VILNIAUS UNIVERSITETAS

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

Magistro baigiamasis darbas

Rekurentinė bankroto tikimybės formulė rizikos atstatymo modelyje

Recurrent formula for the probability of bankruptcy in risk reconstruction model

Ieva Rizgelienė

VILNIUS 2016

MATEMATINĖS ANALIZĖS KATEDRA

Darbo vadovas **prof. Jonas Šiaulys**

Darbo recenzentas **lekt. Kęstutis Liubinskas**

Darbas apgintas 2016 m. sausio 14d.

Darbas įvertintas ________________

Registravimo Nr. ________________

2016-01-04 _______________________

Turinys

Anotacija

Idėja, rašyti baigiamąjį darbą būtent šia tema, kilo paskaitos metu sprendžiant uždavinį, kuriame buvo prašoma rasti bankroto tikimybę rizikos atstatymo modelyje. Bandant rasti šią tikimybę, taikant tik bankroto tikimybės apibrėžimą, buvo ganėtinai komplikuota ir sudėtinga. Turint rekurentinę bankroto tikimybės formulę, tikimybės radimas tampa žymiai lengvesnis, taigi buvo nuspręsta pabandyti išvesti šią formulę. Išvedimui buvo naudota pagrindinės, elementarios tikimybių teorijos sąvokos, bei rizikos atstatymo modelio savybės. Ieškant bankroto tikimybės formulės atskiru atveju, pirmiausiai radome šios tikimybės išraišką pirmais trimis laiko momentais, pastebėjome bendrą principą tarp gautų rezultatų ir taip radome rekurentinę formulę bendru atveju. Formulę pritaikėme atskiriems modelio atvejams ir nubraižėme baigtinio laiko bankroto tikimybės grafikus.

Gautos formulės pagalba, naudojantis programine įranga, galima greitai ir patogiai rasti bankroto tikimybę įvairiems rizikos atstatymo modelio atvejams.

Abstract

Risk reconstruction model describes the change of the insurer's surplus with respect to time. This model fix insurer's capital level only in discrete time moments. In year 1957 E. Sparre Andersen offered to hold, that time intervals between claims are independent identically distributed random variables, which can acquire just positive values. The new, enhanced model usually is called risk reconstruction model or E. Sparre Andersen model. This model is widely explained in source [2].

Definition:
Let U(t) denote the insurer's surplus at time moment t $>$ 0. We say that insurer works according to the risk recontruction model if:

$$U(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i.$$

for each t>0. Here:

- $u \geq 0$ is an insurer's initial surplus.
- $Z_1, Z_2, ..$ are independent copies of a non-negative random variable Z.
- $c \geq 0$ is a rate of premiums income per unit time. It is assumed, that this rate is constant and do not depend on time.
- N(t) is the number of claims in interval [0, t].

  $$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{(\Theta_1+\Theta_2+...+\Theta_n \leq t)}$$

  N is computational process for copies $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, ...$ of random variable Θ, which is independent, non - negative, non -degenerate in point 0. Random variable Θ_1 is time moment of first claim, random variables $\Theta_i, i \geq 0$ is time moment between claim positions : i and (i-1).
- The sequences of random variables $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, ...$ and $Z_1, Z_2, Z_3, ...$ are mutually independent.

Probabilty of bankrupcy in continous time moment [0,t] is defined as:

$$\psi(u,t) = P(T_u \leq t) = P(u + t - \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i, t \in \{1, 2, 3, ...\}).$$

Here $u \in N_0 = \{0, 1, 2, ...\}\, ir \;\; t \geq 0$.

The main purpose of this work is to find recurrent formula for the probability of bankrupcy. For derivation of this formula, we were using elementary conceptions of probability theory and properties of risk reconstruction model. Primarily we were analyzing seperate case in which random variable Θ acquires just two values. We estimated probability of bankrupcy in first three time moments and noticed, that from second time moment we will have recurrent formula, than we found reccurent formula for the probability of bankrupcy in finite time at common case.

Įvadas

Šio darbo tikslas yra išvesti rekurentinę baigtinio laiko bankroto tikimybės formulę rizikos atstatymo modeliui. Išvestą formulę bus galima naudoti norint greitai ir patogiai rasti bankroto tikimybę rizikos atstatymo modelyje. Formulės išvedimui buvo naudojami elementarūs tikimybių teorijos metodai. Išvedinėjant formulę pirmiausiai nagrinėjome atskirą atvejį, kai žalų skaičių aprašantis atsitiktinis dydis įgyja tik dvi reiškmes. Šiam atvejui radome bankroto tikimybės išraiškas pirmiems trims laiko momentais. Iš gautų išraiškų pastebėjome, kad nuo antro laiko momento gauname rekurentinę formulę. Tuomet remiantis gautas rezultatais išvedėme rekurentinę bankroto tikimybės formulę bendru atveju, t.y tuo atveju kai žalų skaičių aprašantis atsitiktinis dydis yra diskretus su baigtine atrama. Gautai formulei nubraižėme kelis grafikus, taip patikrinome, kad formulė yra teisinga.

Pirmoje darbo dalyje yra aprašomas rizikos atstatymo modelis, bei jo sudedamosios dalys. Apibrėžiamas įvykis, kurį vadinsime bankrotu.

Antroje darbo dalyje apibrėžiama bankroto tikimybė rizikos atstatymo modelyje.

Trečioje dalyje yra išvedinėjama rekurentinė baigtinio laiko bankroto tikimybės formulė. Pirmiausiai yra nagrinėjamas atskiras atvejis, vėliau iš gautų rezultatų yra gaunama rekurentinė bankroto tikimybės formulė bendru atveju.

Ketvirtoje dalyje yra apibendrinami gauti rezultatai ir apibrėžiama rekurentinė bankroto tikimybės formulė.

Penktoje dalyje yra pateikiami pavyzdžiai.

Šeštoje dalyje yra pateikiamos šio darbo išvados.

Septintoje dalyje yra pateikiamas literatūros sąrašas.

Aštuntoje dalyje yra pateikiama nagrinėtų pavyzdžių reikšmių lentelės ir programos kodas.

1. Rizikos atstatymo modelis

1.1 Modelio sudedamosios dalys

Rizikos atstatymo modelis, panašiai kaip diskretaus laiko rizikos modelis ir klasikinis rizikos modelis aprašo draudiko kapitalo kitimą bėgant laikui. Diskretaus laiko rizikos modelis fiksuoja draudiko kapitalo vertę vien tik diskrečiais laiko momentais. Tuo tarpu klasikinis rizikos modelis, nusako draudiko kapitalo dydį bet kokiu laiko momentu. Tačiau žalų pasirodymo skaičiui klasikiniame rizikos modelyje pasirinktas specialaus pavidalo procesas. Būtent klasikinio rizikos modelio atveju laikome, kad žalų skaičius N(t) laiko intervale [0;t] yra homogeninis Puasono procesas su tam tikru teigiamu intensyvumu λ. Tai gauname tada ir tik tada, kai laiko tarpai tarp žalų yra nepriklausomi eksponentiškai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai. Toks apribojimas laiko tarpams klasikinį rizikos modelį daro sunkiai pritaikomą realioms draudimo veikloms aprašyti. Diskretaus laiko rizikos modelį galime rasti [1], [4], [5] literatūros šaltiniuose, tuo tarpu klasikinis rizikos modelis išsamiai aprašytas šaltiniuose - [5], [6], [7]. 1957 metais E. Sparre Andersen (žiūrėkite [2]) pasiūlė laikyti, kad laiko tarpai tarp žalų yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę, teigiamas reikšmes įgyjantys, atsitiktiniai dydžiai. Toks klasikinio modelio pakeitimas kolektyvinės rizikos modelį pavertė lengviau pritaikomu realioms trumpalaikio draudimo veiklos rūšims aprašyti. Antra vertus, naujasis modelis matematiškai sudėtingesnis, nes yra priklausomas nuo vadinamojo skaičiuojančio atstatymo proceso, kuris savo elgesiu gerokai skiriasi nuo homogeninio Puasono proceso. Naujasis patobulintas rizikos modelis paprastai vadinamas rizikos atstatymo modeliu arba E.Sparre Andersen modeliu. Beabejo ir šis rizikos atstatymo modelis yra tam tikras tikrovės supaprastinimas. Neatsižvelgiama į pajamų atsitiktinumą, kapitalo investavimo galimybę, galimą ieškinių priklausomybę ir panašiai. Visgi, kaip jau minėta, rizikos atstatymo modelis gali būti taikomas tam tikrų draudimo veiklos rūšių analizei dažniau už klasikinį rizikos modelį.

