VILNIAUS UNIVERSITETAS

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

MAGISTRO BAIGIAMASIS DARBAS

Singuliarių parabolinių lygčių, susijusių su stochastinėmis diferencialinėmis lygtimis, sprendinių egzistavimas

Existence of Solution of Singular Parabolic Equations Related to Stochastic Differential Equations

Gabrielė Mongirdaitė

2016, Vilnius

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
MATEMATINĖS ANALIZĖS KATEDRA

Darbo vadovas *prof. Vigirdas Mackevičius*
(Pareigos, vardas, pavardė)

Darbo recenzentas *lekt. Kęstutis Liubinskas*
(Pareigos, vardas, pavardė)

Darbas apgintas *2016 m. sausio 14 d.*
(Data)

Darbas įvertintas ________________

Registravimo nr. ________________

2016-01-04 ______________________

Singuliarių parabolinių lygčių, susijusių su stochastinėmis diferencialinėmis lygtimis, sprendinių egzistavimas

Santrauka

Šiame darbe tiriame singuliarių parabolinių lygčių, susijusių su stochastinėmis diferencialinėmis lygtimis (SDL), sprendinių egzistavimą. Pirmiausiai modifikuojame ir pritaikome Kunitos [5] teoriją stochastinėms diferencialinėms lygtims su glodžiais koeficientais. Vėliau nagrinėjamų SDL klasę išplečiame ir gauname sprendinio tolydų diferencijuojamumą pagal pradinę sąlygą SD lygtims, kurių sprendinys yra griežtai teigiamas bei koeficientai tenkina sprendinio egzistavimo ir vienaties sąlygas. Tuo pasinaudodami, įrodome atgalinės Kolmogorovo parabolinės lygties su CIR proceso generatoriumi glodaus sprendinio egzistavimą.

Raktiniai žodžiai: parabolinė singuliari lygtis, stochastinė diferencialinė lygtis, CIR procesas, tolydus diferencijuojamumas pagal pradinę sąlygą, atgalinė Kolmogorovo lygtis.

Existence of Solution of Singular Parabolic Equations Related to Stochastic Differential Equations

Abstract

We consider the existence of solutions of singular parabolic equations related to stochastic differential equations (SDE). We have modified and applied Kunita [5] theory of stochastic flows to SDE with smooth coefficients. Then we extend the class of considered SDE to a class of SDEs with strictly positive solutions. Using the obtained result, we prove, in particular, the existence of a smooth solution of the Kolmogorov backward equation corresponding to the CIR process.

Keywords: singular parabolic equation, stochastic differential equation, CIR process, continuous differentiability with respect to initial condition, Kolmogorov backward equation.

Turinys

1 Įvadas **3**

2 Apibrėžimai ir žymėjimai **4**

3 SDL su glodžiais koeficientais sprendinio tolydus diferencijuojamumas pagal pradinę sąlygą **5**

4 SDL sprendinio diferencijuojamumas pagal pradinę sąlygą **8**

5 Atgalinės Kolmogorovo lygties sprendinio diferencijuojamumas pagal t **14**

6 Papildomos lemos **15**

7 Išvados **24**

Literatūra **25**

Priedai **26**

A 1 teoremos k-tosios eilės išvestinių išraiškos **26**

1 Įvadas

Priminkime gerai žinomą ryšį tarp stochastinės diferencialinės lygties (SDL)

$$X_t^x = x + \int_0^t b(X_s^x)\, dt + \int_0^t b(X_s^x)\, dB_s, \quad X_0 = x,$$

ir parabolinės dalinių išvestinių lygties (vadinamos Kolmogorovo atgaline lygtimi) su pradine sąlyga

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = Au, \\ u(0,x) = f(x); \end{cases} \tag{1.1}$$

čia $Af = bf' + \frac{1}{2}\sigma^2 f''$ – SDL sprendinio generatorius. Jei lygties koeficientai b ir σ pakankamai „geri“, o $f \in C_b^2(\mathbb{R})$ – tai funkcija $u = u(t,x) := \mathbb{E}f(X_t^x)$, yra (1.1) lygties sprendinys. Iš to kaip išvada išplaukia, kad atsitiktinis procesas $M_t := u(t, X_t^x) + \int_0^t (\frac{\partial u}{\partial s} - Au)(s, X_s^x)\, ds$, $t \geq 0$, yra martingalas. Pastarasis faktas yra esminis griežtai įrodant SDL silpnųjų aproksimacijų konvergavimo eilę. Deja, daugelio finansų matematikoje naudojamų SDL koeficientai nėra pakankamai „geri“ ir todėl joms nepritaikoma bendra teorija. Klasikinis pavyzdys yra gerai žinomas ir plačiai naudojamas Cox–Ingersoll–Ross (CIR) procesas [11], tenkinantis SDL

$$X_t^x = x + \int_0^t \theta(\kappa - X_s^x)\, \mathrm{d}s + \sigma \int_0^t \sqrt{X_s^x}\, \mathrm{d}B_s, \quad t \in [0,T], \tag{1.2}$$

su parametrais $\theta, \kappa, \sigma > 0$, kurio difuzijos koeficientas $\sigma(x) = \sigma\sqrt{x}$ turi neaprėžtas išvestines.

Alfonsi [1, Teorema 4.1], naudodamas žinomą CIR proceso perėjimo tankio išraišką funkcijų eilute, techniškai sudėtingais tiesioginiais skaičiavimais įrodė, kad CIR procesui $u = u(t,x) := \mathbb{E}f(X_t^x)$ yra (1.1) lygties sprendinys. Šio darbo pagrindinis tikslas – įrodyti šį faktą paprasčiau, taikant Kunitos stochastinių laukų teoriją stochastinėms diferencialinėms lygtims, šiek tiek ją išplečiant nelipšicinių koeficientų atvejui. Pagrindinė idėja yra tokia. Remiantis Kunitos teorija, prie tam tikrų sąlygų SDL sprendiniai X_t^x yra diferencijuojami x atžvilgiu tam tikrą skaičių kartų. Tada galima įrodyti, kad prie tam tikrų sąlygų funkciją $u(t,x) := \mathbb{E}f(X_t^x)$ taip pat galima diferencijuoti x atžvilgiu po vidurkio ženklu:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} = \mathbb{E}\Big[f'(X_t^x)\frac{\partial X_t^x}{\partial x}\Big], \quad \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} = \mathbb{E}\Big[f''(X_t^x)\Big(\frac{\partial X_t^x}{\partial x}\Big)^2 + f'(X_t^x)\frac{\partial^2 X_t^x}{\partial x^2}\Big] \text{ ir t.t.}$$

Pagrindiniai šio darbo rezultatai yra šie:

1) Kunitos stochastinių laukų teorija adaptuota stochastinėms diferencialinėms lygtims, ją supaprastinant ir išvengiant perteklinių sąvokų ir terminijos (1 teorema).

2) Įrodytas SDL sprendinio diferencijuojamumas pradinio taško atžvilgiu, kai sprendinys netenkina Kunitos teorijos sąlygų, bet žinoma, kad SDL (pavyzdžiui, CIR) sprendinys įgyja reikšmes intervale $(0, +\infty)$. Reikia pažymėti, kad rezultatai galioja ir bendresnėms atviroms aibėms $D \subset \mathbb{R}^k$, tačiau paprastumo dėlei apsiribota šiuo atveju (5 teorema).

3) Įrodytas CIR lygties (1.2) sprendinio X_t^x tolydus diferencijuojamumas x atžvilgiu (be galo daug kartų) ir, kaip išvada, parabolinės lygties (1.1) sprendinio egzistavimas, kai A – CIR proceso generatorius $Af(x) = \theta(\kappa - x)f'(x) + \frac{\sigma^2 x}{2} f''(x)$, o σ tenkina vadinamąją Felerio sąlygą $\sigma^2 \leq 2\theta\kappa$, garantuojančią, kad CIR procesas lieka teigiamas visais laiko momentais (5 skyrius).

2 Apibrėžimai ir žymėjimai

Žymėjimai. Tarkime, jog k yra neneigiamas sveikasis skaičius. Žymėsime C^{kdd^*} k kartų tolydžiai diferencijuojamų funkcijų $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d^*}$ erdvę; $C^{kdd^*} \supseteq C_b^{kdd^*} := \{f$ ir jos išvestinės yra aprėžtos$\}$.

Tarkime, jog $f \in C^{kdd}$. Funkcijos f išvestinę taške x pagal i-tąją koordinatę žymėsime $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = D_i f(x)$. Aukštesnės eilės išvestines atitinkamai žymėsime $\frac{\partial^p f(x)}{\partial x_{m_1} \ldots \partial x_{m_p}} = D_{m_1 \ldots m_p} f(x)$.

Įsivesime modifikuotą Kronekerio simbolio žymėjimą:

$$\delta_{ij}^p = \begin{cases} 1, & \text{jei } p = 1 \text{ ir } i = j; \\ 0 & \text{kitais atvejais.} \end{cases}$$

Sąlygos. (Sprendinio egzistavimas ir vienatis). Nagrinėkime stochastinių diferencialinių lygčių (SDL) sistemą

$$\begin{aligned} \mathrm{d}X_t^i(x) &= b_i(X_t(x))\mathrm{d}t + \sum_{j=1}^d \sigma_{ij}(X_t(x))\mathrm{d}B_t^j, \quad t \in [0,T], \\ X_0^i(x) &= x_i \quad i = 1, \ldots, d; \end{aligned} \tag{2.1}$$

čia $x \in \mathbb{R}^d$, $b(x) = (b_1(x), \ldots, b_d(x))$ priklauso klasei C_b^{kdd}, o $\sigma_{ij}(x)$ yra iš klasės C_b^{kd1}, $i, j = 1, \ldots, d$. $B_t = (B_t^1, \ldots, B_t^d)$ yra d-matis Brauno judesys. Tarkime, jog su visais $i, j = 1, \ldots, d$, b_i ir σ_{ij} tenkina Lipšico sąlygą:

$$|b_i(x) - b_i(y)|^2 + |\sigma_{ij}(x) - \sigma_{ij}(y)|^2 \le C\,|x-y|^2, \qquad x, y \in \mathbb{R}^d.$$

Tuomet pagal [7], 12.3 teoremą, egzistuoja vienintelis tolydusis atsitiktinis procesas $X(x)$, kuris yra (2.1) SDL sprendinys intervale $[0, \infty)$.
Taip pat pagal [7], 12.7 teoremą, turime, jog atsitiktinio proceso $X(x)$ generatorius lygus

$$Af(x) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{\mathbb{E}f(X_t(x)) - f(x)}{t} = \sum_{i=1}^d b_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d (\sigma(x)\sigma(x)^T)_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x),$$

jei tik $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ yra du kartus tolydžiai diferencijuojama ir turi aprėžtas pirmąją ir antrąją išvestines.

1 apibrėžimas. Stochastinės diferencialinės lygties

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(s, X_s)\mathrm{d}B_u, \quad t \ge 0,$$

kurios koeficientai b ir σ tenkina sprendinio egzistavimo ir vienaties sąlygas, sprendinys X vadinamas (Ito) difuziniu procesu. Koeficientas b vadinamas poslinkio, o σ – difuzijos koeficientu.

2 apibrėžimas. Tegul $B = (B^1, B^2, \ldots, B^n)$ yra n-matis Brauno judesys, $n \in \mathbb{N}$. Procesas

$$R_t := \|B_t\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (B_t^i)^2}, \quad t \ge 0,$$

vadinamas Beselio procesu su parametru n (BES^n), o procesas $\rho_t := R_t^2 = \|B_t\|^2$, $t \ge 0$, – kvadratiniu Beselio procesu su parametru n (BESQ^n).

3 SDL su glodžiais koeficientais sprendinio tolydus diferencijuojamumas pagal pradinę sąlygą

Šioje dalyje yra nagrinėjama stochastinė diferencialinė lygtis, kurios koeficientai tenkina Lipšico sąlygą. H. Kunita ([5]) įrodo, jog jei stochastinio srauto lokalios charakteristikos yra $k+1$ kartą tolydžiai diferencijuojamos, tai stochastinis srautas yra C^k–difeomorfizmas. Šiame darbe H. Kunitos teorija yra modifikuojama ir perrašoma stochastinių diferencialinių lygčių terminais taip ją supaprastinant ir padarant pritaikomesne.

1 teorema. *Nagrinėkime* (2.1) *SDL. Tarkime, jog lygties koeficientai b_i ir σ_{ij}, $i,j = 1,\dots,d$, priklauso klasei $C_b^{(k+1)d1}$ ir yra tenkinamos aukščiau išvardintos sąlygos. Tuomet* (2.1) *lygties sprendinys yra k kartų tolydžiai diferencijuojamas pagal pradinę sąlygą x ir lygtį galima k kartų diferencijuoti po integralų ženklais:*

$$\begin{aligned}\frac{\partial^k X_t^i(x)}{\partial x_{m_1}\dots\partial x_{m_p}} &= \delta_{im_1}^k + \int_0^t \frac{\partial^k}{\partial x_{m_1}\dots\partial x_{m_p}}\big(b_i(X_s(x)\big)\mathrm{d}s \\ &+ \int_0^t \frac{\partial^k}{\partial x_{m_1}\dots\partial x_{m_p}}\Big(\sum_{j=1}^d \sigma_{ij}\big(X_s(x)\big)\Big)\mathrm{d}B_s^j, \end{aligned} \tag{3.1}$$

$p \in \{1,\dots,k\}, i = 1,\dots,d, m_1,\dots,m_p \in \{0,1,\dots,k\}$, $\sum_{j=1}^p m_j = k$.

<u>Pastaba</u>: „Išskleistos“ išvestinių (3.1) išraiškos pateikiamos A priede.

Įrodymas.
Žymėjimams supaprastinti apsiribosime atveju $d = 1$. Taip pat apsiribosime labiausiai mus dominčiais ir svarbiausiais atvejais $k = 1, 2$. Dalis įrodyme naudojamų techninių lemų suformuluotos ir įrodytos 6 skyriuje. Be to, mums reikalinga tokia teorema.

2 teorema. *(Kolmogorovo–Totoki tolydžios modifikacijos kriterijus, [8] 4.1 teorema). Tegul $Y(a)$, $a \in \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^m$, – atsitiktinis laukas. Tarkime, jog egzistuoja teigiamos konstantos γ, C ir $\alpha_i, i = 1,\dots,d$, su kuriomis $\sum_{i=1}^d \alpha_i^{-1} < 1$ ir*

$$\mathbb{E}\,|Y(a) - Y(b)|^\gamma \le C\left(\sum_{i=1}^m |a_i - b_i|^{\alpha_i}\right), \quad a, b \in \mathbb{D};$$

čia $a = (a_1,\dots,a_m)$, $b = (b_1,\dots,b_m)$. Tuomet $Y(a)$ turi tolydžią modifikaciją aibės $\mathbb{D}$ uždarinyje $\overline{\mathbb{D}}$, t.y. egzistuoja toks tolydus atsitiktinis laukas $\widetilde{Y}(a)$, $a \in \overline{\mathbb{D}}$, kad $\widetilde{Y}(a) = Y(a)$ teisinga beveik tikrai su visais $a \in \mathbb{D}$.

