VILNIAUS UNIVERSITETAS

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

Magistro darbas

Atsitiktinė skirtingų $\mathcal{O}$-eksponentinių skirstinių sąsūka

Random convolution of different $\mathcal{O}$-exponential distributions

Simona Paškauskaitė

VILNIUS 2016

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
MATEMATINĖS ANALIZĖS KATEDRA

Darbo vadovas prof. dr. Jonas Šiaulys
Darbo recenzentas doc. dr. Aleksandras Ernestas Plikusas

Darbas apgintas 2016 m. sausio 14 d.
Darbas įvertintas ______________

Registravimo NR. ______________
2016-01-04 ____________________

Atsitiktinė skirtingų $\mathcal{O}$ - eksponentinių skirstinių sąsūka

Santrauka

Tarkime, kad ξ_1, ξ_2, ... yra nepriklausomi, neneigiami atsitiktiniai dydžiai su pasiskirstymo funkcijomis $F_{\xi_1}, F_{\xi_2}, \ldots$. Tarkime, kad η - neneigiamas, neišsigimęs taške 0, sveikareikšmis atsitiktinis dydis, nepriklausantis nuo $\{\xi_1, \xi_2, ...\}$. Pažymėkime $S_0 = 0$, $S_n = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n$, $n \in \mathbb{N}$, ir $S_\eta = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_\eta$. Pagrindinis šio darbo tikslas - rasti sąlygas atsitiktiniams dydžiams $\xi_1, \xi_2, ...$ ir η, kurioms galiojant pasiskirstymo funkcija F_{S_η} priklauso klasei $\mathcal{OL}$.

Raktiniai žodžiai: $\mathcal{O}$ - eksponentinis skirstinys, atsitiktinė sąsūka, atsitiktinė suma, nevienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai

Random convolution of different $\mathcal{O}$-exponential distributions

Abstract

Assume that ξ_1, ξ_2, ... are independent non-negative random variables with distribution functions $F_{\xi_1}, F_{\xi_2}, \ldots$. Suppose that η is a non-negative non-degenerate at zero integer-valued random variable independent of $\{\xi_1, \xi_2, ...\}$. Assume that $S_0 = 0$, $S_n = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n$, $n \in \mathbb{N}$, and $S_\eta = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_\eta$. The main goal of this paper is to consider the conditions for the random variables $\xi_1, \xi_2, ...$ and η under which the distribution function F_{S_η} remains in the class $\mathcal{OL}$.

Key words: $\mathcal{O}$ - exponential distribution, random convolution, random sum, non-identically distributed random variables

Turinys

1 Įvadas

Šiame darbe nagrinėjami atsitiktiniai dydžiai, kurių pasiskirstymo funkcijos priklauso $\mathcal{O}$ - eksponentinių skirstinių klasei (žymima $\mathcal{OL}$). Skirstinių klasė $\mathcal{OL}$ yra natūralus skirstinių klasių $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}(\gamma)$ ir $\mathcal{D}$ apibendrinimas. Klasė $\mathcal{OL}$ buvo įvesta ir pradėta nagrinėti Shimura, Watanabe ir Yamamuro darbuose (žiūrėkite [11], [12]).

1.1 Apibrėžimas. Pasiskirstymo funkcija F yra $\mathcal{O}$ - eksponentinė ($F \in \mathcal{OL}$), jei kiekvienam fiksuotam $y \in \mathbb{R}$:

$$0 < \liminf_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(x)} \leq \limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(x)} < \infty, \tag{1.1}$$

kur $\overline{F}(x) = 1 - F(x)\ \forall\ x \in \mathbb{R}$.

1.2 Apibrėžimas. Tarikime, $\gamma > 0$. Sakoma, jog pasiskirstymo funkcija F priklauso klasei $\mathcal{L}(\gamma)$ (eksponentinių skirstinių klasei), jei kiekvienam fiksuotam $y \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(x)} = e^{-\gamma y}.$$

1.3 Apibrėžimas. Sakoma, jog pasiskirstymo funkcija F priklauso klasei $\mathcal{L}$ (ilgauodegių skirstinių klasei), jei kiekvienam fiksuotam $y \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(x)} = 1.$$

1.4 Apibrėžimas. Pasiskirstymo funkcija F priklauso klasei $\mathcal{D}$, jei bet kuriam fiksuotam $y \in (0,1)$:

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} < \infty.$$

Tarp klasių $\mathcal{D}$, $\mathcal{L}(\gamma)$ ir $\mathcal{OL}$ galioja tokie sąryšiai:

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{OL}, \qquad \mathcal{L} \subset \mathcal{OL}, \qquad \bigcup_{\gamma\geq 0} \mathcal{L}(\gamma) \subset \mathcal{OL}.$$

Standartiniais metodais (žiūrėkite, pavyzdžiui, [2] monografiją 1 - 2 dalis) galima parodyti, kad (1.1) nelygybės ekvivalenčios nelygybei:

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(x-1)}{\overline{F}(x)} < \infty.$$

Tarkime, kad $\xi_1, \xi_2, \ldots$ yra nepriklausomi, nebūtinai vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai su pasiskirstymo funkcijomis $F_{\xi_1}, F_{\xi_2}, \ldots$, o η - neneigiamas, neišsigimęs taške 0, sveikareikšmis atsitiktinis dydis, nepriklausantis nuo $\{\xi_1, \xi_2, \ldots\}$.

Pažymėkime $S_0 = 0$, $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$, $n \in \mathbb{N}$, ir $S_\eta = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_\eta$. Pagrindinis šio darbo tikslas - rasti sąlygas atsitiktiniams dydžiams $\xi_1, \xi_2, \ldots$ ir η, kurioms galiojant pasiskirstymo funkcija:

$$\begin{aligned} F_{S_\eta}(x) &:= \mathbf{P}(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_\eta \leq x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(\eta = n)\mathbf{P}(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n \leq x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(\eta = n)(F_{\xi_1} * F_{\xi_2} * \ldots * F_{\xi_n})(x) \end{aligned}$$

priklauso klasei $\mathcal{OL}$. Čia $F_{\xi_1} * F_{\xi_2} * \ldots * F_{\xi_n}$ žymi atsitiktinių dydžių $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ pasiskirstymo funkcijų sąsūką. Sąsūkos elgesio tyrinėjimai labai svarbūs tokioms tikimybių teorijos sritims kaip besišakojantys procesai (branching processes), rizikos teorija, eilių teorija (queueing theory) ir kt.

Pagrindinis šaltinis, kuriuo daugiausiai buvo remtasi šiame darbe - J. Šiaulio ir S. Danilenko straipsnis "Random convolution of $\mathcal{O}$ - exponential distributions" [5]. Jame įrodyta, jog tuo atveju, kai atsitiktiniai dydžiai $\xi_1, \xi_2, \ldots$ yra nepriklausomos $\mathcal{O}$ - eksponentinio atsitiktinio dydžio ξ kopijos, atsitiktinės šių dydžių sumos S_η pasiskirstymo funkcija yra $\mathcal{O}$ - eksponentinė. Šiame darbe suformuluoti ir įrodyti panašūs rezultatai, tik nėra reikalaujama, kad nagrinėjami atsitiktiniai dydžiai būtų vienodai pasiskirstę.

