VILNIAUS UNIVERSITETAS

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

MAGISTRO DARBAS

Stochastinės Verhulsto lygties sprendinių momentų aproksimavimas Fourier eilučių dalinėmis sumomis

Approximation of moments of solutions to stochastic Verhults equation by partial sums of Fourier series

Monika Mazurkevičiūtė

Vilnius 2016

MATEMATINĖS ANALIZĖS KATEDRA

Darbo vadovas *prof. Vigirdas Mackevičius*

Darbo recenzentas *doc. dr. Martynas Manstavičius*

Darbas apgintas 2016 m. sausio 14 d.

Darbas įvertintas ________________

Registravimo nr. ________________

2016-01-04 ________________

Stochastinės Verhulsto lygties sprendinių momentų aproksimavimas Fourier eilučių dalinėmis sumomis

Santrauka

Finansų matematikoje trumpojo laikotarpio palūkanų normų modeliavimui dažnai naudojamą CIR procesą Mackevičius [5] pasiūlė keisti Verhulsto stochastine (SV) diferencialine lygtimi. Tačiau SV lygties sprendinių momentai nėra žinomi išreikštiniu pavidalu. Dėl šios priežasties [5] buvo pasiūlyta įvesti momentų uždarumo sąlygą, aprašomą lygtimi $q(t) = \mathbb{E}X_t^2/\mathbb{E}X_t$. Baravykas magistriniame darbe [1] funkciją $q(t)$ aproksimavo Fourier eilučių dalinių sumų metodu. Šiame darbe tęsiame pradėtus tyrimus, pirma, Baravyko metodą pagerindami optimalių parametrų radimu ir skaičiavimų supaprastinimu. Antra, pasinaudodami tomis pačiomis Fourier eilučių dalinių sumų savybėmis sukonstruojame naują funkcijos $q(t)$ aproksimaciją, kuri ne tik duoda geresnius rezultatus, bet ir yra paprasčiau konstruojama. Skaičiavimai atlikti statistiniu paketu R.

Raktiniai žodžiai: Verhulsto lygtis, CIR lygtis, momentų uždarumo sąlyga, Fourier eilučių dalinės sumos, split-step metodas.

Approximation of moments of solutions to stochastic Verhults equation by partial sums of Fourier series

Abstract

In financial mathematics, CIR process is widely used for modeling interest rates. Mackevicius [5] proposed, instead, to use the stochastic Verhulst process. The main its disadvantage is that explicit expressions of moments are not known. Therefore, the moment closure condition $q(t) = \mathbb{E}X_t^2/\mathbb{E}X_t$ was proposed. Baravykas in his master thesis [1] analyzed $q(t)$ approximations by the method of partial sums of Fourier series. In this diploma project, first, we continue research in this direction by optimizing freely chosen parameters and simplifying calculations. Second, using the same properties of partial sums of Fourier series, we construct a new $q(t)$ approximation that gives more accurate results and is easily implemented. For calculations, we use the statistical package R.

Key words: Verhulst equation, CIR equation, moment closure condition, partial sums of Fourier series, split-step method.

Turinys

Įvadas **3**

1 Teorinė dalis **4**
1.1 Apibrėžimai ir teoremos 4
1.2 Momentų uždarumo sąlyga 6

2 Fourier dalinių sumų metodas I **7**
2.1 Pirmo tipo aproksimacija 7
2.2 Antro tipo aproksimacija 10

3 Fourier dalinių sumų metodas II **14**

4 Rezultatai **18**
4.1 Fourier dalinių sumų metodas I 18
4.1.1 Pirmas tankio tipas 18
4.1.2 Antras tankio tipas 20
4.1.3 Trečias tankio tipas 22
4.2 Fourier dalinių sumų metodas II 26
4.2.1 Pirmas tankio tipas 26
4.2.2 Antras tankio tipas 28
4.2.3 Trečias tankio tipas 29
4.3 Optimalaus τ priklausomybė nuo parametrų 31

Išvados **33**

Literatūra **34**

Priedai **35**

A Fourier dalinių sumų metodas I **35**

B Fourier dalinių sumų metodas II **41**

Įvadas

Finansų matematikoje trumpojo laikotarpio palūkanų normų modeliavimui dažnai naudojamas CIR procesas, nusakomas stochastine diferencialine lygtimi

$$dX_t = \lambda(\mu - X_t)dt + \sigma\sqrt{X_t}dB_t, \qquad X_0 = x > 0, \ \ \sigma, \lambda, \mu \in \mathbb{R}^+. \tag{0.1}$$

Šis procesas patrauklus tuo, kad sprendiniai neįgyja neigiamų reikšmių (esant teigiamoms pradinėms reikšmėms), vidurkiai konverguoja į baigtinę reikšmę bei sprendinio momentai yra išreikštinio pavidalo. Nepaisant to, procesas turi kelis esminius trūkumus: nėra žinomas išreikštinis sprendinio pavidalas, o lygtyje esanti šaknis tik dar labiau apsunkina jo aproksimacijų radimą. Dėl šios priežasties Mackevičius [5] pasiūlė CIR lygtį keisti Verhulsto stochastine (SV) diferencialine lygtimi, plačiai naudojamą įvairiose srityse [2],

$$dX_t = \lambda X_t(\bar{\mu} - X_t)dt + \sigma X_t dB_t, \qquad X_0 = x > 0; \tag{0.2}$$

čia $\bar{\mu} = \mu + \frac{\sigma^2}{2\lambda}$. Šios lygties sprendiniai, kaip ir CIR, yra neneigiami, jų virdurkiai konverguoja į baigtines reikšmes bei SV lygties sprendinio stacionarus tankis sutampa su CIR proceso stacionariuoju tankiu. Tai leidžia teigti, kad ilguoju laikotarpiu sprendinių tikimybinė elgsena supanašėja. Svarbiausia, kad SV lygties sprendinys yra lengvai randamas išreikštiniu pavidalu (žr., pvz., [4]).

Kita vertus, lyginant su CIR, SV lygtis turi ir trūkumą – sprendinių momentai nėra žinomi išreikštiniu pavidalu. Dėl šios priežasties [5] buvo pasiūlyta įvesti momentų uždarumo sąlygą, aprašomą lygtimi $q(t) = \mathbb{E}X_t^2/\mathbb{E}X_t$. Kadangi SV lygties sprendinių momentai gali būti užrašomi rekurentiškai, tai sukonstravę funkcijos $q(t)$ aproksimacijas, galime gauti apytiksles visų momentų išraiškas.

Baravykas [1] funkciją $q(t)$ aproksimavo eksponentinių funkcijų sistemos $\{e^{-k\tau t}, k = 1,2,3\}$ tiesiniais dariniais, pasinaudodamas tų funkcijų sistemos ortogonalizavimu ir Fourier eilučių dalinių sumų savybėmis. Gautos funkcijos $q(t)$ aproksimacijos priklauso nuo laisvojo parametro τ, kuris darbe parenkamas bandymų keliu, o gauta apytikslė $q(t)$ funkcija pradinę sąlygą $q(0) = 1$ taip pat tenkina tik apytiksliai. Mūsų darbo pagrindiniai tikslai – rasti optimalų laisvąjį parametrą τ, išspręsti $q(t)$ „pradinio taško“ problemą bei supaprastinti reikalingus skaičiavimus.

Pagrindiniai šio darbo rezultatai yra šie:

1) Minimizuojant paklaidą tarp sukonstruotos aproksimacijos ir skaitiniais metodais gautos funkcijos, gautas optimalus parametras τ (2 skyrius);

2) Supaprastinti metodo skaičiavimai (2 skyrius);

3) Pasinaudojant tomis pačiomis Fourier eilučių dalinių sumų savybėmis, sukonstruota nauja funkcijos $q(t)$ aproksimacija, kuri išsprendė funkcijos $q(t)$ „pradinio taško“ problemą (3 skyrius).

Darbas sudarytas iš 4 skyrių. Pirmame skyriuje pateikiama visa reikalinga teorinė medžiaga apie SV lygties savybes, reikalingas momentų aproksimacijų modeliavimui. Antrame skyriuje tęsiamas Baravyko [1] pradėtos aproksimacijos konstravimas. Metodas pagerinamas optimalaus laisvojo parametro radimu bei supaprastintais skaičiavimais. Trečiame skyriuje konstruojama nauja funkcijos $q(t)$ aproksimacija bei pateikiami detalūs skaičiavimai. Taip pat gautai $q(t)$ aproksimacijai išvedamos pirmojo momento išraiškos bendruoju ir išimtiniais atvejais. Ketvirtame skyriuje apžvelgiami gauti rezultatai. Galiausiai pateikiamos darbo išvados ir apibendrinti rezultatai. Priede pateikiami programų kodai programavimo kalba R.

1 Teorinė dalis

Šiame skyriuje pateiksime visą teorinę medžiagą, reikalingą tolimesniam Verhulsto lygties sprendinių momentų aproksimavimui. Pradėsime nuo pagrindinių apibrėžimų ir teoremų, kurių mums prireiks.

1.1 Apibrėžimai ir teoremos

1.1 Apibrėžimas. Diskrečiojo laiko atsitiktinių procesų šeima X^h, $h>0$ vadinama SDL sprendinio X n-tosios eilės *silpnąja aproksimacija*, jei su visais $t \in [0,T]$

$$\mathtt{E}f(X_t^h) - \mathtt{E}f(X_t) = O(h^n), \qquad h \to 0,$$

pakankamai plačiai funkcijų $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ klasei.

1.2 Apibrėžimas. Stochastinės diferencialinės lygties

$$X_t = x_0 + \int_0^t b(X_s, s)ds + \int_0^t \sigma(X_s, s)dB_s, \qquad t \geq 0,$$

kurios koeficientai b, σ tenkina sprendinio egzistavimo ir vienaties sąlygas, sprendinys X yra vadinamas *difuziniu procesu*.

1.3 Apibrėžimas. Sakoma, kad difuzinis procesas X su perėjimo tankiu $p(t,x,y)$ turi stacionarųjį tankį p_0 intervale (a,b), jei

$$\int_a^b p(t,x,y)dy = 1, \qquad t > 0,\ x \in (a,b)$$

ir

$$p_0(y) = \int_a^b p(t,x,y)p_0(x)dx, \qquad t > 0,\ y \in (a,b).$$

1.4 Teorema. Stochastinės Verhulsto lygties *antros eilės split-step aproksimacija* apibrėžiama lygybe

$$\begin{aligned}\tilde{X}_t^h :=& \tilde{X}_t^h(x,h) = D\left(S\left(D\left(x, \frac{h}{2}\right), h\right), \frac{h}{2}\right)\\ =& \frac{\bar{\mu}}{1+\exp\left\{-\frac{1}{2}h\lambda\bar{\mu}\right\}\left(\exp\left\{\frac{h\sigma^2}{2} - \sigma B_h\right\}\left(1+\exp\left\{-\frac{1}{2}h\lambda\bar{\mu}\right\}\left(\frac{\bar{\mu}}{x}-1\right)\right)-1\right)},\end{aligned}$$

Čia:

$$D(x,t) := \frac{\bar{\mu}}{1+\left(\frac{\bar{\mu}}{x}-1\right)\exp\{-\lambda\bar{\mu}t\}}$$

yra *Verhulsto lygties deterministinės dalies sprendinys.*

Daugiau informcijos galite rasti [5].

Sakykime, $\mathbf{E}$ yra realioji tiesinė erdvė su skaliarine sandauga $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

1.5 Apibrėžimas. Skaičiai $c_k := c_k(x) = \langle x, \psi_k \rangle$, $k \in \mathbb{N}$, vadinami elemento $x \in \mathbf{E}$ Fourier koeficientais ortonormuotos sekos $(\psi_k, k \in \mathbb{N})$ atžvilgiu, o eilutė

$$\sum_k c_k \psi_k$$

vadinama elemento x Fourier eilute.

1.6 Apibrėžimas. Ortonormuotoji seka $(\psi_k, k \in \mathbb{N})$ vadinama erdvės $\mathbf{E}$ ortonormuotąja baze, jei kiekvienas $x \in \mathbf{E}$ yra lygus atitinkamos Fourier eilutės sumai, t.y.

$$\sum_k^\infty c_k \psi_k$$

1.7 Teiginys. Verhulsto lygties (0.2) stacionarusis tankis yra gama skirstinio tankis

$$p_0(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp\{-\beta x\}, \; x \geq 0;$$

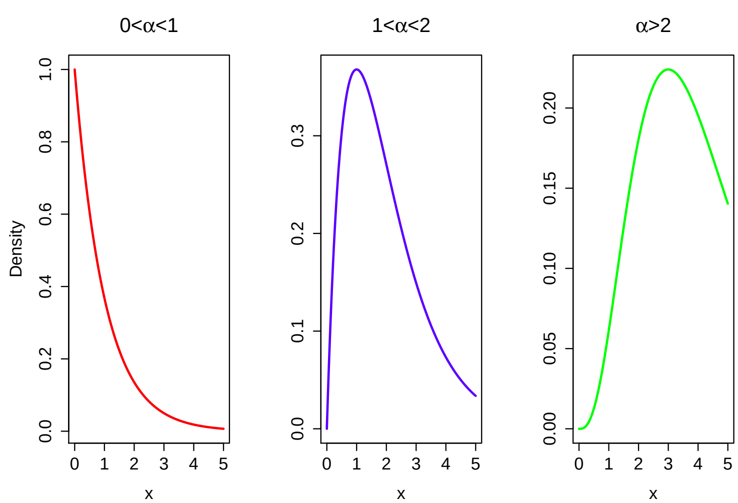
čia

$$\alpha = \frac{2\lambda\mu}{\sigma^2}, \; \beta = \frac{2\lambda}{\sigma^2}.$$

Pastaba. Skiriami trys šio tankio tipai:

$$\begin{aligned}
&1) \;\; 0 < \alpha < 1 \;\; \Leftrightarrow \;\; 0 < \frac{2\lambda\mu}{\sigma^2} < 1 \;\; \Leftrightarrow \;\; \lambda\mu < \frac{\sigma^2}{2};\\
&2) \;\; 1 < \alpha < 2 \;\; \Leftrightarrow \;\; 1 < \frac{2\lambda\mu}{\sigma^2} < 2 \;\; \Leftrightarrow \;\; \frac{\sigma^2}{2} < \lambda\mu < \sigma^2;\\
&3) \;\; \alpha > 2 \;\; \Leftrightarrow \;\; \frac{2\lambda\mu}{\sigma^2} > 2 \;\; \Leftrightarrow \;\; \lambda\mu > \sigma^2.
\end{aligned}$$

Atitinkamos tankio formos:



1 pav.: Gama skirstinio tankio formos

1.8 Teiginys. Lygties (0.2) sprendinio momentus galima išreikšti rekurentiškai. Pažymėjus

$$M_i(t) = \mathbb{E}X_t^i, \;\; i = 1,2,3\ldots$$

turime:

$$M_i(t) = x_i + \int_0^\infty \left(\left(i\lambda\bar{\mu} + \frac{i(i-1)}{2}\sigma^2 \right) M_i(s) - i\lambda M_{i+1}(s) \right) ds. \tag{1.1}$$

1.9 Teiginys. Lygties (0.2) sprendinio pirmųjų dviejų momentų ribos yra lygios

$$\lim_{t\to\infty} M_1(t) = \frac{\alpha}{\beta} = \mu, \tag{1.2}$$

$$\lim_{t\to\infty} M_2(t) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2} = \mu\bar{\mu} = \mu\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2\lambda}\right). \tag{1.3}$$

Šių teiginių įrodymus galima rasti [5].

