

VILNIAUS UNIVERSITETAS  
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

Magistro darbas

**Hierarchinės Archimedo kopulos ir jų  
taikymai**

**Nested Archimedean Copulas and Their Applications**

Modesta Šopaitė

VILNIUS 2016

**MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS**  
**MATEMATINĖS ANALIZĖS KATEDRA**

Darbo vadovas doc.dr. Martynas Manstavičius

Darbo recenzentas doc.dr. Aleksandras Ernestas Plikusas

Darbas apgintas 2016 m. sausio 14 d.

Darbas įvertintas \_\_\_\_\_

Registravimo NR. \_\_\_\_\_

2016-01-04 \_\_\_\_\_

# Turinys

Anotacija	2
Resume	3
Įvadas	4
1 Kopulos ir jų savybės	5
2 Archimedo kopulos	7
3 Praktinis taikymas	17
3.1 Portfelio optimizavimo problema . . . . .	17
3.2 Būsimų gražų modeliavimas . . . . .	18
3.2.1 Gražų modelių parametrų radimas . . . . .	20
3.2.2 Kopulos parametrų radimas . . . . .	21
3.2.3 Vieno momento prognozė . . . . .	23
3.3 Išvados . . . . .	25
Literatūra	27
Priedai	28
A Visiškai monotoninės funkcijos	28
B R programos kodas	29

# Hierarchinės Archimedo kopulos ir jų taikymai

## Anotacija

Šiame magistro darbe analizuojamos hierarchinės Archimedo kopulos. Hierarchinė struktūra susieja dvi ar daugiau dvimačių ar didesnių dimensijų įprastas Archimedo kopulas. Tokiu būdu sukuriama kelių lygių Archimedo kopula, kuri atspindi skirtingas priklausomybes tarp kopulos kintamųjų. Darbe radome dvylika įprastų Archimedo kopulų porų, su kurioms galima konstruoti hierarchines struktūras. Praktinėje darbo dalyje pristatėme algoritmą pagal kurį naudojant ARMA–GARCH modelį, IFM metodą ir hierarchinę kopulą optimizuojamas finansinių priemonių portfelis ir prognozuojamos jo ateities grąžos.

**Raktiniai žodžiai:** Archimedo kopula, hierarchinė struktūra, optimizavimas, ARMA–GARCH, IF.

# Nested Archimedean Copulas and Their Applications

## Resume

In this paper we seek to examine nested Archimedean copulas and demonstrate their practical application in finance. First of all, we have investigated nested Archimedean copulas theoretically. After that, we have found twelve pairs of Archimedean families which satisfies the sufficient condition for a nested Archimedean structures to be proper copulas proven by McNeil [8]. Using these pairs of copulas we are able to create more than fifty four-dimensional Archimedean copulas, or even more if we want to create copulas of higher dimensions. Moreover, we have presented an algorithm to forecast returns of a portfolio and choose an optimal portfolio allocation using time series and nested Archimedean copula. To reach this aim we use ARMA–GARCH model, IFM, conditional inversion methods and nested Ali–Mikhail–Haq copula with inner copulas Gumbel and No.13 of Nelsen [10]. Unfortunately, the predictions of our algorithm do not match historical returns correctly. So, for further research we suggest using nested Clayton copula, but first of all finding its Laplace–Stieltjes transform with negative parameter.

**Key words:** nested Archimedean copulas, ARMA–GARCH, IFM, optimal portfolio allocation.

## Ivadas

Nagrinėjant finansų rinkas vienas aktualiausių ir dažniausiai užduodamų klausimų yra susijęs su optimizavimu. Šios rinkos dalyviams aktualu žinoti, kaip pasiekti didžiausią naudą kuo mažiau rizikuojant. Norint atsakyti į šį klausimą, reikia žinoti finansinių portfelių priklausomybės struktūrą, jei portfelį sudaro daug aktyvų, tai rasti bendrą portfelio pasiskirstymą gali būti ganėtinai sunku. Šioje situacijoje gali pagelbėti kopulų teorija, kuri leidžia atskirti portfelio aktyvų elgesį nuo bendros priklausomybės struktūros.

Vieną didžiausių kopulos teorijos klasių sudaro Archimedo kopulos. Šios kopulos yra nesunkiai modeliuojamos, nes jos priklauso nuo vieno parametro. Tiesa, būtent ši savybė, kuri atrodytų turėtų būti privalumas, dažnai kritikuojama. Analizuojant finansinius portfelius sudarytus iš skirtingų aktyvų grupių, susiduriama su problema, kad visos aktyvų poros turi koreliuoti vienodai. Realybėje pasiekti tokią situaciją praktiškai neįmanoma. Šios problemos sprendimui buvo pasiūlytos hierarchinės Archimedo kopulos. Tokio tipo kopulos suteikia galimybę lengviau nagrinėti portfelius, kurie sudaryti iš daugiau nei 3 aktyvų. Kaip ir visur, šita kopulų grupė turi ir trūkumų. Hierarchinės struktūros ne visada būna kopulos. Ties šia problema šiame magistro darbe ir koncentruosimės. Mūsų tikslas, rasti kuo daugiau Archimedo kopulų porų su kuriomis bus galima konstruoti hierarchines struktūras. Tikslo sieksime pasinaudodami McNeil [8] įrodyta teorema, kuri apibrėžia tokios kopulos egzistavimo sąlygą.

Taigi, pirmiausia trumpai pristatysime, kas yra kopulos ir kokios jų pagrindinės savybės. Vėliau apibrėšime Archimedo kopulas ir hierarchines struktūras. Po to pereisime prie įrodymų su kokiomis Archimedo kopulų poromis galime konstruoti hierarchines struktūras. O kadangi pradėjome kalbėti apie optimizavimo problemą, tai praktinėje dalyje parodysime, kaip hierarchines kopulas galime pritaikyti sprendžiant šią problemą.

# 1 Kopulos ir jų savybės

Kopulų teorija pradėta nagrinėti dar 1959 metais, kai Sklar pristatė terminą „kopula“. Šis matematikas ne tik pradėjo naudoti naują terminą, bet ir įrodė vieną pamatinių kopulų teorijos teoremą, kuri leidžia atskirti atsitiktinių dydžių marginalų elgesį ir priklausomybės struktūrą nuo jų daugiamatės pasiskirstymo funkcijos. Paprastai kalbant, kopula yra daugiamatė pasiskirstymo funkcija, kurios kiekvienas vienmatis marginalinis skirstinys yra tolygusis  $[0, 1]$  intervale. Kopulą galime apibrėžti ir funkcijų terminais.

**1.1 Apibrėžimas.** Funkciją  $C : [0, 1]^d \rightarrow [0, 1]$  vadinsime *kopula*, jei

- $C(u_1, \dots, u_{i-1}, 0, u_{i+1}, \dots, u_d) = 0$ , t.y. kopula lygi nuliui, jei bent vienas argumentas nulinis;
- $C(1, \dots, 1, u, 1, \dots, 1) = u$ , t.y. kopula lygi  $u$ , jei vienas argumentas lygus  $u$ , o kiti lygūs vienetui;
- $C$  yra  $d$ -didėjanti, t.y., kiekviena aibė  $B = \prod_{i=1}^d [x_i, y_i] \subseteq [0, 1]^d$  teisinga nelygybė:  
$$\int_B dC(u) = \sum_{\mathbf{z} \in \times_{i=1}^d \{x_i, y_i\}} (-1)^{N(\mathbf{z})} C(\mathbf{z}) \geq 0$$
, čia  $N(\mathbf{z}) = \#\{k : z_k = x_k\}$ .

**1.1 Teorema. (Sklar)**[10] Tarkime,  $F$  yra  $d$ -mačio a.d. pasiskirstymo funkcija su vienmatėmis marginalinėmis pasiskirstymo funkcijomis  $F_1, F_2, \dots, F_d$ . Tada egzistuoja tokia kopula  $C$ , kad su visais  $x_1, \dots, x_d \in \mathbb{R}$  galioja:

$$F(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)). \quad (1.1)$$

Be to, jei marginalinės pasiskirstymo funkcijos yra tolydžios, tada  $C$  yra vienintelė.

Ir atvirkščiai, jei  $C$  yra kopula ir  $F_1, F_2, \dots, F_d$  vienmatės pasiskirstymo funkcijos, tuomet  $F$  apibrėžta (1.1) lygybe yra pasiskirstymo funkcija.

Sekančios teoremos autoriai Fréchet ir Hoeffding nepriklausomai vienas nuo kito įrodė, kad kopulos yra aprėžtos, t.y. turi apatinį (žym.  $W$ ) ir viršutinį (žym.  $M$ ) rėžį.

**1.2 Teorema. (Fréchet–Hoeffding rėžiai)** [10] Kiekvienam  $d \geq 2$  pažymėkime  $W(\mathbf{u}) := \max \{ \sum_{j=1}^d u_j - d + 1, 0 \}$  ir  $M(\mathbf{u}) := \min_{1 \leq j \leq d} \{ u_j \}$ ,  $\mathbf{u} \in [0, 1]^d$ . Tuomet

$$W(\mathbf{u}) \leq C(\mathbf{u}) \leq M(\mathbf{u}).$$

Be to,  $W$  yra kopula tik, kai  $d = 2$ , o  $M$  yra kopula  $\forall d \geq 2$ .

Kopulos priklausomybės matai buvo pradėti studijuoti dvimačiu atveju ir iki šiol yra daug populiariesni nei jų daugiamaciai apibendrinimai. Dėl šios priežasties pateiksime priklausomybės matų apibrėžimus kopulų teorijoje tik dvimačiu atveju.

**1.2 Apibrėžimas.** *Kendall*  $\tau$  atsitiktiniam vektoriui  $(X, Y)^T$  apibrėžiamas formule

$$\tau(X, Y) = \mathbb{P}\{(X - X')(Y - Y') > 0\} - \mathbb{P}\{(X - X')(Y - Y') < 0\}, \quad (1.2)$$

čia  $(X', Y')^T$  yra nepriklausoma vektoriaus  $(X, Y)^T$  kopija.

**1.3 Teorema. (5.1.3 teorema iš [10])** Tarkime,  $(X, Y)^T$  yra tolydžiųjų atsitiktinių dydžių  $X$  ir  $Y$  vektorius, kuris apibrėžia kopulą  $C$ . Tuomet *Kendall*  $\tau$  galima apskaičiuoti pagal formulę

$$\tau(X, Y) = 4 \int \int_{[0,1]^2} C(u, v) dC(u, v) - 1. \quad (1.3)$$

Aukščiau esantis integralas yra vidurkis atsitiktinio dydžio  $C(U, V)$ , čia  $U, V \sim U(0, 1)$  su jungtine pasiskirstymo funkcija  $C$ , taigi  $\tau(X, Y) = 4\mathbb{E}[C(U, V)] - 1$ .

**1.3 Apibrėžimas.** *Spearman*  $\rho_s$  atsitiktiniam vektoriui  $(X, Y)^T$  apibrėžiamas formule

$$\rho_s(X, Y) = 3(\mathbb{P}\{(X - X'')(Y - Y') > 0\} - \mathbb{P}\{(X - X'')(Y - Y') < 0\}), \quad (1.4)$$

čia  $(X, Y)^T, (X'', Y'')^T$  ir  $(X', Y')^T$  yra nepriklausomos kopijos.

**1.4 Teorema. (5.1.6 teorema iš [10])** Tarkime,  $(X, Y)^T$  yra tolydžiųjų atsitiktinių dydžių  $X$  ir  $Y$  vektorius, kuris apibrėžia kopulą  $C$ . Tuomet *Spearman*  $\rho_s$  galima apskaičiuoti pagal formulę

$$\rho_s(X, Y) = 12 \int \int_{[0,1]^2} C(u, v) dudv - 3. \quad (1.5)$$

Nagrinėjant ekstremalių reikšmių priklausomybę, svarbi sąvoka yra uodegos priklausomybė.

**1.4 Apibrėžimas.** *Apatinės uodegos priklausomybės parametras*  $\lambda_L$  kopulų teorijoje apibrėžiamas formule

$$\lambda_L = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{C(t, t)}{t}.$$

$\lambda_L$  yra ribinė sąlyginė tikimybė, kad vienas kopulos kintamųjų įgis „labai mažą“ reikšmę, jei kitas kintamasis įgijo „labai mažą“ reikšmę.

**1.5 Apibrėžimas.** *Viršutinės uodegos priklausomybės parametras*  $\lambda_U$  kopulų teorijoje apibrėžiamas formule

$$\lambda_U = 2 - \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{1 - C(t, t)}{1 - t}.$$

$\lambda_U$  yra ribinė sąlyginė tikimybė, kad vienas kopulos kintamųjų įgis „labai didelę“ reikšmę, jei kitas kintamasis įgijo „labai didelę“ reikšmę.



## 2 Archimedo kopulos

Archimedo kopulos sudaro vieną iš pagrindinių kopulų klasių. Joje apibrėžti kopulų generavimo metodai naudojant vieno parametro funkcijas.

**2.1 Apibrėžimas.** *Archimedo kopulos generatoriumi*<sup>1</sup> (toliau - generatoriumi) vadinsime tolydžią, mažėjančią funkciją  $\psi : [0, \infty] \rightarrow [0, 1]$ , tenkinančią sąlygas  $\psi(0) = 1$ ,  $\psi(\infty) := \lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = 0$  ir griežtai mažėjančią intervale  $[0, \inf\{t : \psi(t) = 0\}]$ . Visų generatorių aibę žymėsime  $\Psi$ .

$d$ -matė kopula vadinama *Archimedo*, jei ji yra pavidalo

$$C(\mathbf{u}; \psi) = \psi(\psi^{-1}(u_1) + \dots + \psi^{-1}(u_d)), \quad \mathbf{u} \in [0, 1]^d, \quad (2.1)$$

su generatoriumi  $\psi$ , kurio atvirkštinė funkcija  $\psi^{-1} : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$  ir  $\psi^{-1}(0) = \inf\{t : \psi(t) = 0\}$ .