Diferencijuojamumas, 1 atvejis: $k = 1$. Pažymėkime

$$\eta_t(x,y) = \frac{1}{y}\left(X_t(x+y) - X_t(x)\right);$$

čia $\mathbb{D} = \{t \in [0,T], x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\}$. Pagal 14 lemą turime, kad

$$\mathbb{E}\left[|\eta_t(x,y) - \eta_s(x',y')|^{2p}\right] \le K\left\{|t-s|^p + |x-x'|^{2p} + |y-y'|^{2p}\right\},$$

$p > 1$, todėl remiantis 2 teorema $\eta_t(x,y)$ gali būti tolydžiai pratęstas, kai $y = 0$, t.y.

$$\lim_{y\to 0}\frac{1}{y}\left(X_t(x+y) - X_t(x)\right) = \frac{\partial}{\partial x}X_t(x)$$

egzistuoja visiems t, x, todėl $X_t(x)$ yra b.t. tolydžiai diferencijuojamas. Taip pat $X_t(x)$ turi modifikaciją, kuri yra tolydi pagal (t,x) (žr. 12 lemą).

Diferencijuojamumas, 2 atvejis: $k = 2$.
Laikydamiesi ankstesnių žymėjimų, turime

$$\frac{\partial \eta_t(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{y}\left(X_t(x+y) - X_t(x)\right)\right) = \frac{1}{y}\left(\frac{\partial X_t(x+y)}{\partial x} - \frac{\partial X_t(x)}{\partial x}\right).$$

Pagal 15 lemą turime, kad nelygybė

$$\mathbb{E}\left|\frac{\partial \eta_t(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial \eta_s(x',y')}{\partial x'}\right|^{2p} \leq K\left\{|t-s|^p + |x-x'|^{2p} + |y-y'|^{2p}\right\}, \quad p > 1.$$

galioja kiekvienoje aprėžtoje aibėje, todėl galime pritaikyti 2 teoremą ir teigti, jog $X_t(x)$ yra dukart tolydžiai diferencijuojamas.
Diferencijuojamumas po integralų ženklais. Jam pagrįsti mums bus reikalingas toks teiginys.

3 teiginys. ([6], 11.4 teoremos išvada) *Jei $f(x,y)$, $x \in I \subset \mathbb{R}$, $y \in [a,b]$, yra tolydi ir turinti tolydžią dalinę išvestinę $\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)$ aibėje $I \times [a,b]$ funkcija, tai*

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}y = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\mathrm{d}y, \quad x \in I.$$

Turime

$$\begin{aligned}
\frac{\partial X_t(x)}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(x + \int_0^t b(X_s(x))\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(X_s(x))\mathrm{d}B_s\right) \\
&= 1 + \frac{\partial}{\partial x}\int_0^t b(X_s(x))\mathrm{d}s + \frac{\partial}{\partial x}\int_0^t \sigma(X_s(x))\mathrm{d}B_s \\
&= 1 + \int_0^t \frac{\partial b(X_s(x))}{\partial x}\mathrm{d}s + \int_0^t \frac{\partial \sigma(X_s(x))}{\partial x}\mathrm{d}B_s \\
&= 1 + \int_0^t b'(X_s(x))\frac{\partial X_s(x)}{\partial x}\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma'(X_s(x))\frac{\partial X_s(x)}{\partial x}\mathrm{d}B_s. \qquad (*)
\end{aligned}$$

Lygybė $(*)$ galioja, nes

1. $\frac{\partial}{\partial x}\int_0^t b(X_s(x))\mathrm{d}s = \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} b(X_s(x))\mathrm{d}s$ pagal 3 teiginį, kadangi $b(X_t(x))$ yra tolydi ir tolydžiai diferencijuojama pagal x.

2. Parodysime, jog $\frac{\partial}{\partial x}\int_0^t \sigma(X_s(x))\mathrm{d}B_s = \int_0^t \frac{\partial}{\partial x}\sigma(X_s(x))\mathrm{d}B_s$.
   Pagal išvestinės apibrėžimą turime

$$\frac{\sigma(X_s(x+h)) - \sigma(X_s(x))}{h} \to \frac{\partial}{\partial x}\sigma(X_s(x)), \qquad \text{kai } h \to 0.$$

   Taip pat

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\int_0^t \sigma(X_s(x))\mathrm{d}B_s &= \lim_{h\to 0}\frac{\int_0^t \sigma(X_s(x+h))\mathrm{d}B_s - \int_0^t \sigma(X_s(x))\mathrm{d}B_s}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\int_0^t \frac{\sigma(X_s(x+h)) - \sigma(X_s(x))}{h}\mathrm{d}B_s.
\end{aligned}$$

   Toliau parodysime, jog $\int_0^t \frac{\sigma(X_s(x+h))-\sigma(X_s(x))}{h}\mathrm{d}B_s \xrightarrow{L_2} \int_0^t \frac{\partial}{\partial x}\sigma(X_s(x))\mathrm{d}B_s$. Pasinaudodami izometrijos savybe, turime:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\int_0^t \left[\frac{\sigma(X_s(x+h)) - \sigma(X_s(x))}{h} - \frac{\partial}{\partial x}\sigma(X_s(x))\right]\mathrm{d}B_s\right)^2 \\
&= \int_0^t \mathbb{E}\left[\frac{\sigma(X_s(x+h)) - \sigma(X_s(x))}{h} - \frac{\partial}{\partial x}\sigma(X_s(x))\right]^2 \mathrm{d}s \to 0, \quad h \to 0. \qquad (\#)
\end{aligned}$$

Toliau pagrįsime (#) perėjimą. Parodysime, kad a.p. šeima

$$\left(\frac{\sigma(X_s(x+h))-\sigma(X_s(x))}{h}-\frac{\partial}{\partial x}\sigma(X_s(x))\right)^2, \qquad h\neq 0,$$

yra L^α aprėžta su bet kokiu $\alpha>1$. Naudosimės paprasta nelygybe $(a-b)^2\leq 2(a^2+b^2)$. Mūsų nagrinėjamu atveju $a=\frac{\sigma(X_s(x+h))-\sigma(X_s(x))}{h}$, o $b=\frac{\partial}{\partial x}\sigma(X_s(x))$. Turime (su C kintančiu kiekvienoje eilutėje)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\int_0^t\left|\frac{\sigma(X_s(x+h))-\sigma(X_s(x))}{h}\right|^{2\alpha}\mathrm{d}s &\overset{\text{Lipšico sąlyga}}{\leq} C\int_0^t\mathbb{E}\left(\frac{X_s(x+h)-X_s(x)}{h}\right)^{2\alpha}\mathrm{d}s\\
&= C\int_0^t\mathbb{E}\left(\eta_s(x,h)\right)^{2\alpha}\mathrm{d}s\\
&\overset{14\text{ lema}}{\leq} \check{c}<\infty,\\
\mathbb{E}\int_0^t\left|\frac{\partial}{\partial x}\sigma(X_s(x))\right|^{2\alpha}\mathrm{d}s &= \int_0^t\mathbb{E}\left(\sigma'(X_s(x))\frac{\partial X_s(x)}{\partial x}\right)^{2\alpha}\mathrm{d}s\\
&\leq C\int_0^t\mathbb{E}\left(\frac{\partial X_s(x)}{\partial x}\right)^{2\alpha}\mathrm{d}s\\
&\overset{16\text{ lema}}{\leq} \tilde{c}<\infty, \quad s\in[0,T], x\in\mathbb{R}, h\in\mathbb{R}\backslash\{0\}.
\end{aligned}$$

Beliko pritaikyti tokį Lebego teoremos apibendrinimą:

4 teiginys. (žr. [14], 11.8 išvada ir [14], 11.11 teiginys) *Jei a.p. šeima $\xi_h(s), s\in[0,T], h\in A$, tenkina įvertį $\sup_{h\in A}\int_0^T\mathbb{E}|\xi_h(s)|^\alpha\mathrm{d}s<+\infty$ su kokiu nors $\alpha>1$ bei $\xi_h(s)\to\xi_0(t)$, $t\in[0,T]$, kai $h\to h_0$, tai $\int_0^T\mathbb{E}\xi_h(s)\mathrm{d}s\to\int_0^T\mathbb{E}\xi_0(s)\mathrm{d}s$.*

Juo remiantis, gauname konvergavimą (#), iš kurio turime

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^t\sigma(X_s(x))\mathrm{d}B_s=\int_0^t\frac{\partial}{\partial x}\sigma(X_s(x))\mathrm{d}B_s.$$

Antroji išvestinė tenkina lygtį

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 X_t(x)}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(1+\int_0^t\frac{\partial b(X_t(x))}{\partial x}\mathrm{d}s+\int_0^t\frac{\partial\sigma(X_t(x))}{\partial x}\mathrm{d}B_s\Big)\\
&= \int_0^t\left[b''(X_s(x))\left(\frac{\partial X_s(x)}{\partial x}\right)^2+b'(X_s(x))\frac{\partial^2 X_s(x)}{\partial x^2}\right]\mathrm{d}s\\
&+\int_0^t\left[\sigma''(X_s(x))\left(\frac{\partial X_s(x)}{\partial x}\right)^2+\sigma'(X_s(x))\frac{\partial^2 X_s(x)}{\partial x^2}\right]\mathrm{d}B_s. \qquad (**)
\end{aligned}$$

Kaip ir ankstesniu atveju lygybė (**) galioja, nes $\frac{\partial b(X_t(x))}{\partial x}$ yra diferencijuojamas pagal x bei tolydus pagal (x,t), tuo tarpu stochastinio integralo atveju išvestinę ir integralą galima sukeisti vietomis, nes turime

$$\mathbb{E}\left[\frac{\frac{\partial\sigma(X_s(x+h))}{\partial x}-\frac{\partial\sigma(X_s(x))}{\partial x}}{h}-\frac{\partial^2\sigma(X_s(x))}{\partial x^2}\right]^{2\alpha}<\infty,$$

čia $\alpha>1$ ir galime taikyti 4 teiginį.

□

4 SDL sprendinio diferencijuojamumas pagal pradinę sąlygą

Šiame skyriuje pirmos dalies rezultatas yra išplečiamas stochastinėms diferencialinėms lygtims, kurios turi vienintelį teigiamą sprendinį. Toks, pavyzdžiui, yra CIR procesas, tenkinantis Felerio sąlygą. Pasiremiant stochastinės eksponentės išraiška ir savybe, jog jos vidurkis neviršija 1, įrodoma, kad diferencijuojant funkciją $u(t,x)$ galima sukeisti vidurkio ir išvestinės ženklus. Paskutinis šios dalies teiginys būtinas nagrinėjant aukštesnės eilės išvestines. Pasinaudodami tuo, jog CIR procesas gali būti užrašytas kaip kvadratinis Beselio procesas, kuriam pritaikyta atitinkama laiko skalė, įrodome, kad bet kokios eilės $X_t(x)$ išvestinės momentai yra aprėžti (konstantomis, priklausančiomis nuo pradinės sąlygos x).

5 teorema. *Tarkime, kad SD lygties*

$$X_t(x) = x + \int_0^t b(X_u(x))\mathrm{d}u + \int_0^t \sigma(X_u(x))\mathrm{d}B_u, \quad x > 0, \tag{4.1}$$

koeficientai $b, \sigma \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ yra tokie, kad lygtis turi vienintelį sprendinį $X_t(x) > 0$, $t \geq 0$, su bet kokiu $x > 0$. Tada jos sprendinys $X_t(x)$, $t \geq 0$, $x > 0$, yra be galo tolydžiai diferencijuojamas pagal x.

Pastaba. Teoremos sąlygas tenkina CIR lygtis

$$X_t(x) = x + \int_0^t \theta(\kappa - X_u(x))\,\mathrm{d}u + \int_0^t \sigma\sqrt{X_u(x)}\,\mathrm{d}B_u, \quad x > 0,$$

su koeficientais $\kappa, \theta, \sigma > 0$, tenkinančiais vadinamąją Felerio sąlyga $2\kappa\theta \geq \sigma^2$.

Įrodymas. Laisvai pasirinkime $\epsilon \in (0,1)$. Imkime bet kokias dvi funkcijas $b_\epsilon, \sigma_\epsilon \in C_b^\infty(\mathbb{R})$, kurios sutampa su b, σ intervale $I_\epsilon := [\epsilon, \epsilon^{-1}]$ ir nagrinėkime SDL

$$X_t^\epsilon(x) = x + \int_0^t b^\epsilon(X_u^\epsilon(x))\mathrm{d}u + \int_0^t \sigma^\epsilon(X_u^\epsilon(x))\mathrm{d}B_u, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{4.2}$$

Įrodėme (1 teorema), kad tokios lygties sprendinys $X_t^\epsilon(x)$ yra be galo tolydžiai diferencijuojamas pagal $x \in \mathbb{R}$. Su bet kokiu $x \in I_\epsilon$ apibrėžkime stabdymo momentą

$$\tau_\epsilon^x = \inf\{t \geq 0 : X_t(x) \notin I_\epsilon\}.$$

Dėl SD lygčių (4.1) ir (4.2) sprendinių vienaties jie sutampa, kol neišeina iš intervalo I_ϵ, t.y.

$$X_t(x) = X_t^\epsilon(x), \quad t \leq \tau_\epsilon^x,\ x \in I_\epsilon.$$

Todėl $X_t(x)$ yra be galo tolydžiai diferencijuojamas pagal $x \in I_\epsilon$ su visais $t \leq \tau_\epsilon^x$. Kadangi $I_\epsilon \uparrow \mathbb{R}_+$ ir $[0, \tau_\epsilon^x] \uparrow (0, \infty)$, kai $\epsilon \downarrow 0$, su visais $x > 0$, tai $X_t(x)$ yra be galo tolydžiai diferencijuojamas pagal x visame intervale $\mathbb{R}_+$. □

Tolimesnių teiginių įrodymui reikės lokalaus integruojamumo apibrėžimo bei teiginio apie diferencijavimą po integralo ženklu. Teiginys suformuluotas bei įrodytas [2] (3.2 teorema) šaltinyje.

3 apibrėžimas. Tarkime, kad $(E, \mathcal{A}, \mu)$ yra erdvė su matu. $X \subset \mathbb{R}^k$ – atvira aibė ir $f : X \times \Omega \to \mathbb{R}$ yra mati funkcija. Sakysime, kad f yra lokaliai integruojama, jei

$$\int_K \int_\Omega |f(x,\omega)|\mu(\mathrm{d}\omega)\mathrm{d}x < \infty,$$

su visomis kompaktiškomis aibėmis $K \subset X$.

6 teiginys. *(Diferencijavimas po integralo ženklu, [2, 3.2 teorema]). Tarkime, kad funkcija f : $X \times \Omega \to \mathbb{R}$ ir jos dalinė išvestinė $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ yra lokaliai integruojamos bei tolydžios pagal $x \in X$. Tada*

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \int\limits_{\Omega} f(x,\omega)\mu(\mathrm{d}\omega) = \int\limits_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} f(x,\omega)\mu(\mathrm{d}\omega)$$

su visais $x \in X$.