1.2 Momentų uždarumo sąlyga

Stochastinės Verhulsto lygties momentai išreikštiniu pavidalu nėra žinomi, todėl naudosimės momentų uždarumo sąlyga, kuri apibrėžiama

$$q(t) = \frac{M_2(t)}{M_1^2(t)}, \ \ t \geq 0. \tag{1.4}$$

Funkcija $q(t)$ pilnai apibrėžia visus momentus, tačiau išreikštiniu pavidalu nėra žinoma. Gerai parinkus apytikrę $q(t)$ išraišką, galima rasti apytiksles visų Verhulsto lygties sprendinių momentų reikšmes.

1.10 Teiginys.

$$q(\infty) := \lim_{t\to\infty} q(t) = 1 + \frac{\sigma^2}{2\lambda\mu}.$$

Įrodymas. Išplaukia iš ribų (1.2) ir (1.3).

Pasinaudojus (1.1) lygtimi, gali būti išvesta pirmo momento bendra išraiška

$$M_1^{-1}(t) = e^{-\lambda\bar{\mu}t}\left(M_1^{-1}(0) + \lambda\int_0^t q(s)e^{\lambda\bar{\mu}s}ds\right). \tag{1.5}$$

Lygties išvedimas pateiktas [6].

Tuomet pasinaudojus momentų uždarumo sąlyga gauname:

$$M_2(t) = q(t)M_1^2(t)$$

2 Fourier dalinių sumų metodas I

Baravykas savo darbe [1] funkciją $q(t)$ aproksimavo eksponentinių funkcijų $f_k(t) = e^{-k\tau t}$, $k \in \mathbb{N}$ sistemos tiesiniais dariniais, pasinaudodamas tų funkcijų ortogonalizavimu ir Fourier eilučių dalinių sumų savybėmis. Tačiau jis parametrą τ parinkdavo bandymų keliu. Mūsų tikslas – kiekvienam parametrų $(\lambda, \sigma, \mu, x_0)$ rinkiniui rasti optimalų parametrą τ, kartu supaprastinant šio metodo skaičiavimus.

Pagrindinė šio metodo idėja – pasinaudojus skaitiniais metodais gautomis reikšmėmis, atsižvelgti į $q(t)$ elgesį trumpuoju laikotarpiu. Taip pat šis metodas remiasi faktu, kad mažiausi skirtumai nagrinėjamos normos prasme tarp funkcijos ir ortogonalios sistemos tiesinių darinių yra realizuojami būtent Fourier eilutės dalinėmis sumomis (žr. pvz. [3], p. 178).

Aproksimuojant q pagal erdvės $L^2[0,\infty)$ normą, neužtikrinama pradinė sąlyga $q(0) = 1$. Norint išvengti šio trūkumo, Lebesgue mato pustiesėje $[0,\infty)$ pridedamas diskretus matas, priskiriantis teigiamą reikšmę taškui 0 (plačiau [1]). Pažymėkime

$$m_0 = m + c\delta_0;$$

čia m yra Lesbegue matas, δ_0 – Diraco matas, o $c \in \mathbb{R}^+$ – konstanta, kuri bus parenkama vėliau. Tada erdvėje $L^2_{m_0}[0,\infty)$, kuriai priklauso visos mačios integruojamo kvadrato funkcijos $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ mato m_0 atžvilgiu, norma yra

$$\|f\| = \left(\int_0^\infty f(s)^2 m_0(ds)\right)^{1/2} = \left(cf^2(0) + \int_0^\infty f^2(s)ds\right)^{1/2},$$

o skaliarinė sandauga

$$\langle f, g\rangle = cf(0)g(0) + \int_0^\infty f(s)g(s)ds.$$

Tada eksponentinių funkcijų $f_k(t) = e^{-k\tau t}$, $t \geq 0$, normos yra lygios

$$\|f_k\| = \left(cf_k^2(0) + \int_0^\infty e^{-2k\tau t}dt\right)^{1/2} = \sqrt{c + \frac{1}{2k\tau}}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

2.1 Pirmo tipo aproksimacija

Žinodami $q(t)$ ribą begalybėje, ieškosime funkcijos

$$f(t) := \frac{(q(t)-1)2\lambda\mu}{\sigma^2} - 1,$$

kurios riba $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$, aproksimacijos pavidalo

$$f(t) \approx \alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t) = \alpha_1 e^{-\tau t} + \alpha_2 e^{-2\tau t}.$$

Tam pirma ortonormuosime dviejų funkcijų sistemą $\{g_1, g_2\}$, po to funkciją f aproksimuosime tos ortonormuotosios sistemos Fourier suma ir galiausiai grįšime prie pradinių funkcijų $\{f_1, f_2\}$.

Toliau, ieškodami Fourier koeficientų, ortogonalizuojame pagal Schmidtą:

$$\begin{aligned} g_1 &:= f_1, \quad g_2 := f_2 + a_{21}f_1, \quad < g_2, g_1 >= 0, \quad \Rightarrow \\ a_{21} &= -\frac{< f_2, g_1 >}{\|g_1\|^2} = -\frac{c + \int_0^\infty e^{-3\tau s}ds}{c + \int_0^\infty e^{-2\tau s}ds} =: -\frac{A(3)}{A(2)}; \\ g_2 &= f_2 + a_{21}f_1 = e^{-2\tau t} + a_{21}e^{-\tau t}. \end{aligned}$$

Čia:

$$A(m) := c + \int_0^\infty e^{-m\tau s}ds = c + \frac{1}{m\tau}, \quad kur\ m = 1, 2, 3 \ldots$$

$$a_{21} := -\frac{A(3)}{A(2)}, \qquad a_{11} := \frac{1}{A(2)} = \frac{1}{\|g_1\|^2}.$$

Pirmi du funkcijos $f(t)$ aproksimacijos Fourier eilutės nariai atrodo taip:

$$f(t) \approx \frac{< f, g_1 >}{\|g_1\|^2} g_1(t) + \frac{< f, g_2 >}{\|g_2\|^2} g_2(t). \tag{2.1}$$

Rasime $\|g_2\|^2$:

$$\begin{aligned}
\|g_2\|^2 &= c g_2^2(0) + \int_0^\infty g_2^2(s) ds = c\left(1 - \frac{A(3)}{A(2)}\right)^2 + \int_0^\infty \left(e^{-2\tau s} - \frac{A(3)}{A(2)} e^{-\tau s}\right)^2 ds \\
&= c\left(1 - \frac{A(3)}{A(2)}\right)^2 + \frac{1}{4\tau} - \frac{2A(3)}{3\tau A(2)} + \frac{A(3)^2}{2\tau A(2)^2} \\
&= \underbrace{\left(c + \frac{1}{4\tau}\right)}_{A(4)} - 2\frac{A(3)}{A(2)} \underbrace{\left(c + \frac{1}{3\tau}\right)}_{A(3)} + \left(\frac{A(3)}{A(2)}\right)^2 \underbrace{\left(c + \frac{1}{2\tau}\right)}_{A(2)} \\
&= A(4) - \frac{A(3)^2}{A(2)}.
\end{aligned}$$

Pažymėkime $a_{22} := \frac{1}{\|g_2\|^2} = \frac{A(2)}{A(4)A(2) - A(3)^2}$.
Rasime pirmąjį funkcijos $f(t)$ aproksimacijos narį:

$$\begin{aligned}
\frac{< f, g_1 >}{\|g_1\|^2} g_1(t) &= \frac{1}{\|g_1\|^2} \left(c f(0) g_1(0) + \int_0^\infty f(s) g_1(s) ds\right) g_1(t) \\
&= a_{11} e^{-\tau t} \left(c f(0) + \int_0^\infty f(s) e^{-\tau s} ds\right).
\end{aligned}$$

Rasime $\frac{<f, g_2>}{\|g_2\|^2}$ išraišką:

$$\begin{aligned}
\frac{< f, g_2 >}{\|g_2\|^2} &= \frac{1}{\|g_2\|^2} \left(c f(0) g_2(0) + \int_0^\infty f(s) g_2(s) ds\right) \\
&= a_{22} \left((1 + a_{21}) c f(0) + \int_0^\infty f(s) \left(e^{-2\tau s} + a_{21} e^{-\tau s}\right) ds\right).
\end{aligned}$$

Rasime antrąjį funkcijos $f(t)$ aproksimacijos narį:

$$\frac{< f, g_2 >}{\|g_2\|^2} g_2(t) = a_{22} \left((1 + a_{21}) c f(0) + \int_0^\infty f(s) \left(e^{-2\tau s} + a_{21} e^{-\tau s}\right) ds\right) \left(e^{-2\tau t} + a_{21} e^{-\tau t}\right).$$

Tada, pasinaudojus (3), rasime $f(t)$ aproksimacijos išraišką:

$$
\begin{aligned}
f(t) &\approx a_{11}e^{-\tau t}\left(cf(0)+\int_0^\infty f(s)e^{-\tau s}ds\right)\\
&\quad + a_{22}\left((1+a_{21})cf(0)+\int_0^\infty f(s)\left(e^{-2\tau s}+a_{21}e^{-\tau s}\right)ds\right)\left(e^{-2\tau t}+a_{21}e^{-\tau t}\right)\\
&= \left(\underbrace{\left(a_{11}+a_{21}a_{22}(1+a_{21})\right)c}_{\beta_{10}}f(0)+\underbrace{\left(a_{11}+a_{21}^2a_{22}\right)}_{\beta_{11}}\int_0^\infty f(s)e^{-\tau s}ds\right.\\
&\quad \left.+\underbrace{a_{21}a_{22}}_{\beta_{12}}\int_0^\infty f(s)e^{-2\tau s}ds\right)e^{-\tau t}\\
&\quad +\left(\underbrace{a_{22}(1+a_{21})c}_{\beta_{20}}f(0)+\underbrace{a_{21}a_{22}}_{\beta_{21}}\int_0^\infty f(s)e^{-\tau s}ds+\underbrace{a_{22}}_{\beta_{22}}\int_0^\infty e^{-2\tau s}ds\right)e^{-2\tau t}\\
&= \left(\beta_{10}f(0)+\beta_{11}\int_0^\infty f(s)e^{-\tau s}ds+\beta_{12}\int_0^\infty f(s)e^{-2\tau s}ds\right)e^{-\tau t}\\
&\quad +\left(\beta_{20}f(0)+\beta_{21}\int_0^\infty f(s)e^{-\tau s}ds+\beta_{22}\int_0^\infty f(s)e^{-2\tau s}ds\right)e^{-2\tau t}\\
&=: \alpha_1 e^{-\tau t}+\alpha_2 e^{-2\tau t}.
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

Rasime paklaidą tarp skaitiniais metodais gautos funkcijos $\tilde{f}(t)$ bei sukonstruotos funkcijos $f(t)$ pirmo tipo aproksimacijos:

$$
\begin{aligned}
\epsilon(\tau) &= \int_0^\infty \left(\tilde{f}(t)-f(t)\right)^2 m_0(dt) = \left\|\tilde{f}-\sum_{i=1}^{2}\frac{\langle f,g_i\rangle}{\|g_i\|^2}g_i\right\|^2\\
&= \left\langle \tilde{f}-\sum_{i=1}^{2}\frac{\langle f,g_i\rangle}{\|g_i\|^2}g_i, \tilde{f}-\sum_{i=1}^{2}\frac{\langle f,g_i\rangle}{\|g_i\|^2}g_i\right\rangle\\
&= \|\tilde{f}\|^2-2\sum_{i=1}^{2}\frac{\langle f,g_i\rangle^2}{\|g_i\|^2}+\sum_{i=1}^{2}\frac{\langle f,g_i\rangle^2}{\|g_i\|^4}\|g_i\|^2 = \|\tilde{f}\|^2-\sum_{i=1}^{2}\frac{\langle f,g_i\rangle^2}{\|g_i\|^2}\\
&= \|\tilde{f}\|^2 - a_{11}\langle f,g_1\rangle^2 - a_{22}\langle f,g_2\rangle^2 = \|\tilde{f}\|^2 - a_{11}\left(cf(0)+\int_0^\infty f(s)e^{-\tau s}ds\right)^2\\
&\quad - a_{22}\left((1+a_{21})cf(0)+a_{21}\int_0^\infty f(s)e^{-\tau s}ds+\int_0^\infty f(s)e^{-2\tau s}ds\right)^2.
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

Ši vidutinė kvadratinė paklaida priklauso nuo laisvojo parametro τ, kuris, kaip minėta, Baravyko darbe [1] buvo parenkamas bandymo keliu. Mūsų tikslas – rasti optimalų parametrą τ, su kuriuo gauta paklaida būtų minimali. Skaičiavimams atlikti naudosimės programa R. Fourier koeficientus galime apytiksliai apskaičiuoti integralus pakeisdami Riemano sumomis nagrinėjamame intervale $[0,T]$, o $f(s)$ – skaitiniais metodais gautomis funkcijos aproksimacijomis. Optimalaus τ radimui naudosimės programos R funkcija `optimize`.

Pasinaudojus sukonstruota funkcijos $f(t)$ pirmojo tipo aproksimacija, gaunama $q(t)$ aproksimacija pavidalo

$$
q(t) \approx 1+\frac{\sigma^2}{2\lambda\mu}\left(1+\alpha_1 e^{-\tau t}+\alpha_2 e^{-2\tau t}\right).
$$

Gautai $q(t)$ aproksimacijai pirmo momento išraiška randama pasinaudojus lygtimi (1.5):

$$
\begin{aligned}
M_1^{-1}(t) &\approx e^{-\lambda\bar{\mu}t}\left(\frac{1}{x}+\lambda\int_0^t\Big(1+\frac{\sigma^2}{2\lambda\mu}(1+\alpha_1e^{-\tau s}+\alpha_2e^{-2\tau s})\Big)e^{\lambda\bar{\mu}s}ds\right)\\
&= e^{-\lambda\bar{\mu}t}\left(\frac{1}{x}+\lambda\int_0^t\left(1+\frac{\sigma^2}{2\lambda\mu}\right)e^{\lambda\bar{\mu}s}+\frac{\alpha_1\sigma^2}{2\lambda\mu}e^{-\tau s+\lambda\bar{\mu}s}+\frac{\alpha_2\sigma^2}{2\lambda\mu}e^{-2\tau s+\lambda\bar{\mu}s}ds\right)\\
&= e^{-\lambda\bar{\mu}t}\Big(\frac{1}{x}+\frac{2\lambda\mu+\sigma^2}{2\lambda\mu\bar{\mu}}\;e^{\lambda\bar{\mu}s}\Big|_0^t+\frac{\alpha_1\sigma^2}{2\mu(\lambda\bar{\mu}-\tau)}\;e^{\lambda\bar{\mu}s-\tau s}\Big|_0^t+\frac{\alpha_2\sigma^2}{2\mu(\lambda\bar{\mu}-2\tau)}\;e^{\lambda\bar{\mu}s-2\tau s}\Big|_0^t\Big)\\
&= \frac{2\lambda\mu+\sigma^2}{2\lambda\mu\bar{\mu}}+\left(\frac{1}{x}-\frac{2\lambda\mu+\sigma^2}{2\lambda\mu\bar{\mu}}-\frac{\alpha_1\sigma^2}{2\mu(\lambda\bar{\mu}-\tau)}-\frac{\alpha_2\sigma^2}{2\mu(\lambda\bar{\mu}-2\tau)}\right)e^{-\lambda\bar{\mu}t}\\
&\quad+\frac{\alpha_1\sigma^2}{2\mu(\lambda\bar{\mu}-\tau)}e^{-\tau t}+\frac{\alpha_2\sigma^2}{2\mu(\lambda\bar{\mu}-2\tau)}e^{-2\tau t}.
\end{aligned}
$$

