,E)$ *eile* vadinamas skaičius $|V| = n$.

1.6 Apibrėžimas. Grafas $\Gamma = (V,\emptyset)$ vadinamas *tuščiuoju* (žr. 7 pav.). Jis žymimas O_n, čia $n = |V|$ - grafo eilė. Grafas $\Gamma = (\emptyset,\emptyset)$ vadinamas *nuliniu*.

1.7 Apibrėžimas. Grafas, turintis visas $n(n-1)/2$ briaunas ($n = |V|$), vadinamas *pilnuoju* (žr. 7 pav.) ir žymimas K_n.



7 pav.: Penktosios eilės pilnasis ir tuščiasis grafas.

1.8 Apibrėžimas. Grafo $\Gamma = (V,E)$ viršūnės v_i ir v_j vadinamos *gretimomis*, kai $\{v_i,v_j\} \in B$.

Viršūnės v_i ir v_j vadinamos *incidenčiomis* briaunai $\{v_i,v_j\}$. Briaunos, turinčios bendrą incidenčiąją viršūnę, vadinamos *gretimomis*.

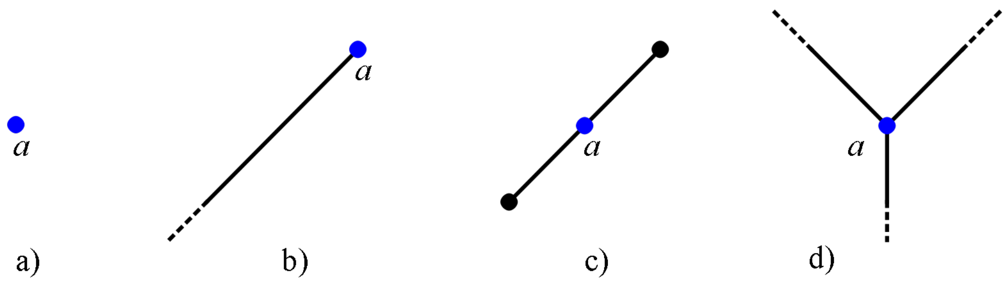
Reikia pastebėti, kad *gretimumas* yra tos pačios elementų savybės, o *incidentumas* - skirtingų.

1.9 Apibrėžimas. Grafo $\Gamma = (V,E)$ viršūnės $v_j \in V$ laipsniu (indeksu) $\deg(v_j) = p(v) = |\Gamma(v)|$ vadiname su viršūnę v_j susijungusių briaunų skaičių.

Tegul $\Gamma = (V,E)$ yra grafas, tuomet visų grafo Γ viršūnių laipsnių suma yra lygi grafo briaunų skaičiui padaugintam iš dviejų

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|. \tag{4}$$

Išskirsime pagrindinius viršūnių su skirtingais laipsniais atvejus (žr. 8 pav.).



8 pav.: Paveiksliuko (a) dalyje indeksas $\deg(a) = 0$, (b) dalyje $\deg(a) = 1$ vadinama pasienio briauna, (c) dalyje $\deg(a) = 2$ - išsigimusia vidine viršūne, (d) dalyje, indeksas $\deg(a) \geqslant 3$ - neišsigimusi vidinė viršūnė.

Šiuo atveju buvo kalbama apie neorientuotą grafą. Orientuoto grafo atveju su viršūnių laipsniais yra šiek tiek kitaip.

Orientuoto grafo atveju, aibę Γ galima suskaldyti į dvi:

$$\Gamma(v) = \Gamma^-(v) \cup \Gamma^+(v),$$

kurios atitinka išeinančias bei įeinančias briaunas.

1.10 Apibrėžimas. Skaičius $p(v) = |\Gamma(v)|$ yra vadinamas viršūnės v laipsniu. Orientuoto grafo atveju turime $p(v) = p(v)^- + p(v)^+ \equiv |\Gamma^-(v)| + |\Gamma^+(v)|$. Skaičiai $p(v)^-$ ir $p(v)^+$ yra vadinami išėjimo ir įėjimo *puslaipsniais*. Orientuoto grafo viršūnė v yra vadinama *įėjimo (išėjimo)*, kai $p(v)^+ = 0$, $p(v)^- > 0$ ($p(v)^+ > 0$, $p(v)^- = 0$)

1.11 Apibrėžimas. Grafas vadinamas *jungiuoju*, jei bet kurias jo viršūnes galima sujungti keliu.

1.12 Apibrėžimas. (Grafo pografis). Grafas $\Gamma' = (V',E')$ yra vadinamas grafo $\Gamma = (V,E)$ pografiu ir rašome, kad $\Gamma' \subset \Gamma$ jeigu $V' \subset V$ ir $E' \subset E$.

1.2. Darbe taikomos grafų teorijos sąvokos

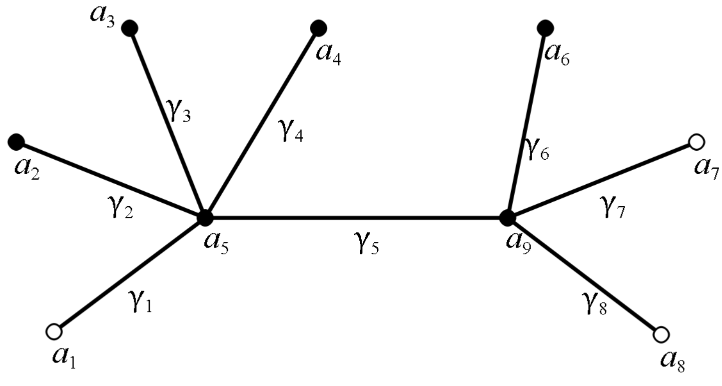
Tegu Γ yra geometrinis tinklas $\mathbb{R}^n$ erdvėje, kuris realizuotas kaip atviras jungus geometrinis grafas, jei tinklo briaunoms galima pakankamai glodi parametrizacija ir neturi savikirtų.

Nagrinėjant diferencialinių lygčių uždavinius ant geometrinio grafo, pateiksime geometrinio grafo sąvokas ir apibrėžimus, remiantis klasikinės grafų teorijos apibrėžimais.

- Geometrinį grafą suprantame kaip vienos dimensijos daugdarą. Grafo briaunos yra vienamatės, glodžiosios, reguliariosios daugdaros. Viršūnė yra taškas. Patogu laikyti, kad grafas yra įdedamas į $\mathbb{R}^2$ arba $\mathbb{R}^3$ erdves ir jos briaunos yra paprastos kreivės, kurios jungiasi taškais be savikirtų (nesikirsdamos pačios su savimi) ir jų pakankamai glodžia parametrizacija, tas kreives galima laikyti tiesiog tiesių linijų intervalais. Grafų briaunų aibę žymėsime γ, o γ_i

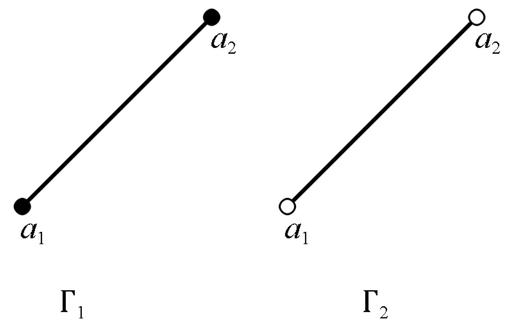
$$\gamma_i = (a_i,b_i) = \{x = a_i + \lambda(b_i - a_i) : 0 < \lambda < 1\}, \quad i = \overline{1,m}, \tag{5}$$

  jei jos yra sunumeruotos indeksais i. Todėl galime sakyti, kad Γ sudaryta iš tam tikro skaičiaus intervalų rinkinio, kurias vadinsime briaunomis ir poaibio $J(\Gamma)$ viršūnių aibės. Kiekviena jame esanti viršūnė vadinama vidine viršūne (paprastai viršūnes žymėsime a arba a_i) arba grafo Γ vidiniu mazgu. Tie intervalų (5) galai, kurie nėra įtraukti į aibę $J(\Gamma)$ yra vadinami kraštinėmis viršūnėmis arba grafo Γ kraštiniais mazgais. Tokių mazgų aibė žymima $\partial\Gamma$. Sąjunga visų briaunų žymima $R(\Gamma)$. Taigi $\Gamma = R(\Gamma) \cup J(\Gamma)$. Topologija ant grafo Γ yra indukuojama iš erdvės $\mathbb{R}^n$.



9 pav.: Grafo Γ pavyzdys. Čia, $\gamma_1 = (a_1,a_5)$, $\gamma_2 = (a_5,a_2)$, $\gamma_3 = (a_5,a_3)$, $\gamma_4 = (a_5,a_4)$, $\gamma_5 = (a_5,a_9)$, $\gamma_6 = (a_9,a_6)$, $\gamma_7 = (a_9,a_7)$, $\gamma_8 = (a_9,a_8)$. Tada $\Gamma = \{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4,\gamma_5,\gamma_6,\gamma_7,\gamma_8\} \cup \{a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_9\}$. Matyti, kad $R(\Gamma) = \{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4,\gamma_5,\gamma_6,\gamma_7,\gamma_8\}$ ir $J(\Gamma) = \{a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_9\}$, o $\partial\Gamma = \{a_1,a_7,a_8\}$.

Taip pat gali būti tokie grafai, kur nėra kraštinių $\partial\Gamma$ taškų arba vidinių taškų $J(\Gamma)$ (žr. 10 pav.).



10 pav.: Pirmame grafe Γ_1, kraštinių taškų $\partial\Gamma_1 = \emptyset$, vidinių - $J(\Gamma_1) = \{a_1,a_2\}$ ir antrame grafe Γ_2, vidinių taškų $J(\Gamma_2) = \emptyset$, kraštinių - $\partial\Gamma_2 = \{a_1,a_2\}$.

Skaliarine f-ja $u(x)$ ant grafo yra įprasta funkcija $u : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$. Funkcijos $u(x)$ siaurinys ant briaunos γ yra žymima $u_\gamma(x)$.