7 teorema. *Jei $f \in C^1_{pol}(\mathbb{R}_+)$, tai funkciją $u(t,x) = \mathbb{E}(f(X_t(x)))$, $x > 0$, galima diferencijuoti po vidurkio ženklu, t.y.*

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathbb{E}f(X_t(x)) = \mathbb{E}\big(f'(X_t(x)\eta_t(x)\big),\ x > 0, t \geq 0; \tag{4.3}$$

čia $\eta_t(x) := \frac{\partial}{\partial x} X_t(x)$ ir X_t toks kaip 5 teoremoje su poslinkio koeficientu b, kurio išvestinė b' aprėžta, ir difuzijos koeficientu σ, tenkinančiu tiesiško augimo sąlygas.

Įrodymas. Procesas $\eta_t(x)$ tenkina lygtį

$$\begin{aligned}\eta_t(x) &= 1 + \int_0^t b'(X_s(x))\eta_s(x)\,\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma'(X_s(x))\eta_s(x)\,\mathrm{d}B_s \\ &= 1 + \int_0^t \eta_s(x)\big(b'(X_s(x))\,\mathrm{d}s + \sigma'(X_s(x))\,\mathrm{d}B_s\big)\end{aligned}$$

Todėl jį galima užrašyti kaip Ito proceso $Y_t = \int_0^t b'(X_s(x))\,\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma'(X_s(x))\,\mathrm{d}B_s$ stochastinę eksponentę (žr. [7], 8 sk.):

$$\eta_t(x) = e^{\int_0^t b'(X_s(x))\,\mathrm{d}s} \exp\Big\{ \int_0^t \sigma'(X_s(x))\,\mathrm{d}B_s - \frac{1}{2}\int_0^t (\sigma'(X_s(x)))^2\,\mathrm{d}s\Big\},\ t \geq 0.$$

Gerai žinoma, kad antroji eksponentė $\exp\{\ldots\}$ yra lokalusis martingalas, kurio vidurkis neviršija 1. Taip pat poslinkio koeficiento išvestinė yra aprėžta, todėl

$$e^{\int_0^t b'(X_s(x))\,\mathrm{d}s} \leq e^{CT}, \quad t \in [0,T].$$

Apjungę gauname

$$\mathbb{E}\eta_t(x) \leq \widetilde{C},\ t \in [0,T].$$

Todėl, remiantis 6 teiginiu, (4.3) lygybė teisinga su visomis $f \in C^1_b(\mathbb{R}_+)$. Bendru atveju pastebėkime, kad kiekvieną funkciją $f \in C^1_{pol}(\mathbb{R}_+)$ galima išreikšti dviejų teigiamų didėjančių funkcijų iš $C^1_{pol}(\mathbb{R}_+)$ skirtumu. Todėl (4.3) lygybę pakanka įrodyti teigiamoms didėjančioms ($f' \geq 0$) funkcijoms iš $C^1_{pol}(\mathbb{R}_+)$. Kiekvienai tokiai funkcijai f egzistuoja funkcijų seka $\{f_n\} \subset C^1_b(\mathbb{R}_+)$, su kuria $f'_n \uparrow f'$. Tada, remiantis Niutono–Leibnico formule, taip pat $f_n \uparrow f$. Perrašykime (4.3) ekvivalenčiu būdu

$$\mathbb{E}f(X_t(x)) = \mathbb{E}f(X_t(0)) + \int_0^x \mathbb{E}\big(f'(X_t(y)\eta_t(y)\big)\,dy,\ x > 0, \tag{4.4}$$

Įsitikinome, kad ši lygybė galioja visoms funkcijoms f_n, t.y.

$$\mathbb{E}f_n(X_t(x)) = \mathbb{E}f_n(X_t(0)) + \int_0^x \mathbb{E}\big(f'_n(X_t(y)\eta_t(y)\big)\,dy,\ x > 0,\ n \in \mathbb{N}. \tag{4.5}$$

Perėję prie ribos, kai $n \to \infty$, ir remdamiesi B. Levi teorema, gauname (4.4) lygybę funkcijai f. Kairėje ribos – vidurkio $\mathbb{E}f(X_t(x))$ – baigtinumą garantuoja funkcijos f polinominis augimas kartu su visų $X_t(x)$ proceso momentų baigtinumu (tą garantuoja teiginio sąlygos). Todėl ir dešinės pusės riba yra baigtinė. $\square$

8 išvada. *Jei $X_t(x)$ žymi CIR procesą su pradine sąlyga x ir $f \in C^1_{pol}(\mathbb{R}_+)$, tai*

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathbb{E}f(X_t(x)) = \mathbb{E}\left(f'(X_t(x))\frac{\partial X_t(x)}{\partial x}\right).$$

Įrodymas.
CIR procesas tenkina 7 teoremos sąlygas, nes poslinkio koeficiento išvestinė

$$b'(X_t(x)) = -\theta$$

yra aprėžta ir visi CIR proceso momentai yra baigtiniai. □

9 teorema. *Pažymėkime $\xi_t(x) := \frac{\partial}{\partial x}\eta_t(x) = \frac{\partial^2 X_t(x)}{\partial x^2}$. Jei $\mathbb{E}\eta_t^2(x)$ ir $\mathbb{E}\xi_t(x)$ yra aprėžti kiekviename kompaktiškame intervale $[a,b] \subset (0,\infty)$, tai*

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathbb{E}(f(X_t(x))) = \mathbb{E}(f''(X_t(x))\eta_t^2(x) + f'(X_t(x))\xi_t(x)) \tag{4.6}$$

su visomis funkcijomis $f \in C_b^2(\mathbb{R}_+)$ bei $X_t(x)$, tokiu kaip ir 7 teoremoje. Jei, be to, $\mathbb{E}\eta_t^{2+\hat{\varepsilon}}(x)$ bei $\mathbb{E}\xi_t^{1+\breve{\varepsilon}}(x)$ yra aprėžti su kokiais nors $\hat{\varepsilon}, \breve{\varepsilon} > 0$, tai (4.6) lygybė teisinga, kai $f \in C^2_{pol}(\mathbb{R}_+)$.

Įrodymas. Remdamiesi 7 teorema turime, kad

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathbb{E}(f(X_t(x))) = \frac{\partial}{\partial x}\mathbb{E}(f'(X_t(x))\eta_t(x)).$$

Pažymėkime $g(X_t(x)) = f'(X_t(x))\eta_t(x)$. Remiantis 6 teiginiu, reikia parodyti, kad $\mathbb{E}\left(g(X_t(x))\right)$ ir $\mathbb{E}\left(\frac{\partial g(X_t(x))}{\partial x}\right)$ yra aprėžti. Pirmojo vidurkio aprėžtumas įrodytas 7 teoremoje. Nagrinėkime

$$\frac{\partial g(X_t(x))}{\partial x} = f''(X_t(x))\eta_t^2(x) + f'(X_t(x))\xi_t(x) = J_1 + J_2.$$

Tuomet

$$\begin{aligned}\mathbb{E}J_1 &= \mathbb{E}(f''(X_t(x))\eta_t^2(x)) \le C_1\mathbb{E}\eta_t^2(x) < \infty,\\ \mathbb{E}J_2 &= \mathbb{E}(f'(X_t(x))\xi_t(x)) \le C_2\mathbb{E}\xi_t(x) < \infty.\end{aligned}$$

Vadinasi, (4.6) lygybė įrodyta, kai $f \in C_b^2(\mathbb{R}_+)$.
Nagrinėkime atvejį, kai $f \in C^2_{pol}(\mathbb{R}_+)$. Pasinaudodami Hiolderio nelygybe turime

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(f''(X_t(x))\eta_t^2(x)) &\le \left(\mathbb{E}(f''(X_t(x)))^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}}\left(\mathbb{E}\eta_t^{2q_1}(x)\right)^{\frac{1}{q_1}}, \quad \frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1}=1,\\ \mathbb{E}(f'(X_t(x))\xi_t(x)) &\le \left(\mathbb{E}(f'(X_t(x)))^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_2}}\left(\mathbb{E}\xi_t^{q_2}(x)\right)^{\frac{1}{q_2}}, \quad \frac{1}{p_2}+\frac{1}{q_2}=1.\end{aligned}$$

Pažymėkime

$$\begin{aligned}p_1 &= \frac{2+\hat{\varepsilon}}{\hat{\varepsilon}} > 1,\\ q_1 &= \frac{2+\hat{\varepsilon}}{2} > 1,\\ p_2 &= \frac{1+\breve{\varepsilon}}{\breve{\varepsilon}} > 1,\\ q_2 &= 1+\breve{\varepsilon} > 1.\end{aligned}$$

Tuomet, pasinaudojus proceso $X_t(x)$ visų momentų baigtinumu, gauname

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(f''(X_t(x))\eta_t^2(x)) &\leq \left(\mathbb{E}(f''(X_t(x)))^{\frac{2+\hat{\varepsilon}}{\hat{\varepsilon}}}\right)^{\frac{\hat{\varepsilon}}{2+\hat{\varepsilon}}} \left(\mathbb{E}\eta_t^{2+\hat{\varepsilon}}(x)\right)^{\frac{2}{2+\hat{\varepsilon}}} \\
&\leq C_3 \left(\mathbb{E}\eta_t^{2+\hat{\varepsilon}}(x)\right)^{\frac{2}{2+\hat{\varepsilon}}} < +\infty, \\
\mathbb{E}(f'(X_t(x))\xi_t(x)) &\leq \left(\mathbb{E}(f'(X_t(x)))^{\frac{1+\check{\varepsilon}}{\check{\varepsilon}}}\right)^{\frac{\check{\varepsilon}}{1+\check{\varepsilon}}} \left(\mathbb{E}\xi_t^{1+\check{\varepsilon}}(x)\right)^{\frac{1}{1+\check{\varepsilon}}} \\
&\leq C_4 \left(\mathbb{E}\xi_t^{1+\check{\varepsilon}}(x)\right)^{\frac{1}{1+\check{\varepsilon}}} < +\infty.
\end{aligned}$$

□

Pastaba. Deja, kol kas nepavyko gauti paprastų bendrų sąlygų koeficientams, kurios garantuotų $\mathbb{E}\eta_t^2(x)$ ir $\mathbb{E}\xi_t(x)$ aprėžtumą. Kita vertus, galima įrodyti (žr. 10 ir 11 teoremas), kad CIR procesas tenkina 9 teoremos sąlygas.

10 teorema. *Tegul $X_t(x)$ žymi CIR procesą su pradine reikšme x. Tuomet*

$$\mathbb{E}\left|\frac{\partial X_t(x)}{\partial x}\right|^i \leq \begin{cases} C, & \textit{jei } i = 1^1; \\ C_i(x), & \textit{jei } i > 1. \end{cases}$$

Įrodymas.
Atvejis, kai $i = 1$, yra išnagrinėtas 7 teoremoje. Toliau laikysime, kad $i > 1$. Įrodymą išskaidysime į dvi dalis:

1. kai $\frac{4\theta\kappa}{\sigma^2} \in \mathbb{N}$,
2. kai $\frac{4\theta\kappa}{\sigma^2} \notin \mathbb{N}$.

1 dalis:
Yra žinoma ([3] 6.3.1.1 teiginys), kad CIR procesas turi tokį patį skirstinį kaip kvadratinis Beselio procesas (BESQ), kuriam pritaikyta tokia laiko transformacija:

$$X_t(x) \stackrel{d}{=} \mathrm{e}^{-\theta t}\rho\left(\frac{\sigma^2}{4\theta}(\mathrm{e}^{\theta t} - 1)\right),$$

čia $(\rho(s), s \geq 0)$ yra BESQ procesas su parametru $n = \frac{4\theta\kappa}{\sigma^2}$.
Pažymėkime $f(t) = \frac{\sigma^2}{4\theta}(\mathrm{e}^{\theta t} - 1)$. Tuomet CIR procesas gali būti užrašytas tokiu pavidalu:

$$X_t(x) \stackrel{d}{=} \mathrm{e}^{-\theta t}\rho(f(t)) = \mathrm{e}^{-\theta t}\Big[\sum_{i=2}^{n}(B^i_{f(t)})^2 + (\sqrt{x} + B^1_{f(t)})^2\Big].$$

CIR proceso išvestinės egzistavimas x atžvilgiu buvo įrodytas 5 teoremoje, todėl galime parašyti

$$\frac{\partial X_t(x)}{\partial x} \stackrel{d}{=} \frac{\mathrm{e}^{-\theta t}}{\sqrt{x}}(\sqrt{x} + B^1_{f(t)})$$

ir

$$\Big(\frac{\partial X_t(x)}{\partial x}\Big)^i \stackrel{d}{=} \frac{\mathrm{e}^{-\theta t i}}{(\sqrt{x})^i}\sum_{j=0}^{i}\tbinom{i}{j}(\sqrt{x})^j(B^1_{f(t)})^{i-j}.$$

[1]Aprėžtumas gaunamas visiems procesams, kuriems galioja 5 teoremos sąlygos

Galiausiai gauname

$$\mathbb{E}\Big(\frac{\partial X_t(x)}{\partial x}\Big)^i = \frac{\mathrm{e}^{-\theta t i}}{(\sqrt{x})^i}\sum_{j=0}^{i}\tbinom{i}{j}(\sqrt{x})^j\mathbb{E}(B^1_{f(t)})^{i-j} \le C_{T,i}(x),\ t\in[0,T].$$

2 dalis:
Tarkime turime du nepriklausomus CIR procesus:

$$\begin{aligned}\widetilde{X}_t(x) &= x+\int_0^t \theta(\tilde{\kappa}-\widetilde{X}_u(x))\,\mathrm{d}u+\int_0^t \sigma\sqrt{\widetilde{X}_u(x)}\,\mathrm{d}\widetilde{B}_u, \quad x>0,\\ \widehat{X}_t(x) &= x+\int_0^t \theta(\hat{\kappa}-\widehat{X}_u(x))\,\mathrm{d}u+\int_0^t \sigma\sqrt{\widehat{X}_u(x)}\,\mathrm{d}\widehat{B}_u, \quad x>0,\end{aligned}$$

kad $\frac{4\theta\tilde{\kappa}}{\sigma^2}=n$ ir $\frac{4\theta\hat{\kappa}}{\sigma^2}=n+1$ bei $\widetilde{B}$ ir $\widehat{B}$ yra nepriklausomi Brauno judesiai.
Parodysime, kad $X_t(x)=\lambda\widetilde{X}_t(x)+(1-\lambda)\widehat{X}_t(x)$, $\lambda\in[0,1]$, irgi yra CIR procesas (analogiškas teiginys įrodomas [3] knygoje (6.2.1.1 tg.) Beselio procesams. CIR procesui tokio teiginio literatūroje rasti nepavyko, todėl pateikiame čia įrodymo pilnumui). Turime

$$\begin{aligned}X_t(x) &= \lambda\widetilde{X}_t(x)+(1-\lambda)\widehat{X}_t(x)\\ &= \lambda x+(1-\lambda)x+\int_0^t \lambda\theta(\tilde{\kappa}-\widetilde{X}_u(x))\,\mathrm{d}u+\int_0^t(1-\lambda)\theta(\hat{\kappa}-\widehat{X}_u(x))\,\mathrm{d}u\\ &+\lambda\sigma\int_0^t\sqrt{\widetilde{X}_u(x)}\,\mathrm{d}\widetilde{B}_u+(1-\lambda)\sigma\int_0^t\sqrt{\widehat{X}_u(x)}\,\mathrm{d}\widehat{B}_u\\ &= x+\int_0^t\theta\Big((\lambda\tilde{\kappa}+(1-\lambda)\hat{\kappa})-(\lambda\widetilde{X}_u(x)+(1-\lambda)\widehat{X}_u(x))\Big)\,\mathrm{d}u\\ &+\sigma\int_0^t\left(\sqrt{\lambda^2\widetilde{X}_u(x)}\mathrm{d}\widetilde{B}_u+\sqrt{(1-\lambda)^2\widehat{X}_u(x)}\mathrm{d}\widehat{B}_u\right).\end{aligned}$$

Procesas W apibrėžtas kaip

$$W_t=\int_0^t \mathbb{1}_{\{\lambda\widetilde{X}_u(x)+(1-\lambda)\widehat{X}_u(x)>0\}}\left(\frac{\sqrt{\lambda^2\widetilde{X}_u(x)}\mathrm{d}\widetilde{B}_u+\sqrt{(1-\lambda)^2\widehat{X}_u(x)}\mathrm{d}\widehat{B}_u}{\sqrt{\lambda\widetilde{X}_u(x)+(1-\lambda)\widehat{X}_u(x)}}\right)$$

yra Brauno judesys, todėl procesas X tenkina tokią SDL:

$$X_t(x)=x+\int_0^t\theta(\kappa-X_u(x))\,\mathrm{d}u+\int_0^t\sigma\sqrt{X_u(x)}\,\mathrm{d}W_u,$$

kai $\kappa=\lambda\tilde{\kappa}+(1-\lambda)\hat{\kappa}$. Vadinasi, procesas X turi tokį patį skirstinį kaip ir svertinė nepriklausomų BESQ procesų suma, t.y.

$$X_t(x)\stackrel{d}{=}\mathrm{e}^{-\theta t}(\lambda\widetilde{\rho}(f(t))+(1-\lambda)\widehat{\rho}(f(t))),$$

kur $\widetilde{\rho}$ ir $\widehat{\rho}$ yra nepriklausomi BESQ procesai, ir tuomet galime pritaikyti 1 įrodymo dalį.