Iš čia:

$$
\begin{aligned}
M_1(t)\approx 2\mu\Bigg(&\frac{2\lambda\mu+\sigma^2}{\lambda\bar{\mu}}+\left(\frac{2\mu}{x}-\frac{2\lambda\mu+\sigma^2}{\lambda\bar{\mu}}-\frac{\alpha_1\sigma^2}{\lambda\bar{\mu}-\tau}-\frac{\alpha_2\sigma^2}{\lambda\bar{\mu}-2\tau}\right)e^{-\lambda\bar{\mu}t}\\
&+\frac{\alpha_1\sigma^2}{\lambda\bar{\mu}-\tau}e^{-\tau t}+\frac{\alpha_2\sigma^2}{\lambda\bar{\mu}-2\tau}e^{-2\tau t}\Bigg)^{-1}.
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

Matome, kad pirmas momentas būtų neapibrėžtas, jei $\tau=\lambda\bar{\mu}$, todėl, šiuo atveju, analogiškai išvedama kitokia pirmo momento išraiška

$$
\begin{aligned}
M_1^{-1}(t) &\approx e^{-\lambda\bar{\mu}t}\left(\frac{1}{x}+\lambda\int_0^t\Big(1+\frac{\sigma^2}{2\lambda\mu}(1+\alpha_1e^{-\lambda\bar{\mu}s}+\alpha_2e^{-2\tau s})\Big)e^{\lambda\bar{\mu}s}ds\right)\\
&= \frac{2\lambda\mu+\sigma^2}{2\lambda\mu\bar{\mu}}+\left(\frac{1}{x}-\frac{2\lambda\mu+\sigma^2}{2\lambda\mu\bar{\mu}}+\frac{\alpha_1\sigma^2t}{2\mu}-\frac{\alpha_2\sigma^2}{2\mu(\lambda\bar{\mu}-2\tau)}\right)e^{-\lambda\bar{\mu}t}\\
&\quad+\frac{\alpha_2\sigma^2}{2\mu(\lambda\bar{\mu}-2\tau)}e^{-2\tau t};\\
M_1(t) &\approx 2\mu\Bigg(\frac{2\lambda\mu+\sigma^2}{\lambda\bar{\mu}}+\left(\frac{2\mu}{x}-\frac{2\lambda\mu+\sigma^2}{\lambda\bar{\mu}}+\alpha_1\sigma^2t-\frac{\alpha_2\sigma^2}{\lambda\bar{\mu}-2\tau}\right)e^{-\lambda\bar{\mu}t}\\
&\qquad+\frac{\alpha_2\sigma^2}{\lambda\bar{\mu}-2\tau}e^{-2\tau t}\Bigg)^{-1}.
\end{aligned}
$$

Kai $2\tau=\lambda\bar{\mu}$, taip pat turime neapibrėžtumą, kurį panaikinus, pirmo momento išraiška atrodo taip:

$$
\begin{aligned}
M_1(t)\approx 2\mu\Bigg(&\frac{2\lambda\mu+\sigma^2}{\lambda\bar{\mu}}+\left(\frac{2\mu}{x}-\frac{2\lambda\mu+\sigma^2}{\lambda\bar{\mu}}-\frac{\alpha_1\sigma^2}{\lambda\bar{\mu}-\tau}+\alpha_2\sigma^2t\right)e^{-\lambda\bar{\mu}t}\\
&+\frac{\alpha_1\sigma^2}{\lambda\bar{\mu}-\tau}e^{-\tau t}\Bigg)^{-1}.
\end{aligned}
$$

2.2 Antro tipo aproksimacija

Siekdami gauti tikslesnius rezultatus, funkciją $f(t)$ aproksimuosime trimis eksponentėmis. Naudodamiesi tuo pačiu algoritmu, ortonormuosime trijų funkcijų sistemą $\{g_1,g_2,g_3\}$, po to funkciją f aproksimuosime tos ortonormuotosios sistemos Fourier eilutės daline suma ir galiausiai grįšime prie pradinių funkcijų $\{f_1,f_2,f_3\}$.

Toliau analogiškai ortogonalizuojame pagal Schmidtą:

$$
\begin{aligned}
g_3 &:= f_3 + a_{31}g_1 + a_{32}g_2, \qquad <g_3, g_1> = <g_3, g_2> = 0 \quad \Rightarrow \\
a_{31} &:= -\frac{<f_3, g_1>}{\|g_1\|^2} = -\frac{c + \int_0^\infty e^{-4\tau s} ds}{c + \int_0^\infty e^{-2\tau s} ds} = -\frac{A(4)}{A(2)}; \\
a_{32} &:= -\frac{<f_3, g_2>}{\|g_2\|^2} = -\frac{<f_3, f_2> + a_{21} <f_3, f_1>}{\|g_2\|^2} \\
&= -\frac{(c + \int_0^\infty e^{-5\tau s} ds) + a_{21}(c + \int_0^\infty e^{-4\tau s} ds)}{\|g_2\|^2} \\
&= a_{22}\left(A(5) + a_{21}A(4)\right).
\end{aligned}
$$

Tada

$$
\begin{aligned}
g_3 &= f_3 + a_{31}g_1 + a_{32}g_2 = e^{-3\tau t} + a_{31}e^{-\tau t} + a_{32}\left(e^{-2\tau t} + a_{21}e^{-\tau t}\right) \\
&= e^{-3\tau t} + a_{32}e^{-2\tau t} + (a_{31} + a_{32}a_{21})\, e^{-\tau t}.
\end{aligned}
$$

Pirmi trys funkcijos $f(t)$ aproksimacijos Fourier eilutės nariai atrodo taip:

$$
f(t) \approx \frac{<f, g_1>}{\|g_1\|^2} g_1(t) + \frac{<f, g_2>}{\|g_2\|^2} g_2(t) + \frac{<f, g_3>}{\|g_3\|^2} g_3(t). \tag{2.5}
$$

Rasime g_3 normą:

$$
\begin{aligned}
\|g_3\|^2 &= cg_3^2(0) + \int_0^\infty g_3^2(s) ds = cg_3^2(0) + \int_0^\infty \Big(e^{-3\tau s} + a_{32}e^{-2\tau s} + (a_{31} + a_{32}a_{21})e^{-\tau s}\Big)^2 ds \\
&= cg_3^2(0) + \int_0^\infty \Big(e^{-6\tau s} + a_{32}^2 e^{-4\tau s} + (a_{31} + a_{32}a_{21})^2 e^{-2\tau s} + 2a_{32}e^{-5\tau s} + 2(a_{31} + a_{32}a_{21})e^{-4\tau s} \\
&\quad + 2a_{32}(a_{31} + a_{32}a_{21})e^{-3\tau s}\Big) ds = c\left(1 + a_{32} + a_{31} + a_{32}a_{21}\right)^2 + \frac{1}{6\tau} + \Big(a_{32}^2 + 2(a_{31} + a_{32}a_{21})\Big)\frac{1}{4\tau} \\
&\quad + (a_{31} + a_{32}a_{21})^2 \frac{1}{2\tau} + 2a_{32}\frac{1}{5\tau} + 2a_{32}(a_{31} + a_{32}a_{21})\frac{1}{3\tau}.
\end{aligned} \tag{2.6}
$$

Analogiškai kaip ir anksčiau, pažymėkime $a_{33} := \frac{1}{\|g_3\|^2}$.
Pirmi du funkcijos $f(t)$ aproksimacijos nariai mums jau žinomi. Rasime trečiąjį:

$$
\begin{aligned}
\frac{<f, g_3>}{\|g_3\|^2} g_3(t) &= a_{33}\left(cf(0)g_3(0) + \int_0^\infty f(s)\Big(e^{-3\tau s} + a_{32}e^{-2\tau s} + (a_{31} + a_{32}a_{21})e^{-\tau s}\Big) ds\right) \\
&\quad * \Big(e^{-3\tau t} + a_{32}e^{-2\tau t} + (a_{31} + a_{32}a_{21})e^{-\tau t}\Big).
\end{aligned} \tag{2.7}
$$

Pasinaudoję (2.5) lygybe, gauname:

$$
\begin{aligned}
f(t) &\approx \frac{<f, g_1>}{\|g_1\|^2} g_1(t) + \frac{<f, g_2>}{\|g_2\|^2} g_2(t) + \frac{<f, g_3>}{\|g_3\|^2} g_3(t) \\
&= \left(\beta'_{10} f(0) + \int_0^\infty f(s)\left(\beta'_{11}e^{-\tau s} + \beta'_{12}e^{-2\tau s} + \beta'_{13}e^{-3\tau s}\right) ds\right) e^{-\tau t} \\
&\quad + \left(\beta'_{20} f(0) + \int_0^\infty f(s)\left(\beta'_{21}e^{-\tau s} + \beta'_{22}e^{-2\tau s} + \beta'_{23}e^{-3\tau s}\right) ds\right) e^{-2\tau t} \\
&\quad + \left(\beta'_{30} f(0) + \int_0^\infty f(s)\left(\beta'_{31}e^{-\tau s} + \beta'_{32}e^{-2\tau s} + \beta'_{33}e^{-3\tau s}\right) ds\right) e^{-3\tau t}.
\end{aligned} \tag{2.8}
$$

Čia:

$$
\begin{aligned}
\beta'_{10} &= \beta_{10} + ca_{33}(a_{31} + a_{32}a_{21})(1 + a_{32} + a_{31} + a_{32}a_{21});\\
\beta'_{11} &= \beta_{11} + a_{33}(a_{31} + a_{32}a_{21})^2;\\
\beta'_{12} &= \beta_{12} + a_{33}a_{32}(a_{31} + a_{32}a_{21});\\
\beta'_{13} &= a_{33}(a_{31} + a_{32}a_{21});\\
\beta'_{20} &= \beta_{20} + ca_{33}a_{32}(1 + a_{32} + a_{31} + a_{32}a_{21});\\
\beta'_{21} &= \beta_{21} + a_{33}a_{32}(a_{31} + a_{32}a_{21});\\
\beta'_{22} &= \beta_{22} + a_{33}a_{32}^2;\\
\beta'_{23} &= a_{33}a_{32};\\
\beta'_{30} &= ca_{33}(1 + a_{32} + a_{31} + a_{32}a_{21});\\
\beta'_{31} &= a_{33}(a_{31} + a_{32}a_{21});\\
\beta'_{32} &= a_{33}a_{32};\\
\beta'_{33} &= a_{33}.
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

Kaip ir pirmojo aproksimacijos tipo atveju, rasime paklaidą tarp skaitiniais metodais gautos funkcijos $\tilde{f}(t)$ bei sukontruotos funkcijos $f(t)$ antro tipo aproksimacijos:

$$
\begin{aligned}
\epsilon(\tau) = \int_0^\infty \left(\tilde{f}(t) - f(t,\tau)\right)^2 m_0(dt) = \left\|\tilde{f}\right\|^2 - \sum_{i=1}^3 \frac{\langle f, g_i\rangle^2}{\|g_i\|^2}\\
= \left\|\tilde{f}\right\|^2 - \left(a_{11} < f, g_1 >^2 + a_{22} < f, g_2 >^2 + a_{33} < f, g_3 >^2\right)\\
= \left\|\tilde{f}\right\|^2 - a_{11}\left(cf(0) + \int_0^\infty f(s)e^{-\tau s} ds\right)^2\\
- a_{22}\left((1 + a_{21})cf(0) + a_{21}\int_0^\infty f(s)e^{-\tau s} ds + \int_0^\infty f(s)e^{-2\tau s} ds\right)^2\\
- a_{33}\left(cf(0)g_3(0) + (a_{31 + a_{32}a_{21}})\int_0^\infty f(s)e^{-\tau s} ds + a_{32}\int_0^\infty f(s)e^{-2\tau s} ds + \int_0^\infty f(s)e^{-3\tau s} ds\right)^2.
\end{aligned}
$$

Toliau analogiškai minimizavę paklaidą ϵ, gausime optimalų parametrą τ, kurį naudosime funkcijos $f(t)$ antro tipo aproksimacijos radimui.

Pasinaudojus lygybe $q(t) = \frac{(f(t)+1)\sigma^2}{2\lambda\mu} + 1$, gaunama tokio pavidalo funkcijos $q(t)$ aproksimacija:

$$
q(t) \approx 1 + \frac{\sigma^2}{2\lambda\mu}\left(1 + \alpha_1 e^{-\tau t} + \alpha_2 e^{-2\tau t} + \alpha_3 e^{-3\tau t}\right).
$$

Šiuo atveju, pirmo momento išraiška, gaunama remiantis lygtimi (1.5), bendruoju atveju atrodo taip:

$$
\begin{aligned}
M_1^{-1}(t) &\approx e^{-\lambda\bar{\mu}t}\left(\frac{1}{x}+\lambda\int_0^t\Big(1+\frac{\sigma^2}{2\lambda\mu}(1+\alpha_1e^{-\tau s}+\alpha_2e^{-2\tau s}+\alpha_3e^{-3\tau s})\Big)e^{\lambda\bar{\mu}s}ds\right)\\
&=\frac{2\lambda\mu+\sigma^2}{2\lambda\mu\bar{\mu}}+\bigg(\frac{1}{x}-\frac{2\lambda\mu+\sigma^2}{2\lambda\mu\bar{\mu}}-\frac{\alpha_1\sigma^2}{2\mu(\lambda\bar{\mu}-\tau)}-\frac{\alpha_2\sigma^2}{2\mu(\lambda\bar{\mu}-2\tau)}\\
&\quad-\frac{\alpha_3\sigma^2}{2\mu(\lambda\bar{\mu}-3\tau)}\bigg)e^{-\lambda\bar{\mu}t}+\frac{\alpha_1\sigma^2}{2\mu(\lambda\bar{\mu}-\tau)}e^{-\tau t}+\frac{\alpha_2\sigma^2}{2\mu(\lambda\bar{\mu}-2\tau)}e^{-2\tau t}\\
&\quad+\frac{\alpha_3\sigma^2}{2\mu(\lambda\bar{\mu}-3\tau)}e^{-3\tau t}\\
M_1(t) &\approx 2\mu\Bigg(\frac{2\lambda\mu+\sigma^2}{\lambda\bar{\mu}}+\bigg(\frac{2\mu}{x}-\frac{2\lambda\mu+\sigma^2}{\lambda\bar{\mu}}-\frac{\alpha_1\sigma^2}{\lambda\bar{\mu}-\tau}-\frac{\alpha_2\sigma^2}{\lambda\bar{\mu}-2\tau}-\frac{\alpha_3\sigma^2}{\lambda\bar{\mu}-3\tau}\bigg)e^{-\lambda\bar{\mu}t}\\
&\quad+\frac{\alpha_1\sigma^2}{\lambda\bar{\mu}-\tau}e^{-\tau t}+\frac{\alpha_2\sigma^2}{\lambda\bar{\mu}-2\tau}e^{-2\tau t}+\frac{\alpha_3\sigma^2}{\lambda\bar{\mu}-3\tau}e^{-3\tau t}\Bigg)^{-1}
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

Kaip matome, ir šį kartą turime atsižvelgti į išimtinius atvejus bei rasti kitokias momentų išraiškas, kai