Kalbėdami apie funkcijos tolydumą ant duoto grafo, išskiriame tris atvejus:

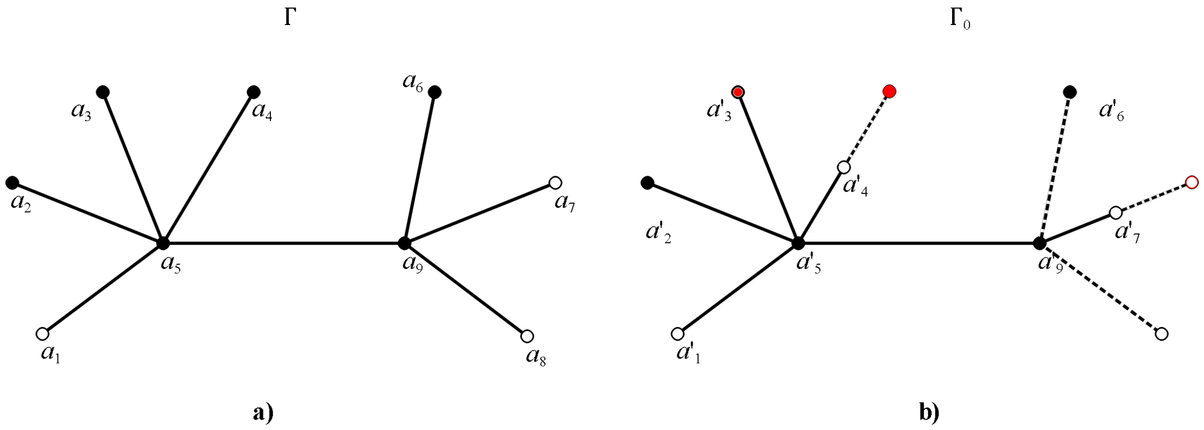
1. Įprastas tolydumas (tolydumas ant kiekvienos briaunos γ_i, kaip ant intervalo, iki jos galų). Aibė tokių tolydžių funkcijų žymima $C(\Gamma)$.
2. Dalimis tolydus (tolydus ant briaunų, bet skirtingoje briaunoje gali skirtis). Tokių funkcijų aibę žymėsime $G[\Gamma]$.
3. Diskretus tolydumas (tolydumas ant kiekvienos briaunos, kaip ant intervalo, bet reikšmės esančios tose viršūnėse nėra susijusios su ribomis kokia nors priklausomybe su briaunomis, kurios jungiasi su tomis viršūnėmis). Žymuo: $C\{\Gamma\}$.

Pirmojo tipo tolydumas bus reikalingas diferencialinio uždavinio sprendiniams. Antrojo - jų išvestinėms, o trečiojo tipo tolydumas bus reikalingas lygčių koeficientams apibrėžti.

Mes nagrinėsime skaliarines funkcijas, kurios yra apibrėžtos ir tolygiai tolydžios grafe Γ. To pakanka, kad funkcijas būtų galima tolydžiai pratęsti iki $\partial\Gamma$. Tokių funkcijų aibė žymima $C[\Gamma]$.

1.13 Apibrėžimas. Grafo Γ jungi atvira aibė yra vadinama pografiu.

Pografis $\Gamma_0 \subset \Gamma$ turi vidinius mazgus tik iš aibės $J(\Gamma)$, t.y., kad vidiniai pografio mazgai taip pat yra vidiniai ir grafui Γ. Be to, visada laikysime, kad $J(\Gamma_0) = J(\Gamma) \cap \Gamma_0$. Bet su kraštiniais pografio Γ_0 mazgais yra kitokia situacija, t.y., aibė $\partial\Gamma_0$ gali turėti mazgų, kurie nepriklauso nei $\partial\Gamma$, nei $J(\Gamma)$. Taip nutinka, jei $a \in \partial\Gamma_0$ yra vidinis vienoje iš grafo Γ briaunų. Jei γ yra grafo Γ briauna ir jame yra $a \in \partial\Gamma_0$, tada jis nevisiškai priklauso pografiui Γ_0, bet tik dalis, atkirsta mazgo a. Čia ir matome esminį skirtumą tarp mūsų termino "pografis"ir klasikinės grafų teorijos, kur dalis briaunos, kaip sąvoka, yra beprasmė ir kur pografio viršūnė priklauso tik pirminiam grafui Γ.



11 pav.: Grafas Γ (a), jo pografis Γ_0 (b). Matome, kad pografio mazgai $a'_4, a'_6, a'_7 \in \partial\Gamma_0$, bet $\notin J(\Gamma), \partial\Gamma$. Taip pat matyti, kad $a'_2, a'_3, a'_5, a'_9 \in J(\Gamma_0) = J(\Gamma) \cap \Gamma_0$.

Nagrinėkime funkcijos išvestines vidiniame mazge, kai jame jungiasi kelios briaunos (kaip taisyklė, su ne mažiau, nei trimis briaunomis). Todėl funkcijos $u(x) : \Gamma \to R$ diferenciavimui briaunoje γ yra įvedamas natūralus parametras. Laikome, kad galima pasirinkti vieną iš dviejų krypčių. Pavyzdžiui, ant briaunos $\gamma = (a,b)$ pasirenkame kryptį nuo taško b į tašką a ir išvestinė

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} u \left(b + \lambda \frac{(a-b)}{\|a-b\|} \right)$$

taške $\lambda = \|x - b\|$. Jei keičiasi kryptis, tada išvestinės u' ženklas keičiasi. Bet antros eilės išvestinės u'' ženklas nesikeičia, kadangi ji jau nepriklauso nuo krypties pasirinkimo. Kadangi pirmos eilės išvestinės bus aptinkamos ant briaunų galų, apibrėžiame kraštines išvestines, t.y., pasirenkame vieną iš briaunos $\gamma = (a,b)$ galų, diferencijuojame nuo $x = a$. Ir tada kraštinė išvestinė apibrėžiama $\mathrm{d}u(a)/\,\mathrm{d}\gamma$.

Briaunų aibė, kurios jungiasi su duota viršūne a, žymime simboliu $\Gamma(a)$, kuris apibrėžia pografį, turintį mazgą a ir kraštines, kurios jungiasi su tuo mazgu. Tvirtinimas "γ_i susijungia su a"galima išreikšti taip: $\gamma_i \subset \Gamma(a)$.

Tarsime, kad funkcijos aibėje $R(\Gamma)$ yra tolygiai tolydžios kiekvienoje grafo Γ briaunoje. Tokios funkcijos priklauso aibei $C[R(\Gamma)]$. Funkcijos, esančios iš šios aibės, skirtingose briaunose, kurios sueina į vieną mazgą, gali turėti skirtingas ribas. Natūralu teigti, kad $C[\Gamma] \subset C[R(\Gamma)]$.

1.3. Paprastosios diferencialinės lygtys ant erdvinio tinklo

Šiame skyrelyje nagrinėsime paprastus diferencialinių lygčių uždavinius ant geometrinio grafo. Parodysime, kokios sąlygos aprašomos duoto grafo vidiniuose ir kraštiniuose mazguose [2]. Taip apibrėšime bendrą išraišką paprastų diferencialių lygčių uždaviniams. Pateiksime, kokiais būdais galima spręsti diferencialinių lygčių uždavinius ant duotų geometrinių grafų.

Tiesinė diferencialinė lygtis ant briaunos yra paprastoji diferencialinė lygtis ant kreivės. Su tam tikra parametrizacija, lygtis gali būti užrašoma

$$p_0(s)u^{(n)} + p_1(s)u^{(n-1)} + \dots + p_n(s)u = f(s), \tag{6}$$

ir su parametrizacijos pakeitimu, koeficientai yra perskaičiuojami pagal tam tikras formules (natūraliai galime teigti, kad parametrų pasikeitimas yra pakankamai glodus).

Pastovumo (suderinamumo) sąlyga viršūnėje yra bet kokios funkcijos reikšmių kombinacijos ir kraštinės išvestinės viršūnėje. Įprastai užrašoma kaip

$$\kappa u(a) + \sum_{\gamma \in \Gamma(a)} \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_{\gamma k} u_\gamma^{(k)}(a) = f(a). \tag{7}$$

Tai bendra forma, parodanti, kad funkcija yra sufokusuota viršūnėje a. Paprastai tariame, kad $\kappa + \sum \alpha_{\gamma k}^2 > 0$. Jei $\alpha_{\gamma k}^2 = 0$, tada išskiriame specialiai ir tokios kraštinės sąlygos vadinamos Dirichlet sąlygomis.

Green'o funkcijos argumentų reikšmių analizė šalia grafo viršūnės sukelia svarbius (esminius) sunkumus. Ribų egzistavimas buvo įrodytas,

$$G_i(x,a) = \lim_{x \to a, x \in \gamma_i} G(x,s) \tag{8}$$

ir apibendrinus, ribos yra skirtingos priklausomai nuo briaunos. Dėl Green'o funkcijos tolydumo, pagal antrą kintamąjį ant grafo viršūnės, yra būtina ir pakankama, kad koeficientai $\alpha_i(a)$ suderinamumo sąlygose

$$-\sum_{\gamma \in I(a)} (\alpha_i(a))u'_\gamma(a) + q(a)u(a) = f(a) \tag{9}$$

atitinka (sutampa) su koeficientų $p_i(a)$ ribomis diferencialinėse lygtyse ant briaunų.

Pagrindinis objektas, kurį nagrinėsime, yra lygtis

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\Gamma}(p(x)u') + q(x)u = f(x) \quad (= \lambda \rho u) \tag{10}$$

apibrėžta ant geometrinio tinklo Γ. Ši lygtis bendru atveju suprantama kaip standartinė forma

$$-(p(x)u')' + q(x)u = f(x) \tag{11}$$

apibrėžta ant visų grafo briaunų ir vidiniuose taškuose $x \in J(\Gamma)$. Vidiniuose grafo taškuose, kur briaunos susijungia, turime, kad susitinkančios funkcijos tuose taškuose yra susijusios. Todėl toliau nagrinėjamame darbe bus naudojamos sąveikos (transmisijos) sąlygos, kurios forma

$$\sum_{\gamma} \alpha_\gamma(a) u'_\gamma(a) = 0 \tag{12}$$

kur sumavimas yra pagal visas briaunas γ, susijungiančias į vieną mazgą. Ši lygtis primena Kirchhoff'o taisylę, kuri parodo įtampos balansą ant stygų tinklo ir t.t.

Lygtis

$$-\left(\sum_{\gamma \subset \Gamma(x)} \alpha_\gamma(x) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\gamma} u(x) \right) + q(x)u(x) = f(x) \tag{13}$$

apibrėžta ant visų vidinių mazgų, kur sumuojama pagal visas briaunas γ sujungtos su x. Išraiška $\mathrm{d}u(x)/\,\mathrm{d}\gamma$ apibrėžiama išvestinė ant briaunos γ.