1.1.1 Apibrėžimas. Sakoma, kad draudiko valdomas turtas U(t) kinta pagal rizikos atstatymo modelį, jeigu bet kuriam laiko momentui $t \geq 0$:

$$U(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i. \tag{1}$$

Šioje lygybėje:

- $u \geq 0$ yra draudiko pradinis turtas.
- $Z_1, Z_2, Z_3, ...$ yra nepriklausomos neneigiamo atsitiktinio dydžio kopijos. Atsitiktinis dydis Z_i nusako draudiko i - osios žalos dydį.
- $c \geq 0$ yra premijų surinkimo greitis per laiko vienetą. Laikome, kad šis greitis yra pastovus, nepriklausantis nuo laiko.
- N(t) yra žalų skaičius intervale [0,t]. Laikoma, kad N yra skaičiuojantis atstatymo procesas, t.y.

  $$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{(\Theta_1+\Theta_2+...+\Theta_n \leq t)}$$

  nepriklausomoms kažkokio neneigiamo, neišsigimusio taške 0, atsitiktinio dydžio Θ kopijoms $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, ...$ Atsitiktinis dydis Θ_1 yra pirmosios žalos pasirodymo laikas, o atsitiktiniai dydžiai $\Theta_i, i \geq 0$ nusako laiko tarpą tarp i-osios ir (i-1) - osios žalų.
- Atsitiktinių dydžių sekos $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, ...$ ir $Z_1, Z_2, Z_3, ...$ yra tarp savęs nepriklausomos.

2. Bankroto tikimybė rizikos atstatymo modelyje.

Sakykime draudiko valdomas turtas U(t) yra aprašomas pagal (1) formulę.

Jeigu kuriuo nors laiko momentu t>0 draudiko turto vertė nukrenta žemiau 0, tai laikoma, kad įvyko bankrotas. Kitaip tariant, bankrotu vadinamas įvykis:

$$B = \bigcup_{t \geq 0} \left\{ \omega : U(\omega, t) < 0 \right\}.$$

Laiko momentas, kai draudiko turtas pirmą kartą nukrenta žemiau nulio, vadinamas bankroto laiku. Būtent bankroto laikas yra apibendrintas atsitiktinis dydis nusakytas lygybe:

$$T_u = T_u(\omega) = \begin{cases} \inf \left\{ t \geq 0 : U(\omega, t) < 0 \right\}, & \text{jeigu } \omega \in B \\ \infty, & \text{jeigu } \omega \notin B \end{cases}$$

Indeksą u simboliui T_u rašome norėdami pabrėžti bankroto laiko priklausomybę nuo pradinio draudiko kapitalo u.

2.1 Apibrėžimas.

Bankroto tikimybe baigtiniu laikotarpiu [0,t] vadinama tikimybė:

$$\psi(u,t) = P(T_u \leq t) = P(u + t - \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i \leq 0, t \in \{1, 2, 3, ...\}). \qquad (2)$$

Čia $u \in N_0 = \{0, 1, 2, ...\} \ ir \ t \geq 0.$

Bankroto ir bankroto tikimybės apibrėžimai buvo aprašyti naudojantis šaltiniu [5].

3. Rekurentinės formulės išvedimas.

Šio darbo tikslas yra išvesti rekurentinę baigtinio laiko bankroto tikimybės formulę rizikos atstatymo modelyje. Išvedimui naudosime formulę, kuri yra apibrėžta 2.1 apibrėžime. Rizikos atstatymo modelis yra nusakytas 1.1.1 apibrėžime. Išvedinėjant rekurentinę bankroto tikimybės formulę rizikos atstatymo modelyje, remsimės rekurentinės bankroto tikimybės formulės išvedimu diskretaus laiko rizikos modelio atveju, kuris yra pateiktas [1] šaltinyje.

Rekurentinės formulės išvedime, sveikareikšmiui atsitiktiniui dydžiui Z aprašyti, naudosime tokius žymėjimus:

- Atsitiktinio dydžio Z lokaliosios tikimybės:

$$P(Z = k) = h_k, \ \ , \ \ k = 0, 1, 2, 3, ...$$

- Atsitiktinio dydžio Z pasiskirstymo funkcija:

$$H(u) = P(Z \leq u) = \sum_{\{k \in (0,1,2,...), k \leq u\}} h_k.$$

Rekurentinės formulės išvedimas iš esmės yra paremtas pilnos tikimybės formulės panaudojimu, suformuluojamu iš teiginio:

Pilnosios tikimybės formulė. Jei įvykiai įvykiai $H_1, H_2, H_3, ..., H_n$ sudaro pilnąją įvykių grupę, t.y. $H_1 + H_2 + H_3 + ... = \Omega$. Tai įvykio A tikimybė yra lygi:

$$P(A) = P(A \bigcap H_1) + P(A \bigcap H_2) + P(A \bigcap H_3) + ...$$

Pilnos tikimybės formulė plačiai aprašyta knygoje [3].

3.1 Atskiras atvejis

Nagrinėkime atvejį, kai žalų skaičiuje N(t) esantis atsitiktinis dydis Θ įgyja tik dvi reikšmes $\Theta = 1{,}2$. Su tikimybėmis $P(\Theta = 1) = p$ ir $P(\Theta = 2) = 1 - p$. Čia $0 \leq p \leq 1$. Taigi atsitiktinis dydis Θ turi tokį skirstinį:

Θ	1	2
P	p	1-p

Prisiminkime, kad žalų skaičius N(t), intervale [0,t] , yra skaičiuojantis atstatymo procesas, t.y.

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{(\Theta_1+\Theta_2+...+\Theta_n \leq t)}.$$

Kai t=1, turime:

$$N(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{(\Theta_1+\Theta_2+...+\Theta_n \leq 1)} = \begin{cases} 1, & \text{kai } \Theta_1 = 1 \\ 0, & \text{kai } \Theta_1 = 2 \end{cases}$$

Pagal 2.1 apibrėžimą, laiko momentu t=1 turime:

$$\psi(u,1) = P(T_u \leq 1) = P(u(1) \leq 0) = P(u + 1 - \sum_{i=1}^{N(1)} Z_i \leq 0) =$$

$$P(u + 1 - \sum_{i=1}^{N(1)} Z_i \leq 0, \Theta_1 = 1) + P(u + 1 - \sum_{i=1}^{N(1)} Z_i \leq 0, \Theta_1 = 2) =$$

$P(u+1-Z_1 \leq 0)p + P(u+1 \leq 0)(1-p) = P(u+1-Z_1 \leq 0)p = P(Z_1 \geq u+1)p =$

$p \sum_{i=u+1}^{\infty} h_k = p(1-H(u)).$

Laiko momentu t=2, turime:

$$N(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{(\Theta_1+\Theta_2+\ldots+\Theta_n \leq 2)} = \begin{cases} 2, & \text{kai } \Theta_1 = \Theta_2 = 1; \\ 1, & \text{kai } \Theta_1 = 2, \Theta_2 = 1; \\ 1, & \text{kai } \Theta_1 = 1, \Theta_2 = 2; \\ 1, & \text{kai } \Theta_1 = \Theta_2 = 2. \end{cases}$$

Taikydami tą pačia procedūrą, kaip ir $\psi(u,1)$ atveju turime:

$\psi(u,2) = P(u+1-\sum_{i=1}^{N(1)} Z_i \leq 0) \bigcup P(u+2-\sum_{i=1}^{N(2)} Z_i \leq 0)=$

$P(\{...\}, \Theta_1 = 1, \Theta_2 = 1) + P(\{...\}, \Theta_1 = 2, \Theta_2 = 1)$

$+P(\{...\}, \Theta_1 = 1, \Theta_2 = 2) + P(\{...\}, \Theta_1 = 2, \Theta_2 = 2) =$

$= P(\{u+1-Z_1 \leq 0\}] \bigcup \{u+2-(Z_1+Z_2) \leq 0\})p^2$

$+P(\{u+1 \leq 0\} \bigcup \{u+2-Z_1 \leq 0\})p(1-p)$

$+P(\{u+1-Z_1 \leq 0\} \bigcup \{u+2-Z_1 \leq 0\})p(1-p)$

$+P(\{u+1 \leq 0\} \bigcup \{u+2-Z_1 \leq 0\})(1-p)^2=$

$P(\{Z_1 \geq u+1\} \bigcup \{Z_1+Z_2 \geq u+2\} \bigcap \{Z_1 \leq u\})p^2$

$+ P(Z_1 \geq u+2)(p(1-p)+(1-p)^2) + P(Z_1 \geq u+1)p(1-p) =$

$p^2 \sum_{k=0}^{\infty} P(\{Z_1 \geq u+1\} \bigcup \{Z_1+Z_2 \geq u+2\} \bigcap \{Z_1 = k\})$