1.1 Teorema. *Sakykime, $\xi_1, \xi_2, \ldots$ yra nepriklausomi, neneigiami atsitiktiniai dydžiai, o η - sveikareikšmis, neneigiamas, neišsigimęs taške 0 ir nepriklausantis nuo $\{\xi_1, \xi_2, \ldots\}$ atsitiktinis dydis. Jei atsitiktiniai dydžiai $\xi_1, \xi_2, \ldots$ tenkina tokias sąlygas:*

(1) $F_{\xi_\kappa} \in \mathcal{OL}$ *kuriam nors* $\kappa \in supp(\eta)\backslash\{0\} = \{n \in \mathbb{N} : \boldsymbol{P}(\eta = n) > 0\}$,

(2) Bet kuriam $k \in \{1, 2, \ldots, \kappa - 1\}$ $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\overline{F_{\xi_k}}(x)}{\overline{F_{\xi_\kappa}}(x)} = 0$ *arba* $F_{\xi_k} \in \mathcal{OL}$,

(3) $\sup\limits_{x\geq 0} \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \frac{\overline{F_{\xi_{\kappa+k}}}(x-1)}{\overline{F_{\xi_{\kappa+k}}}(x)} < \infty$,

tai $F_{S_\eta} \in \mathcal{OL}$.

1.2 Teorema. *Sakykime,* $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_D$ *yra nepriklausomi, neneigiami atsitiktiniai dydžiai, o* η *- sveikareikšmis, neneigiamas, neišsigimęs taške 0 ir nepriklausantis nuo* $\{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_D\}$ *atsitiktinis dydis. Jei patenkintos sąlygos:*

(1) $\boldsymbol{P}(\eta \leq D) = 1$,

(2) $F_{\xi_\kappa} \in \mathcal{OL}$ *kuriam nors* $\kappa \in supp(\eta)\backslash\{0\}$,

(3) Bet kuriam $k \in \{1, 2, ..., D\}$ $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\overline{F_{\xi_k}}(x)}{\overline{F_{\xi_\kappa}}(x)} = 0$ *arba* $F_{\xi_k} \in \mathcal{OL}$,

tai $F_{S_\eta} \in \mathcal{OL}$.

1.3 Teorema. *Tegul* $\xi_1, \xi_2, ...$ *yra nepriklausomi, neneigiami atsitiktiniai dydžiai, turintys pasiskirstymo funkcijas* $F_{\xi_1}, F_{\xi_2}, ...$ *Tarkime, kad* η *- neneigiamas, neišsigimęs taške 0, sveikareikšmis ir nepriklausantis nuo* $\{\xi_1, \xi_2, ...\}$ *atsitiktinis dydis su pasiskirstymo funkcija* F_η. *Jei tenkinamos šios sąlygos:*

(1) $F_{\xi_\kappa} \in \mathcal{OL}$ *kuriam nors* $\kappa \in supp(\eta)\backslash\{0\}$,

(2) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\overline{F_{\xi_k}}(x)}{\overline{F_{\xi_\kappa}}(x)} = 0$ *arba* $F_{\xi_k} \in \mathcal{OL}$ *bet kuriam* $k \in \{1, 2, ..., \kappa - 1\}$,

(3) $\limsup\limits_{k\to\infty} \frac{1}{k}\sum\limits_{l=1}^{k} \sup_x \left(\overline{F}_{\xi_{\kappa+l}}(x-1) - \overline{F}_{\xi_{\kappa+l}}(x)\right) < 1$,

(4) $\limsup\limits_{x\to\infty} \sup\limits_{k\geq 1} \frac{\overline{F_{\xi_{\kappa+k}}}(x-1)}{\overline{F_{\xi_{\kappa+k}}}(x)} < \infty$,

(5) $\overline{F}_\eta(\delta x) = O(\sqrt{x}\overline{F}_{\xi_\kappa}(x))$ *bet kuriam* $\delta \in (0, 1)$,

tai $F_{S_\eta} \in \mathcal{OL}$.

1.4 Teorema. *Sakykime,* $\xi_1, \xi_2, ...$ *yra nepriklausomi, vienodai pasiskirstę, neneigiami atsitiktiniai dydžiai su pasiskirstymo funkcija* $F_\xi \in \mathcal{OL}$. *Tada, bet kuriam neneigiamam, neišsigimusiam taške 0, sveikareikšmiam atsitikniam dydžiui* η, *nepriklausančiam nuo* $\{\xi_1, \xi_2, ...\}$, $F_{S_\eta} \in \mathcal{OL}$.

Sekančiuose darbo skyriuose pateikiama glausta litaratūros, susijusios su nagrinėjama tematika, apžvalga, pagalbinės lemos ir pagrindinių darbo rezultatų įrodymai.

2 Literatūros apžvalga

Yra nemažai mokslinių straipsnių, nagrinėjančių atsitiktinių dydžių skirstinių sąsūkų savybes. Dažniausiai nagrinėjamos kiek siauresnės skirstinių klasės lyginant su $\mathcal{OL}$. Pavyzdžiui, klasė $\mathcal{D}$ arba klasė $\mathcal{L}(\gamma)$.

Cline [3] ir [4] darbuose teigė, kad $F_{S_\eta} \in \mathcal{L}(\gamma)$, jei $F_\xi \in \mathcal{L}(\gamma)$ ir η yra bet koks neneigiamas, neišsigimęs taške 0, sveikareikšmis atsitiktinis dydis. Tačiau Albin (žiūrėkite [1]) pastebėjo, jog Cline rezultatai nėra teisingi. Anot Albin, $F_{S_\eta} \in \mathcal{L}(\gamma)$, jei $F_\xi \in \mathcal{L}(\gamma)$ ir $\mathbf{E}e^{\delta\eta} < \infty$ bet kuriam $\delta > 0$. Visgi Albin įrodymai taip pat nėra teisingi visiems atvejams. Tai parodė Watanabe ir Yamamuro (žiūrėkite [12], 6.1 Pastabą).

Leipus ir Šiaulys darbe [8] nurodė sąlygas, kurioms galiojant, iš fakto, jog $F \in \mathcal{D}$, $F \in \mathcal{L}$ arba $F \in \mathcal{D} \cap \mathcal{L}$, išplaukia, kad pasiskirstymo funkcijos F atsitiktinė sąsūka su savimi taip pat priklauso atitinkamai klasei. Panašių rezultatų klasei $\mathcal{L}$ galime rasti ir Xu, Foss ir Wang darbe (žiūrėkite [13]).

Iš klasių $\mathcal{L}$, $\mathcal{D}$ apibrėžimų matosi, kad uždarumui tirti įvairių operacijų atžvilgiu labai praverčia asimptotinės skirstinių uodegų savybės. Pavyzdžiui, Ng, Tang ir Yang darbe [9] nagrinėjo asimptotines nepriklausomų atsitiktinių dydžių dalinių sumų maksimumo uodegos funkcijų savybes. Šiame straipsnyje gauti rezultatai parodė, jog kai kuriose sunkiauodegių skirstinių klasėse (jų tarpe ir klasėse $\mathcal{L}$, $\mathcal{D}$) visiems $k, n \in \mathbb{N}$ galioja sąryšis:

$$\mathbf{P}\left(\max_{1\le k\le n} S_k > x\right) \sim \mathbf{P}(S_n > x).$$

Klasė $\mathcal{OL}$ yra pati plačiausia ir apima visas šiame skyriuje paminėtas klases. Be to, nėra daug rezultatų apie atsitiktinės sąsūkos savybes šioje klasėje. Taigi klasė $\mathcal{OL}$ pakankamai atvira gilesniam nagrinėjimui ir tolimesniems tyrimams.

Prieš įrodant pagrindines teoremas, kurios buvo suformuluotos įvade, sekančiame skyriuje pateikiamos pagalbinės lemos.

3 Pagalbinės lemos

1.3 Teoremos įrodymui reikia vienos koncentracijos funkcijos savybės. Toliau pateikiamas koncentracijos funkcijos apibrėžimas ir mums reikalinga *Kolmogorov - Rogozin* nelygybė. Jos įrodymą bei daugiau koncentracijos funkcijos savybių ir nelygybių, skirtų nepriklausomų atsitiktinių dydžių sumos koncentracijos funkcijai įvertinti, galima rasti [10] knygoje (žiūrėkite 63 - 76 psl.).