Ant turimo grafo Γ pritaikius pirmą variaciją [2] ir sąlygą

$$u|_{\partial\Gamma} = 0 \tag{14}$$

gauname galutinę išraišką

$$-\left(p(x)u'(x)\right)' + q(x)u(x) = f(x), \quad x \in R(\Gamma), \tag{15}$$

$$-\sum_{\gamma_i \subset \Gamma(a)} p_i(a) \frac{\mathrm{d}u}{\gamma_i}(a) + q(a)u(a) = f(a), \quad a \in J(\Gamma). \tag{16}$$

Pakanka, kad elementai p' ir q yra tolygiai tolydūs ant kiekvienos briaunos ir, kad f yra sumuojama. Pagal fizikinę prasmę aišku, kad tolygiai $p > 0$ grafe Γ ir $q \geqslant 0$.

Lygybė (15), kuri apibrėžta ant kiekvienos briaunos, yra antros eilės paprastoji diferencialinė lygtis. Kiekvienos šios lygties sprendinių šeima priklauso nuo dviejų parametrų. Iš viso parametrų ant visų briaunų yra $2m$. Sąlygų (14) skaičius sutampa su skaičiumi $|\partial\Gamma|$ visų kraštinių viršūnių ($|X|$ rodo elementų skaičių aibėje X). Sąlygų (16) skaičius atitinkamai yra $|J(\Gamma)|$. Taip pat nereikia pamiršti, kad funkcijos $u(x)$ tolydumo visuose vidiniuose taškuose

$$u_i(a) = u_j(a) \tag{17}$$

kiekvienai γ_i ir γ_j grafo viršūnėje $\Gamma(a)$. Skaičius $\operatorname{ind}(a) - 1$ parodo sąlygų skaičių (tiesiškai nepriklausomų) kiekviename taške, kur $a \in J(a)$. Čia $\operatorname{ind}(a)$ parodo kiek briaunų jungiasi prie viršūnės

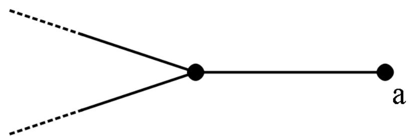
a. Iš viso tokių sąlygų yra $\sum_{a\in J(\Gamma)}(\mathrm{ind}(a)-1)=\sum_{a\in J(\Gamma)}\mathrm{ind}(a)-|J(\Gamma)|$. Ir sudėjus visų tipų sąlygų kiekius gauname

$$|\partial\Gamma|+|J(\Gamma)|+\left(\sum_{a\in J(\Gamma)}\mathrm{ind}(a)-|J(\Gamma)|\right)=|\partial\Gamma|+\sum_{a\in J(\Gamma)}\mathrm{ind}(a).$$

Uždavinys (14), (15), (16) yra iškeliamas funkcijų klasei, kuri yra tolydi visame grafe Γ ir tolygiai diferencijuojama kiekvienoje briaunoje. Kiekviena (16) sąlygą yra apibrėžta viename taške, kaip ir sąlyga (14), kurios paprastai yra laikomos kraštinėmis sąlygomis. Bet (14) sąlygos skiriasi nuo (16), nes pirmos yra paduodamos iš pat pradžių, ir antros gaunamos iš variacinių skaičiavimų. Todėl pastarosios sąlygos, kurios nėra duotos iš anksto, dar vadinamos natūraliosiomis sąlygomis. Šios lygties (15) sąlygos realizuojamos ant vidinių grafo Γ viršūnių. Sąlygos (16) yra divergentinės.

Galime įvesti matą μ grafe Γ, darydami prielaidą, kad jis yra tiesinis ir turi vieneto tankį ant kiekvienos briaunos γ_i ir yra sukoncentruotas ant kiekvienos vidinės viršūnės $a\in J(\Gamma)$ atitinkamai atsižvelgiant į Stieltjes'o diferencialą $(\mathrm{d}\mu(a)=1)$ jose.

Kraštinėmis viršūnėmis vadinsime tuos taškus, kuriuose yra prikabinamos (14) sąlygos. Vidiniuose taškuose $J(\Gamma)$, kuriuose jungiasi vieną briauna,



12 pav.: Prie viršūnės $a\in J(\Gamma)$ jungiasi tik vieną briauna.

lygybė (16) tampa

$$-(p(a)u'(a))'+q(a)u(a)=f(a),$$

kur $u'(a)$ yra kraštinė išvestinė. Jei $q(a)=0$ ir $f(a)=0$, tada turime $u'(a)=0$ - tipinę sąlygą "laisvam"(neprijungtam) galui stygos problemoje. Jei $f(a)=0$ ir $q(a)\neq 0$, mes turime Sturm-Liouville sąlygą. Tokiu būdu vienos stygos problemoje su tampriai prijungtais galais, mes turime, kad $\partial\Gamma=\emptyset$, ir galiniai taškai prijungiami prie (sudaro) $J(\Gamma)$.

1.4. Homogeninė lygtis ant tinklo (grafo)

Dabar nagrinėsime homogeninę lygtį, atitinkančią (10) lygtį,

$$Lu\overset{\mathrm{def}}{=}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\Gamma}(pu')+qu=0, \tag{18}$$

kur

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\Gamma}(pu')(x) = \begin{cases} (pu')'(x), & x \in R(\Gamma), \\ \sum\limits_{\gamma \subset \Gamma(x)} \alpha_\gamma(x) \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\gamma} u(x), & x \in J(\Gamma). \end{cases} \tag{19}$$

Funkcijos $p(x)$ ir $q(x)$ ant grafo Γ tariam, kad priklauso aibei $C[R(\Gamma)]$, jos yra tolygiai tolydžios ant kiekvienos briaunos. Taip pat, kad p aibėje $R(\Gamma)$ yra teigiama. Skaičių $\alpha_\gamma(x)$ laikome teigiamu. Ieškome tokių lygties (18) sprendinių $u(x)$, duotų ant grafo Γ, kurie priklausytų aibei $C[\Gamma]$ ir, kad $(pu')' \in C[R(\Gamma)]$. Tokia aibė funkcijų apibrėžta žymeniu $D^2[\Gamma]$.

1.1 Teorema. *Bet kuris homogeninės lygties* (18) *pastovaus ženklo sprendinys* $u(x)$ *yra trivialus* ($\equiv 0$) *arba neturi nulių grafe* Γ. *Pastaruoju atveju, išraiška* $u(a) = 0$ *su kai kuriomis viršūnėmis* $a \in \partial\Gamma$ *leidžia manyti, kad* $u'(a) \neq 0$.

Bet kuriai funkcijai $u(x)$, kuri yra tolydi segmente iš erdvės $\mathbb{R}^1$, aibė taškų kur $u(x) > 0$ ($u(x) < 0$), yra sąjunga nesikertančių intervalų, išdėstytų tarp funkcijos u nulių. Tuo atveju, kai funkcijos duotos ant grafo (tinklo), tokia aibė turi panašią struktūrą, bet komponentų ryšių struktūra yra labiau komplikuota. Tie komponentai, kurie yra palyginami su intervalais tarp kaimyninių nulių skaliaro atveju. Paprasto grafo (tinklo) atveju, gali turėti vidinių mazgų ir ne tik (užbaigtas) grafo Γ briaunas, bet taip pat tik dalį briaunos. Bet kuriuo atveju, tokie komponentų ryšiai turi struktūrą, kuri yra lokaliai identiška grafui Γ. Tokias struktūras vadiname grafo Γ pografiais. Pats pografis $\Gamma_0 \subset \Gamma$ yra grafas. Taip pat aibės $\partial\Gamma_0$ ir $J(\Gamma_0)$ jai yra apibrėžtos, taip pat, kol $J(\Gamma_0) \subseteq J(\Gamma)$, pvz., vidiniai pografio Γ_0 mazgai yra vidiniai ir grafo Γ mazgai. Aibė $\partial\Gamma_0$ gali turėti grafo Γ taškų, kurie nepriklauso aibei $\partial\Gamma$ - taškai kai kurių grafo Γ briaunų viduje gali patapti kraštiniais grafo Γ_0 taškais. Bet kurios rūšies pografis $\Gamma_0 \subset \Gamma$ privalo turėti netuščią aibę $\partial\Gamma_0$, net jei $\partial\Gamma = \emptyset$.

1.14 Apibrėžimas. Funkcijos $u : \Gamma \to R$, kuri yra tolydi ant grafo Γ, *S-zona* vadinsime pografį $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, kur u neturi nulių ir išnyksta savo krašte.

1.2 Teorema. *(palyginimo principas). Tegul* $u(x)$ *yra netrivialus lygties* (18) *sprendinys ir* Γ_0 *yra S-zona funkcijos* u. *Tada bet kuris lygties* (18) *sprendinys* $v(x)$, *kuris yra pastovaus ženklo ant pografio* Γ_0, *yra koliniarus funkcijai* $u(x)$ *pografyje* Γ_0.

Išvada. (nulių kaitaliojimas). Tegul $u(x)$ netrivialus lygties (18) sprendinys ir Γ_0 yra jos *S-zona*. Tada bet kuris sprendinys $v(x)$ lygties (18) kuris yra nekoliniarus su $u(x)$ pografyje Γ_0. Keičia ženklą pografyje Γ_0 ir aibėje $\partial\Gamma_0$ (ir reikšmės u/v pografio uždarinyje $\overline{\Gamma}_0$ taip užpildydamas $(-\infty,\infty)$).

Išvada. (maksimumo principo analogas). Jeigu $u(x)$ yra lygties (18) sprendinys be nulių grafe Γ, tada bet kuriam sprendiniui v tos paties lygties, kuris nėra koliniarus su u, santykis v/u gali turėt nei globalaus maksimumo, nei globalaus minimumo grafe Γ.

Išvada. Jeigu u yra lygties (18) sprendinys be nulių grafe Γ ir v yra tos paties lygties sprendinys, tada santykis v/u negali turėt netrivialaus lokalaus ekstremumo grafe Γ.

2. Diferencialinių lygčių sprendimai ant grafų būdai

Darbe nagrinėjame kraštinius uždavinius ant grafų, kurie apibrėžiami bendra forma

$$-\left(pu'\right)' + qu = f, \qquad x \in R(\Gamma), \tag{20}$$

$$-\sum_{\gamma \subset \Gamma(a)} \alpha_\gamma(a) \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\gamma}(a) + q(a)u(a) = f(a), \quad a \in J(\Gamma), \tag{21}$$

$$u(a) = 0, \qquad a \in (\partial\Gamma), \tag{22}$$

kur (20) yra antros eilės paprastoji diferencialinė lygtis duota ant kiekvienos kraštinės γ_i ir (21), (22) lygtys yra duotos sąlygos ant grafo Γ vidinių ir kraštinių mazgų.