$+ P(Z_1 \geq u+2)(p-p^2+1-2p+p^2) + P(Z_1 \geq u+1)p(1-p) =$

$$= p^2 \sum_{k=0}^{\infty} P(\{k \geq u+1\} \bigcup \{k + Z_2 \geq u+2\} \bigcap \{Z_1 = k\}$$

$$+ (1-p) \sum_{k=u+2}^{\infty} h_k + p(1-p) \sum_{k=u+1}^{\infty} h_k =$$

$$= p^2 \sum_{k=0}^{\infty} P(\{k \geq u+1\} \bigcup \{Z_2 \geq u+2-k\}) h_k$$

$$+ (1-p) \sum_{k=u+2}^{\infty} h_k + p(1-p) \sum_{k=u+1}^{\infty} h_k =$$

$$= p^2 (\sum_{k=0}^{\infty} P(\emptyset \bigcup \{Z_2 \geq u+2-k\}) h_k + \sum_{k=u+1}^{\infty} P(\Omega \bigcup \{Z_2 \geq u+2-k\}) h_k)$$

$$+ (1-p) \sum_{k=u+2}^{\infty} h_k + p(1-p) \sum_{k=u+1}^{\infty} h_k =$$

$$= p^2 (\sum_{k=0}^{\infty} P(Z_2 \geq u+2-k) h_k + \sum_{k=u+1}^{\infty} h_k) + (1-p) \sum_{k=u+2}^{\infty} h_k$$

$$+ p(1-p) \sum_{k=u+1}^{\infty} h_k =$$

$$= p^2 \sum_{k=0}^{\infty} P(Z_2 \geq u+2-k) h_k + \sum_{k=u+1}^{\infty} h_k (p^2 + p - p^2) + (1-p) \sum_{k=u+2}^{\infty} h_k =$$

$$= p^2 \sum_{k=0}^{u} (1 - H(u+1-k)) h_k + p(1 - H(u)) + (1-p)(1 - H(u+1)).$$

Laiko momentu t=3, turime:

$$N(3) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{(\Theta_1 + \Theta_2 + \ldots + \Theta_n \leq 3)} = \begin{cases} 3, & \text{kai } \Theta_1 = \Theta_2 = \Theta_3 = 1; \\ 2, & \text{kai } \Theta_1 = \Theta_2 = 1, \Theta_3 = 2; \\ 2, & \text{kai } \Theta_1 = 1, \Theta_2 = 2, \Theta_3 = 1; \\ 2, & \text{kai } \Theta_1 = 2, \Theta_2 = \Theta_3 = 1; \\ 2, & \text{kai } \Theta_1 = 1, \Theta_2 = 2, \Theta_3 = 2; \\ 2, & \text{kai } \Theta_1 = 2, \Theta_2 = 1; \Theta_3 = 2; \\ 1, & \text{kai } \Theta_1 = \Theta_2 = 2; \Theta_3 = 1; \\ 1, & \text{kai } \Theta_1 = \Theta_2 = \Theta_3 = 2. \end{cases}$$

Rasime $\psi(u,3)$:

$$\psi(u,3) = P(u + t - \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i \leq 0, t \in \{1,2,3\})$$
$$= P(\left\{u + 1 - \sum_{i=1}^{N(1)} Z_i \leq 0\right\} \bigcup \left\{u + 2 - \sum_{i=1}^{N(2)} Z_i \leq 0\right\} \bigcup \left\{u + 3 - \sum_{i=1}^{N(3)} Z_i \leq 0\right\})$$
$$= P(\{...\}, \Theta_1 = 1, \Theta_2 = 1, \Theta_3 = 1)$$

$$+ P(\{...\}, \Theta_1 = 1, \Theta_2 = 1, \Theta_3 = 2) + P(\{...\}, \Theta_1 = 1, \Theta_2 = 2, \Theta_3 = 1)$$

$$+ P(\{...\}, \Theta_1 = 2, \Theta_2 = 1, \Theta_3 = 1) + P(\{...\}, \Theta_1 = 1, \Theta_2 = 2, \Theta_3 = 2)$$

$$+ P(\{...\}, \Theta_1 = 2, \Theta_2 = 1, \Theta_3 = 2) + P(\{...\}, \Theta_1 = 2, \Theta_2 = 2, \Theta_3 = 1)$$

$$+ P(\{...\}, \Theta_1 = 2, \Theta_2 = 2, \Theta_3 = 2)$$

$$= P(\{u + 1 - Z_1 \leq 0\} \bigcup \{u + 2 - (Z_1 + Z_2) \leq 0\} \bigcup \{u + 3 - (Z_1 + Z_2 + Z_3) \leq 0\})p^3$$

$$+ P(\{u + 1 - Z_1 \leq 0\} \bigcup \{u + 2 - (Z_1 + Z_2) \leq 0\} \bigcup$$

$$\bigcup \{u + 3 - (Z_1 + Z_2) \leq 0\})p^2(1 - p)$$

$$+P(\{u + 1 - Z_1 \leq 0\} \bigcup \{u + 2 - Z_1 \leq 0\} \bigcup \{u + 3 - (Z_1 + Z_2) \leq 0\})p^2(1- p)$$

$$+ P(\{u + 1 \leq 0\} \bigcup \{u + 2 - Z_1 \leq 0\} \bigcup$$

$$\bigcup \{u + 3 - (Z_1 + Z_2) \leq 0\})p^2(1 - p)$$

$$+ P(\{u + 1 - Z_1 \leq 0\} \bigcup \{u + 2 - Z_1 \leq 0\} \bigcup$$

$$\bigcup \{u + 3 - (Z_1 + Z_2) \leq 0\})p(1 - p)^2$$

$$+ P(\{u + 1 \leq 0\} \bigcup \{u + 2 - Z_1 \leq 0\} \bigcup \{u + 3 - (Z_1 + Z_2) \leq 0\})p(1 - p)^2$$

$$+ P(\{u + 1 \leq 0\} \bigcup \{u + 2 - Z_1 \leq 0\} \bigcup \{u + 3 - Z_1 \leq 0\})p(1 - p)^2$$

$$+ P(\{u+1 \le 0\} \bigcup \{u+2-Z_1 \le 0\} \bigcup \{u+3-Z_1 \le 0\})(1-p)^3$$

$$= P(\{Z_1 \ge u+1\} \bigcup \{Z_1+Z_2 \ge u+2\} \bigcup \{Z_1+Z_2+Z_3 \ge u+3\})p^3$$

$$+ P(\{Z_1 \ge u+1\} \bigcup \{Z_1+Z_2 \ge u+2\} \bigcup \{Z_1+Z_2 \ge u+3\})p^2(1-p)$$

$$+ P(\{Z_1 \ge u+1\} \bigcup \{Z_1 \ge u+2\} \bigcup \{Z_1+Z_2 \ge u+3\})p^2(1-p)$$

$$+ P(\emptyset \bigcup \{Z_1 \ge u+2\} \bigcup \{Z_1+Z_2 \ge u+3\})p^2(1-p)$$

$$+ P(\{Z_1 \ge u+1\} \bigcup \{Z_1 \ge u+2\} \bigcup \{Z_1+Z_2 \ge u+3\})p(1-p)^2$$

$$+ P(\emptyset \bigcup \{Z_1 \ge u+2\} \bigcup \{Z_1+Z_2 \ge u+3\})p(1-p)^2$$

$$+ P(\emptyset \bigcup \{Z_1 \ge u+2\} \bigcup \{Z_1 \ge u+3\})p(1-p)^2$$

$$+ P(\emptyset \bigcup \{Z_1 \ge u+2\} \bigcup \{Z_1 \ge u+3\})(1-p)^3$$

$$= P(\{Z_1 \ge u+1\} \bigcup \{Z_1+Z_2 \ge u+2\} \bigcup \{Z_1+Z_2+Z_3 \ge u+3\})p^3$$

$$+ P(\{Z_1 \ge u+1\} \bigcup \{Z_1+Z_2 \ge u+2\})p^2(1-p)$$

$$+ P(\{Z_1 \ge u+1\} \bigcup \{Z_1+Z_2 \ge u+3\})p^2(1-p)$$

$$+ P(\{Z_1 \ge u+2\} \bigcup \{Z_1+Z_2 \ge u+3\})p^2(1-p)$$

$$+ P(\{Z_1 \ge u+1\} \bigcup \{Z_1+Z_2 \ge u+3\})p(1-p)^2$$

$$+ P(\{Z_1 \ge u+2\} \bigcup \{Z_1+Z_2 \ge u+3\})p(1-p)^2$$

$$+ P(\{Z_1 \ge u+2\})p(1-p)^2 + P(\{Z_1 \ge u+2\})(1-p)^3$$

$$= P(\{Z_1 \ge u+1\} \bigcup \{Z_1+Z_2 \ge u+2\} \bigcup \{Z_1+Z_2+Z_3 \ge u+3\})p^3$$

$$+ P(\{Z_1 \ge u+1\} \bigcup \{Z_1+Z_2 \ge u+2\})p^2(1-p)$$

$$+ P(\{Z_1 \ge u+1\} \bigcup \{Z_1+Z_2 \ge u+3\})(p^2-p^3+p-2p^2+p^3)$$

$$+ P(\{Z_1 \ge u+2\} \bigcup \{Z_1+Z_2 \ge u+3\})(p^2(1-p)+p(1-p)^2)$$

$$+ P(\{Z_1 \geq u+2\})(p(1-p)^2 + (1-p)^3)$$

$$= P(\{Z_1 \geq u+1\} \bigcup \{Z_1 + Z_2 \geq u+2\} \bigcup \{Z_1 + Z_2 + Z_3 \geq u+3\})p^3$$