**2.1 Pavyzdys.** Pateiksime kelis dvimačių Archimedo kopulų pavyzdžius:

Nr.	$C_\theta(u, v)$	$\psi(t)$	$\psi^{-1}(t)$	$\theta$
1.	$[\max(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1; 0)]^{-1/\theta}$	$(1 + \theta t)^{-1/\theta}$	$\frac{1}{\theta}(t^{-\theta} - 1)$	$[-1, \infty) \setminus \{0\}$
3.	$uv/[1 - \theta(1 - u)(1 - v)]$	$[1 - \theta]/[e^t - \theta]$	$\ln\left[\frac{1 - \theta(1 - t)}{t}\right]$	$[-1; 1)$
4.	$\exp\{-[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta]^{1/\theta}\}$	$\exp\{-t^{1/\theta}\}$	$(-\ln t)^\theta$	$[1, \infty)$
10.	$uv/[1 + (1 - u^\theta)(1 - v^\theta)]^{1/\theta}$	$(2/[\exp\{t\} + 1])^{1/\theta}$	$\ln(2 - t^\theta)$	$(0, 1]$
12.	$(1 + [(u^{-1} - 1)^\theta + (v^{-1} - 1)^\theta]^{1/\theta})^{-1}$	$1/[1 + t^{1/\theta}]$	$(1/t - 1)^\theta$	$[1, \infty)$
13.	$\exp\left\{1 - [(1 - \ln u)^\theta + (1 - \ln v)^\theta - 1]^{1/\theta}\right\}$	$\exp\{1 - (1 + t)^{1/\theta}\}$	$(1 - \ln t)^\theta - 1$	$(0, \infty)$
14.	$(1 + [(u^{-1/\theta} - 1)^\theta + (v^{-1/\theta} - 1)^\theta]^{1/\theta})^{-\theta}$	$(t^{1/\theta} + 1)^{-\theta}$	$(t^{-1/\theta} - 1)^\theta$	$[1, \infty)$
19.	$\theta / \ln[e^{\theta/u} + e^{\theta/v} - e^\theta]$	$\theta / \ln[t + e^\theta]$	$e^{\theta/t} - e^\theta$	$(0, \infty)$
20.	$[\ln(\exp\{u^{-\theta}\} + \exp\{v^{-\theta}\} - e)]^{-1/\theta}$	$(\ln[t + e])^{-1/\theta}$	$\exp\{t^{-\theta}\} - e$	$(0, \infty)$

1 lentelė: Archimedo kopulų pavyzdžiai

Lentelėje palikome tą pačią kopulų numeraciją kaip Nelsen knygoje [10]. Taip elgiames dėl to, kad nagrinėjamuose straipsniuose [2], [4] taip pat naudojama numeracija paimta iš šios knygos, todėl bus lengviau palyginti mūsų ir straipsnių autorių gautus rezultatus. Svarbu paminėti, kad pirmosios trys lentelės kopulos dar vadinamos ir jų autorių garbei.

Nr.1 – Clayton kopula, Nr.3 – Ali–Mikhail–Haq kopula, Nr.4 – Gumbel kopula, šiuos pavadinimus naudosime ir mes.

<sup>1</sup>Kai kurie autoriai (pvz. Nelsen [10]) generatorių apibrėžia kaip funkciją  $\varphi = \psi^{-1}$ . Dėl patogumo naudosime  $\psi$ , nes bus nagrinėjamos šios funkcijos savybės.

Toliau nagrinėjant Archimedo kopulas mums bus svarbi JAV matematiko Kimberling 1974 m. įrodyta teorema.

**2.2 Apibrėžimas.** Funkciją  $f$  vadinsime *visišškai monotone* (toliau - VM) intervale  $I$ , kai  $f$  yra tolydi intervale ir visos funkcijos išvestinės tenkina nelygybę  $(-1)^k \frac{d^k}{dt^k} f(t) \geq 0$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}_0$ ,  $t \in I$ .

**2.1 Teorema. (Kimberling)**[5] Tarkime,  $\psi \in \Psi$ . Tuomet funkcija apibrėžta (2.1) lygybe yra  $d$ -matė Archimedo kopula  $\forall d \geq 2$  tada ir tik tada, kai  $\psi$  yra VM intervale  $[0, \infty)$ .

Kai turime VM generatorių  $\psi$ , tai pagal Berštein'o teoremą jis yra pasiskirstymo funkcijos  $F$  Laplace–Stieltjes transformacija (toliau-LST) teigiamoje realioje pusiesėje (žym.  $\psi = \mathcal{LS}[F]$ ). Visų tokių generatorių klasę žymėsime  $\Psi_\infty$ .

**2.2 Teorema. (Bernstein)**[4] Funkcija  $\psi : [0, \infty] \rightarrow [0, 1]$  yra pasiskirstymo funkcijos  $F : [0, \infty] \rightarrow [0, 1]$  LST tada ir tik tada, kai  $\psi$  yra VM ir  $\psi(0) = 1$ .

Archimedo kopulos populiarios dėl savo paprastos struktūros, kuri priklauso tik nuo vieno parametro. Dėl šios priežasties ši klasė yra tinkamas pasirinkimas generuojant dvimačius pasiskirstymus.

**2.3 Teiginys. (5.1.4 išvada iš [10])** Tarkime,  $(X, Y)^T$  yra tolydžiųjų atsitiktinių dydžių  $X$  ir  $Y$  vektorius, kuris apibrėžia kopulą  $C$  su generatoriumi  $\psi$ . Tuomet *Kendall*  $\tau$  galime apskaičiuoti pagal formulę:

$$\tau(X, Y) = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\psi^{-1}(t)}{(\psi^{-1})'(t)} dt. \quad (2.2)$$

Uodegos priklausomybę taip pat galime apskaičiuoti naudojantis kopulos generatoriaus išraiška.

**2.4 Teiginys. (5.4.3 išvada iš [10])** Tarkime,  $C(u, v)$  yra Archimedo kopula su generatoriumi  $\psi$ . Tuomet apatinės ir viršutinės uodegos priklausomybės koeficientus  $\lambda_L$  ir  $\lambda_U$  galima apskaičiuoti pagal formules:

$$\lambda_L = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\psi(2\psi^{-1}(t))}{t} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\psi(2x)}{\psi(x)}$$

ir

$$\lambda_U = 2 - \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{1 - \psi(2\psi^{-1}(t))}{1 - t} = 2 - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \psi(2x)}{1 - \psi(x)}.$$

Nagrinėjant aukštesnės dimensijos Archimedo kopulas, galima pastebėti šios struktūros trūkumą: tarp visų kopulos kintamųjų porų gaunama ta pati priklausomybė. Bet kuri kintamųjų pora koreliuoja vienodai ir nėra galimybės atsižvelgti į tai, kad galime turėti

situacijų, kai atsitiktiniai dydžiai vienas kitą veikia skirtingai. Šią problemą galime išspręsti konstruodami hierarchines Archimedo kopulas. Hierarchinė struktūra susieja dvi ar daugiau dvimačių ar didesnės dimensijos įprastas Archimedo kopulas. Tokiu būdu sukuriama kelių lygių Archimedo kopula, kuri dar vadinama *įdėtine*.

**2.3 Apibrėžimas.**  $d$ -matė kopula  $C$  vadinama *hierarchine (įdėtine) Archimedo kopula*, jei ji yra Archimedo kopula, kurios argumentai yra kitos Archimedo kopulos.

Kopulą  $C$  galime užrašyti rekursine formule, kai  $d > 2$

$$C(\mathbf{u}; \psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{d-2}) = \psi_0(\psi_0^{-1}(u_1) + \psi_0^{-1}(C(u_2, \dots, u_d; \psi_1, \dots, \psi_{d-2}))), \quad \mathbf{u} \in I^d \quad (2.3)$$

Taip aprašyta struktūra dar vadinama *visišškai įdėtine* Archimedo kopula. Tokios kopulos kintamųjų poras sieja  $d - 2$  skirtingų priklausomybės parametru. Praktikoje dažniau nagrinėjamos paprastesnės struktūros, kurias sieja mažiau priklausomybės parametru. Tokios kopulos vadinamos *pusiau įdėtinėmis* ir jos yra pavidalo

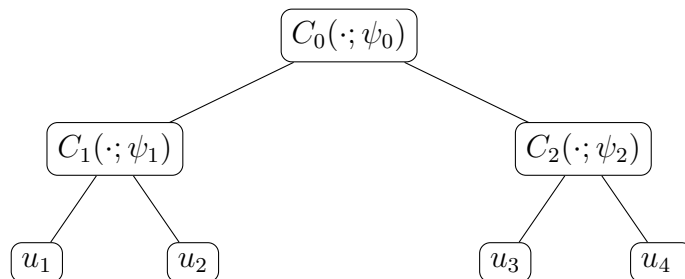
$$\begin{aligned} C(\mathbf{u}) &= C(C(u_{11}, \dots, u_{1d_1}; \psi_1), \dots, C(u_{s1}, \dots, u_{sd_s}; \psi_s); \psi_0) \\ &= \psi_0[\psi_0^{-1}(\psi_1(\psi_1^{-1}(u_{11}) + \dots + \psi_1^{-1}(u_{1d_1}))) + \dots + \psi_0^{-1}(\psi_s(\psi_s^{-1}(u_{s1}) + \dots + \psi_s^{-1}(u_{sd_s})))] \\ &= \psi_0\left(\sum_{i=1}^s \psi_0^{-1}\left(\psi_i\left(\sum_{j=1}^{d_i} \psi_i^{-1}(u_{ij})\right)\right)\right), \quad \mathbf{u} \in I^d, \end{aligned}$$

čia  $s$  sektorių (lygių) skaičius,  $d = \sum_{i=1}^s d_i$  yra kopulos dimensija. Šią kopulą sieja  $s + 1$  skirtingų priklausomybės parametru.

**2.2 Pavyzdys.** Keturmatės pusiau įdėtinės kopulos pavyzdys

$$C(\mathbf{u}) = C_0(C_1(u_1, u_2; \psi_1), C_2(u_3, u_4; \psi_2); \psi_0), \quad \mathbf{u} \in [0, 1]^4, \quad (2.4)$$

čia  $C_0, C_1, C_2$  yra Archimedo kopulos, o  $\psi_0, \psi_1, \psi_2$  – atitinkami jų generatoriai (žr. 1 pav.).



1 pav.: Keturmatės hierarchinės Archimedo kopulos struktūra

Konstruodami hierarchines struktūras, susiduriame su problema, jog ne visada pavyksta gauti Archimedo kopulą.

**2.3 Pavyzdys.** Imkime kopulą  $C(u, v) = \max\{u + v - 1, 0\}$  su generatoriumi  $\psi(t) = 1 - t$  (Clayton kopula su parametru  $\theta = 1$ ). Tuomet, konstruodami (2.4) struktūrą su pasirinkta kopula, gauname

$$\begin{aligned} C(\mathbf{u}) &= \max\{\max\{u_1 + u_2 - 1, 0\} + \max\{u_3 + u_4 - 1, 0\} - 1, 0\} \\ &= \max\{u_1 + u_2 + u_3 + u_4 - 3, 0\} = W(\mathbf{u}), \text{ kai } \mathbf{u} \in [0, 1]^4. \end{aligned}$$

Gavome apatinį kopulos rėžį. Iš 1.2 teiginio žinome, kad jis nėra kopula, kai  $d = 4$ .

Toliau šiame darbe koncentruosimės į atvejus, kada hierarchinė struktūra yra Archimedo kopula.

**2.5 Teiginys. (4.4 teorema iš [8])** Jei  $\psi_i \in \Psi_\infty$ ,  $i = \{0, \dots, d\}$  ir kompozicijų  $\psi_k^{-1} \circ \psi_{k+1}(\cdot)$  išvestinės yra visiškai monotoniškos funkcijos  $k = \{0, \dots, d-1\}$ , tai (2.3) hierarchinė struktūra yra Archimedo kopula.

Matematiko J. M. Hofert [2] darbe pateiktoje 3 lentelėje galime rasti generatorių poras, kurios tenkina anksčiau paminėtą sąlygą tinkamai kopulai sugeneruoti. Šis matematikas, nagrinėdamas poras su Clayton ir Ali–Mikhail–Haq kopulomis, tarė, kad jų parametrai yra tik teigiami. Pagal šių kopulų apibrėžimus, jų parametrai gali įgyti ir reikšmes iš intervalo  $[-1, 0)$ . Parodysime, kad egzistuoja hierarchinių kopulų ir tada, kai parametrai įgyja neigiamas reikšmes.

Visų pirma, patikrinsime, ar generatorių kompozicijų išvestinės yra VM funkcijos, kai vienas iš generatorių yra Clayton ir jo parametras įgyja ir neigiamas reikšmes. Pažymėkime funkciją  $f_i : [0, \infty] \rightarrow [0, 1]$ ,

$$f_i(t) := ((\psi_0^{-1} \circ \psi_i)(t))'_t, \quad (2.5)$$

čia  $\psi_0$  ir  $\psi_i(t)$ ,  $i = 1, 2$  yra Archimedo kopulų generatoriai.

**2.6 Teiginys.** Tarkime,  $\psi_0(\cdot, \theta_0)$  yra Clayton kopulos generatorius, o  $\psi_1(\cdot, \theta_1)$  Gumbel kopulos generatorius. Funkcija  $f_1(t)$  apibrėžta (2.5) formule yra VM tada ir tik tada, kai  $\theta_0 \in [-1, 0)$ .

*Irodymas.* Nagrinėjamu atveju

$$\begin{aligned} f_1(t) := f_1(t, \theta_0, \theta_1) &= ((\psi_0^{-1} \circ \psi_1)(t))'_t = \left( \frac{1}{\theta_0} (\exp\{-t^{1/\theta_1}\}^{-\theta_0} - 1) \right)' \\ &= \frac{1}{\theta_1} \exp\{\theta_0 t^{1/\theta_1}\} t^{1/\theta_1 - 1}. \end{aligned}$$

„ $\Rightarrow$ “ Žinome, kad  $f_1(t)$  yra VM, t.y.  $(-1)^k \frac{d^k}{dt^k} f_1(t) \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0, t \in [0, \infty]$ . Tarkime priešingai, kad  $\theta_0 > 0$ . Raskime  $f_1(t)$  pirmąją išvestinę:

$$\begin{aligned} f_1'(t) &= \frac{1}{\theta_1} \left[ \exp \{ \theta_0 t^{1/\theta_1} \} \frac{\theta_0}{\theta_1} t^{2/\theta_1 - 2} + \exp \{ \theta_0 t^{1/\theta_1} \} \left( \frac{1}{\theta_1} - 1 \right) t^{1/\theta_1 - 2} \right] \\ &= \frac{1}{\theta_1} \exp \{ \theta_0 t^{1/\theta_1} \} t^{1/\theta_1 - 2} \left[ \frac{\theta_0}{\theta_1} t^{1/\theta_1} + \frac{1}{\theta_1} - 1 \right]. \end{aligned}$$

Kad būtų tenkinama VM sąlyga, tai turime gauti, kad  $\left[ \frac{\theta_0}{\theta_1} t^{1/\theta_1} + \frac{1}{\theta_1} - 1 \right] \leq 0, \forall t \in [0, \infty]$ .