3.1 Apibrėžimas. Atsitiktinio dydžio X *Lévy* koncentracijos funkcija $Q(X;\lambda)$ apibrėžiama lygybe:

$$Q(X;\lambda) = \sup_x \mathbf{P}(x \le X \le x+\lambda),$$

čia $\lambda \ge 0$. Akivaizdu, kad $Q(X;\lambda)$ yra nemažėjanti λ atžvilgiu funkcija, tenkinanti nelygybes $0 \le Q(X;\lambda) \le 1$ kiekvienam $\lambda \ge 0$.

3.1 Lema (Kolmogorov-Rogozin nelygybė, [10], 2.15 Teorema). *Tegul $X_1, ..., X_n$ yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Tegul $\lambda_1, ..., \lambda_n$ yra tokie teigiami skaičiai, kad $\lambda_k \le \lambda$ $(k = 1, ..., n)$. Tada:*

$$Q(S_n,\lambda) \le A\lambda \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 \Big(1 - Q(X_k;\lambda_k)\Big) \right\}^{-\frac{1}{2}},$$

kur A - absoliuti, teigiama konstanta.

Įrodydami pagrindinius darbo rezultatus laikysime, kad $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = \lambda$. Tokiu atveju gauname:

$$Q(S_n,\lambda) \le A \left\{ \sum_{k=1}^n \Big(1 - Q(X_k;\lambda)\Big) \right\}^{-\frac{1}{2}}. \tag{3.1}$$

Ne mažiau svarbi ir kita lema. Jos įrodymą galima rasti [6] darbe (žr. (2.12) nelygybę).

3.2 Lema. *Sakykime, F ir G yra dvi pasiskirstymo funkcijos, tenkinančios sąlygą $\overline{F}(x) > 0$, $\overline{G}(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}$. Tada visiems $x \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}$ ir $t > 0$ galioja nelygybė:*

$$\frac{\overline{F * G}(x-t)}{\overline{F * G}(x)} \le \max\left\{ \sup_{y \ge v} \frac{\overline{F}(y-t)}{\overline{F}(y)}, \sup_{y \ge x-v+t} \frac{\overline{G}(y-t)}{\overline{G}(y)} \right\}.$$

Toliau suformuluosime ir įrodysime keletą lemų, kurios taip pat bus reikalingos pagrindinių teoremų įrodymui.

3.3 Lema. *Jeigu atsitiktiniai dydžiai ξ_1, ξ_2 yra nepriklausomi, $F_{\xi_1} \in \mathcal{OL}$, o ξ_2 turi baigtinę atramą, tai $F_{\xi_1} * F_{\xi_2} \in \mathcal{OL}$.*

Įrodymas. Iš tiesų, jeigu $supp(\xi_2) = [0, D]$, tai:

$$\begin{aligned}
\overline{F_{\xi_1} * F_{\xi_2}}(x) &= \mathbf{P}(\xi_1 + \xi_2 > x) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{P}(\xi_1 > x-y) d\mathbf{P}(\xi_2 \le y) \\
&= \int_{[0,D]} \overline{F_{\xi_1}}(x-y) dF_{\xi_2}(y)
\end{aligned}$$

visiems $x > 0$.

Iš čia:

$$
\begin{aligned}
\frac{\overline{F_{\xi_1} * F_{\xi_2}}(x-1)}{\overline{F_{\xi_1} * F_{\xi_2}}(x)} &= \frac{\displaystyle\int_{[0,D]} \overline{F_{\xi_1}}(x-1-y)dF_{\xi_2}(y)}{\displaystyle\int_{[0,D]} \overline{F_{\xi_1}}(x-y)dF_{\xi_2}(y)} \\
&= \frac{\displaystyle\int_{[0,D]} \overline{F_{\xi_1}}(x-1-y)\frac{\overline{F_{\xi_1}}(x-y)}{\overline{F_{\xi_1}}(x-y)}dF_{\xi_2}(y)}{\displaystyle\int_{[0,D]} \overline{F_{\xi_1}}(x-y)dF_{\xi_2}(y)} \\
&\leq \sup_{z \geq x-D} \frac{\overline{F_{\xi_1}}(z-1)}{\overline{F_{\xi_1}}(z)}.
\end{aligned}
$$

Vadinasi,

$$
\begin{aligned}
\limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{F_{\xi_1} * F_{\xi_2}}(x-1)}{\overline{F_{\xi_1} * F_{\xi_2}}(x)} &\leq \limsup_{x\to\infty} \sup_{z \geq x-D} \frac{\overline{F_{\xi_1}}(z-1)}{\overline{F_{\xi_1}}(z)} \\
&= \limsup_{y\to\infty} \frac{\overline{F_{\xi_1}}(y-1)}{\overline{F_{\xi_1}}(y)} < \infty.
\end{aligned}
$$

Taigi $F_{\xi_1} * F_{\xi_2} \in \mathcal{OL}$.

□

3.4 Lema. *Jeigu ξ_1, ξ_2 yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, $F_{\xi_1} \in \mathcal{OL}$ ir*

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{F_{\xi_2}}(x)}{\overline{F_{\xi_1}}(x)} = 0,$$

tai $F_{\xi_1} * F_{\xi_2} \in \mathcal{OL}$.

Įrodymas. Atsitiktinio dydžio ξ_2 atrama gali būti baigtinė, gali būti ir begalinė. Jeigu atsitiktinio dydžio ξ_2 atrama baigtinė, tai $F_{\xi_1} * F_{\xi_2} \in \mathcal{OL}$ pagal *3.3 Lemą*. Pastebim tik, kad šiuo atveju irgi

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{F_{\xi_2}}(x)}{\overline{F_{\xi_1}}(x)} = 0.$$

Toliau tarkime, jog *supp*$(\xi_2) = [0, \infty)$, t.y. $\overline{F_{\xi_2}}(x) > 0$ visiems $x \in \mathbb{R}$. Bet kuriam $x > 0$

turime:

$$\overline{F_{\xi_1} * F_{\xi_2}}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{F_{\xi_1}}(x-y) dF_{\xi_2}(y)$$
$$= \int_{[0,\infty)} \overline{F_{\xi_1}}(x-y) dF_{\xi_2}(y).$$

Vadinasi, bet kuriems $0 < M < x-1$ turime:

$$\begin{aligned}\overline{F_{\xi_1} * F_{\xi_2}}(x-1) &= \left(\int_{[0,x-M]} + \int_{(x-M,\infty)}\right)\overline{F_{\xi_1}}(x-1-y) dF_{\xi_2}(y)\\ &\leq \int_{[0,x-M]} \overline{F_{\xi_1}}(x-1-y)\frac{\overline{F_{\xi_1}}(x-y)}{\overline{F_{\xi_1}}(x-y)} dF_{\xi_2}(y) + \overline{F_{\xi_2}}(x-M)\\ &\leq \sup_{z\geq M} \frac{\overline{F_{\xi_1}}(z-1)}{\overline{F_{\xi_1}}(z)} \int_{[0,x-M]} \overline{F_{\xi_1}}(x-y) dF_{\xi_2}(y) + \overline{F_{\xi_2}}(x-M), \qquad (3.2)\end{aligned}$$

$$\overline{F_{\xi_1} * F_{\xi_2}}(x) \geq \int_{[0,x-M]} \overline{F_{\xi_1}}(x-y) dF_{\xi_2}(y), \qquad (3.3)$$

$$\begin{aligned}\overline{F_{\xi_1} * F_{\xi_2}}(x) &\geq \int_{(M,\infty)} \overline{F_{\xi_1}}(x-y) dF_{\xi_2}(y)\\ &\geq \overline{F_{\xi_1}}(x-M) \int_{(M,\infty)} dF_{\xi_2}(y)\\ &= \overline{F_{\xi_1}}(x-M)\overline{F_{\xi_2}}(M). \qquad (3.4)\end{aligned}$$