$$+ P(\{Z_1 \geq u+1\} \bigcup \{Z_1 + Z_2 \geq u+2\})p^2(1-p)$$

$$+ P(\{Z_1 \geq u+1\} \bigcup \{Z_1 + Z_2 \geq u+3\})(p-p^2)$$

$$+ P(\{Z_1 \geq u+2\} \bigcup \{Z_1 + Z_2 \geq u+3\})(p-p^2)$$

$$+ P(\{Z_1 \geq u+2\})(p^2 - 2p + 1)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P(\{Z_1 \geq u+1\} \bigcup \{Z_1 + Z_2 \geq u+2\} \bigcup \{Z_1 + Z_2 + Z_3 \geq u+3\} \bigcap \{Z_1 = k\})p^3$$
$$+ \sum_{k=0}^{\infty} P(\{Z_1 \geq u+1\} \bigcup \{Z_1 + Z_2 \geq u+2\} \bigcap \{Z_1 = k\})p^2(1-p)$$
$$+ \sum_{k=0}^{\infty} P(\{Z_1 \geq u+1\} \bigcup \{Z_1 + Z_2 \geq u+3\} \bigcap \{Z_1 = k\})p(1-p)$$
$$+ \sum_{k=0}^{\infty} P(\{Z_1 \geq u+2\} \bigcup \{Z_1 + Z_2 \geq u+3\} \bigcap \{Z_1 = k\})p(1-p)$$
$$+ \sum_{k=0}^{\infty} P(\{Z_1 \geq u+2\} \bigcap \{Z_1 = k\})(p-1)^2$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} P(u + t - \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i \leq 0, t \in \{1, 2, 3\}, Z_1 = k)P(Z_1 = k) =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} P(u + t - \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i \leq 0, t \in \{1, 2, 3\}, Z_1 = k)h_k.$$

Nagrinėkime sumos gautos sumos narius atskirai. Imkime $Z_1 = 0$. Šiuo atveju turime:

$$P(\{Z_1 \geq u+1\} \bigcup \{Z_1 + Z_2 \geq u+2\} \bigcup \{Z_1 + Z_2 + Z_3 \geq u+3\})p^3$$

$$+ P(\{Z_1 \geq u+1\} \bigcup \{Z_1 + Z_2 \geq u+2\})p^2(1-p)$$

$$+ P(\{Z_1 \geq u+1\} \bigcup \{Z_1 + Z_2 \geq u+3\})p(1-p)$$

$$+P(\{Z_1 \geq u+2\} \bigcup \{Z_1+Z_2 \geq u+3\})p(1-p)+P(\{Z_1 \geq u+2\})(p-1)^2$$

$$= (P(\{0 \geq u+1\} \bigcup \{Z_2 \geq u+2\} \bigcup \{Z_2+Z_3 \geq u+3\})p^3$$

$$+ P(\{0 \geq u+1\} \bigcup \{Z_2 \geq u+2\})p^2(1-p)$$

$$+ P(\{0 \geq u+1\} \bigcup \{Z_2 \geq u+3\})p(1-p)$$

$$+ P(\{0 \geq u+2\} \bigcup \{Z_2 \geq u+3\})p(1-p))P(Z_1 = 0)$$

$$+ P(\{0 \geq u+2\})(p-1)^2$$

$$= (P(\emptyset \bigcup \{Z_2 \geq u+2\} \bigcup \{Z_2+Z_3 \geq u+3\})p^3$$

$$+ P(\emptyset \bigcup \{Z_2 \geq u+2\})p^2(1-p) + P(\emptyset \bigcup \{Z_2 \geq u+3\})p(1-p)$$

$$+ P(\emptyset \bigcup \{Z_2 \geq u+3\})p(1-p))P(Z_1 = 0)$$

$$= (\sum_{j=0}^{\infty} P(\{Z_2 \geq u+2\} \bigcup \{Z_2+Z_3 \geq u+3\} \bigcap \{Z_2 = j\})p^3$$

$$+ P(Z_2 \geq u+2)p^2(1-p) + P(Z_2 \geq u+3)2p(1-p))P(Z_1 = 0)$$

$$= (p^3(\sum_{j=0}^{u+1} P(\{j \geq u+2\} \bigcup \{j+Z_3 \geq u+3\})h_j + \sum_{j=u+2}^{\infty} P(\{j \geq u+2\} \bigcup \{j+Z_3 \geq u+3\})h_j)$$

$$+ p^2(1-p) \sum_{j=u+2}^{\infty} h_j + 2p(1-p) \sum_{j=u+3}^{\infty} h_j)P(Z_1 = 0) =$$

$$= (p^3(\sum_{j=0}^{u+1} P(\emptyset \bigcup \{j+Z_3 \geq u+3\})h_j + \sum_{j=u+2}^{\infty} P(\Omega \bigcup \{j+Z_3 \geq u+3\})h_j)$$

$$+ p^2(1-p)(1-H(u+1)) + 2p(1-p)(1-H(u+2)))P(Z_1 = 0) =$$

$$= (p^3(\sum_{j=0}^{u+1} P(\{Z_3 \geq u+3-j\})h_j + \sum_{j=u+2}^{\infty} h_j +$$

$$+ p^2(1-p)(1-H(u+1)) + 2p(1-p)(1-H(u+2)))P(Z_1 = 0) =$$

$$= (p^3 \sum_{j=0}^{u+1} P(1-H(u+2-j))h_j + p^3(1-H(u+1)) +$$

$$+ p^2(1-p)(1-H(u+1)) + 2p(1-p)(1-H(u+2)))P(Z_1=0) =$$

$$= (p^3 \sum_{j=0}^{u+1} P(1-H(u+2-j))h_j + p^2(1-H(u+1)) +$$

$$+ 2p(1-p)(1-H(u+2)))P(Z_1=0).$$

Imkime $Z_1 = 1$:

$$(P(\{Z_1 \geq u+1\} \bigcup \{Z_1+Z_2 \geq u+2\} \bigcup \{Z_1+Z_2+Z_3 \geq u+3\})p^3$$

$$+ P(\{Z_1 \geq u+1\} \bigcup \{Z_1+Z_2 \geq u+2\})p^2(1-p)$$

$$+ P(\{Z_1 \geq u+1\} \bigcup \{Z_1+Z_2 \geq u+3\})p(1-p)$$

$$+ P(\{Z_1 \geq u+2\} \bigcup \{Z_1+Z_2 \geq u+3\})p(1-p)$$

$$+ P(\{Z_1 \geq u+2\})(p-1)^2)P(Z_1=1)$$

$$= (P(\{1 \geq u+1\} \bigcup \{1+Z_2 \geq u+2\} \bigcup \{1+Z_2+Z_3 \geq u+3\})p^3$$

$$+ P(\{1 \geq u+1\} \bigcup \{1+Z_2 \geq u+2\})p^2(1-p)$$

$$+ P(\{1 \geq u+1\} \bigcup \{1+Z_2 \geq u+3\})p(1-p)$$

$$+ P(\{1 \geq u+2\} \bigcup \{1+Z_2 \geq u+3\})p(1-p)$$

$$+ P(\{1 \geq u+2\})(p-1)^2)P(Z_1=1)$$

$$= (P(\emptyset \bigcup \{Z_2 \geq u+1\} \bigcup \{Z_2+Z_3 \geq u+2\})p^3$$

$$+ P(\emptyset \bigcup \{Z_2 \geq u+1\})p^2(1-p) + P(\emptyset \bigcup \{Z_2 \geq u+2\})p(1-p)$$

$$+ P(\emptyset \bigcup \{Z_2 \geq u+2\})p(1-p))P(Z_1=1)$$

$$= (\sum_{j=0}^{\infty} P(\{Z_2 \geq u+1\} \bigcup \{Z_2+Z_3 \geq u+2\} \bigcap \{Z_2=j\})p^3$$

$$+ P(Z_2 \geq u+1)p^2(1-p) + P(Z_2 \geq u+2)2p(1-p))P(Z_1=1)$$

$$= (p^3(\sum_{j=0}^{u} P(\{j \geq u+1\} \bigcup \{j + Z_3 \geq u+2\})h_j + \sum_{j=u+1}^{\infty} P(\{j \geq u+1\} \bigcup \{j + Z_3 \geq u+2\})h_j)$$

$$+ p^2(1-p) \sum_{j=u+1}^{\infty} h_j + 2p(1-p) \sum_{j=u+2}^{\infty} h_j))P(Z_1 = 1) =$$

$$= (p^3(\sum_{j=0}^{u} P(\emptyset \bigcup \{j + Z_3 \geq u+2\})h_j + \sum_{j=u+1}^{\infty} P(\Omega \bigcup \{j + Z_3 \geq u+2\})h_j)$$

$$+ p^2(1-p)(1 - H(u)) + 2p(1-p)(1 - H(u+1)))P(Z_1 = 1) =$$

$$= (p^3(\sum_{j=0}^{u} P(\{Z_3 \geq u+2-j\})h_j + \sum_{j=u+1}^{\infty} h_j +$$

$$+ p^2(1-p)(1 - H(u)) + 2p(1-p)(1 - H(u+1)))P(Z_1 = 1) =$$

$$= (p^3 \sum_{j=0}^{u} P(1 - H(u+1-j))h_j + p^3(1 - H(u)) +$$

$$+ p^2(1-p)(1 - H(u)) + 2p(1-p)(1 - H(u+1)))P(Z_1 = 1) =$$

$$= (p^3 \sum_{j=0}^{u} P(1 - H(u+1-j))h_j + p^2(1 - H(u))$$

$$+ 2p(1-p)(1 - H(u+1)))P(Z_1 = 1).$$

Imdami $Z_1 = 2$ analogiškai gautume tokia išraišką:

$$(p^3 \sum_{j=0}^{u-1} P(1 - H(u-j))h_j + p^2(1 - H(u-1)) + +2p(1-p)(1 - H(u)))P(Z_1 = 2).$$