Pereidami prie ribos, kai  $t \rightarrow \infty$ , gauname, jog  $\left[ \frac{\theta_0}{\theta_1} t^{1/\theta_1} + \frac{1}{\theta_1} - 1 \right] \rightarrow \infty$ , nes pagal Gumbel

kopulos apibrėžimą  $\theta_1 \geq 1$ . Tai reiškia, kad egzistuoja toks  $t_0$ , kad  $\left[ \frac{\theta_0}{\theta_1} t_0^{1/\theta_1} + \frac{1}{\theta_1} - 1 \right] > 0$ .

Gavome prieštarą.

„ $\Leftarrow$ “ Pažymėkime  $h(t) := \exp \{ \theta_0 t \}$ , o  $g(t) := t^{1/\theta_1}$ . Tuomet  $f_1(t) = \frac{1}{\theta_1} (h \circ g)(t) t^{1/\theta_1 - 1}$ . Pagal A.2 teiginio a) dalį  $f_1(t)$  bus VM, kai  $(h \circ g)(t)$  ir  $t^{1/\theta_1 - 1}$  bus VM. Pastaroji funkcija yra tokia, nes kai  $\theta_1 \geq 1$ , gauname visiškai monotonišką elementariąją funkciją (žr. A.1 teiginį). Toliau nagrinėkime funkciją  $(h \circ g)(t)$ . Pagal A.2 teiginio b) dalį ši kompozicija bus VM, kai  $g'(t)$  bus VM, nes  $g(t)$  neneigiama ir  $h(t)$  yra VM, nes  $\theta_0 < 0$  (žr. A.1 teiginį). Gauname, kad  $g'(t) = \frac{1}{\theta_1} t^{1/\theta_1 - 1}$ , yra VM, nes  $\theta_1 \geq 1$ . Apibendrinę turime, kad nagrinėjamu atveju  $f_1(t)$  yra VM, kai  $\theta_0 \in [-1, 0)$ .  $\square$

**2.7 Teiginys.** Tarkime,  $\psi_0(\cdot, \theta_0)$  yra Clayton kopulos generatorius, o  $\psi_2(\cdot, \theta_2)$  yra Nr.13 kopulos generatorius apibrėžtas 2.1 pavyzdyje. Kai  $\theta_0 \in [-1, 0)$  ir  $\theta_2 \geq 1$ , funkcija  $f_2(t)$  (žr. 2.5) yra VM.

*Irodymas.* Nagrinėjamu atveju

$$\begin{aligned} f_2(t) &:= ((\psi_0^{-1} \circ \psi_2)(t))'_t = \left( \frac{1}{\theta_0} \left( \exp \{ 1 - (1+t)^{1/\theta_2} \}^{-\theta_0} - 1 \right) \right)'_t \\ &= \frac{1}{\theta_2} \exp \{ -\theta_0 + \theta_0 (1+t)^{1/\theta_2} \} (1+t)^{1/\theta_2 - 1}. \end{aligned}$$

Pastebėkime, kad  $f_2(t) = e^{-\theta_0} f_1(1+t, \theta_0, \theta_2)$ , čia  $f_1$  funkcija nagrinėta 2.6 teiginyje, kuriame parodėme, kada ši funkcija yra VM. Kadangi  $e^{-\theta_0} > 0$ ,  $\theta_0 \in [-1, 0)$ ,  $\theta_2 \geq 1$  ir  $(1+t)'$  yra VM, tai pagal A.2 teiginio a) ir b) dalis, gauname jog  $f_2$  taip pat bus VM.  $\square$

**2.8 Teiginys.** Tarkime,  $\psi_0(\cdot, \theta_0)$  yra Clayton kopulos generatorius, o  $\psi_2(\cdot, \theta_2)$  yra Nr.13 kopulos generatorius apibrėžtas 2.1 pavyzdyje. Kai  $\theta_0 > 0$  arba kai  $\theta_2 \in [0, 1)$  ir  $\theta \in [-1, 0)$  ir  $\theta_2 < 1 + \theta_0$ , tai funkcija  $f_2(t)$  (žr. 2.5) nėra VM.

*Irodymas.* Rasime  $f_2(t)$  pirmąją išvestinę:

$$\begin{aligned} f_2'(t) &= \frac{1}{\theta_2} \left[ \exp\{-\theta_0 + \theta_0(1+t)^{1/\theta_2}\} \frac{\theta_0}{\theta_2} (1+t)^{2/\theta_2-2} + \exp\{-\theta_0 + \theta_0(1+t)^{1/\theta_2}\} \left(\frac{1}{\theta_2} - 1\right) (1+t)^{1/\theta_2-2} \right] \\ &= \frac{1}{\theta_2} \exp\{-\theta_0 + \theta_0(1+t)^{1/\theta_2}\} (1+t)^{1/\theta_2-2} \left[ \frac{\theta_0}{\theta_2} (1+t)^{1/\theta_2} + \frac{1}{\theta_2} - 1 \right]. \end{aligned}$$

Reiškinio ženklą nulems laužtiniuose skliaustuose esantis išraiška, nes kiti nariai yra neneigiami. Pereidami prie ribos, kai  $t \rightarrow \infty$  ir  $\theta_0 > 0$  gauname, jog  $\left[ \frac{\theta_0}{\theta_2} (1+t)^{1/\theta_2} + \frac{1}{\theta_2} - 1 \right] \rightarrow \infty$ .

Tai reiškia, kad egzistuoja toks  $t_0$ , kad  $\left[ \frac{\theta_0}{\theta_2} (1+t_0)^{1/\theta_2} + \frac{1}{\theta_2} - 1 \right] > 0$ . Taigi gavome prielaidą VM funkcijos apibrėžimui.

Dabar imkime  $t=0$ , tuomet  $\left[ \frac{\theta_0}{\theta_2} + \frac{1}{\theta_2} - 1 \right] > 0$ , kai  $\theta_2 \in [0, 1)$  ir  $\theta \in [-1, 0)$  ir  $\theta_2 < 1 + \theta_0$ . Taigi, vėl netenkinamas VM funkcijos apibrėžimas.  $\square$

**2.9 Išvada.** Tarkime,  $C_0$  yra Clayton,  $C_1$  Gumbel, o  $C_2$  yra Nr.13 kopula apibrėžta 2.1 pavyzdyje. Kai  $\theta_0 \in [-1, 0)$ ,  $\theta_2 \geq 1$ , tai (2.4) struktūra yra Archimedo kopula.

**2.10 Teiginys.** Tarkime,  $\psi_0(\cdot, \theta_0)$  yra Clayton kopulos generatorius, o  $\psi_1(\cdot, \theta_1)$  yra Nr.12 kopulos generatorius apibrėžtas 2.1 pavyzdyje. Kai  $\theta_0 \in [-1, 1]$ , tai funkcija  $f_1(t)$  (žr. 2.5) yra VM.

*Irodymas.* Nagrinėjamu atveju

$$f_1(t) = \left( \frac{1}{\theta_0} \left( \left( \frac{1}{1+t^{1/\theta_1}} \right)^{-\theta_0} - 1 \right) \right)'_t = \frac{1}{\theta_1} \left( \frac{1}{1+t^{1/\theta_1}} \right)^{-\theta_0+1} t^{1/\theta_1-1}.$$

Pažymėkime  $h(t) := t^{\theta_0-1}$  ir  $g(t) := 1 + t^{1/\theta_1}$ . Tada  $f_1(t) = \frac{1}{\theta_1} (h \circ g)(t) t^{1/\theta_1-1}$ . Kadangi  $t^{1/\theta_1-1}$  yra VM (žr. A.1 teiginį), tai pagal A.3 teiginio a) dalį, kai  $(h \circ g)(t)$  bus VM, tai ir nagrinėjama funkcija  $f_1(t)$  bus VM. Kadangi  $g'(t) = \frac{1}{\theta_1} t^{1/\theta_1-1}$  yra VM, nes  $\theta_1 \geq 1$ , tai kai  $\theta_0 \in [-1, 1]$   $h(t)$  bus VM, todėl ir  $(h \circ g)(t)$  bus VM (žr. A.2 teiginio b) dalį).  $\square$

**2.11 Teiginys.** Tarkime,  $\psi_0(\cdot, \theta_0)$  yra Clayton kopulos generatorius, o  $\psi_1(\cdot, \theta_1)$  yra Nr.14 kopulos generatorius apibrėžtas 2.1 pavyzdyje. Kai  $1 \geq \theta_0\theta_1$ , tai funkcija  $f_1(t)$  (žr. 2.5) yra VM.

*Irodymas.* Nagrinėjamu atveju

$$f_1(t) = \left( \frac{1}{\theta_0} \left( (t^{1/\theta_1} + 1)^{\theta_1\theta_0} - 1 \right) \right)'_t = t^{1/\theta_1-1} \left( \frac{1}{1+t^{1/\theta_1}} \right)^{1-\theta_1\theta_0}.$$

Šiuo atveju įrodymas bus analogiškas ankstesnio teiginio įrodymui. Tik dabar imsime, kad  $h(t) = t^{\theta_0\theta_1-1}$ , ši funkcija bus VM, kai  $1 \geq \theta_0\theta_1$ .  $\square$

**2.12 Teiginys.** Tarkime,  $\psi_0(\cdot, \theta_0)$  yra Clayton kopulos generatorius, o  $\psi_1(\cdot, \theta_1)$  yra Nr.19 kopulos generatorius apibrėžtas 2.1 pavyzdyje. Kai  $\theta_0 \in [-1, 1]$ , tai funkcija  $f_1(t)$  (žr. 2.5) yra VM.

*Irodymas.* Nagrinėjamu atveju

$$f_1(t) = \left( \frac{1}{\theta_0} \left( \frac{\theta_1}{\ln(t + e^{\theta_1})} \right)^{-\theta_0} - 1 \right)'_t = \frac{\theta_1^{-\theta_0}}{t + e^{\theta_1}} \left( \ln(t + e^{\theta_1}) \right)^{\theta_0 - 1}.$$

Pastebėkime, kad  $\frac{\theta_1^{-\theta_0}}{t + e^{\theta_1}}$  yra VM (žr.A.1 teiginį). Pažymėkime  $h(t) := t^{\theta_0 - 1}$  ir  $g(t) := \ln(t + e^{\theta_1})$ . Jei kompozicija  $(h \circ g)(t)$  bus VM, tai ir  $f_1(t)$  bus VM (žr. A.2 teiginio a) dalį). 2.10 teiginyje parodėme, kad  $h(t)$  yra VM, kai  $\theta_0 \in [-1, 1]$ , kadangi  $g'(t) = \frac{1}{t + e^{\theta_1}}$  yra VM, tai ir  $(h \circ g)(t)$  bus VM (žr. A.2 b) dalį).  $\square$

**2.13 Teiginys.** Tarkime,  $\psi_0(\cdot, \theta_0)$  yra Clayton kopulos generatorius, o  $\psi_1(\cdot, \theta_1)$  yra Nr.20 kopulos generatorius apibrėžtas 2.1 pavyzdyje. Kai  $\theta_0 \leq \theta_1$ , tai funkcija  $f_1(t)$  (žr. 2.5) yra VM.

*Irodymas.* Nagrinėjamu atveju

$$f_1(t) = \left( \frac{1}{\theta_0} \left( \ln(t + e) \right)^{\theta_0/\theta_1} - 1 \right)'_t = \frac{1}{\theta_1(t + e)} \left( \ln(t + e) \right)^{\theta_0/\theta_1 - 1}.$$

Šiuo atveju įrodymas bus analogiškas ankstesnio teiginio įrodymui. Tik dabar imsime, kad  $h(t) = t^{\theta_0/\theta_1 - 1}$ , ši funkcija bus VM, kai  $\theta_0 \leq \theta_1$ .  $\square$

Toliau patikrinsime, ar yra tokių generatorių kompozicijų, kurių išvestinės yra VM funkcijos, kai vienas iš generatorių yra Ali–Mikhail–Haq ir jo parametras įgyja neigiamas reikšmes.

**2.14 Teiginys.** Tarkime,  $\psi_0(\cdot, \theta_0)$  yra Ali–Mikhail–Haq kopulos generatorius, o  $\psi_1(\cdot, \theta_1)$  yra Clayton kopulos generatorius. Kai  $\theta_0 \in [-1, 0)$  ir  $\theta_1 > 0$  funkcija  $f_1(t)$  (žr. 2.5) yra VM.

*Irodymas.* Nagrinėjamu atveju

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \left( \ln \left( \frac{1 - \theta_0(1 - (1 + \theta_1 t)^{-1/\theta_1})}{(1 + \theta_1 t)^{-1/\theta_1}} \right) \right)'_t \\ &= \left( \ln(1 - \theta_0 + \theta_0(1 + \theta_1 t)^{-1/\theta_1}) - \ln(1 + \theta_1 t)^{-1/\theta_1} \right)' \\ &= \frac{-\theta_0(1 + \theta_1 t)^{-1/\theta_1 - 1}}{1 - \theta_0 + \theta_0(1 + \theta_1 t)^{-1/\theta_1}} + \frac{1}{1 + \theta_1 t} \\ &:= m^{1/\theta_1 + 1}(t) \left( \frac{1}{\frac{\theta_0 - 1}{\theta_0} - m^{1/\theta_1}(t)} \right) + m(t), \end{aligned}$$

čia  $m(t) := \frac{1}{1 + \theta_1 t}$ .