□

11 teorema. *Tegul $X_t(x)$ žymi CIR procesą su pradine reikšme x. Tuomet*

$$\mathbb{E}\left|\frac{\partial^k X_t(x)}{\partial x^k}\right|^i\le C_i(x),\quad i\ge1, k>1.$$

Įrodymas.
Kaip ir 10 teoremoje naudosimės tuo, jog CIR procesas pagal skirstinį sutampa su BESQ procesu, kai pastarajam pritaikoma tam tikra laiko skalė $f(t)$. 10 teoremoje buvo parodyta, kad

$$\frac{\partial X_t(x)}{\partial x} \overset{d}{=} \frac{\mathrm{e}^{-\theta t}}{\sqrt{x}}(\sqrt{x} + B^1_{f(t)}),$$

kai CIR proceso koeficientai κ, θ, σ tenkina sąlygą (trumpumo dėlei, pažymėkime ją *Sal1*), jog $\frac{4\theta\kappa}{\sigma^2} \in \mathbb{N}$. Aukštesnių eilių išvestinių nagrinėjimas teisėtas, nes jų egzistavimas įrodytas 5 teoremoje. Jei tenkinama *Sal1* sąlyga, turime

$$\frac{\partial^k X_t(x)}{\partial x^k} \overset{d}{=} (-1)^{k-1}\frac{(2k-2)!!}{2^{k-1}}\mathrm{e}^{-\theta t}B^1_{f(t)}x^{-\frac{2k-1}{2}}, \quad k > 1.$$

Pakėlę laipsniu $i \geq 1$ bei paėmę vidurkį, gauname, kad jei sąlyga *Sal1* išpildyta, tai CIR proceso sprendinio aukštesnės eilės išvestinės laipsnio vidurkis yra aprėžtas, t.y.

$$\mathbb{E}\left(\frac{\partial^k X_t(x)}{\partial x^k}\right)^i = (-1)^{i(k-1)}\left(\frac{(2k-2)!!}{2^{k-1}}\right)^i \mathrm{e}^{-\theta t i}\mathbb{E}(B^1_{f(t)})^i x^{-i\frac{2k-1}{2}} \leq C_{T,i}(x), \quad t \in [0,T].$$

Jei sąlyga *Sal1* nėra išpildyta, tai kaip ir 10 teoremoje, CIR procesą $X_t(x)$ galime užrašyti kaip sumą dviejų nepriklausomų CIR procesų, tenkinančių sąlygą *Sal1*, ir jų tiesinei kombinacijai pritaikyti pirmąją įrodymo dalį.

□

5 Atgalinės Kolmogorovo lygties sprendinio diferencijuojamumas pagal t

Remiantis [7] 9.9 išvada (atgalinė Kolmogorovo lygtis)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Au,$$

kai $u(t,x) = \mathbb{E}f(X_t(x))$, $f \in C_b^2(\mathbb{R})$ ir $X_t(x)$ koeficientai tenkina sąlygas, nusakytas 5 teoremoje. Čia operatorius A taikomas funkcijai $u = u(t,x)$ argumento x atžvilgiu.
Vadinasi, jei $X_t(x)$ žymi CIR procesą su pradine sąlyga x, tai

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \theta(\kappa - x)u_x'(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x u_{xx}^{''}(t,x).$$

Išvestinių $u_x'(t,x)$, $u_{xx}^{''}(t,x)$ egzistavimas ir išraiškos buvo įrodytos 4 dalyje.

6 Papildomos lemos

Šiame skyriuje pateiktų lemų įrodymai remiasi įrodymais, pateiktais [5] bei [4], juos modifikuojant ir pritaikant stochastinių diferencialinių lygčių teorijai. Toliau šiame skyriuje, jei nepasakyta kitaip, nagrinėjama SDL (2.1) su $d = 1$ bei $t \in [0, T]$.

12 lema. *Kiekvienam $p > 1$ egzistuoja tokia teigiama konstanta $c > 0$, kad nelygybė*

$$\mathbb{E}|X_t(x) - X_s(x')|^{2p} \leq c\left(|t-s|^p + |x-x'|^{2p}\right), \tag{6.1}$$

galioja visiems x, x', t, s.

Įrodymas.

- Atvejis, kai $s = t$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|X_t(x) - X_t(x')|^{2p} &= \mathbb{E}\bigg|x + \int_0^t b(X_u(x))\mathrm{d}u + \int_0^t \sigma(X_u(x))\mathrm{d}B_u \\
&\quad - \left(x' + \int_0^t b(X_u(x'))\mathrm{d}u + \int_0^t \sigma(X_u(x'))\mathrm{d}B_u\right)\bigg|^{2p} \\
&= \mathbb{E}\left|(x-x') + \int_0^t \left(b(X_u(x)) - b(X_u(x'))\right)\mathrm{d}u + \int_0^t \left(\sigma(X_u(x)) - \sigma(X_u(x'))\right)\mathrm{d}B_u\right|^{2p} \\
&\leq \mathbb{E}\bigg(|x-x'|^{2p} + \left|\int_0^t \left(b(X_u(x)) - b(X_u(x'))\right)\mathrm{d}u\right|^{2p} \\
&\quad + \left|\int_0^t \left(\sigma(X_u(x)) - \sigma(X_u(x'))\right)\mathrm{d}B_u\right|^{2p}\bigg) \\
&\leq c\mathbb{E}\left(|x-x'|^{2p} + \left|\int_0^t \left(X_u(x) - X_u(x')\right)\mathrm{d}u\right|^{2p} + \left|\int_0^t \left(X_u(x) - X_u(x')\right)\mathrm{d}B_u\right|^{2p}\right) \\
&\leq c\mathbb{E}\left(|x-x'|^{2p} + \int_0^t |X_u(x) - X_u(x')|^{2p}\,\mathrm{d}u + \int_0^t |X_u(x) - X_u(x')|^{2p}\,\mathrm{d}u\right) \\
&= c\left(|x-x'|^{2p} + \int_0^t \mathbb{E}\,|X_u(x) - X_u(x')|^{2p}\,\mathrm{d}u\right) \\
&\overset{\text{Gronvolo lema}}{=} c|x-x'|^{2p}.
\end{aligned}$$

- Atvejis, kai $s < t$ ir $x = x'$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|X_t(x) - X_s(x)|^{2p} &= \mathbb{E}\left|\int_s^t b(X_u(x))\mathrm{d}u + \int_s^t \sigma(X_u(x))\mathrm{d}B_u\right|^{2p} \\
&\leq \mathbb{E}\left|\int_s^t b(X_u(x))\mathrm{d}u\right|^{2p} + \mathbb{E}\left|\int_s^t \sigma(X_u(x))\mathrm{d}B_u\right|^{2p} \\
&\leq \mathbb{E}\left|\int_s^t b(X_u(x))\mathrm{d}u\right|^{2p} + C_p\mathbb{E}\left|\int_s^t \sigma^2(X_u(x))\mathrm{d}u\right|^{p} \quad \text{(BDG nelygybė}^2\text{)} \\
&\leq \mathbb{E}\left||t-s|\int_s^t b^2(X_u(x))\mathrm{d}u\right|^{p} + \mathbb{E}\left|\int_s^t \sigma^2(X_u(x))\mathrm{d}u\right|^{p} \\
&\leq \tilde{c}|t-s|^{2p} + \check{c}|t-s|^p \\
&\leq c|t-s|^p.
\end{aligned}$$

[2] žr. pvz [12] 1 skyriaus 22 teiginį

Apjungę šiuos du atvejus, turime:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|X_t(x) - X_s(x')|^{2p} &= \mathbb{E}|X_t(x) - X_t(x') + X_t(x') - X_s(x')|^{2p} \\ &\le \mathbb{E}|X_t(x) - X_t(x')|^{2p} + \mathbb{E}|X_t(x') - X_s(x')|^{2p} \\ &\le c(|x - x'|^{2p} + |t - s|^p).\end{aligned}$$

□

13 lema. *Pažymėkime*

$$g(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{1}{h}(z_1 - z_2) - \frac{1}{h'}(z_3 - z_4),$$

kur $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}^{4d}$*,* h, h' *fiksuoti nenuliniai realūs skaičiai. Tegul* $f = |g|^{2p}$*,* $p > 1$*. Tuomet egzistuoja tokios konstantos* $C_i = C_i(p)$*,* $i = 1, 2$*, kad*

$$|Af(z_1, z_2, z_3, z_4)| \le C_1 f(z_1, z_2, z_3, z_4) + C_2(|z_1 - z_3| + |z_2 - z_4|)^{2p} \left|\frac{1}{h'}(z_3 - z_4)\right|^{2p}; \tag{6.2}$$

čia A *yra* $4d$*-mačio proceso, sudaryto iš 4-ių* d*-mačių* (2.1) *lygties sprendinių kopijų (su skirtingomis pradinėmis sąlygomis), generatorius.*

Įrodymas.
Paprastumo dėlei nagrinėkime atvejį, kai $d = 1$. Pagal generatoriaus apibrėžimą

$$Af(z_1, z_2, z_3, z_4) = \sum_{i=1}^{4} b(z_i)\frac{\partial f}{\partial z_i}(z) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{4} \sigma(z_i)\sigma(z_j)\frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j}(z) =: I_1 + I_2.$$

Turime, jog

$$\begin{aligned}I_1 &= 2p|g|^{2p-1}\left(\frac{1}{h}(b(z_1) - b(z_2)) - \frac{1}{h'}(b(z_3) - b(z_4))\right), \\ I_2 &= p(2p-1)|g|^{2p-2} \\ &\quad\times \Bigg[\frac{1}{h^2}\left(\sigma^2(z_1) - 2\sigma(z_1)\sigma(z_2) + \sigma^2(z_2)\right) \\ &\qquad - \frac{1}{hh'}\big(\sigma(z_1)\sigma(z_3) - \sigma(z_1)\sigma(z_4) - \sigma(z_2)\sigma(z_3) + \sigma(z_2)\sigma(z_4)\big) \\ &\qquad + \frac{1}{h'^2}\big(\sigma^2(z_3) - 2\sigma(z_3)\sigma(z_4) + \sigma^2(z_4)\big)\Bigg].\end{aligned}$$

Pirmiausiai vertinsime I_1. Pasinaudodami Niutono–Leibnico formule, turime:

$$\begin{aligned}I_1 &= 2p|g|^{2p-1}\left[\int_0^1 b'(z_1 + \theta(z_2 - z_1))\mathrm{d}\theta \times \frac{1}{h}(z_1 - z_2) - \int_0^1 b'(z_3 + \theta(z_4 - z_3))\mathrm{d}\theta \times \frac{1}{h'}(z_3 - z_4)\right] \\ &= 2p|g|^{2p-1}\left[\int_0^1 b'(z_1 + \theta(z_2 - z_1))\mathrm{d}\theta \times \underbrace{\left(\frac{1}{h}(z_1 - z_2) - \frac{1}{h'}(z_3 - z_4)\right)}_{g}\right. \\ &\qquad \left. + \int_0^1 \left(b'(z_1 + \theta(z_2 - z_1)) - b'(z_3 + \theta(z_4 - z_3))\right)\mathrm{d}\theta \times \frac{1}{h'}(z_3 - z_4)\right].\end{aligned}$$

Pritaikę Lagranžo vidutinės reikšmės teoremą, gauname:

$$\begin{aligned}|b'(z_1 + \theta(z_2 - z_1)) - b'(z_3 + \theta(z_4 - z_3))| &= |b''(c)||(z_1 + \theta(z_2 - z_1) - z_3 - \theta(z_4 - z_3))| \\ &\le |b''(c)|\left((1-\theta)|z_1 - z_3| + \theta|z_2 - z_4|\right) \\ &\le \tilde{C}\left(|z_1 - z_3| + |z_2 - z_4|\right);\end{aligned}$$

čia $c \in (z_1 + \theta(z_2 - z_1), z_3 + \theta(z_4 - z_3))$. Todėl egzistuoja tokios teigiamos konstantos C_3, C_4, kad

$$|I_1| \leq C_3 f(z_1, z_2, z_3, z_4) + C_4 \left(|z_1 - z_3| + |z_2 - z_4|\right) \times \left|\frac{1}{h'}(z_3 - z_4)\right| \times |g|^{2p-1}.$$

Naudosimės Young (žr. [9] 1.1 lema) nelygybe $ab \leq \frac{a^{\alpha_1}}{\alpha_1} + \frac{b^{\alpha_2}}{\alpha_2}$, jei $\alpha_1, \alpha_2 > 1$, $a, b \geq 0$ ir $\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} = 1$. Mūsų atveju $a = (|z_1 - z_3| + |z_2 - z_4|) \times \left|\frac{1}{h'}(z_3 - z_4)\right|$, $b = |g|^{2p-1}$, $\alpha_1 = 2p$, $\alpha_2 = \frac{2p}{2p-1}$. Pritaikę nelygybę, turime:

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq C_3 f(z_1, z_2, z_3, z_4) + C_4 \left(\frac{1}{2p} \left(|z_1 - z_3| + |z_2 - z_4|\right)^{2p} \times \left|\frac{1}{h'}(z_3 - z_4)\right|^{2p} + \frac{2p-1}{2p} |g|^{2p} \right) \\ &= C_5 f(z_1, z_2, z_3, z_4) + C_6 \left(|z_1 - z_3| + |z_2 - z_4|\right)^{2p} \times \left|\frac{1}{h'}(z_3 - z_4)\right|^{2p}. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Toliau vertinsime I_2. Pastebėkime, jog galioja lygybė:

$$\left(\int_0^1 \sigma'(z_i + \theta(z_j - z_i)) \mathrm{d}\theta\right) \left(\int_0^1 \sigma'(z_k + \tau(z_m - z_k)) \mathrm{d}\tau\right) (z_i - z_j)(z_k - z_m) =$$
$$(\sigma(z_j) - \sigma(z_i)) \times (\sigma(z_m) - \sigma(z_k)) = \sigma(z_j)\sigma(z_m) - \sigma(z_j)\sigma(z_k) - \sigma(z_i)\sigma(z_m) + \sigma(z_i)\sigma(z_k).$$

Pažymėsime

$$\begin{aligned} \xi_{ijkm}(\theta, \tau) &= \sigma'(z_i + \theta(z_j - z_i)) \times \sigma'(z_k + \tau(z_m - z_k)), \\ u &= \frac{1}{h}(z_1 - z_2), \\ v &= \frac{1}{h'}(z_3 - z_4). \end{aligned}$$

Pritaikę Niutono–Leibnico formulę, I_2 galime užrašyti tokiu pavidalu:

$$\begin{aligned} I_2 &= p(2p-1)|g|^{2p-2} \int_0^1 \int_0^1 \left(\xi_{1212}(\theta, \tau) u^2 - 2\xi_{1234}(\theta, \tau) uv + \xi_{3434}(\theta, \tau) v^2\right) \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\tau \\ &= p(2p-1)|g|^{2p-2} \left[\int_0^1 \int_0^1 \xi_{1212}(\theta, \tau) \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\tau (u - v)^2 - \int_0^1 \int_0^1 \left(\xi_{1212}(\theta, \tau) - \xi_{3434}(\theta, \tau)\right) \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\tau v^2 \right. \\ &\left. + 2 \int_0^1 \int_0^1 \left(\xi_{1212}(\theta, \tau) - \xi_{1234}(\theta, \tau)\right) \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\tau uv \right] = p(2p-1)|g|^{2p-2} \left[\int_0^1 \int_0^1 \xi_{1212}(\theta, \tau) \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\tau (u - v)^2 \right. \\ &+ \int_0^1 \int_0^1 \left(\xi_{1212}(\theta, \tau) - \xi_{1234}(\theta, \tau) - \xi_{3412}(\theta, \tau) + \xi_{3434}(\theta, \tau)\right) \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\tau v^2 \\ &\left. + \int_0^1 \int_0^1 \left(2\xi_{1212}(\theta, \tau) - \xi_{1234}(\theta, \tau) - \xi_{3412}(\theta, \tau)\right) \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\tau v(u - v) \right] = I_3 + I_4 + I_5. \end{aligned}$$

Čia pasinaudojome tuo, jog

$$\int_0^1 \int_0^1 \xi_{1234}(\theta, \tau) \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\tau = \int_0^1 \int_0^1 \xi_{3412}(\theta, \tau) \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\tau.$$

Įvertinsime kiekvieną iš I_3, I_4, I_5 atskirai. Turime:

$$\begin{aligned} |I_3| &\leq C_7 f(z_1, z_2, z_3, z_4), \\ |I_4| &\leq C_8 (|z_1 - z_3| + |z_2 - z_4|)^2 |g|^{2p-2} |v|^2, \\ |I_5| &\leq C_9 (|z_1 - z_3| + |z_2 - z_4|) |g|^{2p-1} |v|. \end{aligned}$$

Pasinaudoję įverčiais, gauname:

$$\begin{aligned}
|I_2| &\le C_7 f(z_1,z_2,z_3,z_4) + C_8(|z_1-z_3|+|z_2-z_4|)^2|g|^{2p-2}|v|^2 + C_9(|z_1-z_3|+|z_2-z_4|)|g|^{2p-1}|v| \\
&\le C_7 f(z_1,z_2,z_3,z_4) + C_8\left[\frac{1}{p}\left((|z_1-z_3|+|z_2-z_4|)^{2p}\left|\frac{1}{h'}(z_3-z_4)\right|^{2p}\right)+\frac{p-1}{p}|g|^{2p}\right] \\
&\quad + C_9\left[\frac{1}{2p}\left((|z_1-z_3|+|z_2-z_4|)^{2p}\left|\frac{1}{h'}(z_3-z_4)\right|^{2p}\right)+\frac{2p-1}{2p}|g|^{2p}\right] \\
&= C_{10} f(z_1,z_2,z_3,z_4) + C_{11}\left[(|z_1-z_3|+|z_2-z_4|)^{2p}\left|\frac{1}{h'}(z_3-z_4)\right|^{2p}\right]. \qquad (6.4)
\end{aligned}$$

Apjungę (6.3) ir (6.4), gauname (6.2) nelygybę.

□

14 lema. *Pažymėkime*

$$\eta_t(x,y) = \frac{1}{y}\left(X_t(x+y) - X_t(x)\right), \quad y \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Tada su kiekvienu $p>1$ egzistuoja tokia teigiama konstanta $C=C(p)$, kad

$$\mathbb{E}\left[|\eta_t(x,y)-\eta_s(x',y')|^{2p}\right] \le C\left\{|t-s|^p + |x-x'|^{2p} + |y-y'|^{2p}\right\} \qquad (6.5)$$

su visais x,x',t,s ir $y,y'\neq 0$. Be to, $\eta_t(x,y)$ yra L^p aprėžtas.

Įrodymas.
L^p aprėžtumas išplaukia tiesiogiai iš 12 lemos:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|\eta_t(x,y)|^p &\le \left(\mathbb{E}|\eta_t(x,y)|^{2p}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\mathbb{E}|\frac{1}{y}\left(X_t(x+y)-X_t(x)\right)|^{2p}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\left|\frac{1}{y}\right|^{2p}\mathbb{E}|\left(X_t(x+y)-X_t(x)\right)|^{2p}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le c^{\frac{1}{2}}\left(\left|\frac{1}{y}\right|^{2p}|(x+y)-x|^{2p}\right)^{\frac{1}{2}} = c^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Toliau 13 lemoje apibrėžtai funkcijai f turime

$$f(X_t(x+y),X_t(x),X_s(x'+y'),X_s(x')) = |\eta_t(x,y)-\eta_s(x',y')|^{2p}.$$

- Atvejis, kai $s=t$.
  Pritaikome Dynkino formulę funkcijai f:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}f(X_t(x+y),X_t(x),X_t(x'+y'),X_t(x')) &= f(x+y,x,x'+y',x') \\
&\quad + \mathbb{E}\int_0^t Af(X_u(x+y),X_u(x),X_u(x'+y'),X_u(x'))\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

Pritaikę 13 lemą, gauname:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left|\eta_t(x,y)-\eta_t(x',y')\right|^{2p} &\le C_1\int_0^t \mathbb{E}\left|\eta_u(x,y)-\eta_u(x',y')\right|^{2p}\mathrm{d}u\\
&+C_2\int_0^t \mathbb{E}\left(|X_u(x+y)-X_u(x'+y')|+|X_u(x)-X_u(x')|\right)^{2p}\left|\eta_u(x',y')\right|^{2p}\mathrm{d}u\\
&\overset{[9]\ 1.2\ \text{lema}}{\le} C_1\int_0^t \mathbb{E}\left|\eta_u(x,y)-\eta_u(x',y')\right|^{2p}\mathrm{d}u\\
&+\widetilde{C}_2\int_0^t \mathbb{E}\left(|X_u(x+y)-X_u(x'+y')|^{2p}+|X_u(x)-X_u(x')|^{2p}\right)\left|\eta_u(x',y')\right|^{2p}\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

Pritaikę 12 lemą, turime tokį įvertį:

$$\begin{aligned}&\widetilde{C}_2\int_0^t \mathbb{E}\left(|X_u(x+y)-X_u(x'+y')|^{2p}+|X_u(x)-X_u(x')|^{2p}\right)\left|\eta_u(x',y')\right|^{2p}\mathrm{d}u\\
&\le \widetilde{C}_2\int_0^t \left[\left(\mathbb{E}|X_u(x+y)-X_u(x'+y')|^{4p}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\mathbb{E}|X_u(x)-X_u(x')|^{4p}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\left(\mathbb{E}|\underbrace{\eta_u(x',y')}_{L^{4p}\ \text{aprėžtas}}|^{4p}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}u\\
&\le C_3\int_0^t\left(|x+y-x'-y'|^{2p}+|x-x'|^{2p}\right)\mathrm{d}u\\
&\le C_4\left(|x-x'|^{2p}+|y-y'|^{2p}+|x-x'|^{2p}\right)\\
&\le C_5\left(|x-x'|^{2p}+|y-y'|^{2p}\right).\end{aligned}$$

Apjungę gauname

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left|\eta_t(x,y)-\eta_t(x',y')\right|^{2p} &\le C_1\int_0^t \mathbb{E}\left|\eta_u(x,y)-\eta_u(x',y')\right|^{2p}\mathrm{d}u\\
&+C_6\left(\left|x-x'\right|^{2p}+\left|y-y'\right|^{2p}\right).\end{aligned}$$

Galiausiai pritaikę Gronvolo lemą, gauname (6.5) įvertį.

- Atvejis, kai $s<t$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left|\eta_t(x,y)-\eta_s(x,y)\right|^{2p} &= \mathbb{E}\left|\frac{1}{y}(X_t(x+y)-X_t(x)-X_s(x+y)+X_s(x))\right|^{2p}\\
&=\frac{1}{|y|^{2p}}\mathbb{E}\left|\int_0^t(b(X_u(x+y))-b(X_u(x)))\mathrm{d}u-\int_0^s(b(X_u(x+y))-b(X_u(x)))\mathrm{d}u\right.\\
&\left.+\int_0^t(\sigma(X_u(x+y))-\sigma(X_u(x)))\mathrm{d}B_u-\int_0^s(\sigma(X_u(x+y))-\sigma(X_u(x)))\mathrm{d}B_u\right|^{2p}\\
&=\frac{1}{|y|^{2p}}\mathbb{E}\left|\int_s^t(b(X_u(x+y))-b(X_u(x)))\mathrm{d}u+\int_s^t(\sigma(X_u(x+y))-\sigma(X_u(x)))\mathrm{d}B_u\right|^{2p}\\
&\le\frac{1}{|y|^{2p}}\mathbb{E}\left(|t-s|\int_s^t|b(X_u(x+y))-b(X_u(x))|^2\mathrm{d}u\right.\\
&\left.+\int_s^t|\sigma(X_u(x+y))-\sigma(X_u(x))|^2\mathrm{d}u\right)^p\\
&\le\frac{1}{|y|^{2p}}\mathbb{E}\left(|t-s|\times|t-s|^{p-1}\int_s^t|b(X_u(x+y))-b(X_u(x))|^{2p}\mathrm{d}u\right.\\
&\left.+|t-s|^{p-1}\int_s^t|\sigma(X_u(x+y))-\sigma(X_u(x))|^{2p}\mathrm{d}u\right)\end{aligned}$$

$$\overset{\text{Lipšico sąlyga}}{\leq} \frac{1}{|y|^{2p}}\left(|t-s|^p\int_s^t \mathbb{E}|X_u(x+y)-X_u(x)|^{2p}\mathrm{d}u\right.$$
$$\left.+|t-s|^{p-1}\int_s^t \mathbb{E}|X_u(x+y)-X_u(x)|^{2p}\mathrm{d}u\right)$$
$$\overset{\text{12 lema}}{\leq} \frac{c}{y^{2p}}\left(|t-s|^{p+1}y^{2p}+|t-s|^p y^{2p}\right)$$
$$\leq c|t-s|^p.$$

Apjungę šiuos du atvejus, turime:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|\eta_t(x,y)-\eta_s(x',y')|^{2p} &= \mathbb{E}|\eta_t(x,y)-\eta_t(x',y')+\eta_t(x',y')-\eta_s(x',y')|^{2p}\\
&\leq \mathbb{E}|\eta_t(x,y)-\eta_t(x',y')|^{2p}+\mathbb{E}|\eta_t(x',y')-\eta_s(x',y')|^{2p}\\
&\leq c(|x-x'|^{2p}+|y-y'|^{2p}+|t-s|^p).
\end{aligned}$$

□

15 lema. *Pažymėkime*

$$\eta_t(x,y)=\frac{1}{y}\left(X_t(x+y)-X_t(x)\right),\quad y\in\mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Tada su kiekvienu $p>1$ egzistuoja tokia teigiama konstanta $C=C(p)$, kad

$$\mathbb{E}\left[\left|\frac{\partial\eta_t(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial\eta_s(x',y')}{\partial x'}\right|^{2p}\right]\leq C\left\{|t-s|^p+|x-x'|^{2p}+|y-y'|^{2p}\right\} \tag{6.6}$$

su visais x,x' ir $y,y'\neq 0$, kintančiais kompaktiškoje aibėje, nuo kurios priklauso konstanta C, bei visais t,s. Be to, $\frac{\partial\eta_t(x,y)}{\partial x}$ yra L^p aprėžtas.