Iš įverčių (3.2), (3.3) ir (3.4) gauname, kad bet kuriems $0 < M < x-1$:

$$\begin{aligned}\frac{\overline{F_{\xi_1} * F_{\xi_2}}(x-1)}{\overline{F_{\xi_1} * F_{\xi_2}}(x)} &\leq \frac{1}{\overline{F_{\xi_1} * F_{\xi_2}}(x)} \sup_{z\geq M} \frac{\overline{F_{\xi_1}}(z-1)}{\overline{F_{\xi_1}}(z)} \int_{[0,x-M]} \overline{F_{\xi_1}}(x-y) dF_{\xi_2}(y)\\ &+ \frac{\overline{F_{\xi_2}}(x-M)}{\overline{F_{\xi_1} * F_{\xi_2}}(x)}\\ &\leq \sup_{z\geq M} \frac{\overline{F_{\xi_1}}(z-1)}{\overline{F_{\xi_1}}(z)} \frac{\int_{[0,x-M]} \overline{F_{\xi_1}}(x-y) dF_{\xi_2}(y)}{\int_{[0,x-M]} \overline{F_{\xi_1}}(x-y) dF_{\xi_2}(y)}\\ &+ \frac{\overline{F_{\xi_2}}(x-M)}{\overline{F_{\xi_1}}(x-M)\overline{F_{\xi_2}}(M)}\end{aligned}$$

$$\leq \sup_{z \geq M} \frac{\overline{F_{\xi_1}}(z-1)}{\overline{F_{\xi_1}}(z)} + \frac{\overline{F_{\xi_2}}(x-M)}{\overline{F_{\xi_1}}(x-M)\overline{F_{\xi_2}}(M)}.$$

Todėl, bet kuriam $M > 0$:

$$\limsup_{x \to \infty} \frac{\overline{F_{\xi_1} * F_{\xi_2}}(x-1)}{\overline{F_{\xi_1} * F_{\xi_2}}(x)} \leq \sup_{z \geq M} \frac{\overline{F_{\xi_1}}(z-1)}{\overline{F_{\xi_1}}(z)},$$

o iš čia:

$$\limsup_{x \to \infty} \frac{\overline{F_{\xi_1} * F_{\xi_2}}(x-1)}{\overline{F_{\xi_1} * F_{\xi_2}}(x)} \leq \limsup_{z \to \infty} \frac{\overline{F_{\xi_1}}(z-1)}{\overline{F_{\xi_1}}(z)} < \infty.$$

Taigi $F_{\xi_1} * F_{\xi_2} \in \mathcal{OL}$. $\square$

3.5 Lema. *Jeigu ξ_1, ξ_2 yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, $F_{\xi_1} \in \mathcal{OL}$ ir $F_{\xi_2} \in \mathcal{OL}$, tai $F_{\xi_1} * F_{\xi_2} \in \mathcal{OL}$.*

Įrodymas. Iš *3.2 Lemos* turime:

$$\frac{\overline{F_{\xi_1} * F_{\xi_2}}(x-1)}{\overline{F_{\xi_1} * F_{\xi_2}}(x)} \leq \max\left\{ \sup_{z \geq M} \frac{\overline{F_{\xi_1}}(z-1)}{\overline{F_{\xi_1}}(z)}, \sup_{z \geq x-M+1} \frac{\overline{F_{\xi_2}}(z-1)}{\overline{F_{\xi_2}}(z)} \right\}$$

bet kuriems $0 < M < \infty$.

Vadinasi,

$$\begin{aligned} \limsup_{x \to \infty} \frac{\overline{F_{\xi_1} * F_{\xi_2}}(x-1)}{\overline{F_{\xi_1} * F_{\xi_2}}(x)} &\leq \max\left\{ \sup_{z \geq M} \frac{\overline{F_{\xi_1}}(z-1)}{\overline{F_{\xi_1}}(z)}, \limsup_{x \to \infty} \sup_{z \geq x-M+1} \frac{\overline{F_{\xi_2}}(z-1)}{\overline{F_{\xi_2}}(z)} \right\} \\ &= \max\left\{ \sup_{z \geq M} \frac{\overline{F_{\xi_1}}(z-1)}{\overline{F_{\xi_1}}(z)}, \limsup_{y \to \infty} \frac{\overline{F_{\xi_2}}(y-1)}{\overline{F_{\xi_2}}(y)} \right\} \end{aligned}$$

bet kuriam $M > 0$.

Perėję prie ribos, kai $M \to \infty$, gauname:

$$\limsup_{x \to \infty} \frac{\overline{F_{\xi_1} * F_{\xi_2}}(x-1)}{\overline{F_{\xi_1} * F_{\xi_2}}(x)} \leq \max\left\{ \limsup_{M \to \infty} \frac{\overline{F_{\xi_1}}(M-1)}{\overline{F_{\xi_1}}(M)}, \limsup_{y \to \infty} \frac{\overline{F_{\xi_2}}(y-1)}{\overline{F_{\xi_2}}(y)} \right\} < \infty,$$

nes F_{ξ_1} ir F_{ξ_2} yra iš klasės $\mathcal{OL}$. Taigi $F_{\xi_1} * F_{\xi_2} \in \mathcal{OL}$. $\square$

3.6 Lema. *Sakykime, $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, $F_{\xi_1} \in \mathcal{OL}$ ir kiekvienam $k \in \{2, 3, ..., n\}$:*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\overline{F_{\xi_k}}(x)}{\overline{F_{\xi_1}}(x)} = 0$$

arba

$$F_{\xi_k} \in \mathcal{OL}.$$

Tada $F_{\xi_1} * F_{\xi_2} * ... * F_{\xi_n} \in \mathcal{OL}$.

Įrodymas. Remsimės indukcijos metodu. Kai $n = 2$, įrodymas išplaukia iš prieš tai įrodytų lemų. Tarkime, jog lema teisinga, kai $n = m$. Parodysime, kad ji teisinga ir kai $n = m + 1$. Iš indukcijos prielaidos turime, kad:

$$F_{\xi_1} * F_{\xi_2} * ... * F_{\xi_m} \in \mathcal{OL},$$

o iš lemos sąlygų turime, kad $F_{\xi_{m+1}} \in \mathcal{OL}$ arba

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F_{\xi_{m+1}}}(x)}{\overline{F_{\xi_1} * F_{\xi_2} * ... * F_{\xi_m}}(x)} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F_{\xi_{m+1}}}(x)}{\mathbf{P}(\xi_1 + ... + \xi_m > x)} \\ &\leq \lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F_{\xi_{m+1}}}(x)}{\mathbf{P}(\xi_1 > x)} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F_{\xi_{m+1}}}(x)}{\overline{F_{\xi_1}}(x)} = 0. \end{aligned}$$

Remdamiesi tuo, jog lema teisinga, kai $n = 2$, gauname:

$$(F_{\xi_1} * F_{\xi_2} * ... * F_{\xi_m}) * F_{\xi_{m+1}} = F_{\xi_1} * F_{\xi_2} * ... * F_{\xi_m} * F_{\xi_{m+1}} \in \mathcal{OL}.$$

Taigi lema teisinga visiems n. □

4 Pagrindinių rezultatų įrodymai

Šiame skyriuje pateikiami detalūs rezultatų, suformuluotų darbo įvade, įrodymai.

1.1 Teoremos įrodymas. Iš *3.6 Lemos* turime, kad $F_{S_\kappa} \in \mathcal{OL}$. T.y.:

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{F_{S_\kappa}}(x-1)}{\overline{F_{S_\kappa}}(x)} < \infty. \tag{4.1}$$

Iš šios nelygybės išplaukia, kad:

$$\sup_{x\geq 0} \frac{\overline{F_{S_\kappa}}(x-1)}{\overline{F_{S_\kappa}}(x)} \leq c_1 \tag{4.2}$$

kažkokiai teigiamai konstantai c_1.