Pagal A.2 teiginį gauta funkcija bus VM, kai  $m^{1/\theta_1+1}(t)$ ,  $\left(\frac{1}{\frac{\theta_0-1}{\theta_0}-m^{1/\theta_1}(t)}\right)$  ir  $m(t)$  bus VM. Kai  $\theta_1 > 0$  gausime, jog  $m^{1/\theta_1+1}(t)$ ,  $m^{1/\theta_1}(t)$  ir  $m(t)$  yra VM elementariosios funkcijos (žr. A.1 teiginį). Lieka išsiaiškinti ar skliaustuose esantis reiškinys taip pat VM. Pagal A.3 teiginį, kai  $\theta_0 < 0$ , imdami  $\mu = 1$  ir  $A := \frac{\theta_0-1}{\theta_0} > \psi_1(0) = 1$  gauname, kad skliaustuose esantis reiškinys bus VM. Taigi, kai  $\theta_1 > 0$  ir  $\theta_0 < 0$ , tai  $f_1(t)$  (2.5) yra VM funkcija.  $\square$

**Pastaba.** [Hofert J. M. (2008)] taip pat įrodyta, kad 2.14 teiginyje nagrinėjamos kompozicijos išvestinė yra VM, kai  $\theta_0 \in [0, 1)$  ir  $\theta_1 > 1$ . Taigi, nagrinėjama išvestinė gali nebūti VM, tik kai  $\theta \in [0, 1)$  ir  $\theta_1 \in (0, 1)$ .

**2.15 Teiginys.** Tarkime,  $\psi_0(\cdot, \theta_0)$  yra Ali–Mikhail–Haq kopulos generatorius, o  $\psi_2(\cdot, \theta_2)$  yra Gumbel kopulos generatorius. Kai  $\theta_0 \in [-1, 0)$ , tai funkcija  $f_2(t)$  (2.5) yra VM.

*Irodymas.* Nagrinėjamu atveju

$$\begin{aligned} f_2(t) &= \left( \ln \left[ \frac{1 - \theta_0(1 - \exp\{-t^{1/\theta_2}\})}{\exp\{-t^{1/\theta_2}\}} \right] \right)'_t \\ &= \left( \ln [1 - \theta_0(1 - \exp\{-t^{1/\theta_2}\})] + t^{1/\theta_2} \right)'_t \\ &= \frac{1}{\theta_2} t^{1/\theta_2-1} \exp\{-t^{1/\theta_2}\} \left[ \frac{-\theta_0}{1 - \theta_0 + \theta_0 \exp\{-t^{1/\theta_2}\}} \right] + \frac{1}{\theta_2} t^{1/\theta_2-1} \\ &= \frac{1}{\theta_2} t^{1/\theta_2-1} \psi_2(t) \left[ \frac{1}{\frac{\theta_0-1}{\theta_0} - \psi_2(t)} \right] + \frac{1}{\theta_2} t^{1/\theta_2-1}. \end{aligned}$$

Pagal A.2 teiginio a) dalį  $f_2(t)$  bus VM, kai  $t^{1/\theta_2-1}$ ,  $\psi_2(t)$  ir  $\left[\frac{1}{\frac{\theta_0-1}{\theta_0}-\psi_2(t)}\right]$  bus VM. Iš Kimberling teoremos žinome, kad  $\psi_2(t)$  yra VM. Taip pat, kadangi  $\theta_2 > 1$  tai ir  $t^{1/\theta_2-1}$  bus VM (žr. A.1 teiginį). Lieka išsiaiškinti ar skliaustuose esanti funkcija taip pat VM. Pagal A.3 teiginio a) dalį, kai  $\theta_0 < 0$  imdami, jog  $\mu = 1$ , ir  $A := \frac{\theta_0-1}{\theta_0} > \psi_2(0)$  gauname, kad nagrinėjama funkcija yra VM.  $\square$

**2.16 Išvada.** Tarkime,  $C_0$  yra Ali–Mikhail–Haq,  $C_1$  – Clayton, o  $C_2$  – Gumbel kopula.

Kai  $\theta_0 \in [-1, 0)$  ir  $\theta_1 > 0$ , tai struktūra (2.4) yra Archimedo kopula.

**2.17 Teiginys.** Tarkime,  $\psi_0(\cdot, \theta_0)$  yra Ali–Mikhail–Haq kopulos generatorius, o  $\psi_1(\cdot, \theta_1)$  yra Nr.13 kopulos generatorius apibrėžtas 2.1 pavyzdyje. Kai  $\theta_0 \in [-1, 0)$  ir  $\theta_1 \geq 1$ , tai funkcija  $f_1(t)$  (2.5) yra VM.



*Irodymas.* Nagrinėjamu atveju

$$f_1(t) = \left( \ln \left[ \frac{1 - \theta_0(1 - \exp \{1 - (1+t)^{1/\theta_1}\})}{\exp \{1 - (1+t)^{1/\theta_1}\}} \right] \right)'_t \quad (2.6)$$

$$= \left( \ln [1 - \theta_0(1 - \exp \{1 - (1+t)^{1/\theta_1}\}) - (1 - (1+t)^{1/\theta_1})] \right)'_t \quad (2.7)$$

$$= \frac{\theta_0 \exp \{1 - (1+t)^{1/\theta_1}\}}{1 - \theta_0 + \theta_0 \exp \{1 - (1+t)^{1/\theta_1}\}} \left( \frac{-(1+t)^{1/\theta_1-1}}{\theta_1} \right) + \frac{(1+t)^{1/\theta_1-1}}{\theta_1} \quad (2.8)$$

$$= \frac{(1+t)^{1/\theta_1-1}}{\theta_1} \left( \frac{1 - \theta_0}{1 - \theta_0 + \theta_0 \exp \{1 - (1+t)^{1/\theta_1}\}} \right) \quad (2.9)$$

$$= \frac{(1+t)^{1/\theta_1-1}}{\theta_1} \left( \frac{1 - \theta_0}{1 - \theta_0 + \theta_0 \psi_1(t)} \right). \quad (2.10)$$

Iš ankstesnių teiginių jau žinome, kad  $(1+t)^{1/\theta_1-1}$  yra VM, kai  $\theta_1 \geq 1$ . Taigi, pagal A.2 teiginio a) dalį  $f_1(t)$  bus VM, kai  $\frac{1}{1-\theta_0+\theta_0\psi_1(t)}$  bus VM. Iš Kimberling teoremos žinome, kad  $\psi_1(t)$  yra VM. Todėl pagal A.3 teiginio a) dalį imdami  $\mu := 1$ ,  $A := 1 - \theta_0$ ,  $f(t) := -\theta_0\psi_1(t)$  ir  $\theta_0 < 0$  gauname, kad nagrinėjama funkcija  $f_1(t)$  yra VM.  $\square$

Savo iškeltą tikslą, parodyti, kad galime rasti hierarchinių kopulų naudojant Clayton ir Ali–Mikhail–Haq kopulas su neigiamais parametrais įgyvendinome. Bet neapsiribojome tuo. Suradome naujų Archimedo kopulų porų, kurios nebuvo paminėtos Hofert [2] darbe.

**2.18 Teiginys.** Tarkime,  $\psi_0(\cdot, \theta_0)$  yra Nr.10 kopulos generatorius apibrėžtas 2.1 pavyzdyje, o  $\psi_1(\cdot, \theta_1)$  yra Gumbel kopulos generatorius, tuomet funkcija apibrėžta (2.5) lygybe yra VM.

*Irodymas.* Nagrinėjamu atveju

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \left( \ln (2(\exp \{-t^{1/\theta_1}\})^{-\theta_0} - 1) \right)'_t \\ &= \left( \ln (2 \exp \{\theta_0 t^{1/\theta_1}\} - 1) \right)'_t \\ &= \frac{2\theta_0}{\theta_1(2 \exp \{\theta_0 t^{1/\theta_1}\} - 1)} t^{1/\theta_1-1} \exp \{\theta_0 t^{1/\theta_1}\} \\ &= \frac{\theta_0}{\theta_1} t^{1/\theta_1-1} \frac{1}{2 - \exp \{-\theta_0 t^{1/\theta_1}\}}. \end{aligned}$$

Iš ankstesnių įrodymų jau žinome, kad  $t^{1/\theta_1-1}$  yra VM, todėl pagal A.2 teiginį  $f(t)$  bus VM, kai  $\frac{1}{2 - \exp \{-\theta_0 t^{1/\theta_1}\}}$  bus VM. Pažymėkime  $g(t) := 2 - \exp \{-\theta_0 t^{1/\theta_1}\}$ , tuomet pagal A.2 teiginį,  $1/g(t)$  bus VM, kai  $g'(t)$  bus VM.

$g'(t) = \frac{\theta_0}{\theta_1} t^{1/\theta_1-1} \exp \{-\theta_0 t^{1/\theta_1}\}$ , o iš 2.2 teiginio įrodymo jau žinome, kad tokio pavidalo funkcijos yra VM. Taigi, apibendrinus gavome, kad  $f(t)$  yra VM.  $\square$

**2.19 Teiginys.** Tarkime,  $\psi_0(\cdot, \theta_0)$  yra Nr.10 kopulos generatorius, o  $\psi_2(\cdot, \theta_2)$  yra Nr.13 kopulos generatorius, kurie apibrėžti 2.1 pavyzdyje. Kai  $\theta_2 > 1$ , tai funkcija apibrėžta (2.5) lygybe yra VM.

*Įrodymas.* Nagrinėjamu atveju

$$\begin{aligned}
f_2(t) &= \left( \ln \left( 2 \left( \exp \{ 1 - (1+t)^{1/\theta_2} \} \right)^{-\theta_0} - 1 \right) \right)'_t \\
&= \left( \ln \left( 2 \exp \{ -\theta_0 + \theta_0(1+t)^{1/\theta_2} \} - 1 \right) \right)'_t \\
&= \frac{2\theta_0}{\theta_2 \left( 2 \exp \{ -\theta_0 + \theta_0(1+t)^{1/\theta_2} \} - 1 \right)} (1+t)^{1/\theta_2-1} \exp \{ -\theta_0 + \theta_0(1+t)^{1/\theta_2} \} \\
&= 2 \frac{\theta_0}{\theta_2} (1+t)^{1/\theta_2-1} \frac{1}{2 - \exp \{ \theta_0 - \theta_0(1+t)^{1/\theta_2} \}}.
\end{aligned}$$

Iš anksčiau jau žinome, kad  $(1+t)^{1/\theta_2-1}$  bus VM, kai  $\theta_2 \geq 1$ , tad pagal A.2 a) dalį lieka patikrinti ar trukmena  $\frac{1}{2 - \exp \{ \theta_0 - \theta_0(1+t)^{1/\theta_2} \}}$  bus VM. Pagal A.3 teiginio a) dalį imdami  $\mu := 1$ ,  $A := 2$  ir  $f(t) := \exp \{ \theta_0 - \theta_0(1+t)^{1/\theta_2} \}$  gausime, kad trukmena bus VM kai  $\theta_2 \geq 1$ , nes tada  $f(t)$  bus VM. Taigi, kai  $\theta_2 \geq 1$  nagrinėjama funkcija  $f_2(t)$  yra VM.  $\square$

**2.20 Teiginys.** Tarkime,  $\psi_0(\cdot, \theta_0)$  yra Nr.10 kopulos generatorius apibrėžtas 2.1 pavyzdyje, o  $\psi_2(\cdot, \theta_2)$  yra Clayton kopulos generatorius. Kai  $\theta_2 > 0$ , tai funkcija apibrėžta (2.5) lygybe yra VM.

*Įrodymas.* Nagrinėjamu atveju

$$\begin{aligned}
f_2(t) &= \left( \ln(2(1 + \theta_2 t)^{\theta_0/\theta_2} - 1) \right)'_t \\
&= \frac{2\theta_0}{2(1 + \theta_2 t)^{\theta_0/\theta_2} - 1} (1 + \theta_2 t)^{\theta_0/\theta_2-1} \\
&= \frac{(1 + \theta_2 t)^{-1}}{\theta_0^{-1} - (2\theta_0)^{-1}(1 + \theta_2 t)^{-\theta_0/\theta_2}}.
\end{aligned}$$

Iš ankstesnių įrodymų jau žinome, kad  $\frac{1}{1+\theta_2 t}$  yra VM, kai  $\theta_2 > 0$ . Taigi, pagal A.2 a) dalį mums reikia išsiaiškinti, ar trukmena  $\frac{1}{\theta_0^{-1} - (2\theta_0)^{-1}(1+\theta_2 t)^{-\theta_0/\theta_2}}$  yra VM. Pagal A.3 teiginio a) dalį imdami, jog  $\mu := 1$ ,  $A := \theta_0^{-1}$  ir  $f(t) := (2\theta_0)^{-1}(1 + \theta_2 t)^{-\theta_0/\theta_2}$  gausime, jog trukmena yra VM, kai  $f(t)$  bus VM, nes  $A > f(0)$ . Imdami  $\theta_2 > 0$  gauname, jog  $f(t)$  yra VM ir taip pat parodome, kad šiuo atveju ir nagrinėjama funkcija  $f_2(t)$  yra VM.  $\square$

Žemiau esančioje lentelėje pateiktos visos mūsų darbe rastos ir nepaminėtos [2] kopulų kombinacijos, <sup>2</sup> kurios tenkina pakankamą sąlygą hierarchiniai kopulai gauti (žr. 2.5 teiginį).

---

<sup>2</sup>Kopulų numeracija paimta iš 2.1 pavyzdžio.