Taigi iš gautų mūsų nagrinėjamos sumos pirmų narių išraiškų matome, kad k-tasis narys turėtų tokią išraišką:

$$(p^3 \sum_{j=0}^{u+1-k} P(1 - H(u+2-k-j))h_j + p^2(1 - H(u+1-k))$$

$$+ 2p(1-p)(1 - H(u+2-k))))P(Z_1 = k).$$

Iš čia matome, kad mūsų suma daugiausiai gali būti sumuojama iki k=u+1. Vadinasi, turime:

$$\psi(u,3) = \sum_{k=0}^{u+1} P(u + t - \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i \leq 0, t \in \left\{1, 2, 3\right\}, Z_1 = k)$$

$$= (p^3 \sum_{j=0}^{u+1} P(1 - H(u+2-j))h_j + p^2(1 - H(u+1)) + 2p(1-p)(1 - H(u+2))$$

$$+ p^3 \sum_{j=0}^{u} P(1 - H(u+1-j))h_j + p^2(1 - H(u)) + 2p(1-p)(1 - H(u+1))$$

$$+ p^3 \sum_{j=0}^{u-1} P(1 - H(u+j))h_j + p^2(1 - H(u-1)) + 2p(1-p)(1 - H(u))$$

$$+ ....$$

$$+ p^3 P(1 - H(1))h_j + p^2(1 - H(0)) + 2p(1-p)(1 - H(1)))P(Z_1 = k)$$

$$= (p^3(\sum_{j=0}^{u+1} P(1-H(u+2-j))h_j + \sum_{j=0}^{u} P(1-H(u+1-j))h_j + .. + P(1-H(1)))$$

$$+ p^2(1 - H(u+1) + 1 - H(u) + ... + 1 - H(0))$$

$$+ 2p(1-p)(1 + H(u+2) + 1 - H(u+1) + ... + 1 - H(1)))P(Z_1 = k)$$

$$= p^3 \sum_{k=0}^{u+1} \sum_{j=0}^{u+1-k} P(1 - H(u+2-k-j))h_j h_k + p^2(\sum_{k=0}^{u+1}(1 - H(u+1-k))h_k$$

$$+ 2p(1-p)(u + 1 - \sum_{k=0}^{u+1}(1 - H(u+2-k))h_k$$

$$= p^3 \sum_{k=0}^{u+1} \sum_{j=0}^{u+1-k} (1 - H(u+2-k-j))h_j + p^2(\sum_{k=0}^{u+1}(1 - H(u+1-k))h_k$$

$$+ 2p(1-p) \sum_{k=0}^{u+1}(1 - H(u+2-k))h_k$$

$$= p \sum_{k=0}^{u+1}(p^2 \sum_{j=0}^{u+1-k} (1 - H(u+2-k-j))h_j + p(1 - H(u+1-k)h_k$$

$$+ 2(1-p)(1 - H(u+2-k))h_k)$$

$$= p\sum_{k=0}^{u+1}(p^2\sum_{j=0}^{u+1-k}(1-H(u+2-k-j))h_j + p(1-H(u+1-k)$$

$$+(1-p)(1-H(u+2-k)) + (1-p)(1-H(u+2-k)))h_k$$

$$= p\sum_{k=0}^{u+1}(p^2\sum_{j=0}^{u+1-k}(1-H(u+2-k-j))h_j + p(1-H(u+1-k)$$

$$+(1-p)(1-H(u+2-k)))h_k + p(1-p)\sum_{k=0}^{u+1}(1-H(u+2-k)))h_k$$

$$= p\sum_{k=0}^{u+1}\psi(u+1-k,2)h_k + p(1-p)\sum_{k=0}^{u+1}(1-H(u+2-k)))h_k.$$

Taigi gauname, rekurentinę bankroto tikimybės formulę, kai t=3.

$$\psi(u,3) = p\sum_{k=0}^{u+1}\psi(u+1-k,2)h_k + p(1-p)\sum_{k=0}^{u+1}(1-H(u+2-k)))h_k.$$

Pabandysime išvesti rekurentinę bankroto tikimybės formulę, kai t≥3.

$$\psi(u,t) = P(u+t-\sum_{i=1}^{N(t)}Z_i \le 0, \text{ kažkokiam t} \in \left\{1,2,3,...,t\right\})$$

$$= P(\left\{u+1-\sum_{i=1}^{N(1)}Z_i \le 0\right\}\bigcup\left\{u+2-\sum_{i=1}^{N(2)}Z_i \le 0\right\}\bigcup ... \bigcup\left\{u+t-\sum_{i=1}^{N(t)}Z_i \le 0\right\})$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}P(\left\{u+1-\sum_{i=1}^{N(1)}Z_i \le 0\right\}\bigcup\left\{u+2-\sum_{i=1}^{N(2)}Z_i \le 0\right\}...$$

$$\bigcup\left\{u+t-\sum_{i=1}^{N(t)}Z_i \le 0\right\}, Z_1 = k)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}P(\left\{u+1-\sum_{i=1}^{N(1)}Z_i \le 0\right\}\bigcup\left\{u+2-\sum_{i=1}^{N(2)}Z_i \le 0\right\}...$$

$$\bigcup\left\{u+t-\sum_{i=1}^{N(t)}Z_i \le 0\right\}, Z_1 = k, \Theta_1 = 1)$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty}P(\left\{u+1-\sum_{i=1}^{N(1)}Z_i \le 0\right\}\bigcup\left\{u+2-\sum_{i=1}^{N(2)}Z_i \le 0\right\}...$$

$$\bigcup \left\{ u + t - \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i \leq 0 \right\}, Z_1 = k, \Theta_1 = 2)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P(\{u + 1 - Z_1 \leq 0\} \bigcup \left\{ u + 2 - Z_1 - \sum_{i=N(1)+1}^{N(2)} Z_i \leq 0 \right\} ...$$

$$\bigcup \left\{ u + t - \sum_{i=N(1)+1}^{N(t)} Z_i \leq 0 \right\}, Z_1 = k, \Theta_1 = 1)$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} P(\{u + 1 - 0 \leq 0\} \bigcup \{u + 2 - Z_1 \leq 0\} \bigcup \left\{ u + 3 - Z_1 - \sum_{i=N(2)+1}^{N(3)} Z_i \leq 0 \right\} ...$$

$$\bigcup \left\{ u + t - \sum_{i=N(2)+1}^{N(t)} Z_i \leq 0 \right\}, Z_1 = k, \Theta_1 = 2)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P(\{u + 1 - Z_1 \leq 0\} \bigcup \left\{ u + 2 - Z_1 - \sum_{i=2}^{N(2)} Z_i \leq 0 \right\} ...$$

$$\bigcup \left\{ u + t - Z_1 - \sum_{i=2}^{N(t)} Z_i \leq 0 \right\}, Z_1 = k, \Theta_1 = 1)$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} P(\emptyset \bigcup \{u + 2 - Z_1 \leq 0\} \bigcup \left\{ u + 3 - Z_1 - \sum_{i=2}^{N(3)} Z_i \leq 0 \right\} ...$$

$$\bigcup \left\{ u + t - Z_i - \sum_{i=2}^{N(t)} Z_i \leq 0 \right\}, Z_1 = k, \Theta_1 = 2)$$

$$= \sum_{k \geq u+1} P(\Omega, Z_1 = k, \Theta_1 = 1) + \sum_{k \leq u} P(\left\{ u + 2 - k - \sum_{i=2}^{N(2)} Z_i \leq 0 \right\} \bigcup ...$$

$$\bigcup \left\{ u + t - k - \sum_{i=2}^{N(t)} Z_i \leq 0 \right\}, Z_1 = k, \Theta_1 = 1) + \sum_{k \geq u+2} P(\Omega, Z_1 = k, \Theta_1 = 2)$$

$$+ \sum_{k \leq u+1} P(\left\{ u + 3 - k - \sum_{i=2}^{N(3)} Z_i \leq 0 \right\} \bigcup ...$$

$$\bigcup \left\{ u + t - k - \sum_{i=2}^{N(t)} Z_i \leq 0 \right\}, Z_1 = k, \Theta_1 = 2)$$

Pažymėkime, $\bar{H}(u) = 1 - H(u)$ ir

$$\hat{N}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{(\hat{\Theta}_1 + \hat{\Theta}_2 + \ldots + \hat{\Theta}_n \leq t)}, \text{ čia } \hat{\Theta}_1 \stackrel{d}{=} \Theta_2, \ldots, \hat{\Theta_n} \stackrel{d}{=} \Theta_{n-1}$$