Iš pirmo žvilgsnio sistema (20)–(22) yra paprastas antros eilės diferencialinės lygties kraštinis uždavinys. Nagrinėjant tokią sistemą, matome, kad (20) lygtys yra paprastos ir skaliarinės, kurios duotos ant kiekvieno grafo Γ kraštinės ir yra jų atramos. Kiekvienas šių lygčių sprendinys skiriasi (t.y. turi skirtingus argumentus). Todėl negalime sakyti, kad sprendinį galime apibrėžti viena bendra vieninga lygtimi. Bet, jeigu į (20) lygtį žvelgti kaip į aibę lygčių, tada mes turime reikalauti tolydumo sąlygos vidiniuose mazguose, todėl gauname, kad

$$u_i(a) = u_j(a), \quad \gamma_i, \gamma_j \subset \Gamma(a), \tag{23}$$

kur, kraštinės γ_i ir γ_j jungiasi su grafo viršūne a. O funkcijos $u_i(x)$ ir $u_j(x)$ apibrėžiamos tose kraštinėse.

Toliau nagrinėsime 20–(22) uždavinį. Kad "pamirštume"grafus, uždavinius reikės performuluoti. Pateiksime keletą būdų kaip kitaip būtų galima nagrinėti šiuos diferencialinius uždavinius ne grafuose, t.y atlikus gan paprastą parametrizaciją, kuria naudojantis lengviau galima išspręsti diferencialinį uždavinį.

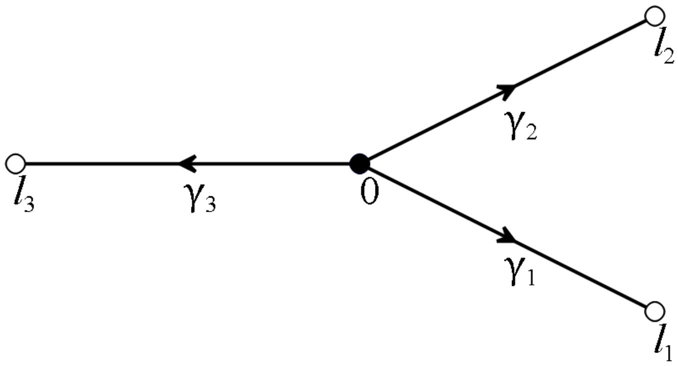
1. **Dekompozicija**. Tegu kraštinės $\gamma = (a,b)$ yra uždari intervalai $[\gamma] = [a,b]$ erdvėje $\mathbb{R}^n$. Tegu $C^2[\gamma]$ apibrėžia aibę funkcijų $u(x)$ apibrėžtų ant γ, kad kartu su antros eilės išvestinėmis $(pu')(x)$ ir $(pu')'(x)$ leidžia tolydžiai pratęsti iki $[\gamma]$. Grafo Γ krašinių aibei ${\gamma_i}^m 1$ apibrėžiama aibė D^2E^m, kurią generuoja erdvės $C^2[\gamma_i]$. (20) sistemą galime laikyti kaip vieną lygtį erdvėje D^2E^m. O sąlygos (21)-(23) yra generuojamos funkcionalų, kurie yra tiesiniai ir tolydūs erdvėje D^2E^m.

2. **Skaliarizacija**. Skaliarizacija leidžia sumažinti problemą iki vienos skaliarinės lygties ant segmento. Tarkime, kad l_i yra intervalo γ_i ilgis. Tada tiesinis izomorfizmas leidžia apibrėžti γ_1 kaip intervalą $(0,l_1)$, kraštinę γ_2 kaip (l_1,l_1+l_2), ir kraštinę γ_i kaip intervalą (L_{i-1},L_i), kur $L_i = l_1+\cdots+l_i$ ir $i = \overline{1,m}$. Tada kiekviena (20) sistemos lygtis yra apibrėžta atitinkančiame intervale (L_{i-1},L_i), kas veda prie vienos antros eilės lygties, intervale $(0,L_m)$. Tada sąlygos (21)-(23) to intervalo taškuose l_i, $i = \overline{1,m-1}$ tampa nelokaliosiomis.
3. **Vektorinis**. Šiuo būdu gauname standartinę formuluotę vektorinių funkcijų klasėje. Užuot taikant natūraliąją parametrizaciją kiekvienoje kraštinėje γ_i, mes taikome kanoninę parametrizaciją $x = a+t(b-a)$, $0 < t < 1$, po kurios gauname, kad kiekviena funkcija nagrinėjama viename intervale $[0,1]$. Ir sprendiniai $u_i(t)$ skirtingose kraštinėse γ_i yra vienos vektorinės funkcijos $u(t) = (u_1(t),\ldots,u_m(t))$ koordinatė.
4. **Sujungtas**. Čia tariame, kad (21) sąlygos yra homogeniškos. Grafas neatmetamas iš nagrinėjimo, bet naudojama kaip ieškomų funkcijų argumentų atrama. Sistemos (20), (21) sprendiniai yra ieškomų funkcijų klasė, kuri yra apibrėžta ir tolydi ant sujungtos aibės Γ. Sąlygos (21) yra homogeniškos (ir vadinamos glodumo sąlygomis arba transmisijos sąlygomis), įtrauktos į lygčių (20) sprendinių apibrėžimą. Į šias lygtis yra žiūrima kaip į aibę funkcijų.

Visur laikome, kad natūraliosios sąlygos yra patenkinamos, kur funkcijos $p(x)$, $q(x)$ ir $f(x)$ sistemoje (20) yra tolygiai tolydžios kiekvienoje kraštinėje. Taip pat, $\inf p > 0$, $\alpha_\gamma(a) > 0$ visiems $a \in J(\Gamma)$ ir $\gamma \subset \Gamma(a)$.

2.1. Pavyzdys, taikant vieną iš pasirinktų sprendimo būdų

[4] straipsnyje buvo nagrinėtas diferencialinis uždavinys grafe, kurį pateiksime šiame darbe kaip pavyzdį. Ir jį papildomai išspręsime skaliarizacijos būdu.



13 pav.: Grafo Γ pavyzdys su vienu vidiniu ir trimis kraštiniais taškais.

Nagrinėjamas diferencialinis uždavinys ant grafo pavaizduotas paveiksle (žr. 13 pav.). Kiekviena šio grafo kraštinė γ_i (kur $i = \overline{1,3}$) turi kryptį ir ilgį l_i (kur $i = \overline{1,3}$). Ant kiekvienos kraštinės aprašyta diferencialinė lygtis

$$- u_i'' = \lambda u_i, \quad 0 \leqslant x_i \leqslant l_i, \quad i = \overline{1,3}. \tag{24}$$

Iš klasikinių kraštinių uždavinių žinome, kad toliau aprašyto uždavinio tikrinės reikšmės bus $\lambda > 0$. Todėl tik jas ir nagrinėsime.

Toliau sudarome uždavinį su sąlygomis, duotomis ant grafo viršūnių.

$$-u_i'' = \lambda u_i, \quad 0 \leqslant x_i \leqslant l_i, \quad i = \overline{1,3}, \tag{25}$$

$$u_1(0) = u_2(0) = u_3(0), \tag{26}$$

$$u_1'(0) + u_2'(0) + u_3'(0) = 0, \tag{27}$$

$$u_1(l_1) = u_2(l_2) = u_3(l_3) = 0, \tag{28}$$

kur (26) lygybės parodo ieškomų sprendinių tolydumą vidiniame taške, (27) yra vadinama balanso lygtimi vidiniame taške ir (28) yra kraštinės sąlygos užduotos kraštinėse viršūnėse. Diferencialinių lygčių (25) sprendinių bedra forma yra

$$u_i(x_i) = A_i \cos\left(\sqrt{\lambda} \cdot x_i\right) + B_i \sin\left(\sqrt{\lambda} \cdot x_i\right), \quad i = \overline{1,3}, \tag{29}$$

kur pažymėsime $q = \sqrt{\lambda}$ ir kiekvieną sprendinio formos argumentą padauginus iš $\dfrac{\pi}{l_i}$, kur $i = \overline{1,3}$. Turime

$$u_i(x_i) = A_i \cos\left(q\frac{\pi}{l_i} \cdot x_i\right) + B_i \sin\left(q\frac{\pi}{l_i} \cdot x_i\right), \quad i = \overline{1,3}. \tag{30}$$

Taip pat iš sąlygų matome, kad reikia sprendinių išvestinių, kurių bendra forma

$$u_i'(x_i) = -q\frac{\pi}{l_i} A_i \sin\left(q\frac{\pi}{l_i} \cdot x_i\right) + q\frac{\pi}{l_i} B_i \cos\left(q\frac{\pi}{l_i} \cdot x_i\right), \quad i = \overline{1,3}. \tag{31}$$

Panaudojus (26) sąlygą lygtims (30), gauname

$$\left.\begin{aligned} u_1(0) &= A_1, \\ u_2(0) &= A_2, \\ u_3(0) &= A_3. \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad A_1 = A_2 = A_3 = A \tag{32}$$

Pritaikius balanso sąlygą (27) lygtims (31), gauname

$$u_1'(0) = B_1 \frac{\pi}{l_1} q,$$
$$u_2'(0) = B_2 \frac{\pi}{l_2} q,$$
$$u_3'(0) = B_3 \frac{\pi}{l_3} q,$$

kur viską susumavus, gauname balanso išraišką

$$q\pi \left(\frac{B_1}{l_1} + \frac{B_2}{l_2} + \frac{B_3}{l_3} \right) = 0. \tag{33}$$

Ir panaudojus paskutines sąlygas (28), turime

$$\begin{aligned} u_1(l_1) &= A_1 \cos(q\pi) + B_1 \sin(q\pi) = 0, \\ u_2(l_2) &= A_2 \cos(q\pi) + B_2 \sin(q\pi) = 0, \\ u_3(l_3) &= A_3 \cos(q\pi) + B_3 \sin(q\pi) = 0. \end{aligned} \tag{34}$$

Apjungus (32)-(34) rezultatus gauname lygčių sistemą

$$\begin{cases} u_1(l_1) = A \cos(q\pi) + B_1 \sin(q\pi) = 0, \\ u_2(l_2) = A \cos(q\pi) + B_2 \sin(q\pi) = 0, \\ u_3(l_3) = A \cos(q\pi) + B_3 \sin(q\pi) = 0, \\ \dfrac{B_1}{l_1} + \dfrac{B_2}{l_2} + \dfrac{B_3}{l_3} = 0. \end{cases} \tag{35}$$

Toliau sistemą užrašome matriciniu pavidalu

$$\begin{pmatrix} \cos(q\pi) & \sin(q\pi) & 0 & 0 \\ \cos(q\pi) & 0 & \sin(q\pi) & 0 \\ \cos(q\pi) & 0 & 0 & \sin(q\pi) \\ 0 & 1/l_1 & 1/l_2 & 1/l_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{36}$$

kur pagrindinę matricą 4×4 žymėsime X.