- $\tau=\lambda\bar{\mu}$:

$$
\begin{aligned}
M_1(t)\approx 2\mu\Bigg(&\frac{2\lambda\mu+\sigma^2}{\lambda\bar{\mu}}+\bigg(\frac{2\mu}{x}-\frac{2\lambda\mu+\sigma^2}{\lambda\bar{\mu}}+\alpha_1\sigma^2t-\frac{\alpha_2\sigma^2}{\lambda\bar{\mu}-2\tau}-\frac{\alpha_3\sigma^2}{\lambda\bar{\mu}-3\tau}\bigg)e^{-\lambda\bar{\mu}t}\\
&+\frac{\alpha_2\sigma^2}{\lambda\bar{\mu}-2\tau}e^{-2\tau t}+\frac{\alpha_3\sigma^2}{\lambda\bar{\mu}-3\tau}e^{-3\tau t}\Bigg)^{-1}
\end{aligned}
$$

- $2\tau=\lambda\bar{\mu}$:

$$
\begin{aligned}
M_1(t)\approx 2\mu\Bigg(&\frac{2\lambda\mu+\sigma^2}{\lambda\bar{\mu}}+\bigg(\frac{2\mu}{x}-\frac{2\lambda\mu+\sigma^2}{\lambda\bar{\mu}}-\frac{\alpha_1\sigma^2}{\lambda\bar{\mu}-\tau}+\alpha_2\sigma^2t-\frac{\alpha_3\sigma^2}{\lambda\bar{\mu}-3\tau}\bigg)e^{-\lambda\bar{\mu}t}\\
&+\frac{\alpha_1\sigma^2}{\lambda\bar{\mu}-\tau}e^{-\tau t}+\frac{\alpha_3\sigma^2}{\lambda\bar{\mu}-3\tau}e^{-3\tau t}\Bigg)^{-1}
\end{aligned}
$$

- $3\tau=\lambda\bar{\mu}$:

$$
\begin{aligned}
M_1(t)\approx 2\mu\Bigg(&\frac{2\lambda\mu+\sigma^2}{\lambda\bar{\mu}}+\bigg(\frac{2\mu}{x}-\frac{2\lambda\mu+\sigma^2}{\lambda\bar{\mu}}-\frac{\alpha_1\sigma^2}{\lambda\bar{\mu}-\tau}-\frac{\alpha_2\sigma^2}{\lambda\bar{\mu}-2\tau}+\alpha_3\sigma^2t\bigg)e^{-\lambda\bar{\mu}t}\\
&+\frac{\alpha_1\sigma^2}{\lambda\bar{\mu}-\tau}e^{-\tau t}+\frac{\alpha_2\sigma^2}{\lambda\bar{\mu}-2\tau}e^{-2\tau t}\Bigg)^{-1}
\end{aligned}
$$

3 Fourier dalinių sumų metodas II

Prieš tai aprašytame metode pavyko optimizuoti laisvąjį parametrą τ ir, kaip matysime vėliau, gauti pakankamai tikslias funkcijos $q(t)$ aproksimacijas. Tačiau aproksimuotos funkcijos q reikšmė pradiniame taške gaunama tik apytikriai lygi 1, nes q aproksimuojama tik kvadratinio vidurkio prasme. Šio trūkumo pavyksta išvengti funkciją q aproksimuojant specialiai parinkta eksponentinio tipo funkcijų šeima, tenkinančia šią pradinę sąlygą.

Visų pirma yra žinoma, kad funkcija $q(t)$, kurią aproksimuosime, tenkina tokias pradines sąlygas:

- $q(0) = 1$
- $\lim_{t\to\infty} q(t) = 1 + \frac{\sigma^2}{2\lambda\mu}$.

Pažymėkime $q_0(t) := 1 + a - ae^{-\tau t}$, $a = \frac{\sigma^2}{2\lambda\mu}$. Šios funkcijos reikšmės galiniuose intervalo $(0, +\infty)$ taškuose 0 ir $+\infty$ sutampa su funkcijos q reikšmėmis tuose taškuose.

Ieškosime funkcijos $h(t) := q(t) - q_0(t)$ aproksimacijos Fourier eilučių dalinių sumų metodu. Ši funkcija taškuose $\{0, +\infty\}$ lygi 0, todėl ją aproksimuosime kvadratinio vidurkio prasme eksponentinio tipo funkcijomis, kurios tuose taškuose taip pat lygios 0. Taip visų pirma gausime funkcijos q aproksimaciją, kurios reikšmės intervalo galuose automatiškai sutampa su pačios funkcijos q reikšmėmis. Antra, išvengsime būtinybės priskirti taškui 0 papildomą svorį, dėl kurio anksčiau ženkliai pasunkėjo skaičiavimai. Taigi funkciją h aproksimuosime erdvėje $L^2[0, \infty)$ su įprastine norma

$$\|f\| = \left(\int_0^\infty f^2(s) ds \right)^{1/2}$$

ir skaliarine sandauga

$$\langle f, g \rangle = \int_0^\infty f(s) g(s) ds.$$

Funkcijos $h(t)$ aproksimavimui pasirinkome gana paprastas funkcijas

$$f_1(t) = e^{-\tau t} - e^{-2\tau t} \quad \text{ir} \quad f_2(t) = e^{-2\tau t} - e^{-3\tau t},$$

kurios lygios 0 intervalo $(0, +\infty)$ galuose. Šią porą ortogonalizuosime, gaudami dviejų ortogonalių funkcijų porą $\{g_1, g_2\}$, po to funkciją h aproksimuosime tos ortogonalios sistemos Fourier eilutės daline suma ir galiausiai grįšime prie funkcijos h aproksimacijos pradinių funkcijų $\{f_1, f_2\}$ tiesiniu dariniu.

Kaip ir anksčiau, porą $\{f_1, f_2\}$ ortogonalizuojame pagal Schmidtą. Pažymėkime

$$g_1 := f_1 = e^{-\tau t} - e^{-2\tau t};$$
$$g_2 := f_2 + a_{21} f_1.$$

Pasinaudodami tuo, kad $\langle g_1, g_2 \rangle = 0$, randame

$$a_{21} := -\frac{\langle g_1, f_2 \rangle}{\langle g_1, g_1 \rangle} = -\frac{2}{5}.$$

- $\langle g_1, f_2 \rangle = \int_0^\infty \left(e^{-\tau t} - e^{-2\tau t}\right)\left(e^{-2\tau t} - e^{-3\tau t}\right) dt = \int_0^\infty \left(e^{-3\tau t} - 2e^{-4\tau t} + e^{-5\tau t}\right) dt$ $= \frac{1}{3\tau} - \frac{1}{2\tau} + \frac{1}{5\tau} = \frac{1}{30\tau}$;
- $\langle g_1, g_1 \rangle = \|g_1\|^2 = \int_0^\infty \left(e^{-\tau t} - e^{-2\tau t}\right)^2 dt = \int_0^\infty \left(e^{-2\tau t} - 2e^{-3\tau t} + e^{-4\tau t}\right) dt$ $= \frac{1}{2\tau} - \frac{2}{3\tau} + \frac{1}{4\tau} = \frac{1}{12\tau}$.

Iš čia

$$g_2 := f_2 + a_{21} f_1 = e^{-2\tau t} - e^{-3\tau t} - \frac{2}{5} e^{-\tau t} + \frac{2}{5} e^{-2\tau t} = \frac{7}{5} e^{-2\tau t} - e^{-3\tau t} - \frac{2}{5} e^{-\tau t}.$$

Randame funkcijos g_2 normą erdvėje $L^2[0,\infty)$:

$$\begin{aligned}
\|g_2\|^2 &= \int_0^\infty \left(\frac{7}{5} e^{-2\tau t} - e^{-3\tau t} - \frac{2}{5} e^{-\tau t} \right)^2 dt \\
&= \int_0^\infty \left(\frac{49}{25} e^{-4\tau t} + \frac{4}{25} e^{-2\tau t} + e^{-6\tau t} - \frac{28}{25} e^{-3\tau t} - \frac{14}{5} e^{-5\tau t} + \frac{4}{5} e^{-4\tau t} \right) dt \\
&= \frac{49}{100\tau} + \frac{4}{50\tau} + \frac{1}{6\tau} - \frac{28}{75\tau} - \frac{14}{25\tau} + \frac{4}{20\tau} = \frac{1}{300\tau}.
\end{aligned}$$

Galiausiai, pirmieji funkcijos $h(t)$ Fourier eilutės nariai randami iš lygybės

$$\begin{aligned}
h(t) &\approx \frac{\langle h, g_1 \rangle}{\|g_1\|^2} g_1 + \frac{\langle h, g_2 \rangle}{\|g_2\|^2} g_2 \\
&= \left(12\tau \int_0^\infty h(t) g_1(t) dt \right) g_1(t) + \left(300\tau \int_0^\infty h(t) g_2(t) dt \right) g_2(t) \\
&= \left(12\tau \int_0^\infty h(t) g_1(t) dt - 120\tau \int_0^\infty h(t) g_2(t) dt \right) e^{-\tau t} \\
&\quad + \left(-12\tau \int_0^\infty h(t) g_1(t) dt + 420\tau \int_0^\infty h(t) g_2(t) dt \right) e^{-2\tau t} \\
&\quad - \left(300\tau \int_0^\infty h(t) g_2(t) dt \right) e^{-3\tau t} =: \alpha_1 e^{-\tau t} + \alpha_2 e^{-2\tau t} + \alpha_3 e^{-3\tau t}.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Šiuo atveju funkcija $h(t)$ taip pat priklauso nuo parametro τ. Norėdami jį optimizuoti, rasime paklaidą tarp skaitiniais metodais gautos funkcijos $\tilde{h}(t)$ bei sukontruotos funkcijos $h(t)$ aproksimacijos:

$$\begin{aligned}
\epsilon(\tau) &= \int_0^\infty \left(\tilde{h}(t) - h(t) \right)^2 dt = \left\| \tilde{h} - \sum_{i=1}^{2} \frac{\langle h, g_i \rangle}{\|g_i\|^2} g_i \right\|^2 \\
&= \left\langle \tilde{h} - \sum_{i=1}^{2} \frac{\langle h, g_i \rangle}{\|g_i\|^2} g_i, \tilde{h} - \sum_{i=1}^{2} \frac{\langle h, g_i \rangle}{\|g_i\|^2} g_i \right\rangle \\
&= \|\tilde{h}\|^2 - 2 \sum_{i=1}^{2} \frac{\langle h, g_i \rangle^2}{\|g_i\|^2} + \sum_{i=1}^{2} \frac{\langle h, g_i \rangle^2}{\|g_i\|^4} \|g_i\|^2 \\
&= \|\tilde{h}\|^2 - \sum_{i=1}^{2} \frac{\langle h, g_i \rangle^2}{\|g_i\|^2} \\
&= \int_0^\infty \left(\tilde{q}(t) - q_0(t) \right)^2 dt - 12\tau \left(\int_0^\infty h(t) g_1(t) dt \right)^2 - 300\tau \left(\int_0^\infty h(t) g_2(t) dt \right)^2.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Minimizuodami funkciją $\epsilon(\tau)$, randame optimalų parametrą τ, kurį toliau naudojame funkcijos $h(t)$ aproksimacijos reikšmėms gauti.

Turėdami funkcijos $h(t)$ aproksimacijos reikšmes ir pasinaudoję lygybe $h(t) = q(t) - q_0(t)$, gauname funkcijos $q(t)$ aproksimaciją pavidalo

$$q(t) \approx 1 + \frac{\sigma^2}{2\lambda\mu} + \left(\alpha_1 - \frac{\sigma^2}{2\lambda\mu} \right) e^{-\tau t} + \alpha_2 e^{-2\tau t} + \alpha_3 e^{-3\tau t}.$$

Paprastumo dėlei šiame darbe šiuo būdu gautą funkcijos $q(t)$ aproksimaciją vadinsime tiesiog trečio tipo aproksimacija.

Toliau šiam $q(t)$ aproksimacijos tipui rasime pirmo momento išraiškas bendruoju ir išimtiniais atvejais.

Pirmo momento išraiška, gaunama remiantis lygtimi (1.5), bendruoju atveju atrodo taip:

$$\begin{aligned}
M_1^{-1}(t) &\approx e^{-\lambda\bar{\mu}t}\left(\frac{1}{x}+\lambda\int_0^t\left[1+\frac{\sigma^2}{2\lambda\mu}+\left(\alpha_1-\frac{\sigma^2}{2\lambda\mu}\right)e^{-\tau s}+\alpha_2 e^{-2\tau s}+\alpha_3 e^{-3\tau s}\right]e^{\lambda\bar{\mu}s}ds\right)\\
&= e^{-\lambda\bar{\mu}t}\left[\frac{1}{x}+\lambda\int_0^t\left(1+\frac{\sigma^2}{2\lambda\mu}\right)e^{\lambda\bar{\mu}s}ds+\lambda\int_0^t\left(\alpha_1-\frac{\sigma^2}{2\lambda\mu}\right)e^{\lambda\bar{\mu}s-\tau s}ds\right.\\
&\qquad\left.+\lambda\int_0^t\alpha_2 e^{\lambda\bar{\mu}s-2\tau s}ds+\lambda\int_0^t\alpha_3 e^{\lambda\bar{\mu}s-3\tau s}ds\right]\\
&= e^{-\lambda\bar{\mu}t}\left[\frac{1}{x}+\frac{2\lambda\mu+\sigma^2}{2\lambda\mu\bar{\mu}}\,e^{\lambda\bar{\mu}s}\Big|_0^t+\frac{2\alpha_1\lambda\mu-\sigma^2}{2\mu(\lambda\bar{\mu}-\tau)}\,e^{\lambda\bar{\mu}s-\tau s}\Big|_0^t\right.\\
&\qquad\left.+\frac{\alpha_2\lambda}{\lambda\bar{\mu}-2\tau}\,e^{\lambda\bar{\mu}s-2\tau s}\Big|_0^t+\frac{\alpha_3\lambda}{\lambda\bar{\mu}-3\tau}\,e^{\lambda\bar{\mu}s-3\tau s}\Big|_0^t\right]\\
&= e^{-\lambda\bar{\mu}t}\left[\frac{1}{x}+\frac{2\lambda\mu+\sigma^2}{2\lambda\mu\bar{\mu}}\left(e^{\lambda\bar{\mu}t}-1\right)+\frac{2\alpha_1\lambda\mu-\sigma^2}{2\mu(\lambda\bar{\mu}-\tau)}\left(e^{\lambda\bar{\mu}t-\tau t}-1\right)\right. \qquad (3.3)\\
&\qquad\left.+\frac{\alpha_2\lambda}{\lambda\bar{\mu}-2\tau}\left(e^{\lambda\bar{\mu}t-2\tau t}-1\right)+\frac{\alpha_3\lambda}{\lambda\bar{\mu}-3\tau}\left(e^{\lambda\bar{\mu}t-3\tau t}-1\right)\right]\\
&= \frac{2\lambda\mu+\sigma^2}{2\lambda\mu\bar{\mu}}+\left(\frac{1}{x}-\frac{2\lambda\mu+\sigma^2}{2\lambda\mu\bar{\mu}}-\frac{2\alpha_1\lambda\mu-\sigma^2}{2\mu(\lambda\bar{\mu}-\tau)}-\frac{\alpha_2\lambda}{\lambda\bar{\mu}-2\tau}-\frac{\alpha_3\lambda}{\lambda\bar{\mu}-3\tau}\right)e^{-\lambda\bar{\mu}t}\\
&\qquad+\frac{2\alpha_1\lambda\mu-\sigma^2}{2\mu(\lambda\bar{\mu}-\tau)}e^{-\tau t}+\frac{\alpha_2\lambda}{\lambda\bar{\mu}-2\tau}e^{-2\tau t}+\frac{\alpha_3\lambda}{\lambda\bar{\mu}-3\tau}e^{-3\tau t};\\
M_1(t) &\approx \left(\frac{2\lambda\mu+\sigma^2}{2\lambda\mu\bar{\mu}}+\left(\frac{1}{x}-\frac{2\lambda\mu+\sigma^2}{2\lambda\mu\bar{\mu}}-\frac{2\alpha_1\lambda\mu-\sigma^2}{2\mu(\lambda\bar{\mu}-\tau)}-\frac{\alpha_2\lambda}{\lambda\bar{\mu}-2\tau}-\frac{\alpha_3\lambda}{\lambda\bar{\mu}-3\tau}\right)e^{-\lambda\bar{\mu}t}\right.\\
&\qquad\left.+\frac{2\alpha_1\lambda\mu-\sigma^2}{2\mu(\lambda\bar{\mu}-\tau)}e^{-\tau t}+\frac{\alpha_2\lambda}{\lambda\bar{\mu}-2\tau}e^{-2\tau t}+\frac{\alpha_3\lambda}{\lambda\bar{\mu}-3\tau}e^{-3\tau t}\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

Iš (3.3) lygties matome, kad pirmas momentas neapibrėžtas, kai $\tau=\lambda\bar{\mu}$, $2\tau=\lambda\bar{\mu}$ arba $3\tau=\lambda\bar{\mu}$. Toliau išvesime pirmojo momento išraiškas šiais išimtiniais atvejais.