Kopulų kombinacija	$\theta_0$	$\theta_1$	$(\psi_0^{-1} \circ \psi_1(t))'_t$ yra VM
(1,4)	$[-1, \infty) \setminus \{0\}$	$[1, \infty)$	$\theta_0 \in [-1, 0)$
(1,12)	$[-1, \infty) \setminus \{0\}$	$[1, \infty)$	$\theta_0 \in [-1, 1)$
(1,13)	$[-1, \infty) \setminus \{0\}$	$(0, \infty)$	$\theta_0 \in [-1, 0)$ ir $\theta_1 \geq 1$
(1,14)	$[-1, \infty) \setminus \{0\}$	$[1, \infty)$	$1 > \theta_0 \theta_1$
(1,19)	$[-1, \infty) \setminus \{0\}$	$(0, \infty)$	$\theta_0 \in [-1, 1)$
(1,20)	$[-1, \infty) \setminus \{0\}$	$(0, \infty)$	$\theta_1 \geq \theta_0$
(3,1)	$[-1, 1)$	$[-1, \infty) \setminus \{0\}$	$\theta_0 \in [-1, 0)$ ir $\theta_1 > 0$
(3,4)	$[-1, 1)$	$[1, \infty)$	$\theta_0 \in [-1, 0)$
(3,13)	$[-1, 1)$	$(0, \infty)$	$\theta_0 \in [-1, 0)$ ir $\theta_1 \geq 1$
(10,1)	$(0, 1]$	$[-1, \infty) \setminus \{0\}$	$\theta_1 > 0$
(10,4)	$(0, 1]$	$[1, \infty)$	$\forall \theta_0, \theta_1$
(10,13)	$(0, 1]$	$[1, \infty)$	$\theta_1 > 1$

2 lentelė: Kopulų kombinacijos tenkinančios VM sąlygą

### 3 Praktinis taikymas

Šioje darbo dalyje spęsimė portfelio optimizavimo problema, pasinaudodami pirmoje darbo dalyje gautais rezultatais apie hierarchines kopulas. Parodėme, kad konstruojant hierarchinę struktūrą ir imant išorinę Ali–Mikhail–Haq kopulą, jos parametras neigiamas, tai reiškia, kad priklausomybė tarp vidinių hierarchijos (2.4) kopulų turi būti neigiama. Finansų rinkose tokia tendencija pastebima tarp obligacijų ir žaliavų kainų. Viena iš priežasčių, kodėl taip yra – infliacija. Žaliavų kainų kilimas reiškia visų produktų kaštų augimą, atitinkamai tai didina infliacijos lūkesčius, kas savo ruožtu didina rinkos palūkanų normas. Kadangi obligacijų kainos juda priešingai nei jų palūkanų normos, tai didėjanti infliacija bei didėjančios palūkanų normos smukdo obligacijų kainas. Kad būtų išlaikyta neigiamos priklausomybės sąlyga, portfelį sudarysime iš dviejų JAV obligacijų indeksų (IBOXIG, ITRROV) ir dviejų žaliavų indeksų (SPGSCITR, CRYTR). Indeksų vertės paimtos iš terminalo Bloomberg laikotarpiui nuo 2007 m. sausio mėn iki 2015 m. lapkričio mėn.

#### 3.1 Portfelio optimizavimo problema

Ieškodami optimalios kombinacijos investuoti į pasirinktus indeksus, sieksime maksimizuoti portfelio grąžą ir minimizuoti riziką. Šiam tikslui pasiekti pasinaudosime Sharpe ro-

dikliu, kuris apibrėžia santykį tarp siekiamos gražos ir rizikos.

$$SR(R) = \frac{\mathbb{E}(R) - r}{\sigma_R}, \quad (3.11)$$

čia  $R$  – laukiama portfelio graža,  $r$  – nerizikinga palūkanų norma ir  $\sigma_R$  – portfelio standartinis nuokrypis.

Šiame darbe laikysime, kad investuotojas pasieks didžiausią naudą, kai maksimizuos Sharpe rodiklį. Taigi, ieškosime su kokiais indeksų svoriais gausime didžiausią rodiklio reikšmę.

$$\max_{\omega} SR(\omega \mathbf{R}), \quad (3.12)$$

čia vektorius  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$  atitinka indeksų svorius portfelyje, kurie tenkina sąlygas:  $\sum_{i=1}^4 \omega_i = 1$  ir  $\omega_i \in [0, 1]$ . Vektorius  $\mathbf{R} = (R_1, R_2, R_3, R_4)^T$  atitinka portfelį sudarančių indeksų tikėtinas gražas. Vektorius  $\mathbf{R}$  priklauso nuo ateities rezultatų, kurių mes neturime, todėl reikia apsibrėžti algoritmą, kaip iš turimų istorinių duomenų prognozuosime ateitį ir kartu konstruosime optimalų portfelį.

## 3.2 Būsimų gražų modeliavimas

Kaip jau užsiminėme ankstesniame skyrelyje, mums reikalingas metodas, kaip prognozuoti būsimą indeksų elgesį. Pirmiausia, turimas istorines indeksų vertes transformuojame į logaritmines gražas. Taip elgiamės, nes logaritminės gražos nepriklauso nuo indeksų matavimo vienetų, yra mažiau koreliuotos nei patys indeksai, todėl su jomis bus lengviau dirbti.

**3.1 Apibrėžimas.** *Logaritmine graža*, arba tiesiog *grąža*, vadinsime kainos transformaciją

$$r(t) := \ln S_t - \ln S_{t-1},$$

čia  $t = 1, \dots, n$ , o  $S_t$  kaina laiko momentu  $t$ .

Taip pat, naudosime prielaidą, kad bet kuriems  $t_1, \dots, t_k$  ir  $s$  vektorių  $\{r(t_1), \dots, r(t_k)\}$  ir  $\{r(t_1 + s), \dots, r(t_k + s)\}$  tikimybiniai skirstiniai yra lygūs.

Toliau, patikrinsime, ar gautos gražos yra pasiskirsčiusios pagal normalųjį dėsnį. Indeksų gražoms pritaikysime Kolmogorov—Smirnov ir Jarque—Bera testus su nuline hipoteze, jog indeksų gražų pasiskirstymas yra normalusis. Pagal toliau esančioje lentelėje, gautoje naudojant R programą, pateiktus testų rezultatus matome, kad nulinė hipotezė atmetama su reikšmingumo lygmeniu 0,05. Tai reiškia, jog nagrinėjamų indeksų gražos nėra pasiskirsčiusios pagal normalųjį dėsnį. Be to, mūsų nagrinėjamos indeksų gražos pasižymi ir kitomis

	CRYTR	SP	IBOXIG	ITRROV
Kolmogorov–Smirnov	<2,2e-16	<2,2e-16	<2,2e-16	<2,2e-16
Jarque–Bera	<2,2e-16	<2,2e-16	<2,2e-16	<2,2e-16

3 lentelė: Normalumo testų p-reikšmės

finansiniams duomenims būdingomis savybėmis: sunkiomis uodegomis, klasterizacija. Dėl šios priežasties indeksų grąžas modeliuosime naudodami ARMA–GARCH modelį.

**3.2 Apibrėžimas.** Tarkime,  $X_{i,t}$  yra  $i$ -ojo indekso grąža laiko momentu  $t$ , tuomet ARMA( $p, q$ )–GARCH( $m, s$ ) modelį apibrėžiame lygybėmis

$$\begin{aligned}
X_{i,t} &= a_i + \sum_{j=1}^p \gamma_{i,j} X_{i,t-j} + \sum_{k=1}^q \delta_{i,k} \sigma_{i,t-k} \epsilon_{i,t-k} + \sigma_{i,t} \epsilon_{i,t}, \\
\sigma_{i,t}^2 &= \alpha_{i,0} + \sum_{j=1}^m \alpha_{i,j} \sigma_{i,t-j}^2 \epsilon_{i,t-j}^2 + \sum_{k=1}^s \beta_{i,k} \sigma_{i,t-k}^2,
\end{aligned} \tag{3.13}$$

čia  $i \in \{\text{SPGSCITR}, \text{CRYTR}, \text{IBOXIG}, \text{ITRROV}\}$ ,  $\alpha_{i,0} > 0$ ,  $\alpha_{i,j} \geq 0$ ,

$\sum_{j=1}^{\max(m+s)} (\alpha_{i,j} + \beta_{i,j}) < 1$ , ir  $\epsilon_{i,t}$  yra nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių dydžių seka su vidurkiu 0 ir dispersija 1.

Kintamasis  $\epsilon_t$  dar vadinamas modelio standartizuotomis liekanomis. Siekdami išsaugoti pradinę priklausomybės struktūrą tarp indeksų grąžų, (3.13) modelyje gautas indeksų liekanas apjungsime naudodami hierarchinę kopulą. Kad galėtume įvertinti, ar mūsų modelis yra tinkamas, jo parametrų radimui naudosime istorinius duomenis be paskutinių penkių reikšmių, kurias mėginsime prognozuoti. Gautas prognozes palyginsime su istoriniais duomenimis ir įvertinsime, ar modelis veikia tinkamai. Modeliavimas susidės iš kelių dalių. Visų pirma, turėsime rasti (3.13) modelio parametrų įverčius kiekvienai indekso grąžai naudojantis istoriniais duomenimis. Kai tai bus padaryta, turėsime istorines liekanų sekas ir joms sukonstruosime hierarchinę kopulą. Yra galimi trys būdai sumodeliuoti kopulą: tikslus didžiausio tikėtimumo metodas (angl. exact maximum likelihood method (EMLM)), dvižingsnis didžiausio tikėtimumo metodas (angl. inference function for margins (IFM)), ir kanoninis didžiausio tikėtimumo metodas (angl. canonical maximum likelihood (CML)). Naudojantis EMLM metodu, vienu metu reikėtų ieškoti visų nežinomų parametrų, t.y. parametrų, kurie apibrėžia liekanų pasiskirstymą ir parametrų, kurie aprašo kopulą. Šis metodas užima pakankama daug laiko, kai dirbama su dideliu kiekiu duomenų. CML metode neieškoma marginalinių pasiskirstymų, vietoj to, naudojama empirinė pasiskirstymo funkcija gaunama iš istorinių duomenų. IFM metodas susideda iš dviejų žingsnių. Pirmame žingsnyje didžiausio tikėtimumo metodu radami marginalių skirstinių parametrai, o paskui jie naudo-

jami kopulos parametrus rasti. Šiame darbe naudosime IFM metodą, nes manome, kad tai kompromisas tarp tikslumo ir skaičiavimų trukmės. Daugiau apie modeliavimo metodus galima rasti [1].

### 3.2.1 Gražų modelių parametrų radimas

Ieškodami parametrų (3.13) modeliui, naudojome statistinę programą R. Visų pirma turime išsiaiškinti, kokios eilės modelis mums labiau tinka. Pirmiausia radome ARMA dalies eilių parametrus su R funkcija *auto.arima()*. Gauti rezultatai žemiau esančioje lentelėje.

	CRYTR	SPGSCITR	IBOXIG	ITRROV
p	0	0	1	0
q	0	0	0	0

4 lentelė: ARMA eilės parametrai

Pereikime prie GARCH dalies, kadangi aukštesni negu trečios eilės GARCH modeliai praktikoje naudojami retai, todėl patikrinome visas galimas poras, kai  $m, s \in \{1, 2, 3\}$ . Tinkamiausią porą pasirinkome pagal mažiausią kriterijaus AIC reikšmę. Pagal šį kriterijų visas nagrinėjamas indeksų gražas geriausiai atspindi GARCH(1,1). Kadangi jau žinome (3.13) modelio eilę, tai galime rasti ir trūkstamus parametrus, tai padarysime naudodamiesi R funkcija *garchFit()*. Gauti rezultatai užfiksuoti žemiau esančioje lentelėje.

	CRYTR		SPGSCITR		IBOXIG		ITRROV	
	Įvertis	p-reikšmė	Įvertis	p-reikšmė	Įvertis	p-reikšmė	Įvertis	p-reikšmė
$\hat{a}$	-1,08923e-04	0,568	-6,47e-05	0,787	2,554e-04	5,16e-06	1,313e-04	0,0157
$\hat{\gamma}$	-	-	-	-	0,1958	< 2e-16	-	-
$\hat{\alpha}_0$	4,27307e-07	0,017	6,28e-07	0,014	2,768e-07	0,000151	4,86e-08	0,0158
$\hat{\alpha}_1$	0,04934107	5,63e-12	0,04842	3,72e-12	0,1383	8,63e-12	0,04628	1,191e-11
$\hat{\beta}_1$	0,948841	< 2e-16	0,9501	< 2e-16	0,8477	< 2e-16	0,9491	< 2e-16

5 lentelė: ARMA–GARCH modelio parametrai

Kadangi jau turime modelio parametrus, dabar turime ieškoti hierarchinės kopulos parametrų, kuria apjungsime modelio liekanas.

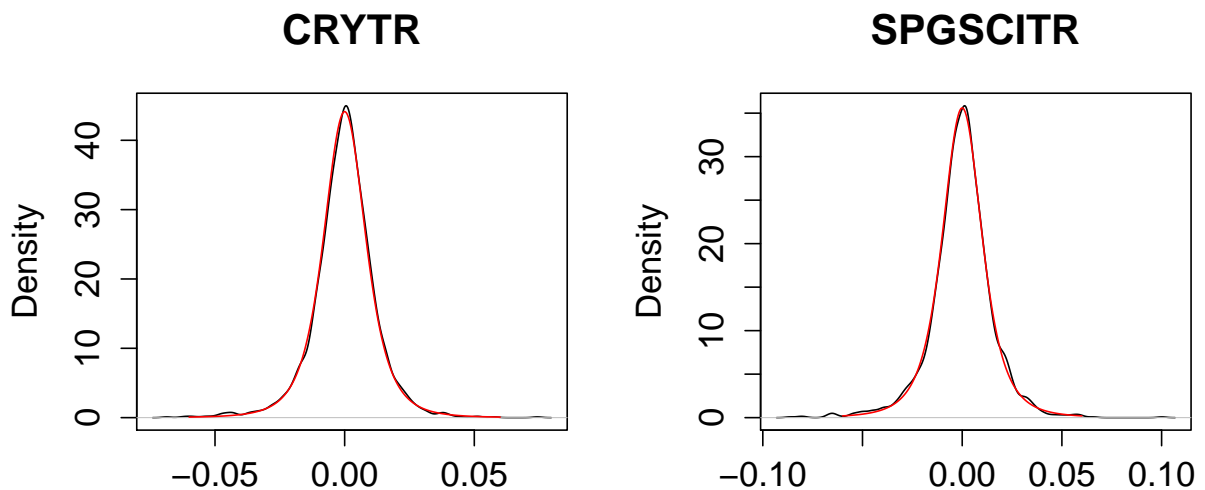
### 3.2.2 Kopulos parametrų radimas

Kaip jau buvome užsiminę anksčiau, kopulos modeliavimui naudosime IFM metodą. Pirmiausia nustatysime gautų liekanų marginaliuosius pasiskirstymus. Jau anksčiau parodėme, kad nagrinėjamos gražos nėra pasiskirsčiusios pagal normalųjį dėsnį, todėl naudosime Student pasiskirstymus, o skirstinių parametrus rasime naudojantis R funkcija *fitdistr()*.

	CRYTR	SPGSCITR	IBOXIG	ITRROV
$\hat{\mu}$	2,421886e-04	1,237932e-04	-3,311613e-06	4,53383e-05
$\hat{\sigma}$	8,4563311e-03	1,04079624e-02	2,64875e-03	2,835744e-03
$\hat{df}$	3,6971589952	3,331409966	4,512311	11,71393

6 lentelė: Modelio liekanų pasiskirstymų parametrai

Iš tankių grafikų galime matyti, kad gauti parametrai pakankamai tiksliai aproksimuoja tiriamų liekanų empirinius tankius.