Aišku, kad bet kuriam $x \geq 0$:

$$\mathbf{P}(S_\eta > x) = \mathbf{P}(S_\eta > x, \eta \leq \kappa) + \mathbf{P}(S_\eta > x, \eta > \kappa).$$

Todėl visiems $x \geq 1$:

$$\frac{\mathbf{P}(S_\eta > x-1)}{\mathbf{P}(S_\eta > x)} = J_1(x) + J_2(x), \tag{4.3}$$

kur

$$\begin{aligned} J_1(x) &= \frac{\mathbf{P}(S_\eta > x-1, \eta \leq \kappa)}{\mathbf{P}(S_\eta > x)}, \\ J_2(x) &= \frac{\mathbf{P}(S_\eta > x-1, \eta > \kappa)}{\mathbf{P}(S_\eta > x)}. \end{aligned}$$

Kai $x \geq 1$, turime:

$$\begin{aligned} J_1(x) &= \frac{\sum_{n=1}^{\kappa} \mathbf{P}(S_n > x-1)\mathbf{P}(\eta = n)}{\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(S_n > x)\mathbf{P}(\eta = n)} \\ &\leq \frac{\sum_{n=1}^{\kappa} \mathbf{P}(S_\kappa > x-1)\mathbf{P}(\eta = n)}{\mathbf{P}(S_\kappa > x)\mathbf{P}(\eta = \kappa)} \\ &= \frac{\mathbf{P}(S_\kappa > x-1)}{\mathbf{P}(S_\kappa > x)} \cdot \frac{\mathbf{P}(\eta \leq \kappa)}{\mathbf{P}(\eta = \kappa)}, \end{aligned}$$

nes $\kappa \in supp(\eta)$, $\kappa \geq 1$.

Iš (4.1) išplaukia, kad:

$$\limsup_{x \to \infty} J_1(x) < \infty. \tag{4.4}$$

Pagal *3.2 Lemą* gauname, kad:

$$\frac{\mathbf{P}(S_{\kappa+1} > x-1)}{\mathbf{P}(S_{\kappa+1} > x)} \leq \max\left\{ \sup_{z \geq M} \frac{\mathbf{P}(S_\kappa > z-1)}{\mathbf{P}(S_\kappa > z)}, \sup_{z \geq x-M+1} \frac{\overline{F_{\xi_{\kappa+1}}}(z-1)}{\overline{F_{\xi_{\kappa+1}}}(z)} \right\} \tag{4.5}$$

bet kuriam $0 < M < x$.

Iš trečios teoremos sąlygos turim, kad:

$$\sup_{x\geq 0}\frac{\overline{F_{\xi_{\kappa+1}}}(x-1)}{\overline{F_{\xi_{\kappa+1}}}(x)}\leq c_2 \tag{4.6}$$

kažkuriai teigiamai konstantai c_2.

Vadinasi, (4.5) nelygybėje parinkę $M=\frac{x}{2}$, gauname:

$$\sup_{x\geq 0}\frac{\mathbf{P}(S_{\kappa+1}>x-1)}{\mathbf{P}(S_{\kappa+1}>x)}\leq \max\{c_1,c_2\}=c_3.$$

Pagal *3.2 Lemą* galime užrašyti:

$$\frac{\mathbf{P}(S_{\kappa+2}>x-1)}{\mathbf{P}(S_{\kappa+2}>x)}\leq \max\left\{\sup_{z\geq M}\frac{\mathbf{P}(S_{\kappa+1}>z-1)}{\mathbf{P}(S_{\kappa+1}>z)},\sup_{z>x-M+1}\frac{\overline{F_{\xi_{\kappa+2}}}(z-1)}{\overline{F_{\xi_{\kappa+2}}}(z)}\right\}. \tag{4.7}$$

Vėlgi, pasirinkę $M=\frac{x}{2}$, iš (4.2) ir (4.6) nelygybių galime gauti:

$$\sup_{x\geq 0}\frac{\mathbf{P}(S_{\kappa+2}>x-1)}{\mathbf{P}(S_{\kappa+2}>x)}\leq c_3.$$

Tęsdami procesą randame, kad:

$$\sup_{x\geq 0}\frac{\mathbf{P}(S_{\kappa+k}>x-1)}{\mathbf{P}(S_{\kappa+k}>x)}\leq c_3$$

visiems $k=1,2,....$ Todėl:

$$\begin{aligned}
J_2(x)&=\frac{1}{\mathbf{P}(S_\eta>x)}\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{P}(S_{\kappa+k}>x-1)\mathbf{P}(\eta=\kappa+k)\\
&\leq\frac{c_3}{\mathbf{P}(S_\eta>x)}\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{P}(S_{\kappa+k}>x)\mathbf{P}(\eta=\kappa+k)\\
&\leq\frac{c_3\mathbf{P}(S_\eta>x)}{\mathbf{P}(S_\eta>x)}=c_3
\end{aligned} \tag{4.8}$$

visiems $x\geq 0$.

Iš (4.3), (4.4) ir (4.8) išplaukia, kad:

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{\mathbf{P}(S_\eta>x-1)}{\mathbf{P}(S_\eta>x)}<\infty.$$

Taigi $F_{S_\eta}\in\mathcal{OL}$. $\square$

1.2 Teoremos įrodymas. Kadangi $S_k = \xi_\kappa + \sum_{\substack{n=1 \\ n \in supp(\eta) \setminus \{\kappa\}}}^{k} \xi_n$ visiems $k \geq \kappa$, tai, pagal *3.2 lemą*, $F_{S_k} \in \mathcal{OL}$ $\forall k \geq \kappa$. Vadinasi, visiems $x \geq 1$:

$$\frac{\mathbf{P}(S_\eta > x-1)}{\mathbf{P}(S_\eta > x)} = \frac{\sum\limits_{\substack{n=1 \\ n \in supp(\eta)}}^{D} \mathbf{P}(S_n > x-1)\mathbf{P}(\eta = n)}{\sum\limits_{\substack{n=1 \\ n \in supp(\eta)}}^{D} \mathbf{P}(S_n > x)\mathbf{P}(\eta = n)}$$

$$\leq \frac{\sum\limits_{n \leq \kappa} \mathbf{P}(S_n > x-1)\mathbf{P}(\eta = n) + \sum\limits_{\substack{n=\kappa+1 \\ n \in supp(\eta)}}^{D} \mathbf{P}(S_n > x-1)\mathbf{P}(\eta = n)}{\mathbf{P}(S_\kappa > x)\mathbf{P}(\eta = \kappa) + \sum\limits_{\substack{n=\kappa+1 \\ n \in supp(\eta)}}^{D} \mathbf{P}(S_n > x)\mathbf{P}(\eta = n)}$$

$$\leq \frac{\mathbf{P}(S_\kappa > x-1)\mathbf{P}(\eta \leq \kappa) + \sum\limits_{\substack{n=\kappa+1 \\ n \in supp(\eta)}}^{D} \mathbf{P}(S_n > x-1)\mathbf{P}(\eta = n)}{\mathbf{P}(S_\kappa > x)\mathbf{P}(\eta = \kappa) + \sum\limits_{\substack{n=\kappa+1 \\ n \in supp(\eta)}}^{D} \mathbf{P}(S_n > x)\mathbf{P}(\eta = n)}$$

$$\leq \max\left\{\frac{\mathbf{P}(S_\kappa > x-1)\mathbf{P}(\eta \leq \kappa)}{\mathbf{P}(S_\kappa > x)\mathbf{P}(\eta = \kappa)}, \max_{\substack{\kappa+1 \leq n \leq D \\ n \in supp(\eta)}} \frac{\mathbf{P}(S_n > x-1)}{\mathbf{P}(S_n > x)}\right\}.$$