- $\tau = \lambda\bar{\mu}$:

$$
\begin{aligned}
M_1^{-1}(t) &\approx e^{-\lambda\bar{\mu}t}\left(\frac{1}{x}+\lambda\int_0^t\left[1+\frac{\sigma^2}{2\lambda\mu}+\left(\alpha_1-\frac{\sigma^2}{2\lambda\mu}\right)e^{-\lambda\bar{\mu}s}+\alpha_2e^{-2\tau s}+\alpha_3e^{-3\tau s}\right]e^{\lambda\bar{\mu}s}ds\right)\\
&= e^{-\lambda\bar{\mu}t}\left[\frac{1}{x}+\lambda\int_0^t\left(1+\frac{\sigma^2}{2\lambda\mu}\right)e^{\lambda\bar{\mu}s}ds+\lambda\int_0^t\left(\alpha_1-\frac{\sigma^2}{2\lambda\mu}\right)ds\right.\\
&\qquad\left.+\lambda\int_0^t\alpha_2e^{\lambda\bar{\mu}s-2\tau s}ds+\lambda\int_0^t\alpha_3e^{\lambda\bar{\mu}s-3\tau s}ds\right]\\
&= e^{-\lambda\bar{\mu}t}\left[\frac{1}{x}+\frac{2\lambda\mu+\sigma^2}{2\lambda\mu\bar{\mu}}\;e^{\lambda\bar{\mu}s}\Big|_0^t+\frac{2\alpha_1\lambda\mu-\sigma^2}{2\mu}s\Big|_0^t\right.\\
&\qquad\left.+\frac{\alpha_2\lambda}{\lambda\bar{\mu}-2\tau}\;e^{\lambda\bar{\mu}s-2\tau s}\Big|_0^t+\frac{\alpha_3\lambda}{\lambda\bar{\mu}-3\tau}\;e^{\lambda\bar{\mu}s-3\tau s}\Big|_0^t\right]\\
&= e^{-\lambda\bar{\mu}t}\left[\frac{1}{x}+\frac{2\lambda\mu+\sigma^2}{2\lambda\mu\bar{\mu}}\left(e^{\lambda\bar{\mu}t}-1\right)+\frac{2\alpha_1\lambda\mu-\sigma^2}{2\mu}t\right.\\
&\qquad\left.+\frac{\alpha_2\lambda}{\lambda\bar{\mu}-2\tau}\left(e^{\lambda\bar{\mu}t-2\tau t}-1\right)+\frac{\alpha_3\lambda}{\lambda\bar{\mu}-3\tau}\left(e^{\lambda\bar{\mu}t-3\tau t}-1\right)\right]\\
&= \frac{2\lambda\mu+\sigma^2}{2\lambda\mu\bar{\mu}}+\left(\frac{1}{x}-\frac{2\lambda\mu+\sigma^2}{2\lambda\mu\bar{\mu}}+\frac{2\alpha_1\lambda\mu-\sigma^2}{2\mu}t-\frac{\alpha_2\lambda}{\lambda\bar{\mu}-2\tau}-\frac{\alpha_3\lambda}{\lambda\bar{\mu}-3\tau}\right)e^{-\lambda\bar{\mu}t}\\
&\qquad+\frac{\alpha_2\lambda}{\lambda\bar{\mu}-2\tau}e^{-2\tau t}+\frac{\alpha_3\lambda}{\lambda\bar{\mu}-3\tau}e^{-3\tau t};\\
M_1(t) &\approx \left(\frac{2\lambda\mu+\sigma^2}{2\lambda\mu\bar{\mu}}+\left(\frac{1}{x}-\frac{2\lambda\mu+\sigma^2}{2\lambda\mu\bar{\mu}}+\frac{2\alpha_1\lambda\mu-\sigma^2}{2\mu}t-\frac{\alpha_2\lambda}{\lambda\bar{\mu}-2\tau}-\frac{\alpha_3\lambda}{\lambda\bar{\mu}-3\tau}\right)e^{-\lambda\bar{\mu}t}\right.\\
&\qquad\left.+\frac{\alpha_2\lambda}{\lambda\bar{\mu}-2\tau}e^{-2\tau t}+\frac{\alpha_3\lambda}{\lambda\bar{\mu}-3\tau}e^{-3\tau t}\right)^{-1};
\end{aligned}
$$

- $2\tau = \lambda\bar{\mu}$:

$$
\begin{aligned}
M_1(t) &\approx \left(\frac{2\lambda\mu+\sigma^2}{2\lambda\mu\bar{\mu}}+\left(\frac{1}{x}-\frac{2\lambda\mu+\sigma^2}{2\lambda\mu\bar{\mu}}-\frac{2\alpha_1\lambda\mu-\sigma^2}{2\mu(\lambda\bar{\mu}-\tau)}+\alpha_2\lambda t-\frac{\alpha_3\lambda}{\lambda\bar{\mu}-3\tau}\right)e^{-\lambda\bar{\mu}t}\right.\\
&\qquad\left.+\frac{2\alpha_1\lambda\mu-\sigma^2}{2\mu(\lambda\bar{\mu}-\tau)}e^{-\tau t}+\frac{\alpha_3\lambda}{\lambda\bar{\mu}-3\tau}e^{-3\tau t}\right)^{-1};
\end{aligned}
$$

- $3\tau = \lambda\bar{\mu}$:

$$
\begin{aligned}
M_1(t) &\approx \left(\frac{2\lambda\mu+\sigma^2}{2\lambda\mu\bar{\mu}}+\left(\frac{1}{x}-\frac{2\lambda\mu+\sigma^2}{2\lambda\mu\bar{\mu}}-\frac{2\alpha_1\lambda\mu-\sigma^2}{2\mu(\lambda\bar{\mu}-\tau)}-\frac{\alpha_2\lambda}{\lambda\bar{\mu}-2\tau}+\alpha_3\lambda t\right)e^{-\lambda\bar{\mu}t}\right.\\
&\qquad\left.+\frac{2\alpha_1\lambda\mu-\sigma^2}{2\mu(\lambda\bar{\mu}-\tau)}e^{-\tau t}+\frac{\alpha_2\lambda}{\lambda\bar{\mu}-2\tau}e^{-2\tau t}\right)^{-1}.
\end{aligned}
$$

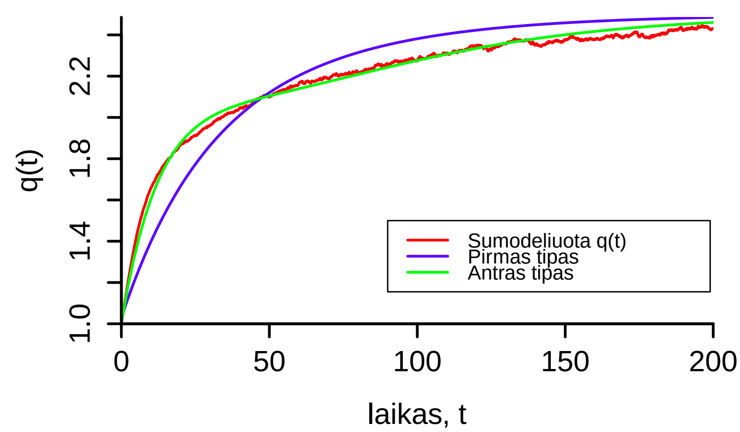
4 Rezultatai

Šiame skyriuje patikrinsime Fourier eilutės dalinių sumų metodais gautų aproksimacijų tikslumą. Aproksimacijas lyginsime su antros eilės *split-step* skaitiniu metodu Verhulsto lygčiai (žr.[5]) gautomis reikšmėmis. Bandymų skaičius N, naudotas *split-step* aproksimacijoje, lygus 100000, o žingsnio dydis $h = 0.1$. Nagrinėsime tris parametrų rinkinius $(\lambda, \mu, \sigma, x)$, po vieną kiekvienam stacionaraus tankio tipui (toliau trumpumo dėlei vadinsime tiesiog tankio tipais). Norėdami, kad pirmo ir antro momentų grafikai prasidėtų tame pačiame taške, vietoj antrojo momento grafikuose vaizduosime $\tilde{M}_2(t) = \sqrt{M_2(t)}$ reikšmes. Toliau $\tilde{M}_2(t)$ grafikus trumpumo dėlei vadinsime antro momento grafikais. Modeliavimai atlikti naudojantis programa R, o programos kodai pateikti priede.

4.1 Fourier dalinių sumų metodas I

Pradėsime nuo pirmojo Fourier eilutės dalinių sumų metodo. Šiuo atveju, pirmojo ir antrojo tipo aproksimacijas lyginsime su skaitiniais metodais gautomis reikšmėmis. Kiekvienam tankio tipui vaizduosime funkcijų $q(t)$, $\epsilon(\tau)$, $M_1(t)$ ir $\sqrt{M_2(t)}$ reikšmes.

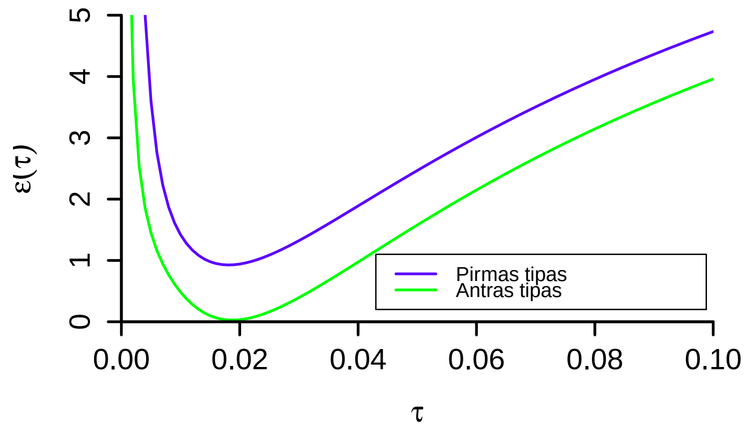
4.1.1 Pirmas tankio tipas



2 pav.: $x_0 = 0.03, \lambda = 1.2, \sigma = 0.3, \mu = 0.025$

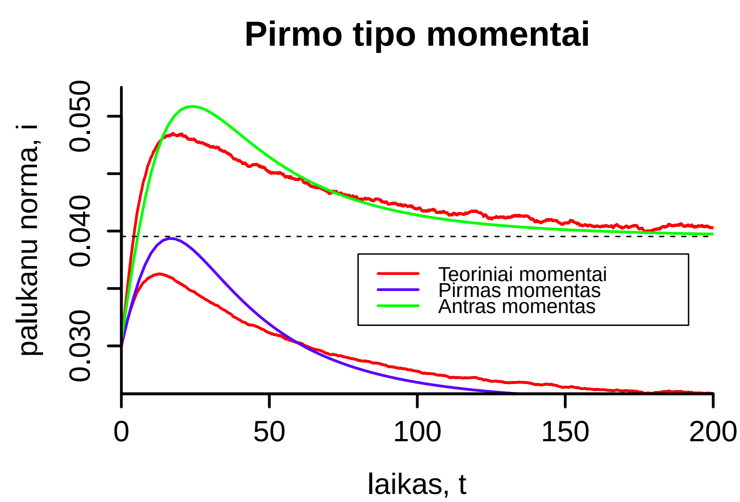
2 paveiksle matome funkcijos $q(t)$ pirmo ir antro tipo aproksimacijas, kurios modeliuotos su parametrais $x_0 = 0.03$, $\lambda = 1.2$, $\sigma = 0.3$, $\mu = 0.025$. Kaip matome iš grafiko, pirmo tipo aproksimacija iki tam tikro laiko momento ne visai tiksliai aproksimuoja funkciją $q(t)$. Iki laiko momento $T = 50$ pirmo tipo kreivė auga lėčiau, tačiau nuo laiko momento $T = 50$ auga greičiau nei teorinė funkcijos $q(t)$ kreivė. Tuo tarpu antro tipo aproksimacija beveik idealiai sutampa su modeliuojama trajektorija. Modeliavimui pasirinktas ilgesnis laiko intervalas $T = 200$ tam, kad įsitikintumėme, jog galiausiai visos kreivės susilieja į vieną pluoštą. Nežymūs skirtumai nuo sumodeliuotos kreivės gali būti stochastinės prigimties ir modeliuojant kitą kartą skirtumai gali atsirasti kitais laiko momentais.

Vienas pagrindinių darbo tikslų buvo optimizuoti Fourier eilučių dalinių sumų metode naudojamą ir bandymo keliu parenkamą parametrą τ. Tam ieškojome tokio parametro τ, su kuriuo paklaida $\epsilon(\tau)$ būtų mažiausia. 3 paveiksle matome funkcijų $\epsilon(\tau)$ grafikus, gautus modeliuojant pirmo ir antro tipo aproksimacijas su parametrų rinkiniu $x_0 = 0.03$, $\lambda = 1.2$, $\sigma = 0.3$, $\mu = 0.025$. Šiuo atveju pirmo tipo aproksimacijos optimalus parametras $\tau = 0.0191$, o antro aproksimacijos tipo $\tau = 0.0197$. Taip pat galime pastebėti, kad pirmo ir antro tipo aproksimacijų paklaidos optimaliame taške gerokai skiriasi. Pirmo tipo aproksimacijos paklaida, esant optimaliam τ, siekia 0.92, o antro tipo atveju nežymiai viršija nulį ir yra lygi 0.026. Tai iš dalies paaiškina gautus skirtumus tarp pirmo ir antro tipo aproksimacijų.