2 pav.: Modelio liekanų tankiai

Toliau rasime optimalius hierarchinės kopulos, apibrėžtos formule (2.4), parametrus. Žalų indeksus modeliuosime su Gumbel kopula, obligacijų indeksus su kopula Nr.13, o išorinei kopulai modeliuoti naudosime Ali–Mikhail–Haq kopulą. Vidinių kopulų parametrus rasime nepriklausomai viena nuo kitos, po to ieškosime išorinės kopulos. Parametrų įverčiai randami pagal formules

$$\hat{\theta}_1 = \arg \max_{\theta_1} \left\{ \sum_{t=1}^n \log c_1(F_{CRYTR}(x_{CRYTR,t}), F_{SPGSCITR}(x_{SPGSCITR,t}); \theta_1) \right\}$$

$$\hat{\theta}_2 = \arg \max_{\theta_2} \left\{ \sum_{t=1}^n \log c_2(F_{IBOXIG}(x_{IBOXIG,t}), F_{ITRROV}(x_{ITRROV,t}); \theta_2) \right\}$$

$$\hat{\theta}_0 = \arg \max_{\theta_0} \left\{ \sum_{t=1}^n \log c_0(C_1(x_{1,t}), C_2(x_{2,t}); \theta_0) \right\}$$

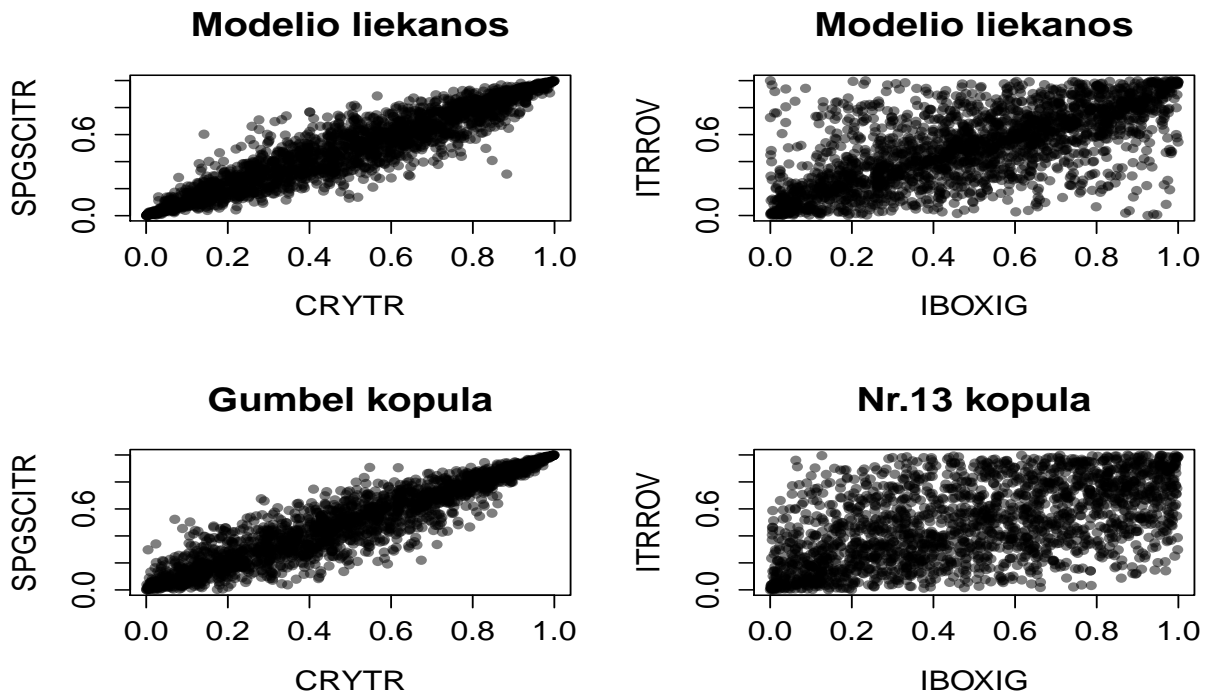
čia  $c$  kopulos tankis apibrėžiamas formulę  $c(F_1(x_1), F_2(x_2)) = \frac{\partial^2 C(F_1(x_1), F_2(x_2))}{\partial F_1(x_1) \partial F_2(x_2)}$ .

Žemiau esančioje lentelėje pateikti nagrinėjamų hierarchinės struktūros kopulų parametrų įverčiai. Kaip matome, gauti parametrai tenkina pirmoje darbo dalyje įrodytas hierarchinės struktūros egzistavimo sąlygas.

	Gumbel	Nr.13	Ali–Mikhail–Haq
$\hat{\theta}$	4,826363	4,519437	-0,2814679

7 lentelė: Kopulų parametrai

Iš žemiau esančių grafikų, galime pastebėti, kad gautos kopulos, pakankamai tiksliai atvaizduoja indeksų grąžas.



3 pav.: Liekanų ir kopulų palyginimas

### 3.2.3 Vieno momento prognozė

Prognozės radimo procedūra yra priešinga, lyginant su parametrų radimo procedūra. Visų pirma sugeneruosime keturis atsitiktinius dydžius  $v_1, v_2, v_3, v_4 \sim U[0, 1]$ . Šiuos atsitiktinius dydžius transformuosime į indeksų grąžas pasinaudodami rasta kopulos struktūra ir



liekanų pasiskirstymais. Galiausiai gausime indeksų gražas pasinaudodami ARMA–GARCH modeliu su rastais parametrais.

Taigi, pradėkime nuo pradžių. Pasirenkame metodą, kaip rasti realizaciją vektoriaus  $(U_1, U_2, U_3, U_4)$ , kurio pasiskirstymo funkcija yra nagrinėjama kopula. Naudosimės sąlyginės atvirkštinės metodu (angl. conditional inversion method) [11].

*Sąlyginės atvirkštinės metodas* Tarkime,  $C_k(u_1, \dots, u_k) = C(u_1, \dots, u_k, 1, \dots, 1)$ , čia  $k = \{1, 2, \dots, d\}$ . Sąlyginė  $U_k$  pasiskirstymo funkcija, kai žinome  $U_1, \dots, U_{k-1} = 1$  vertes, apibrėžiama funkcija

$$\begin{aligned} C_k(u_k | u_1, \dots, u_{k-1}) &= \mathbb{P}(U_k \leq u_k | U_1 = u_1, \dots, U_{k-1} = u_{k-1}) \\ &= \frac{\partial^{k-1} C_k(u_1, \dots, u_k)}{\partial u_1 \cdots \partial u_{k-1}} \bigg/ \frac{\partial^{k-1} C_{k-1}(u_1, \dots, u_{k-1})}{\partial u_1 \cdots \partial u_{k-1}} \end{aligned}$$

Generavimas susideda iš kelių žingsnių:

1. Sugeneruojami keturi a.d.  $v_1, v_2, v_3, v_4 \sim U[0, 1]$  (mūsų atveju 10000 realizacijų);
2. Pažymime  $u_1 = v_1$ ;
3. Likusias vektoriaus realizacijas randame iš lygybės  $u_k = C_k^{-1}(u_k | u_1, \dots, u_{k-1})$ ,

čia  $k = \{2, \dots, d\}$ .

Šiuo algoritmu gauta vektoriaus  $(U_1, U_2, U_3, U_4)$  realizacija  $u_1, u_2, u_3, u_4$  atspindi nagrinėjamų gražų modelių liekanų pasiskirstymus, kuriuos jungia hierarchinė kopula. Turėdami juos, nesunkiai randame ir pačias liekanų reikšmes, bei prognozuojamas vienos dienos gražas, kurios yra 10000 realizacijų vidurkis.

	CRYTR	SPGSCITR	IBOXIG	ITRROV
$\hat{X}_1$	-1,08923e-04	-6,470268e-05	2,378971e-04	1,313225e-04

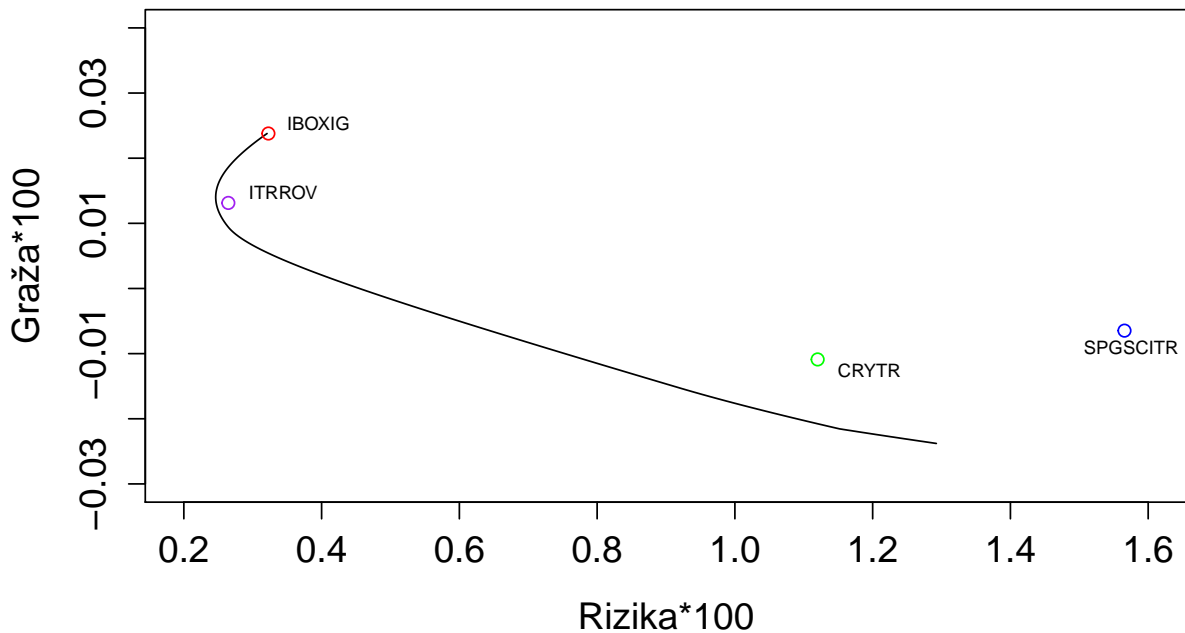
8 lentelė: Prognozuojama vienos dienos graža

Kadangi jau turime prognozuojamų gražas galime rasti ir optimalius kiekius investuoti į pasirinktus indeksus. Kaip jau minėjome, optimalumo siekiame maksimizuodami Sharpe rodiklį. Gauti rezultatai rodo, kad dominuoja IBOXIG indeksas, o CRYTR indeksą reikėtų parduoti.

	CRYTR	SPGSCITR	IBOXIG	ITRROV
$\omega$	-0,03825937	0,01924843	0,92128761	0,09772333

9 lentelė: Optimalūs vienos dienos indeksų svoriai

Išvadas, kuris indeksas dominuoja galime susidaryti ir pagal efektyvumo kreivės (angl. efficient frontier) grafiką.



4 pav.: Efektyvumo kreivė

Kadangi jau apibrėžėme prognozės radimo algoritmą, lieka patikrinti, ar mūsų naudojamas modelis veikia tinkamai. Žemiau esančioje lentelėje pateikiame paskutinių penkių dienų gražas iš nagrinėjamų istorinių duomenų. Šių gražų prognozes norėjome rasti.

Diena	CRYTR	SPGSCITR	IBOXIG	ITRROV
1	-7,281838e-03	-8,049647e-03	-6,0526955e-03	-4,9921524e-03
2	-9,546362e-03	-1,0710878e-02	1,774034e-04	-3,707824e-04
3	1,000869e-03	-1,666364e-03	1,8279674e-03	1,5285919e-03
4	-1,5867873e-02	2,9090821e-02	-2,0118371e-03	-3,240516e-04
5	-8,919515e-03	-1,2300084e-02	2,5674774e-03	1,8503105e-03

10 lentelė: Indeksų istorinės gražos

Kaip bebūtų gaila, bet mūsų modelis prognozuoja gražas, kurios skiriasi nuo istorinių daugiau nei 10 kartų. Nors atrodė, kad modelis parinktas tinkamai ir kopulos pakankamai tiksliai atvaizdavo liekanas, tačiau galutiniai rezultatai nepatenkino lūkesčių. Galimos kelios priežastys, kodėl taip įvyko. Turbūt svarbiausia priežastis realybės dinamiškumas. Indeksus

Diena	CRYTR	SPGSCITR	IBOXIG	ITRROV
	Progozė	Progozė	Progozė	Progozė
1	-1,08923e-04	-6,470268e-05	2,378971e-04	1,313225e-04
2	-1,098749e-04	-7,233681e-05	2,96978e-04	1,304745e-04
3	-1,076362e-04	-7,278622e-05	3,181457e-04	1,321014e-04
4	-1,088337e-04	-5.899238e-05	3,077684e-04	1,296195e-04
5	-1,044012e-04	-6,835001e-05	3,000268e-04	1,307795e-04

11 lentelė: Indeksų prognozės

veikia daug išorės faktorių, į kuriuos mes neatsižvelgėme t.y kitų finansų rinkų įtaką, valiutų kitimo įtaka, indeksus sudarančių finansinių priemonių vidinis verčių kitimą, politinė situacija ir pan. Kita svarbi priežastis, liekanų analizė. Galbūt reikėjo pasirinkti kitą algoritmą nagrinėti liekanas arba kitą hierarchinę kopulą. Tiesa, patikrinome ir kitas galimas kopulų kombinacijas su Ali–Mikhail–Haq kopula ir rezultatus gavome panašius, tad reikėtų pamėginti skaičiavimus atlikti imant išorinę kopulą Clayton. Tik šiuo atveju, reikės pasirinkti visai kitą algoritmą kopulos generavimui, nes Calyton kopulos funkcija nėra diferencijuojama vi-soje apibrėžimo srityje, ir todėl *sąlyginės atvirkštinės metodas* netinka. Kopulai generuoti būtų galima naudoti McNeil [8] pasiūlytą metodą, naudojant Laplace–Stieltjes transformaciją. Tačiau, įrodėme, kad Clayton kopulos parametras turi būti neigiamas ir šiuo atveju nėra žinoma tiksli LST išraiška. Šios išraiškos paieškos galėtų būti šio darbo tęsinys ir tolimesnis kopulų tyrimo etapas.