Įrodymas.
Bet kokios funkcijos $\varphi(x)$ antroji išvestinė yra lygi

$$\varphi''(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(x+h)-2\varphi(x)+\varphi(x-h)}{h^2}.$$

Pažymėkime

$$\xi_t(x,y)=\frac{X_t(x+y)-2X_t(x)+X_t(x-y)}{y^2}.$$

Tuomet pagal 13 lemos žymėjimus, gauname

$$f\left(\eta_t(x,y),\eta_t(x,-y),\eta_s(x',y'),\eta_s(x',-y')\right)=|\xi_t(x,y)-\xi_s(x',y')|^{2p}.$$

Pirmiausiai nagrinėkime atvejį, kai $t=s$. Remiantis Dynkino formule, turime

$$\mathbb{E}f\left(\eta_t(x,y),\eta_t(x,-y),\eta_t(x',y'),\eta_t(x',-y')\right)=\mathbb{E}\int_0^t Af\left(\eta_u(x,y),\eta_u(x,-y),\eta_u(x',y'),\eta_u(x',-y')\right)\mathrm{d}u.$$

Toliau turime

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|\xi_t(x,y)-\xi_t(x',y')|^{2p} &\le C_1\int_0^t \mathbb{E}|\xi_u(x,y)-\xi_u(x',y')|^{2p}\mathrm{d}u\\
&+C_2\int_0^t \mathbb{E}\left(|\eta_u(x,y)-\eta_u(x',y')|+|\eta_u(x,-y)-\eta_u(x',-y')|\right)^{2p}|\xi_u(x',y')|^{2p}\mathrm{d}u\\
&\le C_1\int_0^t \mathbb{E}|\xi_u(x,y)-\xi_u(x',y')|^{2p}\mathrm{d}u\\
&+C_3\int_0^t \mathbb{E}\left(|\eta_u(x,y)-\eta_u(x',y')|^{2p}+|\eta_u(x,-y)-\eta_u(x',-y')|^{2p}\right)|\xi_u(x',y')|^{2p}\mathrm{d}u\\
&\le C_1\int_0^t \mathbb{E}|\xi_u(x,y)-\xi_u(x',y')|^{2p}\mathrm{d}u\\
&+C_4\int_0^t \left[\left(\mathbb{E}|\eta_u(x,y)-\eta_u(x',y')|^{4p}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\mathbb{E}|\eta_u(x,-y)-\eta_u(x',-y')|^{4p}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\\
&\times\left(\mathbb{E}|\underbrace{\xi_u(x',y')}_{L^{4p}\text{ aprėžtas}}|^{4p}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}u \qquad (\star)\\
&\overset{14\text{ lema}}{\le} C_1\int_0^t \mathbb{E}|\xi_u(x,y)-\xi_u(x',y')|^{2p}\mathrm{d}u\\
&+C_5\int_0^t\left(|x-x'|^{2p}+|y-y'|^{2p}\right)\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

Galiausiai pritaikome Gronvolo lemą ir gauname

$$\mathbb{E}|\xi_t(x,y)-\xi_t(x',y')|^{2p}\le C\left\{|x-x'|^{2p}+|y-y'|^{2p}\right\}.$$

Pagrįsime $(\star)$, t.y. parodysime, kad $\xi_t(x,y)$ yra L^p, $p>1$ aprėžtas. Turime

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|\xi_t(x,y)|^p &\le \left(\mathbb{E}|\xi_t(x,y)|^{2p}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&=\left(\mathbb{E}\left|\frac{1}{y}(\eta_t(x,y)-\eta_t(x,-y))\right|^{2p}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\overset{14\text{ lema}}{\le}\left(\frac{c}{|y|^{2p}}\left\{|x-x|^{2p}+|y-(-y)|^{2p}\right\}\right)^{\frac{1}{2}}=\tilde{c}.
\end{aligned}$$

Atvejis, kai $s<t$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|\xi_t(x,y)-\xi_s(x,y)|^{2p} &= \mathbb{E}\left|\int_s^t \frac{b(X_u(x+y))-2b(X_u(x))+b(X_u(x-y))}{y^2}\mathrm{d}u\right.\\
&+\left.\int_s^t\frac{\sigma(X_u(x+y))-2\sigma(X_u(x))+\sigma(X_u(x-y))}{y^2}\mathrm{d}B_u\right|^{2p}\\
&\le C\left[\mathbb{E}\left|\int_s^t \frac{b(X_u(x+y))-2b(X_u(x))+b(X_u(x-y))}{y^2}\mathrm{d}u\right|^{2p}\right.\\
&+\left.\mathbb{E}\left|\int_s^t\frac{\sigma(X_u(x+y))-2\sigma(X_u(x))+\sigma(X_u(x-y))}{y^2}\mathrm{d}B_u\right|^{2p}\right]\\
&=C(J_1+J_2).
\end{aligned}$$

Pagal 1 teoremos sąlygą turime, kad $b(x)$ ir $\sigma(x)$ yra 3 kartus tolydžiai diferencijuojami. Pasinaudosime Teiloro teorema su integralinio pavidalo liekamuoju nariu[3]. Pirmiausiai įvertinsime J_1.

$$
\begin{aligned}
J_1 &= \mathbb{E}\left|\int_s^t \frac{b(X_u(x+y)) - 2b(X_u(x)) + b(X_u(x-y))}{y^2}\mathrm{d}u\right|^{2p} \\
&= \mathbb{E}\left|\frac{1}{y^2}\int_s^t \Big(b(X_u(x)) + b'(X_u(x))(X_u(x+y) - X_u(x)) + \frac{1}{2}b''(X_u(x))(X_u(x+y) - X_u(x))^2\right. \\
&+ \int_{X_u(x)}^{X_u(x+y)} \frac{b'''(r)}{3!}(X_u(x+y) - r)^3\mathrm{d}r - 2b(X_u(x)) + b(X_u(x)) + b'(X_u(x))(X_u(x-y) - X_u(x)) \\
&\left.+\frac{1}{2}b''(X_u(x))(X_u(x-y) - X_u(x))^2 + \int_{X_u(x)}^{X_u(x-y)} \frac{b'''(r)}{3!}(X_u(x-y) - r)^3\mathrm{d}r\Big)\,\mathrm{d}u\right|^{2p} \\
&= \mathbb{E}\left|\int_s^t b'(X_u(x))\frac{X_u(x+y) - 2X_u(x) + X_u(x-y)}{y^2}\mathrm{d}u\right. \\
&+\frac{1}{2}\int_s^t b''(X_u(x))\frac{(X_u(x+y) - X_u(x))^2 + (X_u(x-y) - X_u(x))^2}{y^2}\mathrm{d}u \\
&+ \int_s^t \int_{X_u(x)}^{X_u(x+y)} \frac{b'''(r)}{3!}(X_u(x+y) - r)^3\mathrm{d}r\mathrm{d}u \\
&\left.+ \int_s^t \int_{X_u(x)}^{X_u(x-y)} \frac{b'''(r)}{3!}(X_u(x-y) - r)^3\mathrm{d}r\mathrm{d}u\right|^{2p} \\
&\le C|t-s|^{2p-1}\Bigg[\int_s^t \mathbb{E}\underbrace{\left|b'(X_u(x))\xi_u(x,y)\right|^{2p}}_{L^{2p}\text{ aprėžtas}}\mathrm{d}u \\
&+ \int_s^t \mathbb{E}\left|b''(X_u(x))\frac{(X_u(x+y) - X_u(x))^2 + (X_u(x-y) - X_u(x))^2}{y^2}\right|^{2p}\mathrm{d}u \\
&+ \int_s^t \mathbb{E}\left|\int_{X_u(x)}^{X_u(x+y)} \frac{b'''(r)}{3!}\frac{(X_u(x+y) - r)^3}{y^2}\right|^{2p}\mathrm{d}u \\
&+ \int_s^t \mathbb{E}\left|\int_{X_u(x)}^{X_u(x-y)} \frac{b'''(r)}{3!}\frac{(X_u(x-y) - r)^3}{y^2}\mathrm{d}r\right|^{2p}\mathrm{d}u\Bigg] \\
&\overset{12\text{ lema}}{\le} C|t-s|^{2p-1}\Big[|t-s| + |t-s| \\
&+ \int_s^t \mathbb{E}|X_u(x+y) - X_u(x)|^{2p-1}\int_{X_u(x)}^{X_u(x+y)}\left|\frac{b'''(r)}{3!}\frac{(X_u(x+y) - r)^3}{y^2}\right|^{2p}\mathrm{d}r\mathrm{d}u \\
&+ \int_s^t \mathbb{E}|X_u(x-y) - X_u(x)|^{2p-1}\int_{X_u(x)}^{X_u(x-y)}\left|\frac{b'''(r)}{3!}\frac{(X_u(x-y) - r)^3}{y^2}\right|^{2p}\mathrm{d}r\mathrm{d}u\Big] \\
&\le C|t-s|^{2p}(1 + |y|^{\frac{3}{2}+2p}). \qquad (6.7)
\end{aligned}
$$

Analogiškai įvertiname ir J_2.

$$
J_2 = \mathbb{E}\left|\int_s^t \frac{\sigma(X_u(x+y)) - 2\sigma(X_u(x)) + \sigma(X_u(x-y))}{y^2}\mathrm{d}B_u\right|^{2p}
$$

[3] žr. pvz. [13] 1 teoremą.

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{E}\left|\int_s^t \sigma'(X_u(x))\frac{X_u(x+y)-2X_u(x)+X_u(x-y)}{y^2}\mathrm{d}B_u\right.\\
&+\frac{1}{2}\int_s^t \sigma''(X_u(x))\frac{(X_u(x+y)-X_u(x))^2+(X_u(x-y)-X_u(x))^2}{y^2}\mathrm{d}B_u\\
&+\int_s^t\int_{X_u(x)}^{X_u(x+y)}\frac{\sigma'''(r)}{3!}\frac{(X_u(x+y)-r)^3}{y^2}\mathrm{d}r\mathrm{d}B_u\\
&+\left.\int_s^t\int_{X_u(x)}^{X_u(x-y)}\frac{\sigma'''(r)}{3!}\frac{(X_u(x-y)-r)^3}{y^2}\mathrm{d}r\mathrm{d}B_u\right|^{2p}\\
&\le C|t-s|^{p-1}\left[\int_s^t \mathbb{E}\left|\sigma'(X_u(x))\xi_u(x,y)\right|^{2p}\mathrm{d}u\right.\\
&+\int_s^t \mathbb{E}\left|\sigma''(X_u(x))\frac{(X_u(x+y)-X_u(x))^2+(X_u(x-y)-X_u(x))^2}{y^2}\right|^{2p}\mathrm{d}u\\
&+\int_s^t \mathbb{E}\left|\int_{X_u(x)}^{X_u(x+y)}\frac{\sigma'''(r)}{3!}\frac{(X_u(x+y)-r)^3}{y^2}\mathrm{d}r\right|^{2p}\mathrm{d}u\\
&+\left.\int_s^t \mathbb{E}\left|\int_{X_u(x)}^{X_u(x-y)}\frac{\sigma'''(r)}{3!}\frac{(X_u(x-y)-r)^3}{y^2}\mathrm{d}r\right|^{2p}\mathrm{d}u\right]\\
&\le C|t-s|^p(1+|y|^{\frac{3}{2}+2p}).
\end{aligned}
\tag{6.8}
$$

Laikome, kad x ir y kinta kompaktiškoje srityje, nuo kurios priklauso konstanta C. Tuomet pagal įverčius (6.7) ir (6.8), turime, kad

$$J_1 + J_2 \le C|t-s|^p.$$

Apjungę šiuos du atvejus, gauname norimą įvertį:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}|\xi_t(x,y)-\xi_s(x',y')|^{2p} &= \mathbb{E}|\xi_t(x,y)-\xi_t(x',y')+\xi_t(x',y')-\xi_s(x',y')|^{2p}\\
&\le \mathbb{E}|\xi_t(x,y)-\xi_t(x',y')|^{2p}+\mathbb{E}|\xi_t(x',y')-\xi_s(x',y')|^{2p}\\
&\le c(|x-x'|^{2p}+|y-y'|^{2p}+|t-s|^p).
\end{aligned}
$$

□

16 lema. *Su kiekvienu $p > 1$ egzistuoja tokia teigiama konstanta c, kad*

$$\mathbb{E}\left|\frac{\partial X_t(x)}{\partial x}\right|^{2p} \le c \tag{6.9}$$

su visais x, t.

Įrodymas.
Kadangi $\eta_t(x,h)$ iš 14 lemos tenkina (6.5) nelygybę, tai pagal 2 teoremą $\eta_t(x,h)$ gali būti tolydžiai pratęstas taške $h = 0$. Vadinasi, riba

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{X_t(x+h)-X_t(x)}{h}\right] = \frac{\partial X_t(x)}{\partial x}$$

egzistuoja visiems x, t. Remdamiesi Fatu lema ([10] 5.3.2 teorema), turime:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left|\frac{\partial X_t(x)}{\partial x}\right|^{2p} &= \mathbb{E}\lim_{h\to 0}\left|\frac{X_t(x+h)-X_t(x)}{h}\right|^{2p}\\
&\le \liminf_{h\to 0}\mathbb{E}\left|\frac{X_t(x+h)-X_t(x)}{h}\right|^{2p} \le c < \infty.
\end{aligned}
$$

□

7 Išvados

Šiame magistriniame darbe yra įrodoma, kad atgalinė Kolmogorovo lygtis $\frac{\partial u}{\partial t} = Au$ su CIR proceso generatoriumi A ir glodžia pradine sąlyga $u(0,x) = f(x)$ turi glodų sprendinį $u(t,x)$. Kitaip nei Alfonsi darbe [1], nesiremiama žinoma gana sudėtinga CIR proceso perėjimo tankio išraiška tam tikrų funkcijų eilute, o pritaikoma H. Kunitos [5] stochastinių srautų teorija.

Didžiausias tokio įrodymo privalumas – universalumas, t.y. metodas tinka ne tik CIR procesui, bet ir daugeliui SDL, apie kurias žinoma, kad jų sprendiniai neišeina iš intervalo $(0, +\infty)$ (arba dar bendriau – iš kokios nors atviros aibės daugiamatėje erdvėje).

Lyginant su Alfonsi darbu [1], kol kas nepavyko įrodyti, kad sprendinys $u(t,x)$, atitinkantis CIR procesą, turi polinominį augimą pagal x, jei tokį augimą turi pradinė sąlyga. Šio fakto įrodymas ne tik CIR procesui, bet ir bendru atveju yra artimiausias mūsų tyrimų tikslas.

Literatūra

[1] A. Alfonsi. On the discretization schemes for the CIR (and Bessel squared) processes. *Monte Carlo Methods Appl*, pages 355–384, 2005.

[2] S. Cheng. Differentiation under the integral sign with weak derivatives, tech. Technical report, 2006.

[3] M. Jeanblanc, M. Yor, M. Chesney. *Mathematical Methods for Financial Markets.* Springer, 2009.

[4] H. Kunita. Lectures on Stochastic Flow and Applications, 1986.

[5] H. Kunita. *Stochastic flows and stochastic differential equations.* Cambridge University Press, 1990.

[6] V. Mackevičius. *Integralas ir matas.* TEV, 1998.

[7] V. Mackevičius. *Stochastinė analizė.* Vilniaus universiteto leidykla, 2005.

[8] M. M. Rao. *Real and Stochastic Analysis: New Perspectives.* Birkhäuser, 2004.

[9] V. Paulauskas, A. Račkauskas. *Funkcinė analizė. I knyga. Erdvės.* TEV, 2007.

[10] S. I. Resnick. *A Probability Path.* Birkhäuser, 1999.

[11] J. C. Cox, J. E. Ingersoll, S. A. Ross. A Theory of the Term Structure of Interest Rates. *Econometrica*, 53:385–407, 1985.

[12] A. N. Borodin, P. Salminen. *Handbook of Brownian Motion – Facts and Formulae.* Birkhäuser, 2015.

[13] E. Talvila. Estimates of the Remainder in Taylor's Theorem Using the Henstock–Kurzweil Integral. *Czechoslovak Mathematical Journal*, pages 933–940, 2003.

[14] G. Žitkovič. Theory of Probability. Measure theory, classical probability and stochastic analysis. Lecture Notes., 2010.