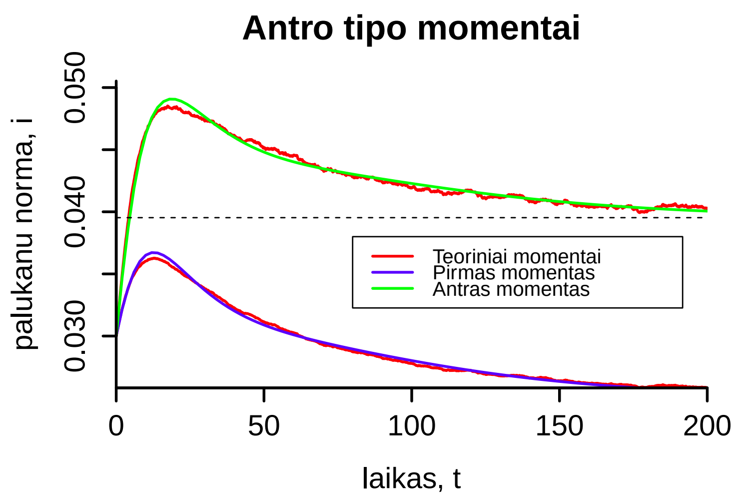


3 pav.: $x_0 = 0.03, \lambda = 1.2, \sigma = 0.3, \mu = 0.025$

4 paveiksle pavaizduoti pirmo aproksimacijos tipo momentai. Šiuo atveju tiek pirmas, tiek antras momentai įgyja lokalius maksimumus. Tačiau, kaip ir buvo galima tikėtis iš stebėtų $q(t)$ reikšmių, būtent šiuos maksimumus pirmo tipo aproksimacija aproksimuoja gana netiksliai. 5 paveiksle pavaizduoti antro tipo aproksimacijos momentai nuo pat pradžių daug tiksliau aproksimuoja ieškomas trajektorijas. Stebimi nedideli skirtumai gali būti tik stochastinės prigimties.



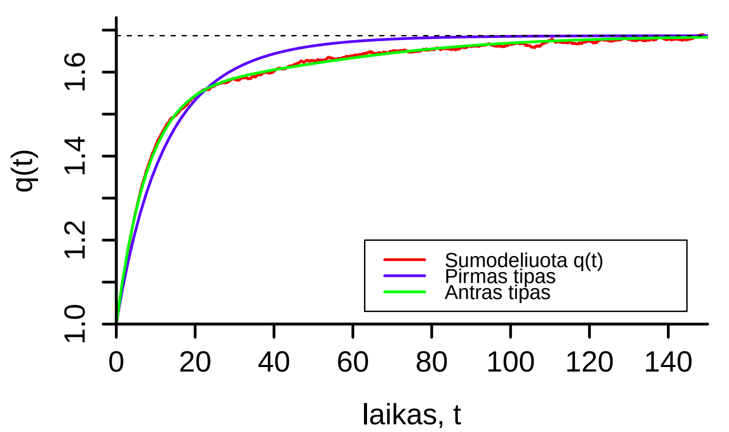
4 pav.: $x_0 = 0.03, \lambda = 1.2, \sigma = 0.3, \mu = 0.025$



5 pav.: $x_0 = 0.03, \lambda = 1.2, \sigma = 0.3, \mu = 0.025$

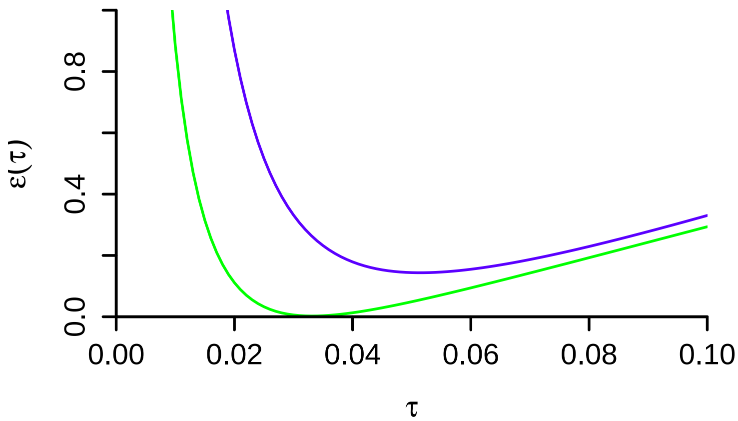
4.1.2 Antras tankio tipas

Šiame skyrelyje pateiksime grafikus, modeliuotus su antrą stacionaraus tankio tipą atitinkančiais pradiniais parametrais $x_0 = 0.03$, $\lambda = 1.3$, $\sigma = 0.25$, $\mu = 0.035$. Iš 6 paveiksle pavaizduoto grafiko matome, kad abi funkcijos q aproksimacijos elgiasi panašiai kaip 2 paveiksle. Pirmojo tipo aproksimacija iki laiko momento $T = 20$ auga šiek tiek lėčiau, o nuo $T = 20$ šiek tiek greičiau nei sumodeliuota kreivė. Nepaisant to, kreivė ilgainiui įsilieja į bendrą aproksimacijų pluoštą. Antro tipo aproksimacija elgiasi taip pat gerai, kaip ir pirmo tankio tipo atveju.



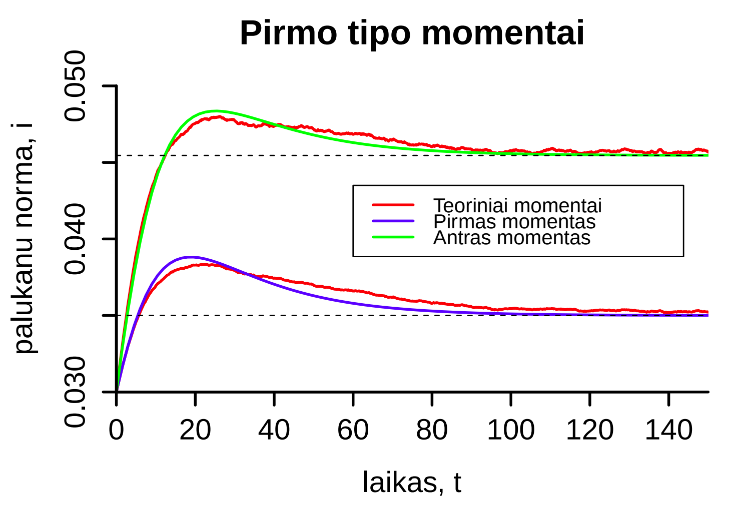
6 pav.: $x_0 = 0.03, \lambda = 1.3, \sigma = 0.25, \mu = 0.035$

7 paveiksle pavaizduoti minimizuojamos paklaidos $\epsilon(\tau)$ grafikai pirmo ir antro tipo aproksimacijoms. Šiuo atveju, pirmo tipo aproksimacijos optimalus parametras τ lygus 0.0515, su kuriuo $\epsilon(\tau) = 0.1811$. Tuo tarpu antrojo tipo aproksimacijos atveju gautas optimalus τ lygus 0.0331, su kuriuo paklaida yra labai artima nuliui ir siekia vos 0.0024.

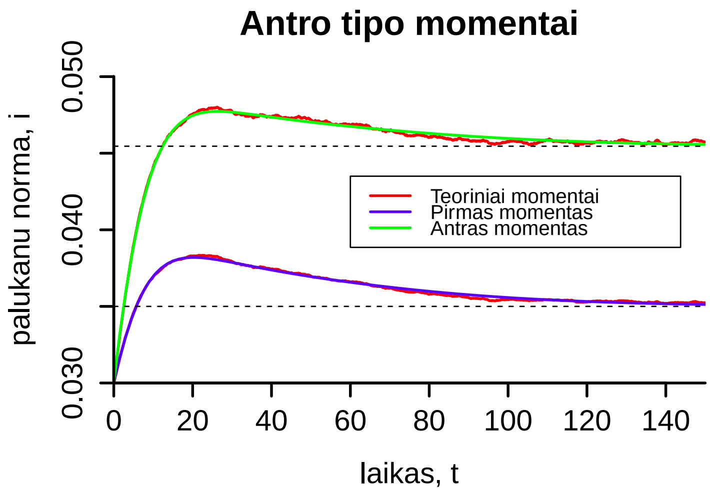


7 pav.: $x_0 = 0.03, \lambda = 1.3, \sigma = 0.25, \mu = 0.035$

Toliau pateikiami abiejų aproksimacijų tipų pirmo ir antro momentų grafikai. Kaip matėme iš 6 grafiko, pirmo tipo aproksimacija ne taip tiksliai aproksimuoja skaitiniais metodais gautas funkcijos q reikšmes. Šie netikslumai taip pat atsispindi ir momentų grafike (žr. 8 pav.). Tuo tarpu antro tipo aproksimacija (žr. 9 pav.) ir šiuo atveju momentus aproksimuoja gana tiksliai.



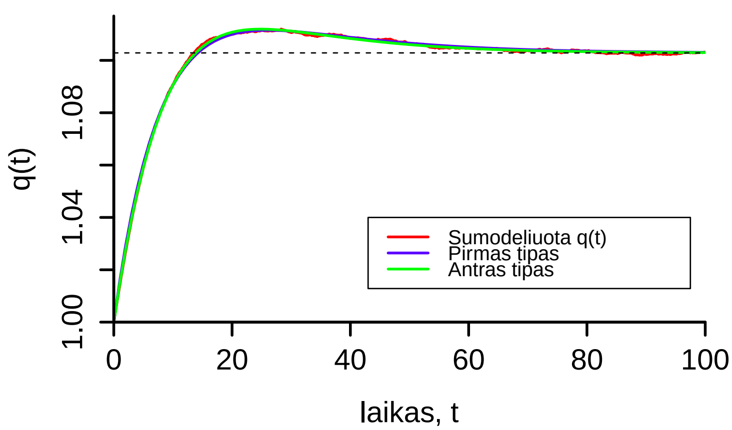
8 pav.: $x_0 = 0.03, \lambda = 1.3, \sigma = 0.25, \mu = 0.035$



9 pav.: $x_0 = 0.03, \lambda = 1.3, \sigma = 0.25, \mu = 0.035$

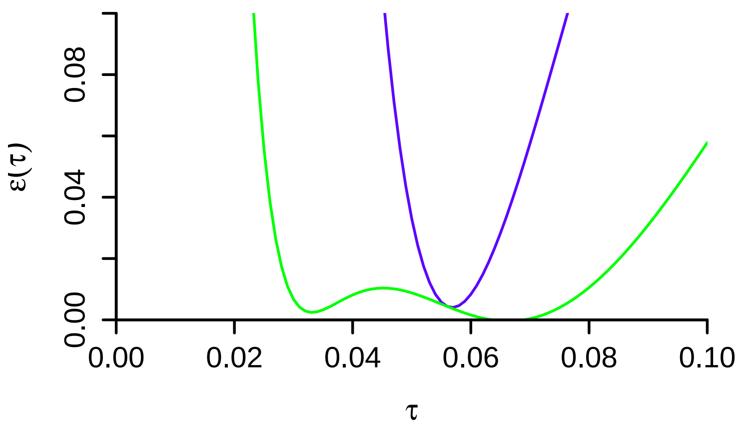
4.1.3 Trečias tankio tipas

Galiausiai pavaizduosime trečio tankio tipo grafikus modeliuotus su parametrais $x_0 = 0.03$, $\lambda = 1.4$, $\sigma = 0.12$, $\mu = 0.05$, kurie atitinką trečią tankio tipą. Iš 10 grafiko matome, kad abiejų tipų funkcijos q aproksimacijų reikšmės beveik sutampa su skaitiniais metodais gautomis reikšmėmis.



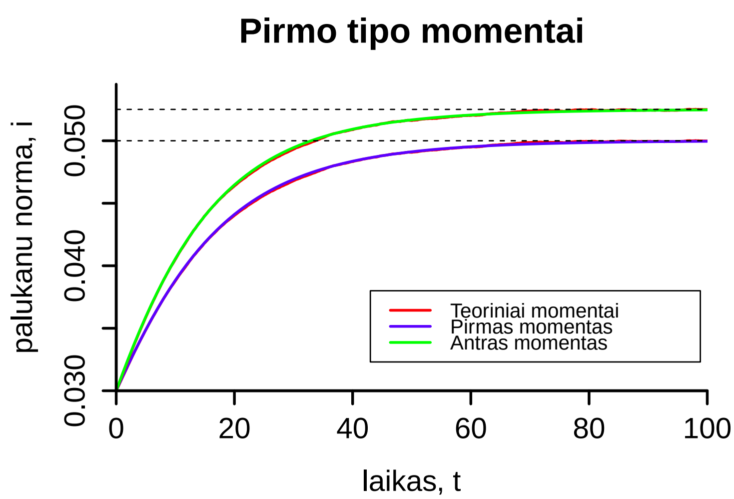
10 pav.: $x_0 = 0.03, \lambda = 1.4, \sigma = 0.12, \mu = 0.05$

Šiuo atveju pirmo tipo aproksimacijos optimalus parametras τ lygus 0.058, o antro – 0.066. Paklaidos, esant optimalioms τ reikšmėms, abiem atvejais yra labai mažos ir vos siekia 0.0005 (žr. 11 pav.).

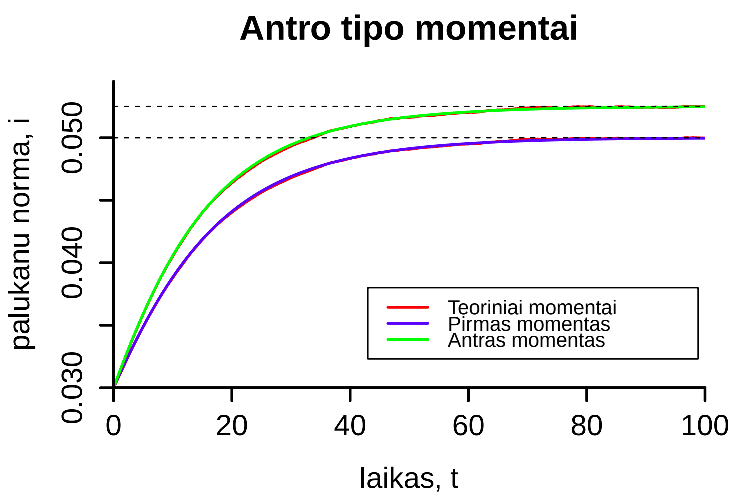


11 pav.: $x_0 = 0.03, \lambda = 1.4, \sigma = 0.12, \mu = 0.05$

Toliau 12 ir 13 paveiksluose pateikiami pirmo ir antro momentų grafikai. Šiuo atveju abiejų tipų aproksimacijos labai artimos teorinėms reikšmėms.