### 3.3 Išvados

Šiame magistro darbe buvo nagrinėjamos hierarchinės Archimedo kopulos. Teorinėje dalyje bendrais bruožais pristatytos pagrindinės Archimedo kopulų savybės ir hierarchinė struktūra. Taip pat, buvo ieškoma Archimedo kopulos šeimų, kurios tenkino hierarchinės struktūros egzistavimo pakankamą sąlygą, kurią įrodė McNeil [8]. Darbe rasta dvylika Archimedo kopulos šeimų porų su kuriomis galima konstruoti hierarchines struktūras. Rastas poras maišant tarpusavyje, galima sukonstruoti daugiau nei penkiasdešimt skirtingų keturmačių hierarchinių kopulų. Didinant kintamųjų skaičių, kombinacijų galima rasti dar daugiau.

Praktinėje darbo dalyje buvo konstruojamas finansinis portfelis, kurį sudarė du JAV obligacijų indeksai (IBOXIG, ITRROV) ir du žaliavų indeksai (SPGSCITR, CRYTR). Šiam

portfeliui buvo konstruojamas ARMA-GARCH modelis, pagal kurį prognozuojamos būsimos portfelio grąžos. Modelio liekanų analizei naudojama hierarchinė kopula, kurią sudarė Gumbel kopula, kopula Nr.13 ir Ali–Mikhail–Haq kopula. Taip pat, buvo ieškoma optimalių indeksų svorių portfelyje maksimizuojant Sharpe rodiklį.

Gautas prognozes palyginę su istoriniais duomenimis, pastebėjome, kad jos tinkamai neatspindi indeksų grąžų. To priežastys gali būti kelios:

1. Sukonstruotas modelis tinkamai neatspindi realybės ir jos kintamumo;
2. Pasirinkta netinkama kopula ir algoritmas liekanų analizei;
3. Hierarchinės kopulos tiesiog netinka nagrinėjamiems duomenims.

Priežastys, dėl kurių negavome norimų rezultatų leidžia toliau nagrinėti šią temą ir rasti sprendimus į iškilusias problemas. Visų pirma, reikėtų praplėsti ARMA – GARCH modelį įvedant papildomus parametrus, kurie atspindėtų daugiau išorės veiksnių. Taip pat, būtų galima nagrinėti kitas hierarchines struktūras. Pasirinkus išorinę kopulą Ali–Mikhail–Haq ir Clayton su neigiamu parametru būtų galima ieškoti LST transformacijos, o radus ją pritaikyti McNeil algoritmą hierarchinės struktūros generavimui. Galbūt tokiu būdu būtų galima rasti tikslesnes prognozes.

Statistikas George E. P. Box pasakė, kad „visi modeliai yra blogi, nors kai kurie naudingi“ (angl. All models are wrong, though some are useful). Tad, nors su pristatytu modeliu ir nebuvo gauta norimų rezultatų, bet pristatyti algoritmai gali praversti konstruojant kitus modelius.

## Literatūra

- [1] Cherubini, W., Luciano, W. and Vecchiato, W., (2004) „Copula methods in finance “ John Wiley and Sons, Inc.
- [2] Hofert J. M. (2008) „Sampling Archimedean Copulas.“ Computational Statistics and Data Analysis 52 (2008) 5163–5174
- [3] Hofert J. M. (2011) „Efficiently Sampling Nested Archimedean Copulas.“  
[http://www.uni-ulm.de/fileadmin/website\\_uni\\_ulm/mawi.inst.zawa/forschung/preprintmariushofert.pdf](http://www.uni-ulm.de/fileadmin/website_uni_ulm/mawi.inst.zawa/forschung/preprintmariushofert.pdf)
- [4] Hofert J. M. (2010) „Sampling Nested Archimedean Copulas with Applications to CDO Pricing“ Dr. Dissertation, Ulm University
- [5] Kimberling C. H. (1974) „A probabilistic interpretation of complete monotonicity“, Aequationes Mathematicae, 10, 152–164.
- [6] A. Kresta „Application of GARCH–Copula Model in Portfolio Optimization “  
<https://is.muni.cz/do/econ/soubory/aktivita/fai/57320392/FAI2015/02-01.pdf>
- [7] R. Leipus Paskaitų konspektas „Ekonometrija II“  
<http://uosis.mif.vu.lt/~remis>
- [8] McNeil A. J. (2008) „Sampling nested Archimedean copulas“, Journal of Statistical Computation and Simulation, 6th ser., 78, 567–581.
- [9] S. K. Miller, S. G. Samko „Completely monotonic functions“  
<http://w3.ualg.pt/~ssamko/dpapers/filesCompletelymonotonic.pdf>
- [10] Nelsen R. B. (2006) „An Introduction to Copulas“, 2nd ed. Springer Series in Statistics. Springer, New York.
- [11] C. Savu, M. Trede (2010) „Hierarchies of Archimedean copulas“, Quantitative Finance, 10:3, 295-304 <http://dx.doi.org/10.1080/14697680902821733>

# Priedai

## A Visiškai monotoniškos funkcijos

**A.1 Teiginys.** [9] Kai  $a, \lambda, \mu, \nu \geq 0$ ,  $b \geq 1$ ,  $c > 0$  ir  $\lambda$  su  $\mu$  nėra vienu metu nuliai, tai elementariosios funkcijos

$$e^{-ax}, \quad \frac{1}{(\lambda + \mu x)^\nu} \quad \text{ir} \quad \ln\left(b + \frac{c}{x}\right)$$

yra visiškai monotoniškos.

**A.2 Teiginys.** (Visiškai monotoniškųjų funkcijų savybės)(2.1.5 teiginys iš [4])

- Jei  $f$  ir  $g$  visiškai monotoniškos funkcijos, tai  $fg$  ir  $af + bg$ , kai  $a, b \geq 0$  yra visiškai monotoniškos.
- Jei  $f$  visiškai monotoniška, o  $g$  neneigiama ir  $g'$  visiškai monotoniška, tai  $f \circ g$  yra visiškai monotoniška.
- Jei  $f$  neneigiama ir  $f'$  visiškai monotoniška, tai  $1/f$  yra visiškai monotoniška.
- Jei  $f$  absoliučiai monotoniška, o  $g$  visiškai monotoniška, tai  $f \circ g$  yra visiškai monotoniška.

**A.3 Teiginys.** (2 išvada iš [9]) Jei  $f(x)$  aprėžta iš viršaus, visiškai monotoniška funkcija, tai žemiau išvardintos funkcijos yra visiškai monotoniškos, kai  $A \geq f(0)$ ,

a)

$$\frac{1}{[A - f(x)]^\mu}, \quad \mu \geq 0;$$

b)

$$-\ln\left[1 - \frac{f(x)}{A}\right]; *$$

c)

$$\frac{f'(x)}{A - f(x)} **$$

visiškai monotoniška, nes \*\* yra tiesiog \* išvestinė su minuso ženklu.

## B R programos kodas

```
1 # reikalingi paketai
2 library(tseries)
3 library(calibrate)
4 library(forecast)
5 library(fGarch)
6 library(MASS)
7 library(FinTS)
8 #nuskaitome duomenis
9 mydata= read.csv("C:/Users/Modesta/Desktop/mydata2.csv", header=TRUE)
10 data=mydata[,1]
11 CRYTR=mydata[,2]
12 SPGSCITR=mydata[,3]
13 IBOXIG=mydata[,4]
14 ITRROV=mydata[,5]
15 #Logoritmuojame grazas
16 A=diff(log(CRYTR))
17 B=diff(log(SPGSCITR))
18 C=diff(log(IBOXIG))
19 D=diff(log(ITRROV))
20 #Tikriname duomenu normaluma
21 ks.test(A, "pnorm")
22 ks.test(B, "pnorm")
23 ks.test(C, "pnorm")
24 ks.test(D, "pnorm")
25 jarque.bera.test(A)
26 jarque.bera.test(B)
27 jarque.bera.test(C)
28 jarque.bera.test(D)
29 # ARMA dalies eiles nustatymas
30 tsdisplay(A[1:2181])
31 auto.arima(A[1:2181], ic = "bic", d = 0)
32 # rezultatas ARMA(0,0)
33 tsdisplay(B[1:2181])
34 auto.arima(B[1:2181], ic = "bic", d = 0) # rezultatas ARMA(0,0)
35 tsdisplay(C[1:2181])
36 auto.arima(C[1:2181], ic = "bic", d = 0) # rezultatas ARMA(1,0)
37 tsdisplay(D[1:2181])
38 auto.arima(D[1:2181], ic = "bic", d = 0) # rezultatas ARMA(0,0)
39 # Parenkame GARCH dalies eiles
```

```

40 GARCH1=function(X) {
41   a=0
42   p=0
43   q=0
44   for (i in 1:3) {
45     for (j in 1:3) {
46       A=garch(X, order = c(i, j))
47       B=AIC(A)
48       if (a<=B) {
49         a=a
50       } else {
51         a=B
52         p=i
53         q=j
54       }
55       j=j+1
56     }
57     i=i+1
58   }
59   return(cbind(p,q,a))
60 }
61 A_garch=GARCH1(A[1:2181])
62 A_garch # rezultatas GARCH(1,1)
63 B_garch=GARCH1(B[1:2181])
64 B_garch # rezultatas GARCH(1,1)
65 C_garch=GARCH1(C[1:2181])
66 C_garch # rezultatas GARCH(1,1)
67 D_garch=GARCH1(D[1:2181])
68 D_garch # rezultatas GARCH(1,1)
69 # Sujungiame ARMA ir GARCH dalis
70 # indeksas CRYTR
71 Agac11 = garchFit(formula=~arma(0,0)+garch(1,1), data =A[1:2181])
72 summary(Agac11)
73 A_coef=coef(Agac11)
74 A_liekanos=residuals(Agac11)
75 sigmaA=Agac11@sigma.t
76 #indeksas SPGSCITR
77 Bgac11 = garchFit(formula=~arma(0,0)+garch(1,1), data =B[1:2181])
78 summary(Bgac11)
79 B_coef=coef(Bgac11)

```



```

80 B_liekanos=residuals(Bgac11)
81 sigmaB=Bgac11@sigma.t
82 # indeksas IBOXIG
83 Cgac11 = garchFit(formula=~arma(1,0)+garch(1,1),data =C[1:2181])
84 summary(Cgac11)
85 C_coef=coef(Cgac11)
86 C_liekanos=residuals(Cgac11)
87 sigmaC=Cgac11@sigma.t
88 # indeksas ITRROV
89 Dgac11 = garchFit(formula=~arma(0,0)+garch(1,1),data =D[1:2181])
90 summary(Dgac11)
91 D_coef=coef(Dgac11)
92 D_liekanos=residuals(Dgac11)
93 sigmaD=Dgac11@sigma.t
94 # Ieskome Student skirstinio parametru liekanu pasiskirstymui
95 par(mfrow = c(1,4))
96 plot(density(A_liekanos),main="CRYTR",xlab="")
97 fitA<-fitdistr(A_liekanos,"t")$estimate
98 x=seq(-0.05,0.05 , 0.0001)/fitA [2]
99 Y=dt(x, fitA [3], fitA [1])/fitA [2]
100 lines(seq(-0.05,0.05 , 0.0001),Y, col="red")
101 Z1 = pt(A_liekanos/fitA [2], fitA [3], fitA [1])
102 plot(density(B_liekanos),main="SPGSCITR",xlab="")
103 fitB<-fitdistr(B_liekanos,"t")$estimate
104 x=seq(-0.05,0.05 , 0.0001)/fitB [2]
105 Y=dt(x, fitB [3], fitB [1])/fitB [2]
106 lines(seq(-0.05,0.05 , 0.0001),Y, col="red",xlab="")
107 Z2 = pt(B_liekanos/fitB [2], fitB [3], fitB [1])
108 plot(density(C_liekanos), main="IBOXIG",xlab="")
109 fitC<-fitdistr(C_liekanos,"t")$estimate
110 x=seq(-0.05,0.05 , 0.0001)/fitC [2]
111 Y=dt(x, fitC [3], fitC [1])/fitC [2]
112 lines(seq(-0.05,0.05 , 0.0001),Y, col="red")
113 Z3 = pt(C_liekanos/fitC [2], fitC [3], fitC [1])
114 plot(density(D_liekanos), main="ITRROV",xlab="")
115 fitD<-fitdistr(D_liekanos,"t")$estimate
116 x=seq(-0.05,0.05 , 0.0001)/fitD [2]
117 Y=dt(x, fitD [3], fitD [1])/fitD [2]
118 lines(seq(-0.05,0.05 , 0.0001),Y, col="red")
119 Z4 = pt(D_liekanos/fitD [2], fitD [3], fitD [1])

```

```

120 # Funkcija, kuri randa dvimates kopulos parametrus
121 fitCopula = function(x, y, copula, initial, lower = -Inf, upper = Inf, method
    = "BFGS") {
122   u = pmin(x, 0.9999)
123   v = pmin(y, 0.9999)
124   h = 0.0001
125   minuslogL <- function(pars) {
126     C = copula(pars)
127     mixed_deriv = (C(u + h, v + h) - C(u + h, v) - C(u, v + h) + C(u, v))/h^2
128     -sum(log(mixed_deriv))
129   }
130   optim(par = initial, minuslogL, lower = lower, upper = upper, method =
    method)
131 }
132 # atvirkstine funkcija
133 .inverse <- function(f, lower = 0, upper = 1) {
134   function(y, ...) uniroot((function(x) f(x, ...) - y), lower = lower, upper =
    upper)$root
135 }
136 # dvimates kopulos generavimas pagal salyginės atvirkstines metoda
137 rCopula <- function(n, C) {
138   # n.v.p toludus a.d.
139   u <- runif(n)
140   t <- runif(n)
141   h <- pmin(0.0001, 1 - u)
142   v <- sapply(1:n, function(i) {
143     l <- function(v) (C(u[i] + h[i], v) - C(u[i], v))/h[i]
144     .inverse(l)(t[i])
145   })
146   # output
147   matrix(c(u,v), nrow = n)
148 }
149 # Kopulu funkcijos
150 Gumbel=function(pars) function(u,v) (exp(-((-log(u))^pars[1]+(-log(v))^pars
    [1]))^(1/pars[1]))
151 nr13.copula=function(pars) function(x,y){exp(1-(((1-log(x))^pars[1]+(1-log(y))^
    pars[1]-1)^(1/pars[1]))}
152 AMH=function(pars) function(x,y){x*y/(1-pars[1]*(1-x)*(1-y))}
153 # Liekanoms konstruojame hierarchine kopula
154 #grafikai