Kaip minėta, $F_{S_n} \in \mathcal{OL}$ visiems $n \geq \kappa$. Todėl iš gauto įverčio išplaukia, kad:

$$\limsup_{x \to \infty} \frac{\mathbf{P}(S_\eta > x-1)}{\mathbf{P}(S_\eta > x)} < \infty.$$

Taigi $F_{S_\eta} \in \mathcal{OL}$. $\square$

1.3 Teoremos įrodymas. Reikia parodyti, kad:

$$\limsup_{x \to \infty} \frac{\mathbf{P}(S_\eta > x-1)}{\mathbf{P}(S_\eta > x)} < \infty. \tag{4.9}$$

Tegul $x > 2$, tada gauname:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}(S_\eta > x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(S_n > x)\mathbf{P}(\eta = n) \\
&\geq \mathbf{P}(S_\kappa > x)\mathbf{P}(\eta = \kappa) \\
&= \mathbf{P}(\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_\kappa > x)\mathbf{P}(\eta = \kappa) \\
&\geq \mathbf{P}(\xi_\kappa > x)\mathbf{P}(\eta = \kappa) \\
&= \overline{F_{\xi_\kappa}}(x)\mathbf{P}(\eta = \kappa). \qquad (4.10)
\end{aligned}
$$

Laisvai pasirinkime K > 1. Tada, kai $\frac{x}{2} > K$, gauname:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}(S_\eta > x-1) &= \sum_{n \leq \kappa} \mathbf{P}(S_n > x-1)\mathbf{P}(\eta = n) + \sum_{n > \kappa} \mathbf{P}(S_n > x-1)\mathbf{P}(\eta = n) \\
&= \sum_{n \leq \kappa} \mathbf{P}(S_n > x-1)\mathbf{P}(\eta = n) \\
&+ \sum_{1 \leq k \leq \frac{x-1}{K-1}} \mathbf{P}(S_{\kappa+k} > x-1)\mathbf{P}(\eta = \kappa + k) \\
&+ \sum_{k > \frac{x-1}{K-1}} \mathbf{P}(S_{\kappa+k} > x-1)\mathbf{P}(\eta = \kappa + k) \\
&+ \sum_{k > \frac{x-1}{K-1}} \mathbf{P}(S_{\kappa+k} > x)\mathbf{P}(\eta = \kappa + k) \\
&- \sum_{k > \frac{x-1}{K-1}} \mathbf{P}(S_{\kappa+k} > x)\mathbf{P}(\eta = \kappa + k) \\
&= \sum_{n \leq \kappa} \mathbf{P}(S_n > x-1)\mathbf{P}(\eta = n) \\
&+ \sum_{1 \leq k \leq \frac{x-1}{K-1}} \mathbf{P}(S_{\kappa+k} > x-1)\mathbf{P}(\eta = \kappa + k) \\
&+ \sum_{k > \frac{x-1}{K-1}} \mathbf{P}(x-1 < S_{\kappa+k} \leq x)\mathbf{P}(\eta = \kappa + k) \\
&+ \sum_{k > \frac{x-1}{K-1}} \mathbf{P}(S_{\kappa+k} > x)\mathbf{P}(\eta = \kappa + k). \qquad (4.11)
\end{aligned}
$$

Remiantis teoremos sąlygomis ir *3.6 Lema*, $F_{S_\kappa} \in \mathcal{OL}$. Todėl:

$$
\limsup_{x \to \infty} \frac{\mathbf{P}(S_\kappa > x-1)}{\mathbf{P}(S_\kappa > x)} < \infty.
$$

Iš šios nelygybės išplaukia, kad:

$$\sup_{x\geq 0}\frac{\mathbf{P}(S_\kappa > x-1)}{\mathbf{P}(S_\kappa > x)} \leq c_2, \tag{4.12}$$

kur c_2 - teigiama konstanta.

Remiantis (4.12) ir *1.1 Teoremos* įrodymu (žr. (4.4) nelygybę), turime:

$$\begin{aligned}\frac{\sum_{n\leq\kappa}\mathbf{P}(S_n > x-1)\mathbf{P}(\eta = n)}{\mathbf{P}(S_\eta > x)} &\leq \frac{\mathbf{P}(S_\kappa > x-1)}{\mathbf{P}(S_\kappa > x)}\cdot\frac{\mathbf{P}(\eta\leq\kappa)}{\mathbf{P}(\eta=\kappa)}\\ &\leq c_2\frac{\mathbf{P}(\eta\leq\kappa)}{\mathbf{P}(\eta=\kappa)} := c_0. \end{aligned}\tag{4.13}$$

Toliau nagrinėkime sumą $\sum\limits_{1\leq k\leq\frac{x-1}{K-1}}\mathbf{P}(S_{\kappa+k} > x-1)\mathbf{P}(\eta = \kappa+k)$. Iš (4) teoremos sąlygos turime, kad egzistuoja tokios konstantos $c_1 > 1$ ir $c_3 < \infty$, kad:

$$\sup_{x\geq c_1}\frac{\overline{F_{\xi_{\kappa+k}}}(x-1)}{\overline{F_{\xi_{\kappa+k}}}(x)} \leq c_3 \tag{4.14}$$

visiems $k\geq 1$.

Pagal *3.2 Lemą* turime:

$$\frac{\mathbf{P}(S_{\kappa+1} > x-1)}{\mathbf{P}(S_{\kappa+1} > x)} \leq \max\left\{\sup_{z\geq x-c_1+1}\frac{\mathbf{P}(S_\kappa > z-1)}{\mathbf{P}(S_\kappa > z)}, \sup_{z\geq c_1}\frac{\overline{F_{\xi_{\kappa+1}}}(z-1)}{\overline{F_{\xi_{\kappa+1}}}(z)}\right\}$$

visiems $x\geq c_1$.

Vadinasi, iš (4.12) ir (4.14) gauname, kad:

$$\sup_{x\geq c_1}\frac{\mathbf{P}(S_{\kappa+1} > x-1)}{\mathbf{P}(S_{\kappa+1} > x)} \leq \max\{c_2, c_3\} := c_4.$$

Vėl pritaikę *3.2 Lemą* sumai $S_{\kappa+2} = S_{\kappa+1} + \xi_{\kappa+2}$ (laikydami, kad $v = \frac{x}{2}+\frac{1}{2}$), gauname:

$$\frac{\mathbf{P}(S_{\kappa+2} > x-1)}{\mathbf{P}(S_{\kappa+2} > x)} \leq \max\left\{\sup_{z\geq\frac{x}{2}+\frac{1}{2}}\frac{\mathbf{P}(S_{\kappa+1} > z-1)}{\mathbf{P}(S_{\kappa+1} > z)}, \sup_{z\geq\frac{x}{2}+\frac{1}{2}}\frac{\overline{F_{\xi_{\kappa+2}}}(z-1)}{\overline{F_{\xi_{\kappa+2}}}(z)}\right\}.$$

Kai $x\geq 2(c_1-1)+1 = 2c_1-1$, tai $\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\geq c_1$. Vadinasi, iš gautos nelygybės išplaukia, kad:

$$\sup_{x\geq 2(c_1-1)+1}\frac{\mathbf{P}(S_{\kappa+2} > x-1)}{\mathbf{P}(S_{\kappa+2} > x)} \leq c_4.$$

Analogiškai galime gauti, kad:

$$\frac{\mathbf{P}(S_{\kappa+3} > x-1)}{\mathbf{P}(S_{\kappa+3} > x)} \leq \max\left\{ \sup_{z \geq \frac{2x}{3}+\frac{1}{3}} \frac{\mathbf{P}(S_{\kappa+2} > z-1)}{\mathbf{P}(S_{\kappa+2} > z)}, \sup_{z \geq \frac{x}{3}+\frac{2}{3}} \frac{\overline{F_{\xi_{\kappa+3}}}(z-1)}{\overline{F_{\xi_{\kappa+3}}}(z)} \right\}.$$