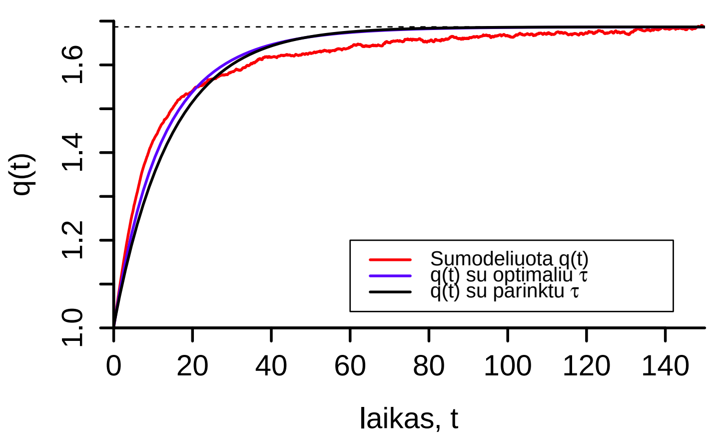


12 pav.: $x_0 = 0.03, \lambda = 1.4, \sigma = 0.12, \mu = 0.05$

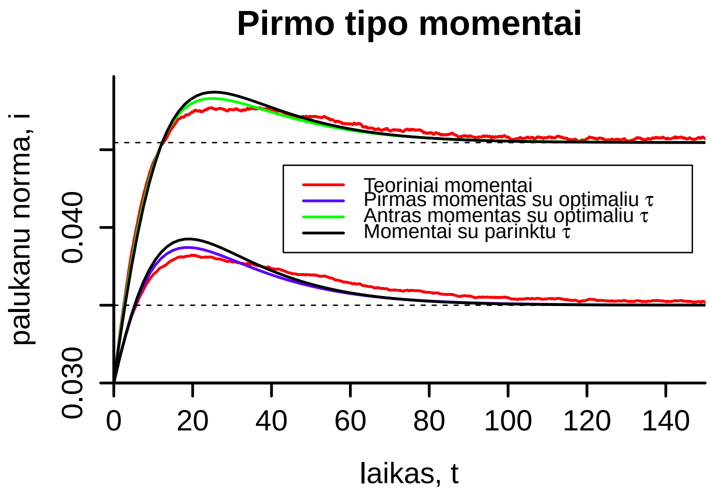


13 pav.: $x_0 = 0.03, \lambda = 1.4, \sigma = 0.12, \mu = 0.05$

Pabaigoje norime atkreipti dėmesį į skirtumą tarp rezultatų gautų šiame ir Baravyko darbe. Priminsime, kad Baravykas savo darbe parametrą τ kiekvienam tankio tipui parinko bandymų keliu. Mes savo darbe optimizuodami parametrą τ, ne tik atsikratėme rankinio parametro parinkimo, bet ir pagerinome aproksimacijos tikslumą. Pavyzdžiui, palyginkime rezultatus gautus su antro tankio tipo atveją atitinkančiais parametrais $x_0 = 0.03$, $\lambda = 1.3$, $\sigma = 0.25$, $\mu = 0.035$. Esant šiai situacijai, Baravyko darbe pasirinktas $\tau = \lambda\mu/1.3 = 0.035$. Toks pat τ naudojamas tiek pirmo, tiek antro tipo aproksimacijoms. Šiame darbe, optimizavus parametro τ radimą, gavome, kad pirmo aproksimacijos tipo atveju optimalus $\tau = 0.0515$, o antro tipo atveju $\tau = 0.0331$. Jau pastėbėjome, kad antro tipo aproksimacija visais atvejais gana gerai aproksimuoja norimas funkcijas, todėl nagrinėsime tik pirmo tipo aproksimacijų skirtumus. 14 paveiksle pavaizduotos funkcijos $q(t)$ pirmo tipo aproksimacijos gautos su optimaliu ir analogiškai kaip Baravyko darbe parinktu parametru τ. Kaip matome, mūsų gauta aproksimacija, nors ir nedaug, bet yra arčiau prie skaitiniais metodais gautos funkcijos. Taip pat 15 paveiksle pavaizduoti momentų grafikai dar kartą patvirtina, kad šiame darbe gauta aproksimacija yra tikslesnė.



14 pav.: $x_0 = 0.03, \lambda = 1.3, \sigma = 0.25, \mu = 0.035$. Juoda spalva – q su Baravyko [1] parinktu $\tau = 0.035$, mėlyna spalva – su optimaliu $\tau = 0.0515$.



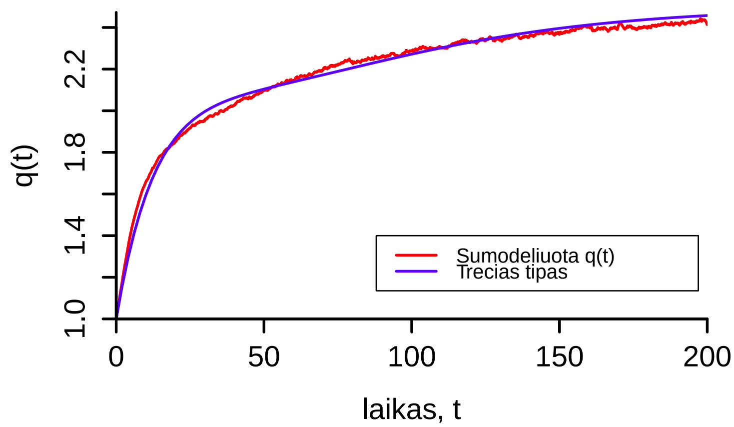
15 pav.: $x_0 = 0.03, \lambda = 1.3, \sigma = 0.25, \mu = 0.035$

4.2 Fourier dalinių sumų metodas II

Šioje dalyje apžvelgsime rezultatus, gautus naudojant Fourier dalinių sumų metodą II (plačiau 3 skyrius). Gautą trečio tipo aproksimaciją lyginsime su antros eilės *split-step* skaitiniu metodu Verhulsto lygčiai gautomis reikšmėmis. Analogiškai nagrinėsime tris parametrų rinkinius (λ, μ, σ, x), po vieną kiekvienam stacionaraus tankio tipui. Kiekvienam tankio tipui vaizduosime funkcijų $q(t)$, $\epsilon(\tau)$, $M_1(t)$ ir $\sqrt{M_2(t)}$ reikšmes.

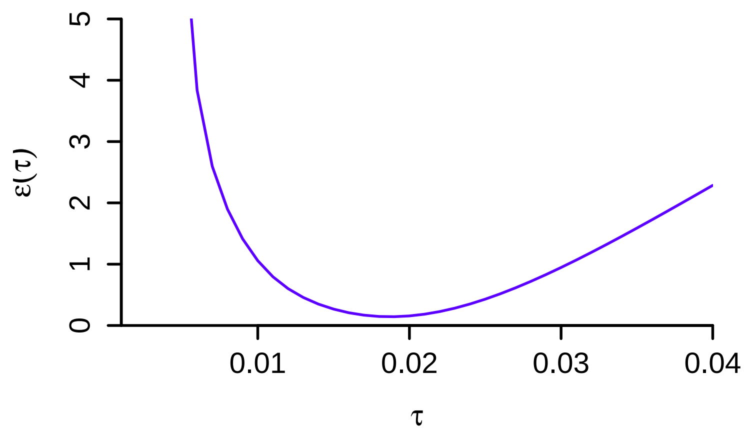
4.2.1 Pirmas tankio tipas

16 paveiksle pavaizduota funkcijos $q(t)$ trečio tipo aproksimacija, modeliuota su parametrais $x_0 = 0.03$, $\lambda = 1.2$, $\sigma = 0.3$, $\mu = 0.025$. Iš grafiko matyti, kad didelių skirtumų tarp aproksimacijos ir skaitiniais metodais gautų reikšmių nėra. Stebimi nežymūs nukrypimai gali būti tik stochastinės prigimties.



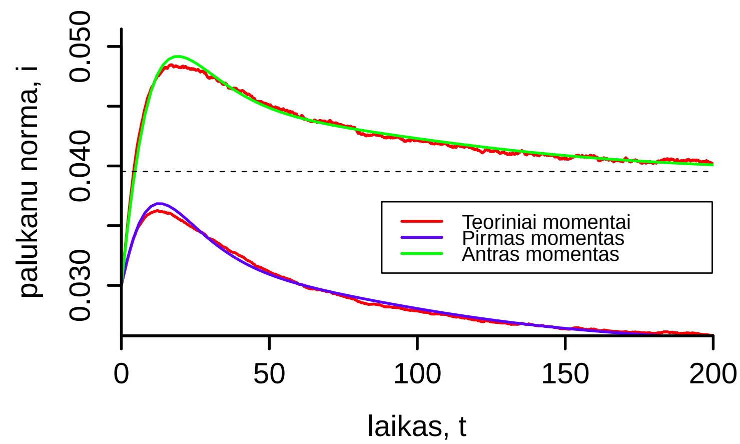
16 pav.: $x_0 = 0.03, \lambda = 1.2, \sigma = 0.3, \mu = 0.025$

Konstruodami trečio tipo $q(t)$ aproksimaciją, taip pat ieškojome optimalaus laisvojo parametro τ. Iš 16 grafiko matyti, kad $\epsilon(\tau)$ įgyja minimumą ir yra minimali, kai $\tau = 0.01924$. Gauta paklaida optimaliame taške yra labai maža ir lygi 0.142.



17 pav.: $x_0 = 0.03, \lambda = 1.2, \sigma = 0.3, \mu = 0.025$

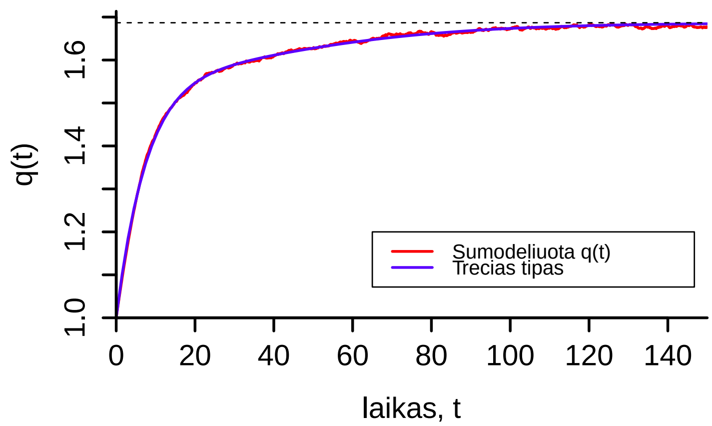
18 grafike pavaizduoti pirmo bei antro momentų grafikai. Matome, kad gautos momentų išraiškos yra gana tikslios ir didelių nukrypimų nuo skaitiniais metodais gautų reikšmių nėra.



18 pav.: $x_0 = 0.03, \lambda = 1.2, \sigma = 0.3, \mu = 0.025$

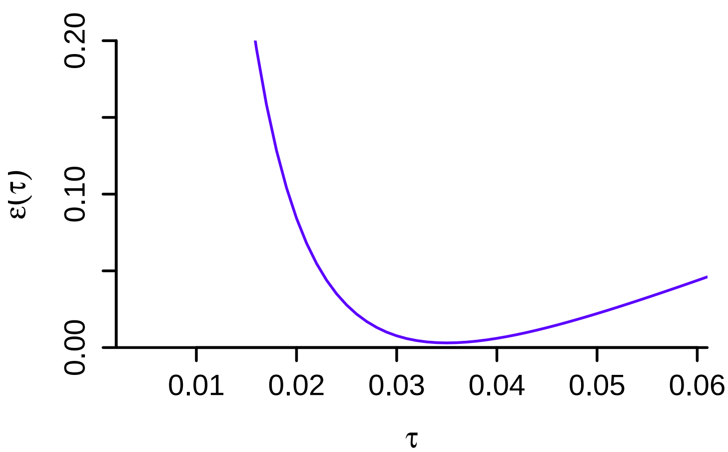
4.2.2 Antras tankio tipas

Šiame skyrelyje pavaizduoti rezultatai, gauti su antrą tankio tipo atitinkančiu parametrų rinkiniu $x_0 = 0.03$, $\lambda = 1.3$, $\sigma = 0.25$, $\mu = 0.035$. Iš 18 grafiko matome, kad šiuo atveju trečio tipo funkcijos q aproksimacija yra dar tikslesnė. Nėra didelių skirtumų tarp aproksimacijos ir skaitiniais metodais gautų reikšmių.



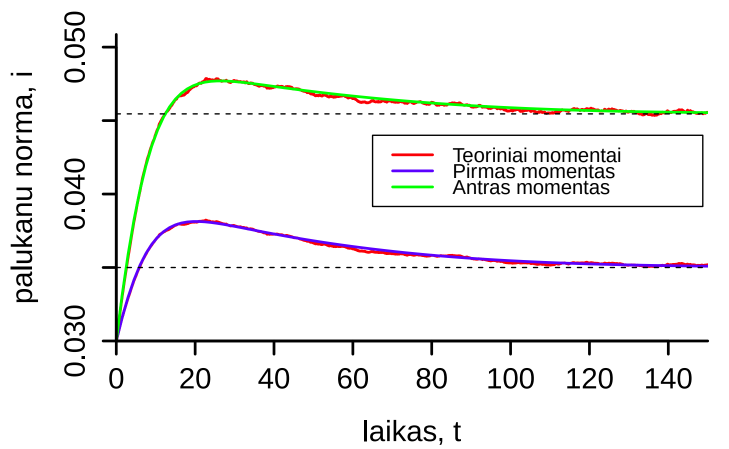
19 pav.: $x_0 = 0.03, \lambda = 1.3, \sigma = 0.25, \mu = 0.035$

20 grafike pavaizduotas paklaidos $\epsilon(\tau)$ kitimas. Šiuo atveju optimalus parametras $\tau = 0.0352$, o su juo gauta paklaida dar mažesnė nei anksčiau ir siekia 0.0025.



20 pav.: $x_0 = 0.03, \lambda = 1.3, \sigma = 0.25, \mu = 0.035$

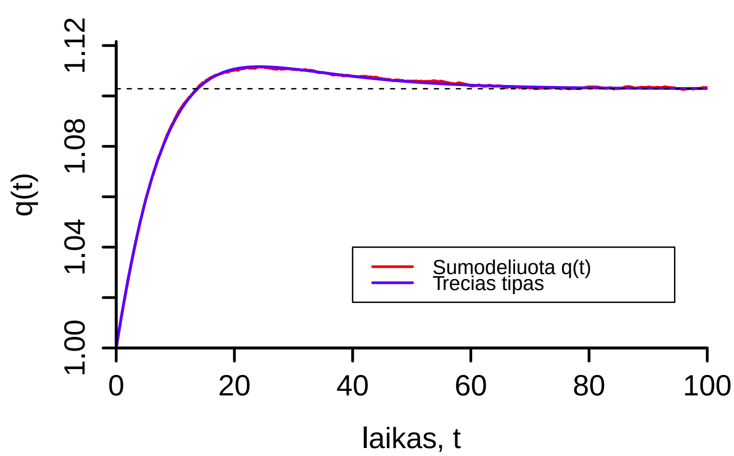
21 grafike pavaizduoti pirmo ir antro momentų grafikai. Kaip ir buvo galima tikėtis iš gautų $q(t)$ reikšmių, momentai abiem atvejais aproksimuojami gana tiksliai.



21 pav.: $x_0 = 0.03, \lambda = 1.3, \sigma = 0.25, \mu = 0.035$

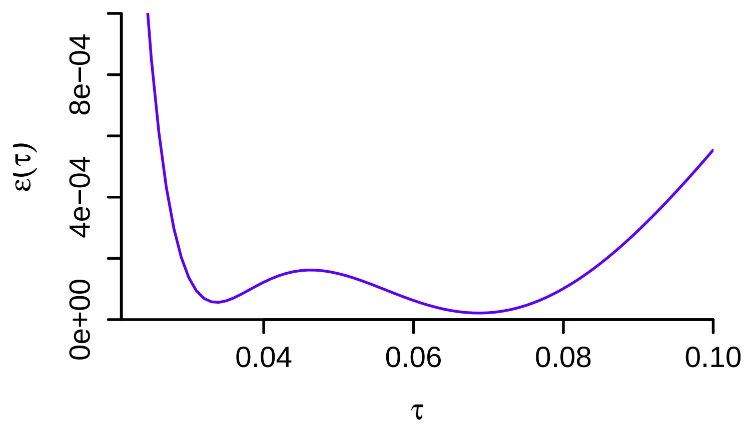
4.2.3 Trečias tankio tipas

Šioje dalyje apžvelgsime rezultatus gautus su parametrais $x_0 = 0.03,\ \lambda = 1.4,\ \sigma = 0.12,\ \mu = 0.05$. 22 paveiksle pavaizduoti funkcijų $q(t)$ grafikai. Kaip matome, šiuo atveju trečio tipo aproksimacija yra labai tiksli ir praktiškai sutampa su skaitiniais metodais gautomis reikšmėmis.