Priedai

A 1 teoremos k-tosios eilės išvestinių išraiškos

Nagrinėjame SDL sistemą, aprašytą 2.1 lygtimis. Pirmiausiai suskaičiuosime 2-ą, 3-ią ir 4-ą išvestines. Vėliau susisteminsime 4-os išvestinės išraišką ir įsivesime pažymėjimus. Skyrelį pabaigsime išvesdami lygtį, kurią tenkina k-toji išvestinė.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 X_t^i(x)}{\partial x_{m_1}\partial x_{m_2}} &= \int_0^t \Big(\sum_{l_1=1}^d \sum_{l_2=1}^d D_{l_1 l_2} b_i(X_s(x)) \frac{\partial X_s^{l_2}(x)}{\partial x_{m_2}} \frac{\partial X_s^{l_1}(x)}{\partial x_{m_1}} + \sum_{l_1=1}^d D_{l_1} b_i(X_s(x)) \frac{\partial^2 X_s^{l_1}(x)}{\partial x_{m_1}\partial x_{m_2}} \Big) \mathrm{d}s \\
&+ \int_0^t \sum_{n=1}^d \Big(\sum_{l_1=1}^d \sum_{l_2=1}^d D_{l_1 l_2} \sigma_{in}(X_s(x)) \frac{\partial X_s^{l_2}(x)}{\partial x_{m_2}} \frac{\partial X_s^{l_1}(x)}{\partial x_{m_1}} + \sum_{l_1=1}^d D_{l_1} \sigma_{in}(X_s(x)) \frac{\partial^2 X_s^{l_1}(x)}{\partial x_{m_1}\partial x_{m_2}} \Big) \mathrm{d}B_s^n.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^3 X_t^i(x)}{\partial x_{m_1}\partial x_{m_2}\partial x_{m_3}} &= \int_0^t \Big(\sum_{l_1=1}^d \sum_{l_2=1}^d \sum_{l_3=1}^d D_{l_1 l_2 l_3} b_i(X_s(x)) \frac{\partial X_s^{l_3}(x)}{\partial x_{m_3}} \frac{\partial X_s^{l_2}(x)}{\partial x_{m_2}} \frac{\partial X_s^{l_1}(x)}{\partial x_{m_1}} \\
&+ \sum_{l_1=1}^d \sum_{l_2=1}^d D_{l_1 l_2} b_i(X_s(x)) \frac{\partial X_s^{l_2}(x)}{\partial x_{m_2}} \frac{\partial^2 X_s^{l_1}(x)}{\partial x_{m_1}\partial x_{m_3}} \\
&+ \sum_{l_1=1}^d \sum_{l_2=1}^d D_{l_1 l_2} b_i(X_s(x)) \frac{\partial^2 X_s^{l_2}(x)}{\partial x_{m_2}\partial x_{m_3}} \frac{\partial X_s^{l_1}(x)}{\partial x_{m_1}} \\
&+ \sum_{l_1=1}^d \sum_{l_3=1}^d D_{l_1 l_3} b_i(X_s(x)) \frac{\partial X_s^{l_3}(x)}{\partial x_{m_3}} \frac{\partial^2 X_s^{l_1}(x)}{\partial x_{m_1}\partial x_{m_2}} \\
&+ \sum_{l_1=1}^d D_{l_1} b_i(X_s(x)) \frac{\partial^3 X_s^{l_1}(x)}{\partial x_{m_1}\partial x_{m_2}\partial x_{m_3}} \Big) \mathrm{d}s \\
&+ \int_0^t \sum_{n=1}^d \Big(\sum_{l_1=1}^d \sum_{l_2=1}^d \sum_{l_3=1}^d D_{l_1 l_2 l_3} \sigma_{in}(X_s(x)) \frac{\partial X_s^{l_3}(x)}{\partial x_{m_3}} \frac{\partial X_s^{l_2}(x)}{\partial x_{m_2}} \frac{\partial X_s^{l_1}(x)}{\partial x_{m_1}} \\
&+ \sum_{l_1=1}^d \sum_{l_2=1}^d D_{l_1 l_2} \sigma_{in}(X_s(x)) \frac{\partial X_s^{l_2}(x)}{\partial x_{m_2}} \frac{\partial^2 X_s^{l_1}(x)}{\partial x_{m_1}\partial x_{m_3}} \\
&+ \sum_{l_1=1}^d \sum_{l_2=1}^d D_{l_1 l_2} \sigma_{in}(X_s(x)) \frac{\partial^2 X_s^{l_2}(x)}{\partial x_{m_2}\partial x_{m_3}} \frac{\partial X_s^{l_1}(x)}{\partial x_{m_1}} \\
&+ \sum_{l_1=1}^d \sum_{l_3=1}^d D_{l_1 l_3} \sigma_{in}(X_s(x)) \frac{\partial X_s^{l_3}(x)}{\partial x_{m_3}} \frac{\partial^2 X_s^{l_1}(x)}{\partial x_{m_1}\partial x_{m_2}} \\
&+ \sum_{l_1=1}^d D_{l_1} \sigma_{in}(X_s(x)) \frac{\partial^3 X_s^{l_1}(x)}{\partial x_{m_1}\partial x_{m_2}\partial x_{m_3}} \Big) \mathrm{d}B_s^n.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^4 X_t^i(x)}{\partial x_{m_1}\partial x_{m_2}\partial x_{m_3}\partial x_{m_4}} &= \int_0^t \Big(\sum_{l_1=1}^d \sum_{l_2=1}^d \sum_{l_3=1}^d \sum_{l_4=1}^d D_{l_1 l_2 l_3 l_4} b_i(X_s(x)) \frac{\partial X_s^{l_4}(x)}{\partial x_{m_4}} \frac{\partial X_s^{l_3}(x)}{\partial x_{m_3}} \frac{\partial X_s^{l_2}(x)}{\partial x_{m_2}} \frac{\partial X_s^{l_1}(x)}{\partial x_{m_1}} \\
+ \sum_{l_1=1}^d \sum_{l_2=1}^d \sum_{l_3=1}^d D_{l_1 l_2 l_3} b_i(X_s(x)) \frac{\partial^2 X_s^{l_3}(x)}{\partial x_{m_3}\partial x_{m_4}} \frac{\partial X_s^{l_2}(x)}{\partial x_{m_2}} \frac{\partial X_s^{l_1}(x)}{\partial x_{m_1}}
\end{aligned}
$$

$$+\sum_{l_1=1}^{d}\sum_{l_2=1}^{d}\sum_{l_3=1}^{d} D_{l_1l_2l_3}b_i(X_s(x))\frac{\partial X_s^{l_3}(x)}{\partial x_{m_3}}\frac{\partial^2 X_s^{l_2}(x)}{\partial x_{m_2}\partial x_{m_4}}\frac{\partial X_s^{l_1}(x)}{\partial x_{m_1}}$$

$$+\sum_{l_1=1}^{d}\sum_{l_2=1}^{d}\sum_{l_3=1}^{d} D_{l_1l_2l_3}b_i(X_s(x))\frac{\partial X_s^{l_3}(x)}{\partial x_{m_3}}\frac{\partial X_s^{l_2}(x)}{\partial x_{m_2}}\frac{\partial^2 X_s^{l_1}(x)}{\partial x_{m_1}\partial x_{m_4}}$$

$$+\sum_{l_1=1}^{d}\sum_{l_2=1}^{d}\sum_{l_4=1}^{d} D_{l_1l_2l_4}b_i(X_s(x))\frac{\partial X_s^{l_4}(x)}{\partial x_{m_4}}\frac{\partial^2 X_s^{l_2}(x)}{\partial x_{m_2}\partial x_{m_3}}\frac{\partial X_s^{l_1}(x)}{\partial x_{m_1}}$$

$$+\sum_{l_1=1}^{d}\sum_{l_2=1}^{d} D_{l_1l_2}b_i(X_s(x))\frac{\partial^3 X_s^{l_2}(x)}{\partial x_{m_2}\partial x_{m_3}\partial x_{m_4}}\frac{\partial X_s^{l_1}(x)}{\partial x_{m_1}}$$

$$+\sum_{l_1=1}^{d}\sum_{l_2=1}^{d} D_{l_1l_2}b_i(X_s(x))\frac{\partial^2 X_s^{l_2}(x)}{\partial x_{m_2}\partial x_{m_3}}\frac{\partial^2 X_s^{l_1}(x)}{\partial x_{m_1}\partial x_{m_4}}$$

$$+\sum_{l_1=1}^{d}\sum_{l_2=1}^{d}\sum_{l_4=1}^{d} D_{l_1l_2l_4}b_i(X_s(x))\frac{\partial X_s^{l_4}(x)}{\partial x_{m_4}}\frac{\partial X_s^{l_2}(x)}{\partial x_{m_2}}\frac{\partial^2 X_s^{l_1}(x)}{\partial x_{m_1}\partial x_{m_3}}$$

$$+\sum_{l_1=1}^{d}\sum_{l_2=1}^{d} D_{l_1l_2}b_i(X_s(x))\frac{\partial^2 X_s^{l_2}(x)}{\partial x_{m_2}\partial x_{m_4}}\frac{\partial^2 X_s^{l_1}(x)}{\partial x_{m_1}\partial x_{m_3}}$$

$$+\sum_{l_1=1}^{d}\sum_{l_2=1}^{d} D_{l_1l_2}b_i(X_s(x))\frac{\partial X_s^{l_2}(x)}{\partial x_{m_2}}\frac{\partial^3 X_s^{l_1}(x)}{\partial x_{m_1}\partial x_{m_3}\partial x_{m_4}}$$

$$+\sum_{l_1=1}^{d}\sum_{l_3=1}^{d}\sum_{l_4=1}^{d} D_{l_1l_3l_4}b_i(X_s(x))\frac{\partial X_s^{l_4}(x)}{\partial x_{m_4}}\frac{\partial X_s^{l_3}(x)}{\partial x_{m_3}}\frac{\partial^2 X_s^{l_1}(x)}{\partial x_{m_1}\partial x_{m_2}}$$

$$+\sum_{l_1=1}^{d}\sum_{l_3=1}^{d} D_{l_1l_3}b_i(X_s(x))\frac{\partial^2 X_s^{l_3}(x)}{\partial x_{m_3}\partial x_{m_4}}\frac{\partial^2 X_s^{l_1}(x)}{\partial x_{m_1}\partial x_{m_2}}$$

$$+\sum_{l_1=1}^{d}\sum_{l_3=1}^{d} D_{l_1l_3}b_i(X_s(x))\frac{\partial X_s^{l_3}(x)}{\partial x_{m_3}}\frac{\partial^3 X_s^{l_1}(x)}{\partial x_{m_1}\partial x_{m_3}\partial x_{m_4}}$$

$$+\sum_{l_1=1}^{d}\sum_{l_4=1}^{d} D_{l_1l_4}b_i(X_s(x))\frac{\partial X_s^{l_4}(x)}{\partial x_{m_4}}\frac{\partial^3 X_s^{l_1}(x)}{\partial x_{m_1}\partial x_{m_2}\partial x_{m_3}}$$

$$+\sum_{l_1=1}^{d} D_{l_1}b_i(X_s(x))\frac{\partial^4 X_s^{l_1}(x)}{\partial x_{m_1}\partial x_{m_2}\partial x_{m_3}\partial x_{m_4}}\Big)\mathrm{d}s$$

$$+\int_0^t\sum_{n=1}^{d}\Big(\sum_{l_1=1}^{d}\sum_{l_2=1}^{d}\sum_{l_3=1}^{d}\sum_{l_4=1}^{d} D_{l_1l_2l_3l_4}\sigma_{in}(X_s(x))\frac{\partial X_s^{l_4}(x)}{\partial x_{m_4}}\frac{\partial X_s^{l_3}(x)}{\partial x_{m_3}}\frac{\partial X_s^{l_2}(x)}{\partial x_{m_2}}\frac{\partial X_s^{l_1}(x)}{\partial x_{m_1}}$$

$$+\sum_{l_1=1}^{d}\sum_{l_2=1}^{d}\sum_{l_3=1}^{d} D_{l_1l_2l_3}\sigma_{in}(X_s(x))\frac{\partial^2 X_s^{l_3}(x)}{\partial x_{m_3}\partial x_{m_4}}\frac{\partial X_s^{l_2}(x)}{\partial x_{m_2}}\frac{\partial X_s^{l_1}(x)}{\partial x_{m_1}}$$

$$+\sum_{l_1=1}^{d}\sum_{l_2=1}^{d}\sum_{l_3=1}^{d} D_{l_1l_2l_3}\sigma_{in}(X_s(x))\frac{\partial X_s^{l_3}(x)}{\partial x_{m_3}}\frac{\partial^2 X_s^{l_2}(x)}{\partial x_{m_2}\partial x_{m_4}}\frac{\partial X_s^{l_1}(x)}{\partial x_{m_1}}$$

$$+\sum_{l_1=1}^{d}\sum_{l_2=1}^{d}\sum_{l_3=1}^{d} D_{l_1l_2l_3}\sigma_{in}(X_s(x))\frac{\partial X_s^{l_3}(x)}{\partial x_{m_3}}\frac{\partial X_s^{l_2}(x)}{\partial x_{m_2}}\frac{\partial^2 X_s^{l_1}(x)}{\partial x_{m_1}\partial x_{m_4}}$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{l_1=1}^{d}\sum_{l_2=1}^{d}\sum_{l_4=1}^{d} D_{l_1 l_2 l_4}\sigma_{in}(X_s(x))\frac{\partial X_s^{l_4}(x)}{\partial x_{m_4}}\frac{\partial^2 X_s^{l_2}(x)}{\partial x_{m_2}\partial x_{m_3}}\frac{\partial X_s^{l_1}(x)}{\partial x_{m_1}}\\
&+\sum_{l_1=1}^{d}\sum_{l_2=1}^{d} D_{l_1 l_2}\sigma_{in}(X_s(x))\frac{\partial^3 X_s^{l_2}(x)}{\partial x_{m_2}\partial x_{m_3}\partial x_{m_4}}\frac{\partial X_s^{l_1}(x)}{\partial x_{m_1}}\\
&+\sum_{l_1=1}^{d}\sum_{l_2=1}^{d} D_{l_1 l_2}\sigma_{in}(X_s(x))\frac{\partial^2 X_s^{l_2}(x)}{\partial x_{m_2}\partial x_{m_3}}\frac{\partial^2 X_s^{l_1}(x)}{\partial x_{m_1}\partial x_{m_4}}\\
&+\sum_{l_1=1}^{d}\sum_{l_2=1}^{d}\sum_{l_4=1}^{d} D_{l_1 l_2 l_4}\sigma_{in}(X_s(x))\frac{\partial X_s^{l_4}(x)}{\partial x_{m_4}}\frac{\partial X_s^{l_2}(x)}{\partial x_{m_2}}\frac{\partial^2 X_s^{l_1}(x)}{\partial x_{m_1}\partial x_{m_3}}\\
&+\sum_{l_1=1}^{d}\sum_{l_2=1}^{d} D_{l_1 l_2}\sigma_{in}(X_s(x))\frac{\partial^2 X_s^{l_2}(x)}{\partial x_{m_2}\partial x_{m_4}}\frac{\partial^2 X_s^{l_1}(x)}{\partial x_{m_1}\partial x_{m_3}}\\
&+\sum_{l_1=1}^{d}\sum_{l_2=1}^{d} D_{l_1 l_2}\sigma_{in}(X_s(x))\frac{\partial X_s^{l_2}(x)}{\partial x_{m_2}}\frac{\partial^3 X_s^{l_1}(x)}{\partial x_{m_1}\partial x_{m_3}\partial x_{m_4}}\\
&+\sum_{l_1=1}^{d}\sum_{l_3=1}^{d}\sum_{l_4=1}^{d} D_{l_1 l_3 l_4}\sigma_{in}(X_s(x))\frac{\partial X_s^{l_4}(x)}{\partial x_{m_4}}\frac{\partial X_s^{l_3}(x)}{\partial x_{m_3}}\frac{\partial^2 X_s^{l_1}(x)}{\partial x_{m_1}\partial x_{m_2}}\\
&+\sum_{l_1=1}^{d}\sum_{l_3=1}^{d} D_{l_1 l_3}\sigma_{in}(X_s(x))\frac{\partial^2 X_s^{l_3}(x)}{\partial x_{m_3}\partial x_{m_4}}\frac{\partial^2 X_s^{l_1}(x)}{\partial x_{m_1}\partial x_{m_2}}\\
&+\sum_{l_1=1}^{d}\sum_{l_3=1}^{d} D_{l_1 l_3}\sigma_{in}(X_s(x))\frac{\partial X_s^{l_3}(x)}{\partial x_{m_3}}\frac{\partial^3 X_s^{l_1}(x)}{\partial x_{m_1}\partial x_{m_3}\partial x_{m_4}}\\
&+\sum_{l_1=1}^{d}\sum_{l_4=1}^{d} D_{l_1 l_4}\sigma_{in}(X_s(x))\frac{\partial X_s^{l_4}(x)}{\partial x_{m_4}}\frac{\partial^3 X_s^{l_1}(x)}{\partial x_{m_1}\partial x_{m_2}\partial x_{m_3}}\\
&+\sum_{l_1=1}^{d} D_{l_1}\sigma_{in}(X_s(x))\frac{\partial^4 X_s^{l_1}(x)}{\partial x_{m_1}\partial x_{m_2}\partial x_{m_3}\partial x_{m_4}}\Big)\mathrm{d}B_s^n. \qquad (\star)
\end{aligned}
$$