Toliau skaičiuojame matricos X determinantą, kuris yra lygus 0, kad rastume q reikšmes. Taigi,

$$\det X = \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} + \frac{1}{l_3} \right) \sin^2(q\pi) \cos(q\pi) = 0, \tag{37}$$

kur $\sin^2(q\pi) = 0$ arba $\cos(q\pi) = 0$. Gauname, kad $q = k$ arba $q = 1/2 + k$.

- Jei $q = k$. Įsistačius į (34) lygtis gauname, kad $A_1 = A_2 = A_3 = A = 0$, tada galime išskirti tokius sprendinius

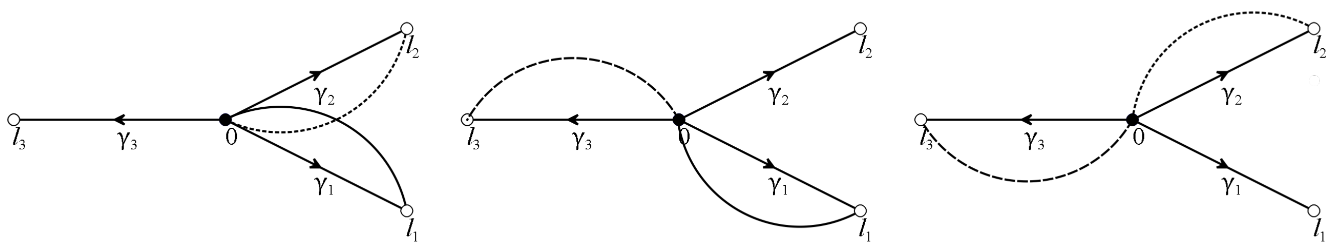
$$
\begin{aligned}
u_1 &= B_1 \sin\left(k\frac{\pi}{l_1}x_1\right), \\
u_2 &= B_2 \sin\left(k\frac{\pi}{l_2}x_2\right), \\
u_1 &= B_3 \sin\left(k\frac{\pi}{l_3}x_3\right),
\end{aligned}
\tag{38}
$$

kur lygčių koeficientai turi tenkinti balanso lygtį (33). Todėl galimi tokie koeficientų variantai, pagal kuriuos galime parinkti kaip funkcijų bazę (žr. 14 pav.)

$$B_1 = l_1, \quad B_2 = -l_2, \quad B_3 = 0, \tag{39}$$

$$B_1 = -l_1, \quad B_2 = 0, \quad B_3 = l_3, \tag{40}$$

$$B_1 = 0, \quad B_2 = l_2, \quad B_3 = -l_3. \tag{41}$$

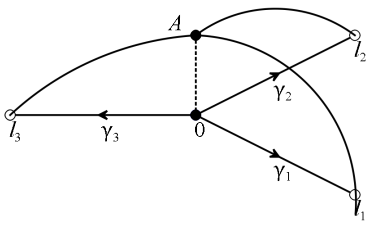


14 pav.: Funkcijų išsidėstymas ant grafo.

- Jei $q = k + 1/2$. Taip pat įsistačius į (34) lygtis gauname, kad $B_1 = B_2 = B_3 = 0$, todėl sprendiniai yra

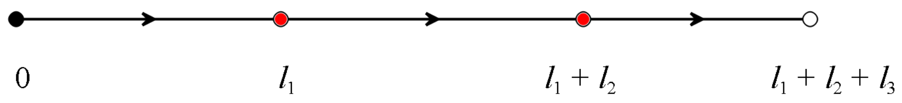
$$
\begin{aligned}
u_1 &= A\cos\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{l_1}x_1\right), \\
u_2 &= A\cos\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{l_2}x_2\right), \\
u_3 &= A\cos\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{l_3}x_3\right),
\end{aligned}
\tag{42}
$$

Kaip šie sprendiniai atrodo ant grafo, pavaizduota paveiksliuke (žr. 15 pav.)



15 pav.: Funkcijų išsidėstymas ant grafo.

Dabar tą patį uždavinį (25)-(28) spręsime grafą skaliarizacijos būdu pervedę į vieną tiesę (žr. 15 pav.)



16 pav.: Grafas pervestas į tiesę.

Visoje tiesėje dabar ieškosime sprendinio $v(x)$, kurio pavidalas

$$v(x) = \begin{cases} v_1(x) = A_1 \cos\left(q\frac{\pi}{l_1}x\right) + B_1 \sin\left(q\frac{\pi}{l_1}x\right), \quad x \in [0, l_1], \\ v_2(x) = A_2 \cos\left(q\frac{\pi}{l_2}(x-l_1)\right) + B_2 \sin\left(q\frac{\pi}{l_2}(x-l_1)\right), \quad x \in [l_1, l_1+l_2], \\ v_3(x) = A_3 \cos\left(q\frac{\pi}{l_3}(x-l_1-l_2)\right) + B_3 \sin\left(q\frac{\pi}{l_3}(x-l_1-l_2)\right), \quad x \in [l_1+l_2, l_1+l_2+l_3]. \end{cases} \tag{43}$$

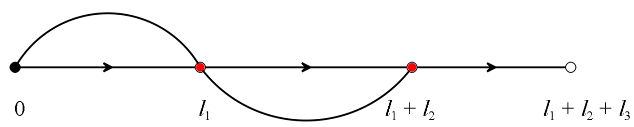
Sąlygos tiesės taškuose užrašomos

$$\begin{aligned} &v(+0) = v(l_1+0) = v(l_1+l_2+0), \\ &v'(+0) + v'(l_1+0) + v'(l_1+l_2+0) = 0, \\ &v(l_1) = v(l_1+l_2) = v(l_1+l_2+l_3) = 0. \end{aligned} \tag{44}$$

Toliau pasinaudojus sąlygomis gauname tokią pat lygčių sistemą kaip ir (35) sistema, kurios matricinis pavidalas taip pat sutampa su (36). Taigi, gauname tokias pat q reikšmes (t.y. $q = k$ ir $q = 1/2 + k$). Todėl kai $q = k$ gauname, kad koeficientai $A_1 = A_2 = A_3 = A = 0$ ir sprendinys yra

$$v(x) = \begin{cases} v_1(x) = B_1 \sin\left(k\frac{\pi}{l_1}x\right), \quad 0 \leqslant x \leqslant l_1, \\ v_2(x) = B_2 \sin\left(k\frac{\pi}{l_2}(x-l_1)\right), \quad l_1 \leqslant x \leqslant l_1+l_2, \\ v_3(x) = B_3 \sin\left(k\frac{\pi}{l_3}(x-l_1-l_2)\right), \quad l_1+l_2 \leqslant x \leqslant l_1+l_2+l_3 \end{cases} \tag{45}$$

Koeficientams B_i galioja ta pati balanso lygtis kaip ir (27). Paimkime vieną atvejį, tarkime (39), tada grafiškai atrodo maždaug taip

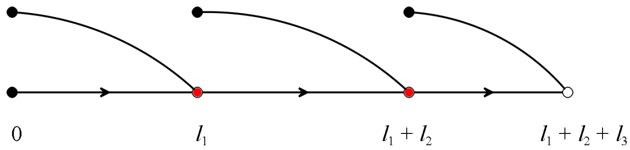


17 pav.: Grafikas.

Jei $q = 1/2 + k$, tai sprendinys yra

$$v(x) = \begin{cases} v_1(x) = A\cos\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{l_1}x\right), & 0 \leqslant x \leqslant l_1, \\ v_2(x) = A\cos\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{l_2}(x-l_1)\right), & l_1 \leqslant x \leqslant l_1+l_2, \\ v_3(x) = A\cos\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{l_3}(x-l_1-l_2)\right), & l_1+l_2 \leqslant x \leqslant l_1+l_2+l_3, \end{cases} \tag{46}$$

kurio grafikas atrodo taip



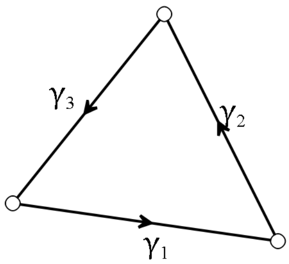
18 pav.: Grafikas.

3. Diferencialiniai uždaviniai ant trikampio

Šiame skyriuje nagrinėsime konkrečius diferencialinius uždavinius ant konkretaus pasirinkto grafo, kuriame varijuosime jo viršūnių tipus (t.y. vidinės ir kraštinės viršūnės). Taip bus nagrinėjami gauti tikrinių reikšmių spektrai.

3.1. Dif. uždavinys ant trikampio grafo su visais kraštiniais taškais

Nagrinėjame diferencialinį uždavinį ant grafo, kuris yra trikampio formos ir visos jo viršūnės parenkamos kraštinėmis (žr. 19 pav.). Tolemesniuose skyreliuose, grafo forma bus ta pati, tik skirsis viršūnių tipai pagal kuriuos parenkamos sąlygos.



19 pav.: Grafas Γ.

Pirmiausia parodysime, kad šio uždavinio tikrinių reikšmių spektrų reikšmės λ yra teigiamos.

Imame (50) lygtį. Jos abi puses dauginame iš u_i ir integruojame

$$-\int\limits_{\gamma_i} u_i u_i'' \,\mathrm{d}x = \lambda \int\limits_{\gamma_i} u_i^2 \,\mathrm{d}x. \tag{47}$$

Suintegruojame dalimis kairiąją lygties (47) pusę

$$0 \leqslant \lambda \int\limits_{\gamma_i} u_i^2 \,\mathrm{d}x = -u_i u_i'\Big|_{\gamma_i} + \int\limits_{\gamma_i} (u_i')^2 \,\mathrm{d}x. \tag{48}$$

Kadangi pagal salygas ant kiekvienos briaunos γ_i krašto, funkcjos $u_i = 0$. Lygybė (48) supaprastėja

$$\lambda \int\limits_{\gamma_i} u_i^2 \,\mathrm{d}x = \int\limits_{\gamma_i} (u_i')^2 \,\mathrm{d}x, \tag{49}$$

kadangi funkcija $u_i > 0$ ir išvestinė $u_i' > 0$, gauname, kad $\lambda > 0$.