Tęskime prieš tai nagrinėtą lygybę, turime:

$$\psi(u,t) = p\bar{H}(u) + (1-p)\bar{H}(u+1)$$

$$+ \sum_{k \leq u} P(\left\{ u + 2 - k - \sum_{i=1}^{N(2)-1} Z_i \leq 0 \right\} \bigcup \ldots$$

$$\bigcup \left\{ u + t - k - \sum_{i=1}^{N(t)-1} Z_i \leq 0 \right\}, Z_1 = k, \Theta_1 = 1)$$

$$+ \sum_{k \leq u+1} P(\left\{ u + 3 - k - \sum_{i=1}^{N(3)-1} Z_i \leq 0 \right\} \bigcup \ldots$$

$$\bigcup \left\{ u + t - k - \sum_{i=1}^{N(t)-1} Z_i \leq 0 \right\}, Z_1 = k, \Theta_1 = 2)$$

$$= p\bar{H}(u) + (1-p)\bar{H}(u+1)$$

$$+p \sum_{k \leq u} P(\left\{ u + 2 - k - \sum_{i=1}^{\hat{N}(1)} Z_i \leq 0 \right\} \bigcup \ldots \bigcup \left\{ u + 1 - k + t - 1 - \sum_{i=1}^{\hat{N}(t-1)} Z_i \leq 0 \right\}) h_k$$

$$+(1-p) \sum_{k \leq u+1} P(\left\{ u + 3 - k - \sum_{i=1}^{\hat{N}(2)} Z_i \leq 0 \right\} \bigcup .. \bigcup \left\{ u + 2 - k + t - 2 - \sum_{i=1}^{\hat{N}(t-2)} Z_i \leq 0 \right\}) h_k$$

$$= p\bar{H}(u) + (1-p)\bar{H}(u+1)$$

$$+ p \sum_{k \leq u} \psi(u + 1 - k, t - 1) h_k + (1-p) \sum_{k \leq u+1} \psi(u + 2 - k, t - 2) h_k.$$

3.2 Bendras atvejis

Tarkime, kad žalų skaičiuje N(t) esantis atsitiktinis dydis Θ turi tokį skirstinį:

Θ	1	2	...	D
P	p_1	p_2	...	p_D

Remiantis 3.1 skyrelio skaičiavimais, buvo pastebėta, kad bendru atveju, kai $t \geq 3$ rekurentinė bankroto tikimybės formulė turės tokią išraišką:

$$\psi(u,t) = p_1 \bar{H}(u) + p_2 \bar{H}(u+1) + p_3 \hat{H}(u+2) + ... + p_D \bar{H}(u+D-1)$$

$$+ p_1 \sum_{k \leq u} \psi(u+1-k, t-1) h_k + p_2 \sum_{k \leq u+1} \psi(u+2-k, t-2) h_k + ...$$

$$+ p_D \sum_{k \leq u+D-1} \psi(u+D-k, t-D) h_k.$$

Arba:

$$\psi(u,t) = \sum_{l=1}^{D} p_l \bar{H}(u+l-1) + \sum_{l=1}^{D} \sum_{k \leq u+l-1} \psi(u+l-k, t-l) h_k p_l.$$

3.1 skyrelyje nagrinėjant atvejį, kai atsitiktinis dydis Θ turėjo tokį skirstinį:

Θ	1	2
P	p	1-p

gavome, kad pirmu laiko momentu bankroto tikimybė turės tokią išraišką: $\psi(u,1) = p\bar{H}(u)$, o antru laiko momentu tokią išraišką:

$$\psi(u,2) = p^2 \sum_{k=0}^{u} (1 - H(u+1-k)) h_k + p(1 - H(u)) + (1-p)(1 - H(u+1)).$$

Pabandykime rasti bankroto tikimybę šiam skirstiniui, kai t=2. Remiantis gauta rekurentine formule ir bankroto tikimybės išraiška, kai t=1, turime:

$$\psi(u,2) = \sum_{l=1}^{2} p_l \bar{H}(u+l-1) + \sum_{l=1}^{2} \sum_{k=0}^{u+l-1} \psi(u+l-k, t-l) h_k p_l =$$

$$p\bar{H}(u) + (1-p)\bar{H}(u+1) + p \sum_{k=0}^{u} \psi(u+1-k, 1) h_k + (1-p) \sum_{k=0}^{u+1} \psi(u+2-k, 0) h_k =$$

$$p\bar{H}(u) + (1-p)\bar{H}(u+1) + p \sum_{k=0}^{u} p\bar{H}(u+1-k) h_k$$

$$= p^2 \sum_{k=0}^{u} (\bar{H}(u+1-k)) h_k + p(\bar{H}(u)) + (1-p)(\bar{H}(u+1)).$$

Taigi gauname, kad mūsų išvesta formulė yra teisinga ir kai t=2.

4. Rezultatai

Apibendrinkime gautus rezultatus. Sakykime patenkintos visos įprastinės rizikos atstatymo modelio sąlygos. Žalų skaičiuje N(t) esantis atsitiktinis dydis Θ turi tokį skirstinį:

Θ	1	2	...	D
P	p_1	p_2	...	p_D

Tada bankroto tikimybė pradiniu laiko momentu t=1 turės tokią išraišką:

$$\psi(u,1) = p_1 \bar{H}(u). \tag{3}$$

O visiems u=0,1,2,... ir visiems t=2,3,4,... baigtiniu laiko momentu tikimybė $\psi(u,t)$ tenkina lygybę:

$$\psi(u,t) = \sum_{l=1}^{D} p_l \bar{H}(u+l-1) + \sum_{l=1}^{D} \sum_{k \le u+l-1} \psi(u+l-k, t-l) h_k p_l. \tag{4}$$

Šioje lygybėje:

- p_l atstitiktinio dydžio Θ tikimybės. Atsitiktinis dydis Θ_1 yra pirmosios žalos pasirodymo laikas, o atsitiktiniai dydžiai $\Theta_i, i \ge 0$ nusako laiko tarpą tarp i-osios ir (i-1) - osios žalų.

- $\bar{H}(u) = 1 - H(u)$.

  Čia $H(u) = P(Z \le u) = \sum\limits_{\left\{k \in (0,1,2,...), k \le u\right\}} h_k.$

  Čia $h_k = P(Z = k)$, atsitiktinis dydis Z_i nusako draudiko eilinės žalos dydį.

5. Pavyzdžiai

Naudodami išvestą rekurentinę formulę ir programą "RStudio", nubraižėme kelis baigtinio laiko bankroto tikimybės grafikus.

5.1 pavyzdys

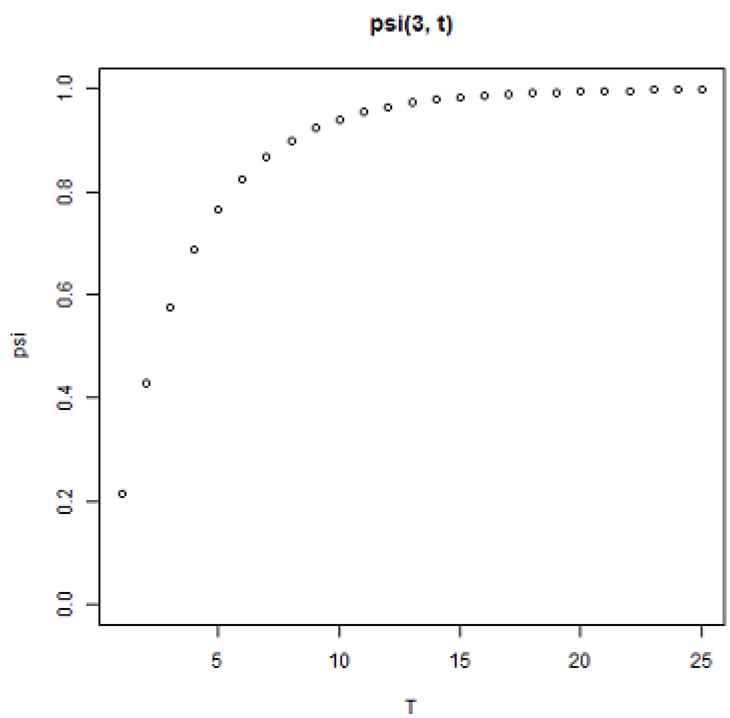
Nagrinėkime atvejį, kai pradinis turtas u=3. Atsitiktinis dydis Θ turi tokį skirstinį:

Θ	1	2
P	0.5	0.5

O atsitiktinis dydis Z įgyja tokias reikšmes:

Z	0	1	2	3	4	5	6
P	1/7	1/7	1/7	1/7	1/7	1/7	1/7

Tuomet naudojant (3) ir (4) formules, kai t=1,2,..,25 gauname tokį baigtinio laiko bankroto tikimybės grafiką:



5.2 pavyzdys

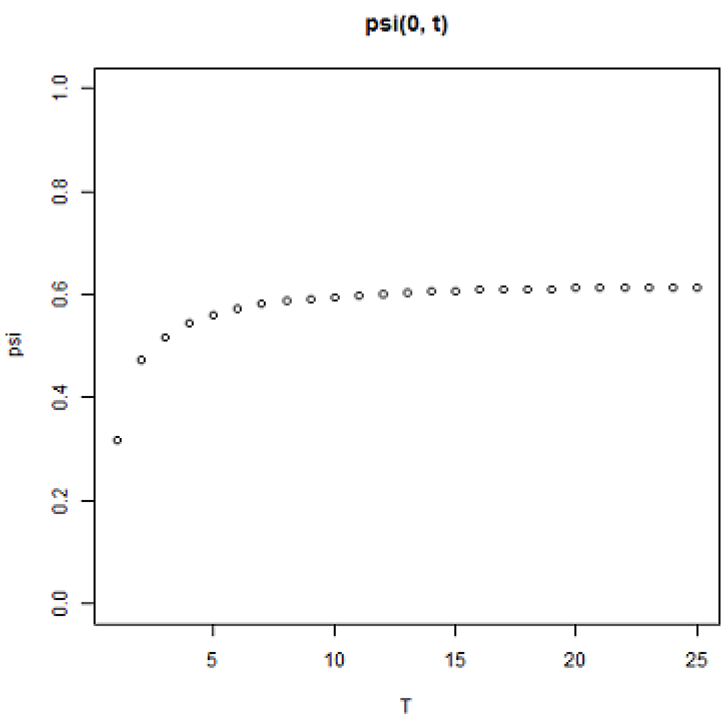
Nagrinėkime atvejį, kai pradinis turtas u=0 ir atsitiktinis dydis Θ turi tokį skirstinį:

Θ	1	2
P	0.5	0.5

O atsitiktinis dydis Z pasiskirstęs pagal Puasono skirstinį su parametru $\lambda = 1$. Taigi atsitiktinio dydžio Z pasisikirstymo funkcija turi tokį pavidalą:

$$f(k, \lambda) = \frac{e^{(-\lambda)}\lambda^k}{k!} = \frac{1}{e * k!}.$$

Tuomet turime tokį grafiką:



5.3 pavyzdys

Nagrinėkime atvejį, kai pradinis turtas u=0 ir atsitiktinis dydis Θ pasiskirstęs pagal pastumtą binominį skirstinį:

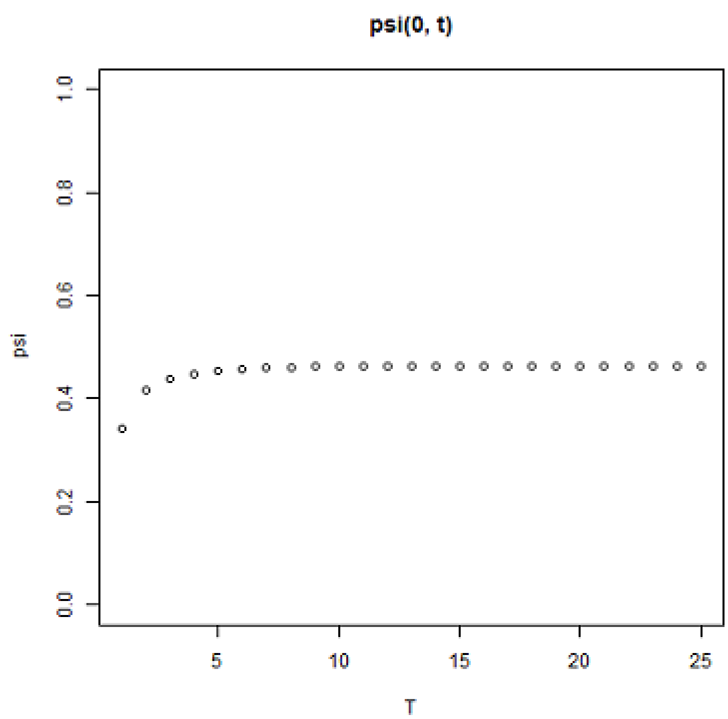
$$f(k, n, p) = \frac{n!}{k!(n-k+1)!} p^k (1-p)^{(n-k+1)}$$

,kai n=5, p=0.1.

O atstitiktinis dydis Z pasiskirstęs pagal binominį skirstinį:

$$f(k, n, p) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{(n-k)}$$

,kai n=3 ir p=0.25. Taigi gauname tokį bankroto tikimybės grafiką:



Visų nagrinėtų atvejų reikšmių lenteles, kai u=0,1,...,15 ir t=1,2,..,25, galima rasti 8.2 skyrelyje.

6.Išvados

Šiame darbe nagrinėjamas rizikos atstatymo modelis, kai žalos yra sveikareikšmės, o tarplaikiai sveikareikšmiai su baigtine atrama. Darbo metu buvo pasiekti šie rezultatai:

- Rasta bankroto tikimybės išraiška pradiniu laiko momentu t=1.
- Išvesta rekurentinė bankroto tikimybės formulė rizikos atstatymo modelyje, kai $t \geq 2$.
- Naudojant gautą formulę ištirti keli atskiri modelio atvejai ir nubraižyti baigtinio laiko bankroto tikimybės grafikai.

Gautą rekurentinę formulę galima naudoti norint greitai ir patogiai rasti bankroto tikimybę rizikos atstatymo modelyje. Formulė lengvai programuojama bet kuria programavimo kalba.

7. Literatūros sąrašas

[1] De Vylder F., Goovaerts M.J., Recursive calculation of finite - time ruin probabilities. Insurance: Mathematics and Economics, 7, 1 - 8, 1988.

[2] E. Sparre Andersen, On the collective theory of risk in case of contagion between claims, Transactions XVth International Congress of Actuaries, II, 219 - 229, 1957.

[3] J.Kubilius, Tikimybių teorija ir matematinė statistika, Mokslas, Vilnius, 1980.

[4] D.C.M. Dickson, Insurance Risk and Ruin. Cambridge university press, 2005.

[5] Jonas Šiaulys. Negyvybės draudimas, http://www.mif.vu.lt/katedros/mak/siaulys.php

[6] Mikosch T., Non-life insurance mathematics, Springer, 2004.

[7] Bingham N.H., Goldie C.M., Teugels J.L., Regular variation, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

8. Priedai

8.1 Programavimo kodas

6 skyrelyje pateikti grafikai buvo gauti naudojant šį programavimo kodą (programuota programavimo kalba R):

```
hi_matrix <- function(Z, theta, u, T) {
D = length(theta$val)
 phi <- function(u,t) {
  if(t <= 0) return(0)
      if(is.na(F[u+1,t])) {
          if(t == 1) {
  F[u+1,t] <<- (1 - CDF(Z, u)) * prob(theta, 1)
     } else {
     # Pirma suma
  A1 = t(theta$prob) %*% (1-CDF(Z, u + 1:D - 1))
     # Antra suma
               A2 = 0
  for(l in 1:D) {
  for(k in 0:(u+l-1)) {
       A2 = A2 + prob(theta, l) * phi(u+l-k, t-l) * prob(Z, k)
                  }
          }
  F[u+1,t] <<- A1 + A2
      }
    }
```

```
  F[u+1,t]
  }
F <- matrix(nrow = T+u, ncol = T)
for(j in 1:T)
     phi(0,j)
for(i in 1:u)
    phi(i,T)
G <- data.frame(F[1:(u+1), 1:T])
names(G) <- paste0("T", 1:T)
rownames(G) <- paste0("U", 0:u)
G
}
D = 5
Z <- Discrete.RV(val = 0:6, prob = rep(1/7, 7))
theta <- Discrete.RV(val = 1:2, prob = rep(1/2, 2))
M1 = phi_matrix(Z, theta, 15, 25)
    png(filename = "pvz1.png", width = 480, height = 480, units =
      "px")
plot(1:25, M1[4,], type = "p", xlab = "T", ylab = "psi", main =
     "psi(3, t)", ylim = c(0, 1))
dev.off()
    phi_matrix_pois <- function(lambda, theta, u, T) {
D = length(theta$val)
phi <- function(u,t) {
```

```
  if(t <= 0) return(0)
  if(is.na(F[u+1,t])) {
    if(t == 1) {
      F[u+1,t] <<- (1 - ppois(u, lambda)) * prob(theta, 1)
    } else {
    # Pirma suma
    A1 = t(theta$prob) %*% (1 - ppois(u + 1:D - 1, lambda))
    # Antra suma
    A2 = 0
    for(l in 1:D) {
    for(k in 0:(u+l-1)) {
    A2 = A2 + prob(theta, l) * phi(u+l-k, t-l) * dpois(k, lambda
    )
    }
    }
        F[u+1,t] <<- A1 + A2
       }
                   }
F[u+1,t]
  }
  F <- matrix(nrow = T+u, ncol = T)
  for(j in 1:T)
    phi(0,j)
  for(i in 1:u)
```

```
    phi(i,T)
  G <- data.frame(F[1:(u+1), 1:T])
  names(G) <- paste0("T", 1:T)
  rownames(G) <- paste0("U", 0:u)
  G
}
theta <- Discrete.RV(val = 1:2, prob = rep(1/2, 2))
lambda = 1
# Poisson
M2 = phi_matrix_pois(lambda, theta, 15, 25)
png(filename = "pvz2.png", width = 480, height = 480, units = "
    px")
plot(1:25, M2[1,], type = "p", xlab = "T", ylab = "psi", main =
    "psi(0, t)", ylim = c(0, 1))
dev.off()
# Binominis. n = 3. p = 0.25
Z2 <- Discrete.RV(val = 0:3, prob = round(dbinom(0:3, 3, 0.25),
    6))
# Theta. n = 5. p = 0.1
theta2 <- Discrete.RV(val = 1:6, prob = round(dbinom(0:5, 5,
    0.1), 6))
M3 = phi_matrix(Z2, theta2, 15, 25)
png(filename = "pvz3.png", width = 480, height = 480, units = "
    px")
```

```
plot(1:25, M3[1,], type = "p", xlab = "T", ylab = "psi", main =
    "psi(0, t)", ylim = c(0, 1))
dev.off()
```