Jeigu $x \geq 3(c_1 - 1) + 1$, tai $\frac{x}{3} + \frac{2}{3} \geq c_1$. Todėl:

$$\sup_{x \geq 3(c_1-1)+1} \frac{\mathbf{P}(S_{\kappa+3} > x-1)}{\mathbf{P}(S_{\kappa+3} > x)} \leq c_4.$$

Tęsdami gausime, kad visiems k:

$$\sup_{x \geq k(c_1-1)+1} \frac{\mathbf{P}(S_{\kappa+k} > x-1)}{\mathbf{P}(S_{\kappa+k} > x)} \leq c_4.$$

Taigi lygybėje (4.11) reikia imti $K = c_1$. Tada gauname:

$$\begin{aligned} &\frac{\sum\limits_{1 \leq k \leq \frac{x-1}{c_1-1}} \mathbf{P}(S_{\kappa+k} > x-1)\mathbf{P}(\eta = \kappa + k)}{\mathbf{P}(S_\eta > x)} \\ &\leq c_4 \frac{\sum\limits_{1 \leq k \leq \frac{x-1}{c_1-1}} \mathbf{P}(S_{\kappa+k} > x)\mathbf{P}(\eta = \kappa + k)}{\mathbf{P}(S_\eta > x)} \\ &\leq c_4. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Lygybėje (4.11) liko įvertinti sumą $\sum\limits_{k > \frac{x-1}{c_1-1}} \mathbf{P}(x - 1 < S_{\kappa+k} \leq x)\mathbf{P}(\eta = \kappa + k)$. Remiantis *3.1 Lema*, nesunku pastebėti, kad:

$$\begin{aligned} &\sum_{k > \frac{x-1}{c_1-1}} \mathbf{P}(x - 1 < S_{\kappa+k} \leq x)\mathbf{P}(\eta = \kappa + k) \\ &\leq \sum_{k > \frac{x-1}{c_1-1}} \frac{A\mathbf{P}(\eta = \kappa + k)}{\left(\sum_{l=1}^{k} \left(1 - \sup_x \mathbf{P}(x - 1 \leq \xi_{\kappa+l} \leq x)\right)\right)^{\frac{1}{2}}}, \end{aligned}$$

kur A - absoliuti, teigiama konstanta. Be to, teoremoje reikalaujama, kad:

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{l=1}^{k} \sup_x \left(\overline{F}_{\xi_{\kappa+l}}(x-1) - \overline{F}_{\xi_{\kappa+l}}(x)\right) < 1.$$

Tai reiškia, jog:

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{1}{k}\sum_{l=1}^{k} \sup_x \left(\overline{F}_{\xi_{\kappa+l}}(x-1) - \overline{F}_{\xi_{\kappa+l}}(x)\right) = 1-\Delta,$$

kur $0<\Delta\le 1$. Pakankamai dideliems k turėsime:

$$\frac{1}{k}\sum_{l=1}^{k} \sup_x \left(\overline{F}_{\xi_{\kappa+l}}(x-1) - \overline{F}_{\xi_{\kappa+l}}(x)\right) \le 1-\frac{\Delta}{2}.$$

Taigi nagrinėjamą sumą galime įvertinti taip:

$$\begin{aligned}
&\frac{\sum_{k>\frac{x-1}{c_1-1}} \mathbf{P}(x-1<S_{\kappa+k}\le x)\mathbf{P}(\eta=\kappa+k)}{\mathbf{P}(S_\eta>x)}\\
&\le \frac{A}{\mathbf{P}(S_\eta>x)}\sqrt{\frac{2}{\Delta}}\sum_{k>\frac{x-1}{c_1-1}} \frac{\mathbf{P}(\eta=\kappa+k)}{\sqrt{k}}\\
&\le \frac{A}{\mathbf{P}(S_\eta>x)}\sqrt{\frac{2(c_1-1)}{\Delta(x-1)}}\mathbf{P}\left(\eta>\kappa+\frac{x-1}{c_1-1}\right). \qquad (4.16)
\end{aligned}$$

Galiausiai, iš (4.10), (4.11), (4.13), (4.15) ir (4.16) gauname, kad kiekvienam $1<c_1<\frac{x}{2}$:

$$\frac{\mathbf{P}(S_\eta>x-1)}{\mathbf{P}(S_\eta>x)} \le c_0+c_4+\frac{A}{\overline{F_{\xi_\kappa}}(x)\mathbf{P}(\eta=\kappa)}\sqrt{\frac{2(c_1-1)}{\Delta(x-1)}}\overline{F_\eta}\left(\kappa+\frac{x-1}{c_1-1}\right)+1.$$

Perėję prie ribos bei pasinaudoję (1) ir (5) teoremos sąlygomis gauname:

$$\begin{aligned}
&\limsup_{x\to\infty}\frac{\mathbf{P}(S_\eta>x-1)}{\mathbf{P}(S_\eta>x)} \le 1+c_0+c_4\\
&+\frac{A\sqrt{\frac{2}{\Delta}(c_1-1)}}{\mathbf{P}(\eta=\kappa)}\limsup_{x\to\infty}\frac{\overline{F_\eta}(\kappa+(x-1)/(c_1-1))}{\sqrt{x-1}\overline{F_{\xi_\kappa}}(x-1)}\limsup_{x\to\infty}\frac{\overline{F_{\xi_\kappa}}(x-1)}{\overline{F_{\xi_\kappa}}(x)}<\infty.
\end{aligned}$$

Taigi (4.9) tenkinama ir $F_{S_\eta}\in\mathcal{OL}$. □

1.4 Teoremos įrodymas. Kadangi η neišsigimęs taške 0, tai egzistuoja kažkoks $\kappa\in supp(\eta)$, $\kappa\ge 1$. Kadangi $F\in\mathcal{OL}$ ir a. dydžiai $\xi_1,\xi_2,\ldots$ vienodai pasiskirstę, tai visos *1.1 Teoremos* sąlygos patenkintos. Vadinasi, $F_{S_\eta}\in\mathcal{OL}$. □

5 Pavyzdžiai

Šiame skyriuje pateikiama keletas atsitiktinių dydžių pavyzdžių, tenkinančių įrodytų teoremų sąlygas.

5.1 Pavyzdys. Tarkime, kad nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai $\xi_i, i \in \{1, ..., \kappa\}$ turi Pareto skirstinį su parametrais $m > 0$ ir $\alpha > 0$. Tada $\overline{F_{\xi_i}}(x) = \left(\frac{m}{x+m}\right)^\alpha$ ir:

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{F_{\xi_i}}(x-1)}{\overline{F_{\xi_i}}(x)} = \limsup_{x\to\infty} \left(\frac{x+m}{x-1+m}\right)^\alpha = 1.$$

Taigi $F_{\xi_i} \in \mathcal{L} \subset \mathcal{OL}$.

Tegul $\xi_{\kappa+k}$ pasiskirstę pagal Eksponentinį skirstinį su parametru $\lambda > 0$ kiekvienam $k \geq 1$. Tada $\overline{F_{\xi_{\kappa+k}}}(x) = e^{-\lambda x}$ ir:

$$\sup_{x\geq 0} \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{\overline{F_{\xi_{\kappa+k}}}(x-1)}{\overline{F_{\xi_{\kappa+k}}}(x)} = e^\lambda < \infty.$$

Jeigu $\mathbf{P}(\eta = \kappa) > 0$, visos *1.1 Teoremos* sąlygos tenkinamos ir $F_{S_\eta} \in \mathcal{OL}$.