Toliau nagrinėjame uždavinį. Kraštinės $\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$ yra atitinkamų ilgių $\{l_1,l_2,l_3\}$. Taip pat turi būti tenkinamos trikampio nelygybės:

$$l_1 + l_2 > l_3,$$
$$l_1 + l_3 > l_2,$$
$$l_2 + l_3 > l_1.$$

Toliau šiuo atveju aprašome diferencialinį uždavinį

$$-u_i'' = \lambda u_i, \quad 0 \leqslant x_i \leqslant l_i, \quad i = \overline{1,3}, \tag{50}$$
$$u_1(0) = u_2(0) = u_3(0) = 0, \tag{51}$$
$$u_1(l_1) = u_2(l_2) = u_3(l_3) = 0. \tag{52}$$

Ant kiekvienos briaunos γ_i bendra sprendinio forma yra

$$u_i(x_i) = A_i \cos(qx_i) + B_i \sin(qx_i)\,, \quad i = \overline{1,3}, \tag{53}$$

Panaudojus (51) sąlygas (53) lygtyse, gauname, kad $A_1 = A_2 = A_3 = 0$. Tada imame (52) sąlygas ir statome į bendras sprendinių išraiškas (53), turime sistemą

$$u_1(l_1) = A_1 \cos(ql_1) + B_1 \sin(ql_1) = 0,$$
$$u_2(l_2) = A_2 \cos(ql_2) + B_2 \sin(ql_2) = 0, \tag{54}$$
$$u_3(l_3) = A_3 \cos(ql_3) + B_3 \sin(ql_3) = 0.$$

Pasinaudojus tuo, kad $A_1 = A_2 = A_3 = 0$, (54), lygčių sistema supaprastėja

$$u_1(l_1) = B_1 \sin(ql_1) = 0,$$
$$u_2(l_2) = B_2 \sin(ql_2) = 0, \tag{55}$$
$$u_3(l_3) = B_3 \sin(ql_3) = 0.$$

Sprendžiame lygčių sistemą matricų pavidalu

$$\begin{pmatrix} \sin(ql_1) & 0 & 0 \\ 0 & \sin(ql_2) & 0 \\ 0 & 0 & \sin(ql_3) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{56}$$

kur skaičiuojame pagrindinės matricos determinantą, norėdami rasti tikrines reikšmes, todėl

$$\det X = \sin(ql_1)\sin(ql_2)\sin(ql_3) = 0.$$

Gauname

$$q = \frac{k_1\pi}{l_1} \quad \text{arba} \quad q = \frac{k_2\pi}{l_2} \quad \text{arba} \quad q = \frac{k_3\pi}{l_3}.$$

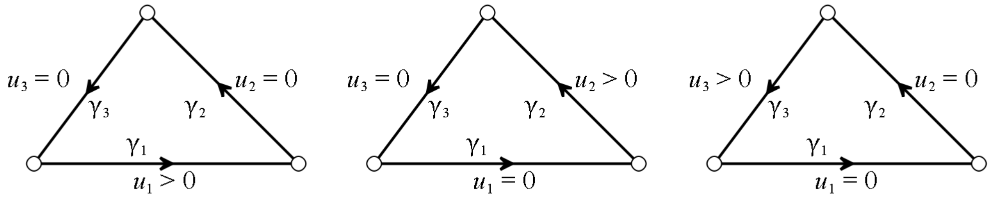
Žinome, kad $q = \sqrt{\lambda}$, todėl tikrinės reikšmės yra

$$\lambda_{k_1} = \frac{k_1^2\pi^2}{l_1^2}; \quad \lambda_{k_2} = \frac{k_2^2\pi^2}{l_2^2}; \quad \lambda_{k_3} = \frac{k_3^2\pi^2}{l_3^2}. \tag{57}$$

Tada tikrinės funkcijos

$$u_{k_1}(x_1) = B_1 \sin\left(k_1 \frac{\pi}{l_1} x_1\right),$$
$$u_{k_2}(x_2) = B_2 \sin\left(k_2 \frac{\pi}{l_2} x_2\right), \tag{58}$$
$$u_{k_3}(x_3) = B_3 \sin\left(k_3 \frac{\pi}{l_3} x_3\right).$$

Gautos tikrinės funkcijos (58) yra bazinės (žr. 20 pav.).



20 pav.: Bazinės funkcijos ant grafo.

Toliau nagrinėjant gautas tikrinių reikšmių aibes, įdomu, kada jos tarpusavyje turės bendrų taškų t.y.

$$\frac{k_1\pi}{l_1} = \frac{k_2\pi}{l_2} = \frac{k_3\pi}{l_3}, \quad l_1 \geqslant l_2 \geqslant l_3. \tag{59}$$

Taip kyla klausimas, ar gali taip būti, kad jos niekad tarpusavyje nesutaps. Todėl panagrinėkime jų santykius. Paimkime pirmą lygybę iš (59)

$$\frac{k_1\pi}{l_1} = \frac{k_2\pi}{l_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{l_2}{l_1} = \frac{k_2}{k_1}. \tag{60}$$

Darome prielaidą, kad $\frac{l_2}{l_1} = s \notin \mathbb{Q}$, t.y. santykis yra iracionalus skaičius. Iš (60) lygybės, kad $l_2 k_1 = k_2 l_1$. Žinome, kad $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$. Išplaukia, kad $sk_2 = k_3$. Žinome, kad $s \notin \mathbb{Q}$, o $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, gauname, kad ši lygtis neturi sprendinių. Taigi, tokiu būdu išsiaiškinome, kad tikrinės reikšmės niekada nesutaps, jei santykis $s \notin \mathbb{Q}$. Suformuluosime teiginį

3.1 Teiginys. *Diferencialinio uždavinio tikrinės reikšmės priklauso nuo grafo kraštinių ilgių.*

3.2 Teiginys. *Diferencialinio uždavinio tikrinių reikšmių spektrai niekada neturės bendrų taškų, jei* $\frac{k_i}{k_{i+1}} = s \in \mathbb{I}$.

3.3 Teiginys. *Diferencialinio uždavinio tikrinių reikšmių spektrai turės bendrų taškų, jei* $\frac{k_i}{k_{i+1}} = s \in \mathbb{Q}$.

Toliau imame tą pačią lygybę (60). Pažymėkime $\frac{l_2}{l_1} = \frac{m}{n} = r \in \mathbb{Q}$. Nagrinėsime, kada du tikrinių reikšmių spektrai turi bendrų taškų. Tada turime

$$\frac{m}{n} k_1 = k_2 \quad \Rightarrow \quad mk_1 = nk_2. \tag{61}$$

Pažymime $\mathrm{DBD}(m,n) = d$. Tada (61) lygtyje padaliname iš d. Gauname ryšį

$$\frac{m}{d} k_1 = \frac{n}{d} k_2,$$

Iš kurio randame k_1 ir k_2 išraiškas. Jos yra

$$k_1 = \frac{n}{d} \cdot l, \quad k_2 = \frac{m}{d} \cdot l, \text{ kur } l \in \mathbb{N}. \tag{62}$$

Taigi, gavome sąlygą, kada tikrinės reikšmės λ_{k_1} ir λ_{k_2} sutampa. Analogiškai yra ir su λ_{k_1}, λ_{k_3} arba λ_{k_2}, λ_{k_3}. Patikrinkime:

$$\frac{\pi}{l_1}k_1 = \frac{\pi}{l_1} \cdot \frac{n}{d} \cdot l \quad \Rightarrow \frac{\pi}{d} \cdot l,$$
$$\frac{\pi}{l_2}k_2 = \frac{\pi}{l_2} \cdot \frac{m}{d} \cdot l \quad \Rightarrow \frac{\pi}{d} \cdot l,$$

Išsiaiškinome, kada bet kurių dviejų spektrų tikrinės reikšmės sutampa.

3.4 Teiginys. *Diferencialinio uždavinio tikrinių reikšmių spektrai turi bendrų taškų, kai*

$$k_1 = \frac{n}{d} \cdot l, \quad k_2 = \frac{m}{d} \cdot l, \textit{ kur } l \in \mathbb{N}.$$

Dabar liko išsiaiškinti, kada visi trijų spektrų tikrinės reikšmės sutampa. Tarkime, kad pagal (60) lygybes turime

$$\frac{l_2}{l_3} = \frac{m_2}{m_3}, \quad \frac{l_1}{l_2} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Tariame, kad žinome, kada (57) tikrinės reikšmės λ_{k_2} ir λ_{k_3} sutampa. Liko išnagrinėti, kada visų trijų spektrų tikrinės reikšmės turi bendrų taškų. Taigi, tada nagrinėjame tokią lygybę

$$\frac{\pi}{l_1}k = \frac{\pi}{l_2/m_2}t \quad \Rightarrow \quad \frac{kl_2}{m_2} = l_1 t \quad \Rightarrow \quad kl_2 = l_1 t m_2.$$