8.2 Reikšmių lentelės

5.1 pavyzdžio reikšmių lentelė (reikšmės suapvalintos):

$\psi(u,t)$																
$t \setminus u$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0.428	0.357	0.285	0.214	0.142	0.071	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0.811	0.688	0.561	0.428	0.29	0.147	0.076	0.051	0.03	0.015	0.005	0	0	0	0	0
3	0.88	0.793	0.691	0.574	0.442	0.304	0.211	0.143	0.089	0.049	0.023	0.012	0.007	0.003	0.001	0
4	0.931	0.868	0.787	0.687	0.571	0.447	0.339	0.249	0.173	0.113	0.072	0.045	0.027	0.014	0.007	0.003
5	0.953	0.908	0.846	0.765	0.669	0.561	0.457	0.362	0.274	0.2	0.141	0.096	0.063	0.039	0.023	0.014
6	0.968	0.935	0.888	0.825	0.746	0.654	0.559	0.465	0.375	0.293	0.222	0.163	0.116	0.0802	0.053	0.034
7	0.977	0.953	0.917	0.867	0.804	0.727	0.643	0.557	0.47	0.386	0.309	0.241	0.182	0.134	0.096	0.067
8	0.984	0.965	0.938	0.899	0.848	0.784	0.713	0.636	0.555	0.473	0.395	0.322	0.256	0.199	0.15	0.111
9	0.988	0.974	0.953	0.922	0.882	0.83	0.769	0.702	0.629	0.553	0.476	0.402	0.332	0.269	0.213	0.165
10	0.991	0.98	0.964	0.94	0.908	0.865	0.815	0.757	0.692	0.623	0.551	0.478	0.408	0.341	0.28	0.225
11	0.993	0.985	0.972	0.954	0.927	0.893	0.851	0.802	0.746	0.684	0.617	0.549	0.48	0.413	0.349	0.29
12	0.995	0.988	0.979	0.964	0.943	0.915	0.88	0.839	0.79	0.736	0.676	0.613	0.547	0.482	0.417	0.356
13	0.996	0.991	0.983	0.972	0.955	0.932	0.904	0.869	0.828	0.78	0.727	0.669	0.609	0.546	0.483	0.421
14	0.997	0.993	0.987	0.978	0.964	0.946	0.923	0.894	0.858	0.817	0.771	0.719	0.664	0.605	0.545	0.484
15	0.997	0.994	0.99	0.982	0.972	0.957	0.938	0.913	0.884	0.849	0.808	0.762	0.712	0.658	0.602	0.543
16	0.998	0.995	0.992	0.986	0.997	0.965	0.95	0.93	0.905	0.875	0.84	0.8	0.755	0.706	0.653	0.599
17	0.998	0.996	0.993	0.989	0.982	0.972	0.959	0.943	0.922	0.897	0.866	0.831	0.792	0.748	0.7	0.649
18	0.998	0.997	0.995	0.991	0.985	0.978	0.967	0.953	0.936	0.915	0.889	0.859	0.824	0.784	0.741	0.694
19	0.999	0.998	0.996	0.993	0.988	0.982	0.973	0.962	0.948	0.93	0.908	0.881	0.851	0.816	0.778	0.735
20	0.999	0.998	0.996	0.994	0.991	0.985	0.978	0.969	0.957	0.942	0.923	0.901	0.875	0.844	0.81	0.771
21	0.999	0.998	0.997	0.995	0.992	0.988	0.982	0.975	0.965	0.952	0.936	0.917	0.894	0.868	0.837	0.803
22	0.999	0.999	0.998	0.996	0.994	0.99	0.986	0.979	0.971	0.96	0.947	0.931	0.911	0.888	0.862	0.831
23	0.999	0.999	0.998	0.997	0.995	0.992	0.988	0.983	0.976	0.967	0.956	0.942	0.926	0.906	0.882	0.856
24	0.999	0.999	0.998	0.997	0.996	0.994	0.99	0.986	0.98	0.973	0.964	0.952	0.938	0.92	0.9	0.877
25	0.999	0.999	0.999	0.998	0.996	0.995	0.992	0.989	0.984	0.978	0.97	0.96	0.948	0.933	0.916	0.895

5.2 pavyzdžio reikšmių lentelė (reikšmės suapvalintos):

$\psi(u,t)$																
$t \setminus u$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0.316	0.132	0.04	0.009	0.001	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0.472	0.203	0.07	0.021	0.005	0.001	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0.517	0.244	0.095	0.032	0.01	0.002	0.001	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0.543	0.27	0.113	0.042	0.014	0.004	0.001	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0.56	0.288	0.127	0.05	0.018	0.006	0.002	0.001	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0.571	0.302	0.138	0.057	0.022	0.008	0.003	0.001	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0.58	0.312	0.146	0.063	0.026	0.01	0.003	0.001	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0.586	0.32	0.154	0.068	0.029	0.012	0.005	0.002	0.001	0	0	0	0	0	0	0
9	0.592	0.327	0.159	0.073	0.032	0.013	0.005	0.002	0.001	0	0	0	0	0	0	0
10	0.595	0.332	0.164	0.076	0.034	0.015	0.006	0.003	0.001	0	0	0	0	0	0	0
11	0.598	0.336	0.168	0.079	0.035	0.016	0.007	0.003	0.001	0	0	0	0	0	0	0
12	0.601	0.334	0.172	0.082	0.038	0.012	0.007	0.003	0.001	0	0	0	0	0	0	0
13	0.604	0.343	0.174	0.084	0.039	0.012	0.008	0.003	0.002	0.001	0	0	0	0	0	0
14	0.605	0.345	0.172	0.086	0.04	0.012	0.008	0.004	0.002	0.001	0	0	0	0	0	0
15	0.606	0.347	0.179	0.088	0.042	0.019	0.009	0.004	0.002	0.001	0	0	0	0	0	0
16	0.608	0.349	0.18	0.089	0.043	0.02	0.009	0.004	0.002	0.001	0	0	0	0	0	0
17	0.609	0.35	0.182	0.09	0.0.043	0.02	0.009	0.004	0.002	0.001	0	0	0	0	0	0
18	0.61	0.352	0.184	0.092	0.045	0.021	0.01	0.005	0.002	0.001	0	0	0	0	0	0
19	0.611	0.353	0.185	0.093	0.045	0.021	0.01	0.005	0.002	0.001	0	0	0	0	0	0
20	0.611	0.354	0.186	0.093	0.046	0.022	0.01	0.005	0.002	0.001	0	0	0	0	0	0
21	0.612	0.355	0.186	0.094	0.046	0.023	0.011	0.005	0.002	0.001	0	0	0	0	0	0
22	0.612	0.356	0.187	0.094	0.047	0.023	0.011	0.005	0.003	0.001	0	0	0	0	0	0
23	0.613	0.356	0.188	0.096	0.048	0.023	0.011	0.006	0.003	0.001	0	0	0	0	0	0
24	0.613	0.358	0.188	0.096	0.048	0.023	0.011	0.006	0.003	0.001	0	0	0	0	0	0
25	0.614	0.358	0.189	0.096	0.048	0.024	0.011	0.006	0.003	0.001	0	0	0	0	0	0

5.3 pavyzdžio reikšmių lentelė (reikšmės suapvalintos):

$\psi(u,t)$																
$t \setminus u$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0.341	0.092	0.009	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0.416	0.122	0.019	0.002	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0.438	0.138	0.025	0.003	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0.449	0.147	0.029	0.004	0.001	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0.454	0.152	0.032	0.005	0.001	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0.458	0.155	0.034	0.006	0.001	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0.46	0.157	0.035	0.007	0.001	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0.462	0.158	0.036	0.007	0.001	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0.462	0.159	0.037	0.007	0.001	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0.463	0.16	0.03	0.007	0.001	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0.464	0.16	0.037	0.007	0.001	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0.464	0.161	0.038	0.007	0.001	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0.464	0.161	0.038	0.007	0.002	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	0.464	0.161	0.038	0.007	0.002	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	0.464	0.162	0.038	0.008	0.002	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	0.464	0.162	0.038	0.008	0.002	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17	0.464	0.162	0.038	0.008	0.002	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18	0.465	0.162	0.038	0.008	0.002	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	0.465	0.162	0.038	0.008	0.002	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	0.465	0.162	0.038	0.008	0.002	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
21	0.465	0.162	0.038	0.008	0.002	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
22	0.465	0.162	0.038	0.008	0.002	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
23	0.465	0.162	0.038	0.008	0.002	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
24	0.465	0.163	0.038	0.008	0.002	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
25	0.465	0.162	0.038	0.008	0.002	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0