Susisteminsime $(\star)$ išraišką įsivesdami specialų simbolį $\curlywedge$, žymintį tokią algebrinę operaciją:

$$
\frac{\partial^k X_s^i(x)}{\partial x_{m_1}\ldots\partial x_{m_k}} \curlywedge \frac{\partial^l X_s^j(x)}{\partial x_{n_1}\ldots\partial x_{n_l}} = \begin{cases} \frac{\partial^k X_s^i(x)}{\partial x_{m_1}\ldots\partial x_{m_k}}\frac{\partial^l X_s^j(x)}{\partial x_{n_1}\ldots\partial x_{n_l}}, & \text{jei } i \neq j;\\ \frac{\partial^{k+l} X_s^i(x)}{\partial x_{m_1}\ldots\partial x_{m_k}\partial x_{n_1}\ldots\partial x_{n_l}}, & \text{jei } i = j. \end{cases}
$$

Turime

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^4 X_t^i(x)}{\partial x_{m_1}\partial x_{m_2}\partial x_{m_3}\partial x_{m_4}} = \int_0^t \Big(&\sum_{l_1,l_2,l_3,l_4=1}^{d} D_{l_1 l_2 l_3 l_4} b_i(X_s(x)) \prod_{j=1}^{4}\frac{\partial X_s^{l_j}(x)}{\partial x_{m_j}}\\
&+\sum_{l_1,l_2,l_3=1}^{d} D_{l_1 l_2 l_3} b_i(X_s(x)) \prod_{\substack{j=1\\ j\neq 4}}^{4}\frac{\partial X_s^{l_j}(x)}{\partial x_{m_j}} \curlywedge \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial X_s^{l_j}(x)}{\partial x_{m_4}}\\
&+\sum_{l_1,l_2,l_4=1}^{d} D_{l_1 l_2 l_4} b_i(X_s(x)) \prod_{\substack{j=1\\ j\neq 3}}^{4}\frac{\partial X_s^{l_j}(x)}{\partial x_{m_j}} \curlywedge \sum_{j=1}^{2}\frac{\partial X_s^{l_j}(x)}{\partial x_{m_3}}\\
&+\sum_{l_1,l_3,l_4=1}^{d} D_{l_1 l_3 l_4} b_i(X_s(x)) \prod_{\substack{j=1\\ j\neq 2}}^{4}\frac{\partial X_s^{l_j}(x)}{\partial x_{m_j}} \curlywedge \sum_{j=1}^{1}\frac{\partial X_s^{l_j}(x)}{\partial x_{m_2}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{l_1,l_2=1}^{d} D_{l_1 l_2} b_i(X_s(x)) \prod_{\substack{j=1\\ j\neq 3,4}}^{4} \frac{\partial X_s^{l_j}(x)}{\partial x_{m_j}} \curlywedge \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial X_s^{l_j}(x)}{\partial x_{m_3}} \curlywedge \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial X_s^{l_j}(x)}{\partial x_{m_4}} \\
&+\sum_{l_1,l_3=1}^{d} D_{l_1 l_3} b_i(X_s(x)) \prod_{\substack{j=1\\ j\neq 2,4}}^{4} \frac{\partial X_s^{l_j}(x)}{\partial x_{m_j}} \curlywedge \sum_{j=1}^{1} \frac{\partial X_s^{l_j}(x)}{\partial x_{m_2}} \curlywedge \sum_{\substack{j=1\\ j\neq 2}}^{3} \frac{\partial X_s^{l_j}(x)}{\partial x_{m_4}} \\
&+\sum_{l_1,l_4=1}^{d} D_{l_1 l_4} b_i(X_s(x)) \prod_{\substack{j=1\\ j\neq 2,3}}^{4} \frac{\partial X_s^{l_j}(x)}{\partial x_{m_j}} \curlywedge \sum_{j=1}^{1} \frac{\partial X_s^{l_j}(x)}{\partial x_{m_2}} \curlywedge \sum_{j=1}^{1} \frac{\partial X_s^{l_j}(x)}{\partial x_{m_3}} \\
&+\sum_{l_1=1}^{d} D_{l_1} b_i(X_s(x)) \prod_{\substack{j=1\\ j\neq 2,3,4}}^{4} \frac{\partial X_s^{l_j}(x)}{\partial x_{m_j}} \curlywedge \sum_{j=1}^{1} \frac{\partial X_s^{l_j}(x)}{\partial x_{m_2}} \curlywedge \sum_{j=1}^{1} \frac{\partial X_s^{l_j}(x)}{\partial x_{m_3}} \curlywedge \sum_{j=1}^{1} \frac{\partial X_s^{l_j}(x)}{\partial x_{m_4}} \Big) \mathrm{d}s \\
&+\int_0^t \sum_{n=1}^{d} \Big(\sum_{l_1,l_2,l_3,l_4=1}^{d} D_{l_1 l_2 l_3 l_4} \sigma_{in}(X_s(x)) \prod_{j=1}^{4} \frac{\partial X_s^{l_j}(x)}{\partial x_{m_j}} \\
&+\sum_{l_1,l_2,l_3=1}^{d} D_{l_1 l_2 l_3} \sigma_{in}(X_s(x)) \prod_{\substack{j=1\\ j\neq 4}}^{4} \frac{\partial X_s^{l_j}(x)}{\partial x_{m_j}} \curlywedge \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial X_s^{l_j}(x)}{\partial x_{m_4}} \\
&+\sum_{l_1,l_2,l_4=1}^{d} D_{l_1 l_2 l_4} \sigma_{in}(X_s(x)) \prod_{\substack{j=1\\ j\neq 3}}^{4} \frac{\partial X_s^{l_j}(x)}{\partial x_{m_j}} \curlywedge \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial X_s^{l_j}(x)}{\partial x_{m_3}} \\
&+\sum_{l_1,l_3,l_4=1}^{d} D_{l_1 l_3 l_4} \sigma_{in}(X_s(x)) \prod_{\substack{j=1\\ j\neq 2}}^{4} \frac{\partial X_s^{l_j}(x)}{\partial x_{m_j}} \curlywedge \sum_{j=1}^{1} \frac{\partial X_s^{l_j}(x)}{\partial x_{m_2}} \\
&+\sum_{l_1,l_2=1}^{d} D_{l_1 l_2} \sigma_{in}(X_s(x)) \prod_{\substack{j=1\\ j\neq 3,4}}^{4} \frac{\partial X_s^{l_j}(x)}{\partial x_{m_j}} \curlywedge \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial X_s^{l_j}(x)}{\partial x_{m_3}} \curlywedge \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial X_s^{l_j}(x)}{\partial x_{m_4}} \\
&+\sum_{l_1,l_3=1}^{d} D_{l_1 l_3} \sigma_{in}(X_s(x)) \prod_{\substack{j=1\\ j\neq 2,4}}^{4} \frac{\partial X_s^{l_j}(x)}{\partial x_{m_j}} \curlywedge \sum_{j=1}^{1} \frac{\partial X_s^{l_j}(x)}{\partial x_{m_2}} \curlywedge \sum_{\substack{j=1\\ j\neq 2}}^{3} \frac{\partial X_s^{l_j}(x)}{\partial x_{m_4}} \\
&+\sum_{l_1,l_4=1}^{d} D_{l_1 l_4} \sigma_{in}(X_s(x)) \prod_{\substack{j=1\\ j\neq 2,3}}^{4} \frac{\partial X_s^{l_j}(x)}{\partial x_{m_j}} \curlywedge \sum_{j=1}^{1} \frac{\partial X_s^{l_j}(x)}{\partial x_{m_2}} \curlywedge \sum_{j=1}^{1} \frac{\partial X_s^{l_j}(x)}{\partial x_{m_3}} \\
&+\sum_{l_1=1}^{d} D_{l_1} \sigma_{in}(X_s(x)) \prod_{\substack{j=1\\ j\neq 2,3,4}}^{4} \frac{\partial X_s^{l_j}(x)}{\partial x_{m_j}} \curlywedge \sum_{j=1}^{1} \frac{\partial X_s^{l_j}(x)}{\partial x_{m_2}} \curlywedge \sum_{j=1}^{1} \frac{\partial X_s^{l_j}(x)}{\partial x_{m_3}} \curlywedge \sum_{j=1}^{1} \frac{\partial X_s^{l_j}(x)}{\partial x_{m_4}} \Big) \mathrm{d}B_s^n .
\end{aligned}
\tag{$\star\star$}
$$

Iš ($\star\star$) matyti, jog yra skirtingos 8 sumos, tiksliau sumuojama pagal:

Deriniai po 4	Deriniai po 3	Deriniai po 2	Deriniai po 1
l_1, l_2, l_3, l_4	l_1, l_2, l_3	l_1, l_2	l_1
	l_1, l_2, l_4	l_1, l_3	
	l_1, l_3, l_4	l_1, l_4	
C_3^3	C_3^2	C_3^1	C_3^0

Toliau nagrinėkime k-tąją išvestinę. Įsivesime tokius žymėjimus:

Derinių kiekis	C_{k-1}^{k-1}	C_{k-1}^{k-2}	$\ldots$	C_{k-1}^{0}
Elementų derinių indeksų išraiškos (elementų indeksai išdėlioti didėjimo tvarka)	$(\alpha_1, \alpha_2^1, \ldots, \alpha_k^1)$	$(\alpha_1, \alpha_2^{2j}, \ldots, \alpha_k^{2j})$	$\ldots$	$(\alpha_1, \alpha_2^k, \ldots, \alpha_k^k)$
Trūkstamų elementų indeksai (elementų indeksai išdėlioti didėjimo tvarka)	-	$(\alpha_2^{c2j}, \ldots, \alpha_k^{c2j}) = (\alpha_1, \alpha_2^1, \ldots, \alpha_k^1) \backslash (\alpha_1, \alpha_2^{2j}, \ldots, \alpha_k^{2j})$	$\ldots$	$(\alpha_2^1, \ldots, \alpha_k^1)$
j	-	$j = 1, \ldots, C_{k-1}^{k-2}$	$\ldots$	-

Pasinaudojus įvestais žymėjimais, k-toji išvestinė tenkina lygtį:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^k X_t^i(x)}{\partial x_{m_1} \partial x_{m_2} \ldots \partial x_{m_k}} = \int_0^t \Big(& \sum_{\alpha_1, \alpha_2^1, \ldots, \alpha_k^1 = 1}^{d} D_{\alpha_1, \alpha_2^1, \ldots, \alpha_k^1} b_i(X_s(x)) \prod_{l=1}^{k} \frac{\partial X_s^{\alpha_l}(x)}{\partial x_{m_l}} \\
& + \sum_{j=1}^{C_{k-1}^{k-2}} \Big[\sum_{\alpha_1, \alpha_2^{2j}, \ldots, \alpha_k^{2j} = 1}^{d} D_{\alpha_1, \alpha_2^{2j}, \ldots, \alpha_k^{2j}} b_i(X_s(x)) \prod_{\substack{l=1 \\ l \notin (\alpha_2^{c2j}, \ldots, \alpha_k^{c2j})}}^{k} \frac{\partial X_s^{\alpha_l}(x)}{\partial x_{m_l}} \\
& \times \bigcurlywedge_{r \in (\alpha_2^{c2j}, \ldots, \alpha_k^{c2j})} \Big(\sum_{\substack{i=1 \\ i \notin (\alpha_2^{c2j}, \ldots, \alpha_k^{c2j})}}^{r-1} \frac{\partial X_s^{\alpha_i}(x)}{\partial x_{m_r}} \Big) \Big] \\
& + \cdots + \sum_{\alpha_1 = 1}^{d} D_{\alpha_1} b_i(X_s(x)) \frac{\partial^k X_s^{\alpha_1}(x)}{\partial x_{m_1} \ldots \partial x_{m_k}} \Big) \mathrm{d}s \\
& + \int_0^t \sum_{n=1}^{d} \Big(\sum_{\alpha_1, \alpha_2^1, \ldots, \alpha_k^1 = 1}^{d} D_{\alpha_1, \alpha_2^1, \ldots, \alpha_k^1} \sigma_{in}(X_s(x)) \prod_{l=1}^{k} \frac{\partial X_s^{\alpha_l}(x)}{\partial x_{m_l}} \\
& + \sum_{j=1}^{C_{k-1}^{k-2}} \Big[\sum_{\alpha_1, \alpha_2^{2j}, \ldots, \alpha_k^{2j} = 1}^{d} D_{\alpha_1, \alpha_2^{2j}, \ldots, \alpha_k^{2j}} \sigma_{in}(X_s(x)) \prod_{\substack{l=1 \\ l \notin (\alpha_2^{c2j}, \ldots, \alpha_k^{c2j})}}^{k} \frac{\partial X_s^{\alpha_l}(x)}{\partial x_{m_l}} \\
& \times \bigcurlywedge_{r \in (\alpha_2^{c2j}, \ldots, \alpha_k^{c2j})} \Big(\sum_{\substack{i=1 \\ i \notin (\alpha_2^{c2j}, \ldots, \alpha_k^{c2j})}}^{r-1} \frac{\partial X_s^{\alpha_i}(x)}{\partial x_{m_r}} \Big) \Big] \\
& + \cdots + \sum_{\alpha_1 = 1}^{d} D_{\alpha_1} \sigma_{in}(X_s(x)) \frac{\partial^k X_s^{\alpha_1}(x)}{\partial x_{m_1} \ldots \partial x_{m_k}} \Big) \mathrm{d}B_s^n.
\end{aligned}
$$

□