Tuomet

$$k = \frac{n_1}{n_2}m_2 t \quad \Rightarrow \quad n_2 k = n_1 m_2 t, \text{ kur } k = n_1 z, \tag{63}$$

abi puses padalinus iš $n_1 z n_2$, gauname

$$m_2 t = z n_2. \tag{64}$$

Tada pažymime, kad $\mathrm{DBD}(m_2,n_2) = d$. Lygybės (64) abi puses padaliname iš d, turime

$$\frac{m_2}{d} \cdot t = z \cdot \frac{n_2}{d},$$

iš kur gauname z, t ir k

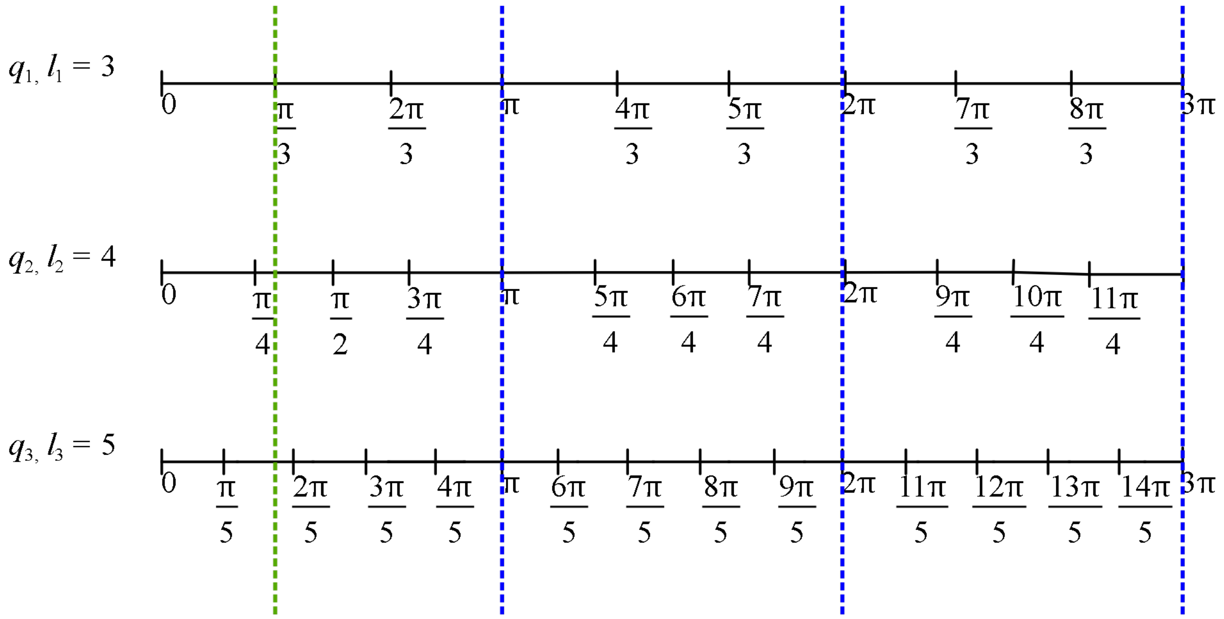
$$z = \frac{m_2}{d} \cdot s, \quad t = \frac{n_2}{d} \cdot s, \quad k = \frac{n_1 m_2}{d} \cdot s \qquad s \in \mathbb{N}. \tag{65}$$

Tada gauname, kad

$$\frac{\pi}{l_1}\frac{n_1 m_2}{d}\cdot s = \frac{\pi m_2}{l_2}\frac{n_2}{d}\cdot s, \quad s \in \mathbb{N}. \tag{66}$$

Taigi gautas (62) ir (65) išraiškas galima pritaikyti ir tolimesniuose tikrinių reikšmių spektrų nagrinėjimuose. (62) parodo, kad yra lyginami du kažkurie tikrinių reikšmių spektrai pasirinktinai. O (65) reikalinga palyginti visus tris spektrus.

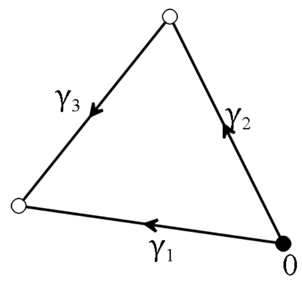
Pateikiame grafinį pavyzdį, kai paimame kraštinių ilgius, tarkime $l_1 = 3$, $l_2 = 4$, $l_3 = 5$. Turime tokį vaizdą



21 pav.: Tikrinių reikšmių spektrai.

3.2. Dif. uždavinys ant trikampio grafo su vienu vidiniu tašku

Šiuo atveju nagrinėjamas diferencialinis uždavinys, kai duotas vienas vidinis taškas. Kiti likusieji yra kraštiniai. Ant vidinio taško sąlygos skiriasi nuo kraštinių taškų sąlygų. Taip pat šiuo atveju tikrinės reikšmės $\lambda > 0$. Tai galima įsitikinti tuo pačiu būdu kaip ir ankstesniame skyriuje (žr. 3.1 skyrius), nagrinėjant (47) lygybę. Čia parodysime, kad diferencialinis uždavinys turi du tikrinių reikšmių spektrus ir dvi tikrines funkcijas.



22 pav.: Grafas Γ.

Suformuluojame diferencialinį uždavinį ant grafo (žr. 22 pav.). Patogumo dėlei, kraštinių γ_1 ir γ_2 pradžios taškai sutampa ir yra 0.

$$-u_i'' = \lambda u_i, \quad 0 \leqslant x_i \leqslant l_i, \quad i = \overline{1,3}, \tag{67}$$

$$u_1'(0) + u_2'(0) = 0, \tag{68}$$

$$u_1(0) = u_2(0), \tag{69}$$

$$u_3(0) = 0, \tag{70}$$

$$u_1(l_1) = u_2(l_2) = u_3(l_3) = 0, \tag{71}$$

kur (68) yra vadinamoji balanso sąlyga, (69) tolydumo sąlyga ir kraštinės sąlygos (70), (71).

Bendra sprendinio forma ant kiekvienos briaunos

$$u_i(x_i) = A_i \cos(qx_i) + B_i \sin(qx_i), \quad i = \overline{1,3}, \tag{72}$$

Taip pat prireiks ir (72) sprendinio išvestinės

$$u_i'(x_i) = -A_i q \sin(qx_i) + B_i q \cos(qx_i), \quad i = \overline{1,3}, \tag{73}$$

Toliau imame ir įsistatome sąlygas (68)-(71) į lygtis (72), (73). Gauname

$$B_1 + B_2 = 0, \tag{74}$$

$$A_1 = A_2, \tag{75}$$

$$A_3 = 0, \tag{76}$$

$$u_1(l_1) = A_1 \cos(ql_1) + B_1 \sin(ql_1) = 0, \tag{77}$$

$$u_2(l_2) = A_2 \cos(ql_2) + B_2 \sin(ql_2) = 0, \tag{78}$$

$$u_3(l_3) = A_3 \cos(ql_3) + B_3 \sin(ql_3) = 0. \tag{79}$$

Pasinaudojus (74)-(76) išraiškomis, (77)-(79) lygybėse, gauname sistemą

$$u_1(l_1) = A\cos(ql_1) - B\sin(ql_1) = 0, \tag{80}$$

$$u_2(l_2) = A\cos(ql_2) + B\sin(ql_2) = 0, \tag{81}$$

$$u_3(l_3) = B_3\sin(ql_3) = 0. \tag{82}$$

Sistemą (80)-(82) perrašome į matricų formą

$$\begin{pmatrix} \cos(ql_1) & -\sin(ql_1) & 0 \\ \cos(ql_2) & \sin(ql_2) & 0 \\ 0 & 0 & \sin(ql_3) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A \\ B \\ B_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{83}$$

Suskaičiuojame pagrindinės matricos determinantą $\det X = 0$,

$$\begin{aligned} \det X &= \sin(ql_3)\,[\sin(ql_1)\cos(ql_2) + \sin(ql_2)\cos(ql_1)] \\ &= \sin(ql_3)\cdot\sin(ql_1 + ql_2) = 0. \end{aligned} \tag{84}$$

Gauname, kad iš (83) lygties q reikšmės yra

$$q = \frac{\pi}{l_3}k_3, \quad \text{arba} \quad q = \frac{\pi}{l_1 + l_2}k_{1,2},$$

iš čia gauname tikrines reikšmes. Šiuo atveju yra du tikrinių reikšmių spektrai. Antroji q reikšmė rodo, kad tikrinės reikšmės, funkcijų u_1 ir u_2, yra apjungtos į vieną. Vadinasi, turi būti ir viena tikrinė funkcija.

Taigi tikrinės reikšmės yra

$$\lambda_{k_{1,2}} = \frac{\pi^2 k_{1,2}^2}{(l_1 + l_2)^2}; \quad \lambda_{k_3} = \frac{\pi^2 k_3^2}{l_3^2}. \tag{85}$$

Tikrines funkcijas gauname iš (80)-(82) sistemos. Iš pirmos lygties (80) išsireiškiame A

$$A = \frac{B\sin(ql_1)}{\cos(ql_1)},$$

įstatome į antrąją lygybę (81) ir gauname

$$B\sin(ql_1)\cos(ql_2) + B\sin(ql_2)\cos(ql_1) = B\sin(q(l_1 + l_2)) = 0.$$

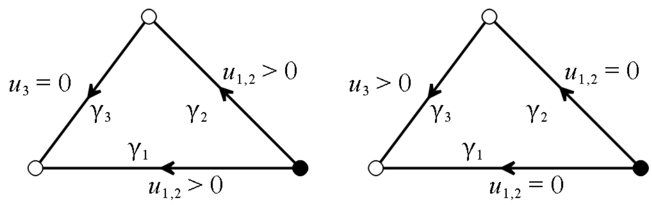
Tada tikrinės funkcijos yra

$$u_{k_{1,2}}(x_{1,2}) = B \sin\left(\frac{\pi k_{1,2}}{l_1 + l_2} x\right), \quad 0 \leqslant x_{1,2} \leqslant l_1 + l_2, \tag{86}$$

$$u_{k_3}(x_3) = B \sin\left(\frac{\pi k_3}{l_3} x\right), 0 \leqslant x_3 \leqslant l_3. \tag{87}$$

Matome, kad tikrinė funkcija (86) eina per abi kraštines γ_1 ir γ_2. Turime du tikrinių reikšmių spektrus. Pasinaudojus (3.4) teiginiu gausime, kada šie du spektrai turi bendrų taškų. Taip pat matome, kad dėl vieno taško tipo pasikeitimo (kadangi pasikeitė ir sąlyga) dabar gavome ne tris, o du tikrinių reikšmių spektrus ir dvi tikrines funkcijas.

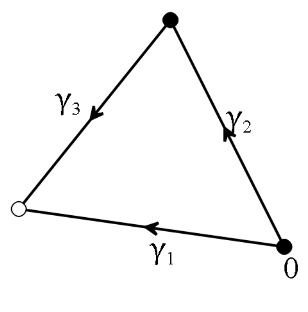
Funkcijų bazė būtų (žr. 23 pav.)



23 pav.: Bazinės funkcijos ant grafo.

3.3. Dif. uždavinys ant trikampio grafo su dviem vidiniais taškais

Čia nagrinėjamas diferencialinis uždavinys trikampyje, kuriame yra tik vienas kraštinis taškas. Nagrinėdami tokį uždavinį matysime, kad gauname tik vieną tikrinių reikšmių spektrą ir vieną tikrinę funkcija. Taip pat tikrinės reikšmės yra teigiamos $\lambda > 0$. Tuo galima įsitikinti naudojantis (47) lygybe (žr. 3.1 skyrius).



24 pav.: Grafas Γ.