5.2 Pavyzdys. Tegul atsitiktinis dydis η yra toks, kad $\mathbf{P}(\eta = k) = \frac{1}{D}$ kiekvienam $k \in \{1, ..., D\}$. Tarkime, kad ξ_κ pasiskirstęs pagal Weibull skirstinį su parametrais $\lambda > 0$ ir $0 < l < 1$ kuriam nors $\kappa \in supp(\eta)\backslash\{0\}$. Tada $\overline{F_{\xi_\kappa}}(x) = e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^l}$ ir:

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{F_{\xi_\kappa}}(x-1)}{\overline{F_{\xi_\kappa}}(x)} = \limsup_{x\to\infty} e^{-\left(\frac{x-1}{\lambda}\right)^l + \left(\frac{x}{\lambda}\right)^l} = 1.$$

Taigi $F_{\xi_\kappa} \in \mathcal{OL}$.

Tarkime, kad ξ_k tolygiai pasiskirstę intervale (a, b) bet kuriam $k \in \{1, 2, ..., D\}\backslash\{\kappa\}$, čia $-\infty < a < b < \infty$. $\overline{F_{\xi_k}}(x) = 0$, kai $x \geq b$ ir:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F_{\xi_k}}(x)}{\overline{F_{\xi_\kappa}}(x)} = 0.$$

Visos *1.2 Teoremos* sąlygos tenkinamos, todėl $F_{S_\eta} \in \mathcal{OL}$.

5.3 Pavyzdys. Tarkime, kad atsitiktiniai dydžiai ξ_k turi Burr skirstinius su parametrais $\beta, m, \tau > 0$ visiems $k \in \{1, ..., \kappa\}$. Tada $\overline{F_{\xi_k}}(x) = \left(\frac{m}{x^\tau+m}\right)^\beta$ ir:

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{F_{\xi_k}}(x-1)}{\overline{F_{\xi_k}}(x)} = \limsup_{x\to\infty} \left(\frac{x^\tau+m}{(x-1)^\tau+m}\right)^\beta = 1.$$

Taigi $F_{\xi_k} \in \mathcal{OL}$.

Tegul $\overline{F_{\xi_{\kappa+k}}}(x) = e^{-\lambda x}$, $\lambda > 0$ kiekvienam $k \geq 1$. Tada:

$$\begin{aligned}
&\limsup_{k\to\infty} \frac{1}{k}\sum_{l=1}^{k} \sup_x \left(\overline{F}_{\xi_{\kappa+l}}(x-1) - \overline{F}_{\xi_{\kappa+l}}(x)\right) \\
&= \sup_x (e^{-\lambda(x-1)} - e^{-\lambda x}) \\
&= 1 - e^{-\lambda} < 1.
\end{aligned}$$

Be to:

$$\limsup_{x\to\infty} \sup_{k\geq 1} \frac{\overline{F_{\xi_{\kappa+k}}}(x-1)}{\overline{F_{\xi_{\kappa+k}}}(x)} = e^{\lambda} < \infty.$$

Tarkime, kad atsitiktinis dydis η yra toks, kad $\mathbf{P}(\eta = k) = \frac{1}{2^k}$ kiekvienam $k \in \mathbb{N}$. Tada $\overline{F_\eta}(x) = \frac{1}{2^{[x]}}$ ir bet kuriam $\delta \in (0,1)$:

$$\begin{aligned}
\limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{F_\eta}(\delta x)}{\sqrt{x}\overline{F_{\xi_\kappa}}(x)} &= \limsup_{x\to\infty} \frac{2^{-[\delta x]}}{\sqrt{x}\left(\frac{m}{x^\tau+m}\right)^\beta} \\
&\sim \limsup_{x\to\infty} \frac{2^{-[\delta x]}}{\sqrt{x}\left(\frac{m}{x^\tau}\right)^\beta} \\
&= \limsup_{x\to\infty} \frac{1}{x^{0.5-\tau\beta} m^\beta 2^{[\delta x]}} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Jeigu $\mathbf{P}(\eta = \kappa) > 0$, atsitiktiniai dydžiai $\xi_1, \xi_2, ...$ ir η tenkina visas *1.3 Teoremos* sąlygas. Taigi $F_{S_\eta} \in \mathcal{OL}$.

6 Išvados ir rekomendacijos

Galima teigti, kad pagrindinį darbo pradžioje iškeltą tikslą pasiekti pavyko. Buvo suformuluotos 4 teoremos su sąlygomis, kurias tam tikrais atvejais turi tenkinti atsitiktiniai dydžiai $\xi_1, \xi_2, ...$ ir η, kad atsitiktinės sąsūkos pasiskirstymo funkcija F_{S_η} priklausytų klasei $\mathcal{OL}$.

Atveju, kai atsitiktinis dydis η turi baigtinę atramą, gavome, kad iš dydžių $\xi_1, \xi_2, ..$ reikalaujama mažiausiai sąlygų. Kitais atvejais prireikia papildomų reikalavimų atsitiktiniams dydžiams $\xi_{\kappa+k}$, $k \geq 1$. Remiantis *1.1 Teorema*, buvo padaryta išvada (*1.4 Teorema*), jog tuo atveju, kai atsitiktiniai dydžiai $\xi_1, \xi_2, ...$ yra nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę, šaltinio [8] pagrindinėje teoremoje nebereikia reikalavimo $\overline{F}_\eta(\delta x) = O(\sqrt{x}\overline{F}_{\xi_\kappa}(x))\ \forall\ \delta \in (0,1)$.

Galbūt, ateityje atlikus daugiau tyrinėjimų, būtų įmanoma kai kurias sąlygas atsitiktiniams dydžiams $\xi_1, \xi_2, ...$ ir η sušvelninti arba jų išvis atsisakyti. Taip pat būtų naudinga atrasti ir panagrinėti daugiau atsitiktinių dydžių pavyzdžių, iliustruojančių šiame darbe įrodytus rezultatus.

7 Literatūra

[**1**] J.M.P. Albin, *A note on the closure of convolution power mixtures (random sums) of exponential distributions*, J. Aust. Math. Soc., 84:1–7, 2008.

[**2**] N.H. Bingham, G.M. Goldie, J. L. Teugels, *Regular Variation*, Cambridge University Press, 1987.

[**3**] D.B.H. Cline, *Convolutions of the distributions with exponential tails*, J. Aust. Math. Soc., 43:347–365, 1987.

[**4**] D.B.H. Cline, *Convolutions of the distributions with exponential tails: Corrigendum*, J. Aust. Math. Soc., 48:152–153, 1990.

[**5**] S. Danilenko, J. Šiaulys, *Random Convolution of O - exponential distributions*, Nonlinear Analysis: Modelling and Control, 20(3):447–454, 2015

[**6**] P. Embrechts, C.M. Goldie, *On closure and factorization properties of subexponential and related distributions*, J. Aust. Math. Soc., Ser. A, 29:243–256, 1980.

[**7**] S. Foss, D. Korshunov, S. Zachary, *An Introduction to Heavy-Tailed and Subexponential Distributions*, Springer Series in Operations Research and Financial Engineering Vol. 38, 2011

[**8**] R. Leipus, J. Šiaulys, *Closure of some heavy-tailed distribution classes under random convolution*, Lith. Math. J., 52:249–258, 2012.

[**9**] K.W. Ng, Q.H. Tang, H. Yang, *Maxima of sums of heavy-tailed random variables*, Astin Bulletin, 32(1):43-55, 2002.

[**10**] V.V. Petrov, *Limit Theorems of Probability Theory: Sequences of Independent Random Variables*, Oxford Studies in Probability, Vol. 4, Clarendon Press, Oxford, 1995.

[**11**] T. Shimura, T. Watanabe, *Infinite divisibility and generalized subexponentiality*, Bernoulli, 11:445–469, 2005.

[**12**] T. Watanabe, K. Yamamuro, *Ratio of the tail of an infinitely divisible distribution on the line to that of its Lévy measure*, Electron. J. Probab., 15:44–74, 2010.

[**13**] H. Xu, S. Foss, Y. Wang, *Convolution and convolution-root properties of long-tailed distributions*, Extremes, 18(4):605–628, 2015.