```

```

155 par(mfrow = c(2,2))
156 plot(Z1,Z2,xlab = "CRYTR",ylab = "SPGSCITR",main="Modelio liekanos",pch=16,col
      =alpha("black",0.5))
157 plot(Z3,Z4,xlab = "IBOXIG",ylab = "ITRROV",main="Modelio liekanos",pch=16,col=
      alpha("black",0.5))
158 plot(r1[,1],r1[,2],main = "Gumbel kopula",xlab="CRYTR",ylab = "SPGSCITR",pch
      =16,col=alpha("black",0.5))
159 plot(r2[,1],r2[,2],main="Nr.13 kopula",xlab = "IBOXIG",ylab = "ITRROV",pch=16,
      col=alpha("black",0.5))
160 # zaliavu indeksu liekanoms randame Gumbel kopulos parametra
161 fitGumbelo <- fitCopula(Z1, Z2, Gumbelo, initial=2)
162 fitGumbelo$par
163 Gumbel=Gumbelo(fitGumbelo$par)(Z1,Z2)
164 # Obligfaciju indeksu liekanoms randame Nr13 kopulos parametra
165 fitNR13 <- fitCopula(Z3, Z4, nr13.copula, initial=1)
166 fitNR13$par
167 r2 = rCopula(2000, nr13.copula(fitNR13$par))
168 plot(r2[,1],r2[,2])
169 plot(Z3,Z4)
170 nr13=nr13.copula(fitNR13$par)(Z3,Z4)
171 #Randame isorines kopulos parametra
172 fitAMH<- fitCopula(Gumbel, nr13, AMH, initial=-1)
173 fitAMH$par
174 r_AMH = rCopula(2000, AMH(fitAMH$par))
175 #liekanu prognozes funkcija
176 residuals_forecast=function(pairs)function(x){
177   Y=qt(x,pairs[3],pairs[1])*pairs[2]
178   return(Y)
179 }
180 #vieno momento grazu prognozes funkcija
181 forecast_function=function(pars)function(residuals_Garch,residuals_forecast,
      sigma_Garch){
182   pars=as.numeric(pars)
183   sigma=pars[2]+pars[3]*residuals_Garch*residuals_Garch*sigma_Garch*sigma_
      Garch+pars[4]*sigma_Garch*sigma_Garch
184   X=pars[1]+residuals_forecast*sqrt(sigma)
185   return(cbind(X,sqrt(sigma)))
186 }
187 # nagrinejamos hierarhines kopulos funkcija

```

```

188 Copula1 = function(x1, x2, x3, x4)AMH(fitAMH$par)(Gumbelo(fitGumbelo$par)(x1,
      x2), nr13.copula(fitNR13$par)(x3, x4))
189 # keturmates kopulos generavivas naudojant salygines atvirkstines metoda
190 rCopula4 <- function(n, C, h0 = 0.0001) {
191   # n.v.p toludus a.d.
192   u <- runif(n)
193   t <- runif(n)
194   s <- runif(n)
195   r <- runif(n)
196   h <- pmin(h0, 1 - u)
197   v <- sapply(1:n, function(i) {
198     l <- function(v) (C(u[i] + h[i], v, 1, 1) - C(u[i], v, 1, 1))/h[i]
199     .inverse(l)(t[i])
200   })
201   v = ifelse(v == 1, 1-0.0000001, v)
202   v = ifelse(v == 0, 0.0000001, v)
203   h2 <- pmin(h0, 1 - v)
204   w <- sapply(1:n, function(i) {
205     l <- function(w) {
206       (C(u[i] + h[i], v[i] + h2[i], w, 1) - C(u[i] + h[i], v[i], w, 1) - C(u[i],
         v[i] + h2[i], w, 1) + C(u[i], v[i], w, 1)) / ((C(u[i] + h[i], v[i] +
         h2[i], 1, 1) - C(u[i] + h[i], v[i], 1, 1) - C(u[i], v[i] + h2[i], 1,
         1) + C(u[i], v[i], 1, 1)))
207     }
208     .inverse(l)(s[i])
209   })
210   w = ifelse(w == 1, 1-0.0000001, w)
211   w = ifelse(w == 0, 0.0000001, w)
212   h3 <- pmin(h0, 1 - w)
213   x <- sapply(1:n, function(i) {
214     apacia = ((C(u[i] + h[i], v[i] + h2[i], w[i] + h3[i], 1) - C(u[i] + h[i],
      v[i], w[i] + h3[i], 1) - C(u[i] + h[i], v[i] + h2[i], w[i], 1) + C(u[i]
      ] + h[i], v[i], w[i], 1) - C(u[i], v[i] + h2[i], w[i] + h3[i], 1) + C(
      u[i], v[i], w[i] + h3[i], 1) + C(u[i], v[i] + h2[i], w[i], 1) - C(u[i]
      ], v[i], w[i], 1)))
215     l <- function(x) {
216       (C(u[i] + h[i], v[i] + h2[i], w[i] + h3[i], x) - C(u[i] + h[i], v[i], w[
        i] + h3[i], x) - C(u[i] + h[i], v[i] + h2[i], w[i], x) + C(u[i] + h[
        i], v[i], w[i], x) - C(u[i], v[i] + h2[i], w[i] + h3[i], x) + C(u[i]
        ], v[i], w[i] + h3[i], x) + C(u[i], v[i] + h2[i], w[i], x) - C(u[i],

```

```

                v[i], w[i], x))/apacia
217     }
218     .inverse(1)(r[i])
219   })
220   x = ifelse(x == 0, 0.0000001, x)
221   x = ifelse(x == 1, 1-0.0000001, x)
222   # Output
223   cbind(u,v, w, x)
224 }
225 # apsiBREziame pradiNES reiksmES
226 X1_sigma=sigmaA[2181]
227 X2_sigma=sigmaB[2181]
228 X3_sigma=sigmaC[2181]
229 X4_sigma=sigmaD[2181]
230 X1=NULL
231 X2=NULL
232 X3=NULL
233 X3_1=C[2181]
234 X4=NULL
235 X1_liekanos=A_liekanos[2181]/sigmaA[2181]
236 X2_liekanos=B_liekanos[2181]/sigmaB[2181]
237 X3_liekanos=C_liekanos[2181]/sigmaC[2181]
238 X4_liekanos=D_liekanos[2181]/sigmaD[2181]
239 # randame 5 momentu prognoziU realizacijAS
240 for (i in 1:5){
241   Q1 = rCopula4(10000, Copula1)
242   Y11_AMH=residuals_forecast(fitA)(Q1[,1])
243   Y12_AMH=residuals_forecast(fitB)(Q1[,2])
244   Y13_AMH=residuals_forecast(fitC)(Q1[,3])
245   Y14_AMH=residuals_forecast(fitD)(Q1[,4])
246   # prognoze indeksui CRYTR
247   XA_AMH=forecast_function(A_coef)(X1_liekanos,(Y11_AMH-mean(Y11_AMH))/sd(Y11_
      AMH),X1_sigma)
248   X1=cbind(X1,XA_AMH[,1])
249   X1_sigma=XA_AMH[,2]
250   X1_liekanos=(Y11_AMH-mean(Y11_AMH))/sd(Y11_AMH)
251   # prognoze indeksui SPGSCITR
252   XB_AMH=forecast_function(B_coef)(X2_liekanos,(Y12_AMH-mean(Y12_AMH))/sd(Y12_
      AMH),X2_sigma)
253   X2=cbind(X2,XB_AMH[,1])

```

```

254 X2_sigma=XB_AMH[ ,2]
255 X2_liekanos=(Y12_AMH-mean(Y12_AMH))/sd(Y12_AMH)
256 # prognoze indeksui IBOXIG
257 C_coef=as.numeric(C_coef)
258 sigma_Ct=C_coef[3]+C_coef[4]*X3_liekanos*X3_liekanos*X3_sigma*X3_sigma+C_coef
    [5]*X3_sigma*X3_sigma
259 XC_AMH=C_coef[1]+(Y13_AMH-mean(Y13_AMH))/sd(Y13_AMH)*sqrt(sigma_Ct)+C_coef[2]*
    X3_1
260 X3_1=XC_AMH
261 X3=cbind(X3,XC_AMH)
262 X3_sigma=sqrt(sigma_Ct)
263 X3_liekanos=(Y13_AMH-mean(Y13_AMH))/sd(Y13_AMH)
264 # prognoze indeksui ITRROV
265 XD_AMH=forecast_function(D_coef)(X4_liekanos,(Y14_AMH-mean(Y14_AMH))/sd(Y14_
    AMH),X4_sigma)
266 X4=cbind(X4,XD_AMH[ ,1])
267 X4_sigma=XD_AMH[ ,2]
268 X4_liekanos=(Y14_AMH-mean(Y14_AMH))/sd(Y14_AMH)
269 i=i+1
270 }
271 # indeksu prognoziu vidurkiai ir kovariacijos
272 prognoze_AMH_1=cbind(X1[ ,1],X2[ ,1],X3[ ,1],X4[ ,1])
273 prognoze_AMH_2=cbind(X1[ ,2],X2[ ,2],X3[ ,2],X4[ ,2])
274 prognoze_AMH_3=cbind(X1[ ,3],X2[ ,3],X3[ ,3],X4[ ,3])
275 prognoze_AMH_4=cbind(X1[ ,4],X2[ ,4],X3[ ,4],X4[ ,4])
276 prognoze_AMH_5=cbind(X1[ ,5],X2[ ,5],X3[ ,5],X4[ ,5])
277 averet_AMH_1 = matrix(colMeans(prognoze_AMH_1),nrow=1)
278 rcov_AMH_1 = cov(prognoze_AMH_1)
279 averet_AMH_2 = matrix(colMeans(prognoze_AMH_2),nrow=1)
280 rcov_AMH_2 = cov(prognoze_AMH_2)
281 averet_AMH_3 = matrix(colMeans(prognoze_AMH_3),nrow=1)
282 rcov_AMH_3 = cov(prognoze_AMH_3)
283 averet_AMH_4 = matrix(colMeans(prognoze_AMH_4),nrow=1)
284 rcov_AMH_4 = cov(prognoze_AMH_4)
285 averet_AMH_5 = matrix(colMeans(prognoze_AMH_5),nrow=1)
286 rcov_AMH_5 = cov(prognoze_AMH_5)
287 #efektyvuvo kreives funkcija
288 effFrontier = function (averet , rcov , nports = 1000 , shorts=T, wmax=1)
289 {
290   mxret = max(abs(averet))

```

```

291 mnret = -mxret
292 n.assets = ncol(averet)
293 reshigh = rep(wmax,n.assets)
294 if( shorts )
295 {
296     reslow = rep(-wmax,n.assets)
297 } else {
298     reslow = rep(0,n.assets)
299 }
300 min.rets = seq(mnret, mxret, len = nports)
301 vol = rep(NA, nports)
302 ret = rep(NA, nports)
303 for (k in 1:nports)
304 {
305     port.sol = NULL
306     try(port.sol <- portfolio.optim(x=averet, pm=min.rets[k], covmat=rcov,
307                                     reshigh=reshigh, reslow=reslow, shorts=
308                                         shorts), silent=T)
309
310     if ( !is.null(port.sol) )
311     {
312         vol[k] = sqrt(as.vector(port.sol$pw %*% rcov %*% port.sol$pw))
313         ret[k] = averet %*% port.sol$pw
314     }
315 }
316 #Sharpe rodiklio maksimizavimo funkcija
317 maxSharpe = function (averet, rcov, shorts=T, wmax = 1)
318 {
319     optim.callback = function(param, averet, rcov, reshigh, reslow, shorts)
320     {
321         port.sol = NULL
322         try(port.sol <- portfolio.optim(x=averet, pm=param, covmat=rcov,
323                                         reshigh=reshigh, reslow=reslow, shorts=
324                                             shorts), silent = T)
325
326         if (is.null(port.sol)) {
327             ratio = 10^9
328         } else {
329             m.return = averet %*% port.sol$pw
330             m.risk = sqrt(as.vector(port.sol$pw %*% rcov %*% port.sol$pw))

```

```

329     ratio = -m.return/m.risk
330     assign("w",port.sol$pw,inherits=F)
331   }
332   return(ratio)
333 }
334 ef = effFrontier(averet=averet, rcov=rcov, nports = 100, shorts=shorts, wmax
    =wmax)
335 n = ncol(averet)
336 reshigh = rep(wmax,n)
337 if( shorts ) {
338   reslow = -reshigh
339 } else {
340   reslow = rep(0,n)
341 }
342 max.sh = which.max(ef$ret/ef$vol)
343 w = rep(0,ncol(averet))
344 xmin = optimize(f=optim.callback, interval=c(ef$ret[max.sh-1], upper=ef$ret[
    max.sh]),
345               averet=averet, rcov=rcov, reshigh=reshigh, reslow=reslow, shorts
    =shorts)
346 return(w)
347 }
348 #efficient frontier ir Max Sharpe ratio radimas pirmajai prognozei
349 frontas_1=effFrontier(averet_AMH_1, rcov_AMH_1)
350 plot(frontas_1$vol*100,frontas_1$ret*100,type="l",xlim=c(0.2,1.6),ylim=c
    (-0.03,0.04),xlab="Rizika*100",ylab="Graza*100")
351 points(sd(X1[,1])*100,mean(X1[,1])*100,type="p",col="green")
352 textxy(sd(X1[,1])*100,mean(X1[,1])*100,"CRYTR")
353 points(sd(X2[,1])*100,mean(X2[,1])*100,type="p",col="blue")
354 textxy(sd(X2[,1])*100-0.1,mean(X2[,1])*100-0.001,"SPGSCITR")
355 points(sd(X3[,1])*100,mean(X3[,1])*100,type="p",col="red")
356 textxy(sd(X3[,1])*100,mean(X3[,1])*100,"IBOXIG")
357 points(sd(X4[,1])*100,mean(X4[,1])*100,type="p",col="purple")
358 textxy(sd(X4[,1])*100,mean(X4[,1])*100,"ITRROV")
359 w_1=maxSharpe(averet_AMH_1, rcov_AMH_1)
360 w_1
361 #patikrinama ar gauta portfelio sudetis yra ant efektyvumo kreives
362 sd1=sqrt(as.vector(w_1 %*% rcov_AMH_1 %*% w_1))
363 EP = averet_AMH_1 %*% w_1
364 points(sd1*100,EP*100,type="p",col="black")

```