Nagrinėjamas diferencialinis uždavinys atrodys taip Suformuluojame diferencialinį uždavinį ant grafo (žr. 24 pav.). Patogumo dėlei, kraštinių γ_1 ir γ_2 pradžios taškai sutampa ir yra 0.

$$-u_i'' = \lambda u_i, \quad 0 \leqslant x_i \leqslant l_i, \quad i = \overline{1,3}, \tag{88}$$

$$u_1'(0) + u_2'(0) = 0, \tag{89}$$

$$u_3'(0) - u_2'(l_2) = 0, \tag{90}$$

$$u_1(0) = u_2(0), \tag{91}$$

$$u_3(0) = u_2(l_2), \tag{92}$$

$$u_1(l_1) = u_3(l_3) = 0. \tag{93}$$

Bendroji sprendinio forma ant kiekvienos kraštinės užrašoma

$$u_i(x_i) = A_i \cos(qx_i) + B_i \sin(qx_i), \quad i = \overline{1,3}, \tag{94}$$

Žinoma, prireiks ir (94) sprendinio išvestinės

$$u_i'(x_i) = -A_i q \sin(qx_i) + B_i q \cos(qx_i), \quad i = \overline{1,3}, \tag{95}$$

Tada įsistatome turimas sąlygas į atitinkamas (94) ir (95) lygtis. Turime sistemą

$$A\cos(ql_1) - B\sin(ql_1) = 0, \tag{96}$$

$$A_3 - A\cos(ql_2) - B\sin(ql_2) = 0, \tag{97}$$

$$B_3 + A\sin(ql_2) - B\cos(ql_2) = 0, \tag{98}$$

$$A_3\cos(ql_3) + B_3\sin(ql_3) = 0. \tag{99}$$

Dabar perrašome matriciniu pavidalu

$$\begin{pmatrix} \cos(ql_1) & 0 & \sin(ql_1) & 0 \\ -\cos(ql_2) & 1 & \sin(ql_2) & 0 \\ \sin(ql_2) & 0 & \cos(ql_2) & 1 \\ 0 & \cos(ql_3) & 0 & \sin(ql_3) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A \\ A_3 \\ B \\ B_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{100}$$

Ieškome matricos X determinanto, kuris lygus 0.

$$\begin{aligned}\det X =& \cos(ql_3)\left(\sin(ql_2)\cos(ql_1) + \cos(ql_2)\sin(ql_1)\right)\\ &+ \sin(ql_3)\left(-\sin(ql_2)\sin(ql_1) + \cos(ql_2)\cos(ql_1)\right)\\ =& \cos(ql_3)\sin(ql_1 + ql_2) + \sin(ql_3)\cos(ql_1 + ql_2)\\ =& \sin(ql_1 + ql_2 + ql_3) = 0,\end{aligned}$$

iš čia gauname q reikšmę

$$q = \frac{\pi k}{l_1 + l_2 + l_3}. \tag{101}$$

Tada tikrinė reikšmė (bendra formulė viso tikrinių reikšmių spektro)

$$\lambda_k = \frac{\pi^2 k^2}{(l_1 + l_2 + l_3)^2}. \tag{102}$$

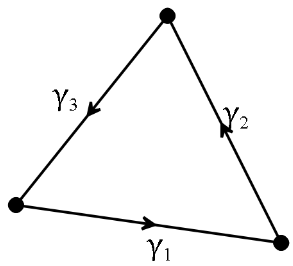
Tikrinės funkcijos bendra formulė gaunama iš (96)-(99) sistemos. Turime

$$u_k = \sin\left(\frac{\pi^2 k^2}{(l_1 + l_2 + l_3)^2} x\right), \quad 0 \leqslant x \leqslant l_1 + l_2 + l_3. \tag{103}$$

Taigi, matome, kad tikrinių reikšmių spektras yra vienas. Ir visa tikrinė funkcija yra pasiskirsčiusi tolygiai per visą grafą (trikampį).

3.4. Dif. uždavinys ant trikampio grafo su trimis vidiniais taškais

Dabar nagrinėsime diferencialinio uždavinio atveji, kai visos trikampio viršūnės yra vidiniai taškai. Šis uždavinys skiriasi nuo prieš tai nagrinėtų tuo, kad šis diferencialinis uždavinys turi tikrinę reikšmę $\lambda = 0$.



25 pav.: Grafas Γ.

Suformuluojame diferencialinį uždavinį

$$-u_i'' = \lambda u_i, \quad 0 \leqslant x_i \leqslant l_i, \quad i = \overline{1,3}, \tag{104}$$

$$u_2'(0) + u_1'(l_1) = 0, \tag{105}$$

$$u_3'(0) - u_2'(l_2) = 0, \tag{106}$$

$$u_1'(0) - u_3'(l_3) = 0, \tag{107}$$

$$u_2(0) = u_1(l_1), \tag{108}$$

$$u_3(0) = u_2(l_2), \tag{109}$$

$$u_1(0) = u_3(l_3). \tag{110}$$

Bendroji sprendinio forma

$$u_i(x_i) = A_i \cos(qx_i) + B_i \sin(qx_i), \quad i = \overline{1,3}, \tag{111}$$

Žinoma, prireiks ir (94) sprendinio išvestinės

$$u_i'(x_i) = -A_i q \sin(qx_i) + B_i q \cos(qx_i), \quad i = \overline{1,3}, \tag{112}$$

Pasinaudojus duotomis sąlygomis (105)-(110) ir įstačius į (111), (112) lygtis, gauname sistemą

$$\begin{aligned}
A_1 - A_3\cos(ql_3) - B_3\sin(ql_3) &= 0,\\
B_1 + A_3\sin(ql_3) - B_3\cos(ql_3) &= 0,\\
A_2 - A_1\cos(ql_1) - B_1\sin(ql_1) &= 0,\\
B_2 + A_1\sin(ql_1) - B_1\cos(ql_1) &= 0,\\
A_3 - A_2\cos(ql_2) - B_2\sin(ql_2) &= 0,\\
B_3 + A_2\sin(ql_2) - B_2\cos(ql_2) &= 0.
\end{aligned} \tag{113}$$

Sistemą perrašome matricų pavidalu

$$\begin{pmatrix} -\cos(ql_1) & 1 & 0 & -\sin(ql_1) & 0 & 0 \\ \sin(ql_1) & 0 & 0 & -\cos(ql_1) & 1 & 0 \\ 0 & -\cos(ql_2) & 1 & 0 & -\sin(ql_2) & 0 \\ 0 & \sin(ql_2) & 0 & 0 & -\cos(ql_2) & 1 \\ 1 & 0 & -\cos(ql_1) & 1 & 0 & -\sin(ql_1) \\ 0 & 0 & \sin(ql_1) & 0 & 0 & -\cos(ql_1) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{114}$$

Paskaičiavus pagrindinės matricos determinantą gauname, kad

$$\det X = \cos(ql_1 + ql_2 + ql_3) = 1, \tag{115}$$

iš čia gauname, kad

$$q = \frac{2\pi k}{l_1 + l_2 + l_3}. \tag{116}$$

Todėl tikrinių funkcijų reikšmės užsirašo pavidalu

$$\lambda_k = \frac{4\pi^2 k^2}{(l_1 + l_2 + l_3)^2}. \tag{117}$$

Taip šio diferencialinio uždavinio tikrinė reikšmė yra $\lambda = 0$. Tikrinė funkcija yra

$$u_k = A\cos\left(\frac{2\pi k}{l_1 + l_2 + l_3}x\right), \quad 0 \leqslant x \leqslant l_1 + l_2 + l_3. \tag{118}$$

Iš šio diferencialinio uždavinio taip pat matome, kad tikrinė funkcija yra pasiskirsčiusi per visą trikampį kaip ir prieš tai esančiame uždavinyje. Tik skirtumas tas, kad šiuo atveju tikrinė reikšmė yra ir $\lambda = 0$.

Kad tai parodytume, visų pirma mūsų nagrinėjama diferencialinė lygtis įgauna tokią formą

$$-u'' = 0. \tag{119}$$

Matome, kad bendra sprendinio forma yra

$$u = Ax + B. \tag{120}$$

Tada nagrinėjame

$$- \int\limits_{\gamma_i} u u_i'' \, \mathrm{d}x = \lambda \int\limits_{\gamma_i} u^2 \, \mathrm{d}x. \tag{121}$$

Suintegruojame dalimis kairiąją lygties (121) pusę

$$0 \leqslant \lambda \int\limits_{\triangle} u^2 \, \mathrm{d}x = -uu' \Big|_{\triangle} + \int\limits_{\triangle} (u')^2 \, \mathrm{d}x. \tag{122}$$

Paėmus $u' = 0$, yra tenkinamos balanso lygtys (105)-(107). Funkcija $u > 0$. Matome, kad iš (122) lygybės, $\lambda = 0$. Taigi funkcija $u = const > 0$. Ir $\lambda = 0$ yra tikrinė reikšmė.

4. Išvados

Nagrinėjant diferencialinių lygčių uždavinius grafuose, buvo išanalizuota, kokios sąlygos, priklausomai nuo grafų viršūnių rūšių, yra užduodamos. Taip pat nustatyta, kad apibrėžto uždavinio ant grafo sprendinių skaičius priklauso nuo sąlygų tipų, kaip ir tikrinių reikšmių spektrų skaičius priklauso nuo sąlygų. Palyginti sprendžiamų uždavinių tikrinių reikšmių spektrai ir nustatytos sąlygos, kada tikrinių reikšmių spektrai (jei jų yra $\geqslant 2$), turi bendrų taškų. Nustyta, kada spektrai gali neturėti bendrų taškų ($\emptyset$). Priklausomai nuo grafo taškų tipu ir sąlygų, priklauso ar diferencialinio uždavinio tikrinė reikšmė taip pat bus $\lambda = 0$.

Literatūra

[1] A. Krylovas. *DISKREČIOJI MATEMATIKA, Mokomoji knyga*. Vilnius: Technika, 2004.

[2] Yu. V. Pokornyi, V. L. Pryadiev, *The qualitative Sturm-Liouville theory on spatial network*, Journal of Mathematical Sciences, Vol 119, No. 6, 2004.

[3] notes) Yu. V. Pokornyi and A. V. Borovskikh, *Differential Equations on Networks (Geometric graphs)*, Journal of Mathematical Sciences, Vol. 119, No. 6, 2004.

[4] F. V. Atkinson, *Discrete and Continuous Boundary Problems*, Academic Press, New York (1964).

[5] E. A. Coddington and N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill, New York (1955).

[6] O. M. Penkin and V. Pokornyi, "On boundary-value problems on a graph,"*Diff. Uravn.*, 24, No. 4, 701-703 (1988).

[7] F. Harary, *Theory of Graphs*, Moscow (1973).