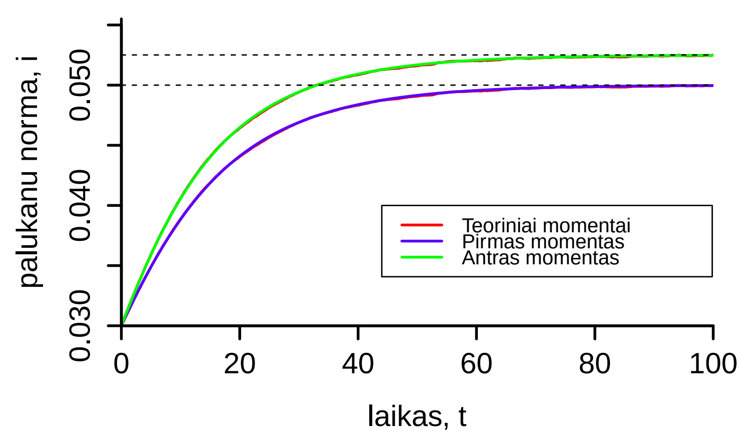
22 pav.: $x_0 = 0.03, \lambda = 1.4, \sigma = 0.12, \mu = 0.05$

Šiuo atveju gavome, kad optimalus $\tau = 0.0698$. Kaip matome iš 23 grafiko, paklaida optimaliame taške yra labai arti nulio ir lygi 0.000014.



23 pav.: $x_0 = 0.03, \lambda = 1.4, \sigma = 0.12, \mu = 0.05$

Galiausiai, 24 paveiksle pavaizduotos gautos momentų reikšmės. Kaip matome, tiek pirmas, tiek antras momentai labai tiksliai aproksimuojami sukonstruota trečio tipo aproksimacija.

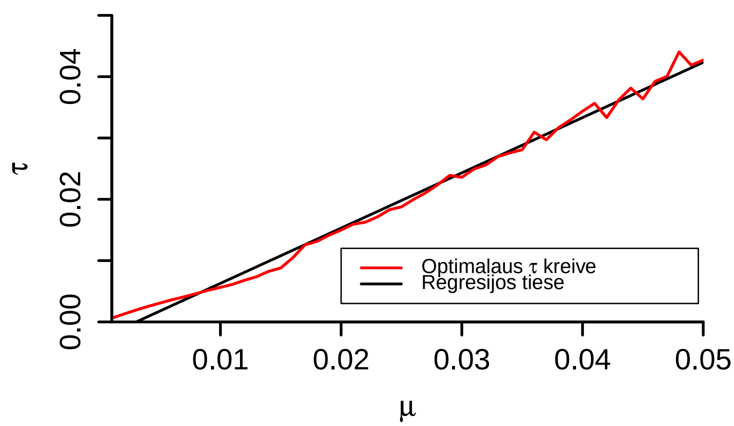


24 pav.: $x_0 = 0.03, \lambda = 1.4, \sigma = 0.12, \mu = 0.05$

4.3 Optimalaus τ priklausomybė nuo parametrų

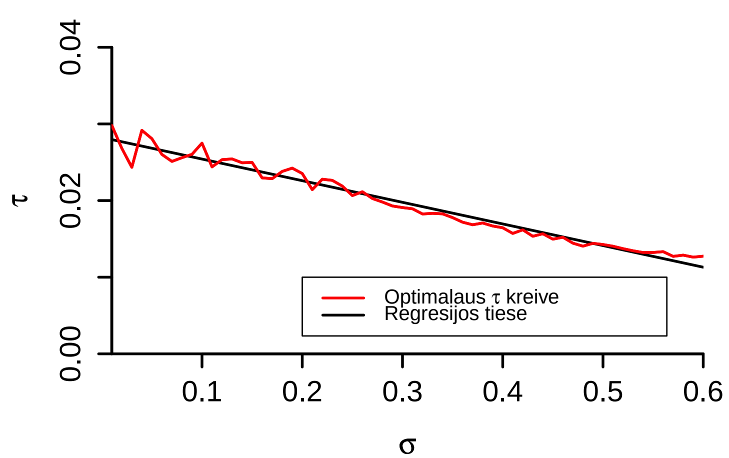
Vienas iš mūsų darbo tikslų buvo Fourier dalinių sumų metodui rasti optimalų parametrą τ, su kuriuo sukonstruotos aproksimacijos būtų kuo tikslesnės. Toliau nagrinėsime, kaip optimalus τ priklauso nuo parametrų x, λ, σ, μ. Naudosime trečio aproksimacijos tipo skaičiavimuose naudojamą optimalaus τ radimo algoritmą. Taip pat visur naudosime pirmo tankio tipo parametrų rinkinį $x_0 = 0.03,\ \lambda = 1.2,\ \sigma = 0.3,\ \mu = 0.025$.

25 grafike pavaizduota optimalaus τ elgsena keičiant parametrą μ. Matome, kad didėjant parametrui μ, didėja ir optimalaus τ reikšmė. Papildomai išvedėme regresijos tiesę ir gavome, kad šiuo atveju regresijos koeficientas artimas 1 ir lygus 0.9923. Tai rodo, kad optimalaus τ priklausomybė nuo μ yra beveik tiesinė. Stebimi didesni τ svyravimai susiję su sumodeliuotos funkcijos q paklaidomis.



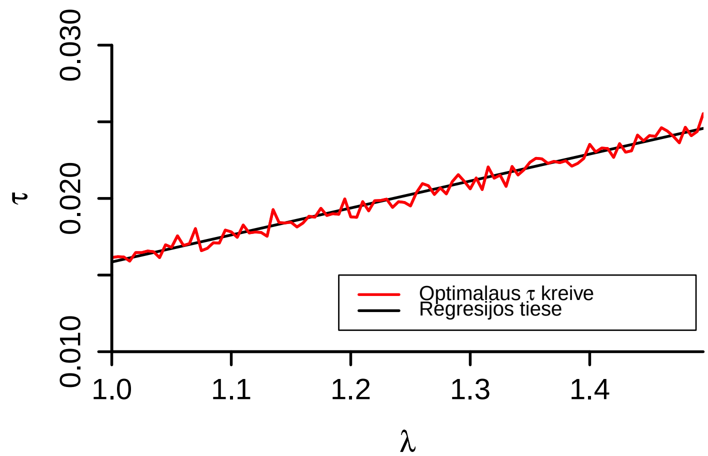
25 pav.: $x_0 = 0.03, \lambda = 1.2, \sigma = 0.3$

26 grafike matome, kaip optimalus τ priklauso nuo parametro σ. Čia situacija priešinga: didėjant parametro σ reikšmėms, optimalus τ mažėja. Tiesinė priklausomybė šiuo atveju ne tokia stipri, nes regresijos koeficientas mažesnis ir lygus 0.9667.



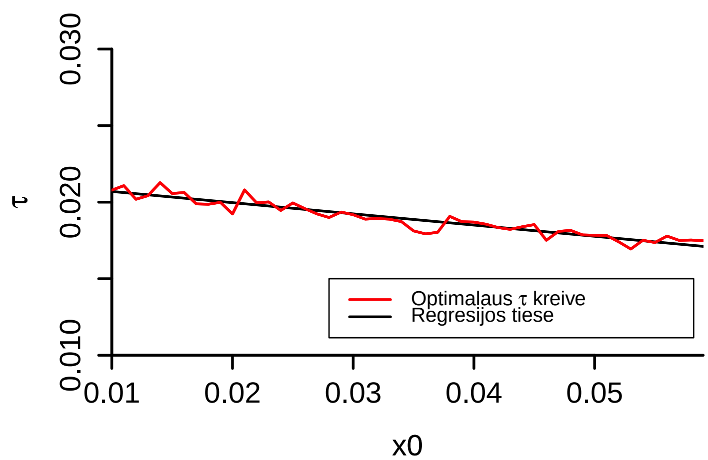
26 pav.: $x_0 = 0.03, \lambda = 1.2, \mu = 0.025$

27 grafike matome, kaip keičiantis λ reikšmėms, keičiasi optimalaus τ reikšmės. Galime pastebėti, kad nors optimalaus τ reikšmių kreivė svyruojanti, tačiau regresijos koeficientas išlieka gana aukštas ir siekia 0.9848.



27 pav.: $x_0 = 0.03, \sigma = 0.3, \mu = 0.025$

Galiausiai 28 paveiksle matome, kaip optimalaus τ reikšmės priklauso nuo pradinio taško x pasirinkimo. Čia taip pat galime įžvelgti tiesinę priklausomybę, tačiau ji ne tokia stipri, nes regresijos koeficientas mažiausias ir lygus 0.8965.



28 pav.: $\lambda = 1.2, \sigma = 0.3, \mu = 0.025$

Visais atvejais gauti pakankamai dideli regresijos koeficientai rodo, kad optimalaus τ kitimas nuo parametrų x, λ, σ, μ yra beveik tiesiškas. Gauti didesni τ svyravimai susiję su sumodeliuotos funkcijos q paklaidomis.

Išvados

Šiame darbe pateikėme Verhulsto lygties sprendinio momentų uždarumo funkcijos q trijų tipų aproksimacijas eksponetinių funkcijų sumomis. Norėdami gauti pirmąsias dvi aproksimacijas, turėjome optimizuoti laisvojo parametro τ radimą. Tam minimizavome paklaidą tarp sukonstruotos aproksimacijos ir skaitiniais metodais gautos funkcijos. Naudodami split-step skaitinį metodą, generavome Verhulsto SDL sprendinio momentų trajektorijas ir lyginome jas su gautos aproksimacijos reikšmėmis. Nustatėme, kad optimalaus parametro τ radimas pirmo ir antro tipų aproksimacijose ne tik duoda geresnius rezultatus, bet ir palengvina jų realizavimą. Nebereikia bandymų keliu kiekvienam parametrų rinkiniui ieškoti geriausius rezultatus duodančio parametro τ. Tačiau aproksimuotos funkcijos q reikšmė pradiniame taške gavosi tik apytikriai lygi jos tikrajai reikšmei 1. Norėdami išspręsti šią problemą, naudodamiesi tomis pačiomis Fourier dalinių sumų savybėmis sukonstravome naują funkcijos q aproksimaciją. Minėto trūkumo pavyko išvengti funkciją q aproksimuojant specialiai parinkta eksponentinio tipo funkcijų šeima, tenkinančia pradinę sąlygą. Šią trečio tipo aproksimaciją laikome svarbiausiu darbo rezultatu, nes ji ne tik išsprendžia „pradinės reikšmės“ problemą, bet ir visais atvejais labai tiksliai aproksimuoja funkcijos q reikšmes. Be to, gautos aproksimacijos išraiškos yra žymiai paprastesnės ir lengviau realizuojamos.

Literatūra

[1] A. Baravykas. Stochastinės Verhulsto lygties sprendinių momentų modeliavimas ir kalibravimas. Master's thesis, Vilniaus universitetas, 2013.

[2] W. Horsthemke and R. Lefever. *Noise-Induced Transitions*. Springer, 2006.

[3] V. Paulauskas ir A. Račkauskas. *Funkcinė analizė. I dalis*. TEV, 2007.

[4] V. Mackevičius. *Stochastinė analizė*. Vilniaus universiteto leidykla, 2005.

[5] V. Mackevičius. Verhulst versus CIR. *Lithuanian Mathematical Journal*, 55:119–133, 2014.

[6] S. Matkėnaitė. Stochastinės Verhulsto lygties sprendinių momentų aproksimavimas. Master's thesis, Vilniaus universitetas, 2012.

Priedai

A Fourier dalinių sumų metodas I

```
# funkcija generuojanti q(t) reiksmes split-step metodu.
Moments <- function(h=H,Nm=NN,x1=X1,x2=X2,grsk=gr,la=lambda,mu=miu,si=sigma,T=TT){
Ef<-system2("verh_M1M2m4.exe", args=c(h,Nm,x1,x2,grsk,la,mu,si,T), stdout=TRUE)
N<-T/h
M1<-array(0,dim=c(grsk,N+1))
M2<-array(0,dim=c(grsk,N+1))
M1apr<-array(0,dim=c(grsk,N+1))
M1apr<-array(0,dim=c(grsk,N+1))
M2apr<-array(0,dim=c(grsk,N+1))
for (k in 1:grsk){
M1[k,]<-Ef[((4*k-4)*N+4*k-3):((4*k-3)*N+4*k-3)] #M1
M2[k,]<-Ef[((4*k-3)*N+4*k-2):((4*k-2)*N+4*k-2)] #sqrt(M2)
M1apr[k,]<-Ef[((4*k-2)*N+4*k-1):((4*k-1)*N+4*k-1)] #sqrt(M2)
M2apr[k,]<-Ef[((4*k-1)*N+4*k):((4*k)*N+4*k)]
}
M11<-as.numeric(M1[k,])
M22<-as.numeric(M2[k,])
q<-(M22^2)/(M11^2)
pirmas<-M11 #pirmas momentas
antras<-M22 #saknis is antro momento
return(cbind(q,pirmas,antras))
}
#f-ja generuojanti q(t) pirmo aproksimacijos tipo reiksmes. Is pradziu pasinaudojus 2.2 lygtimi gaunamos funkcijos f reiksmes. Toliau zinant q israiska, randamos q reiksmes.
f2<-function(t){
   A2<-1/(2*l2)+c
   A3<-1/(3*l2)+c
   A4<-1/(4*l2)+c
   a21<-(-A3)/A2
   a22<-A2/(A4*A2-A3^2)
   a11<-1/A2
   b10<-(a11+a21*a22*(1+a21))*c
   b11<-a11+a21*a21*a22
   b12<-a21*a22
   b20<-a22*(1+a21)*c
   b21<-a22*a21
   b22<-a22
   x1<-seq(0,TT,H)
   f0<-(-1) #nes q(0)=1
   intgr1<-H*sum(((y-1)*2*lambda*miu/sigma^2-1)*exp(-l2*x1))
   intgr2<-H*sum(((y-1)*2*lambda*miu/sigma^2-1)*exp(-2*l2*x1))
   ft<-(b10*(-1)+b11*intgr1+b12*intgr2)*exp(-l2*t)+
        (b20*(-1)+b21*intgr1+b22*intgr2)*exp(-2*l2*t)
   qt<-(ft+1)*sigma^2/(2*lambda*miu)+1

   return(qt)
}

#f-ja generuojanti q(t) antro aproksimacijos tipo reiksmes. Is pradziu pasinaudojus 2.8 lygtimi gaunamos funkcijos f reiksmes. Toliau zinant q israiska, randamos q reiksmes.
f3<-function(t){
   A2<-1/(2*l3)+c
   A3<-1/(3*l3)+c
   A4<-1/(4*l3)+c
   A5<-1/(5*l3)+c
   a21<-(-A3)/A2
   a22<-A2/(A4*A2-A3^2)
   a11<-1/A2
   b10<-(a11+a21*a22*(1+a21))*c
   b11<-a11+a21*a21*a22
```

```
  b12<-a21*a22
  b20<-a22*(1+a21)*c
  b21<-a22*a21
  b22<-a22
  a31<-(-A4)/A2
  a32<-(-a22)*(A5+a21*A4)
  g3n<-c*(1+a32+a31+a32*a21)^2+1/(6*l3)+(a32^2+2*a31+2*a32*a21)/(4*l3)+(a31+a32*a21)^2/(2*l3)+2*a32/(5*l3)+2*a32*(a31+a32*a21)/(3*l3)
  a33<-1/g3n
  bb10<-b10+c*a33*(a31+a32*a21)*(1+a32+a31+a32*a21)
  bb11<-b11+a33*(a31+a32*a21)^2
  bb12<-b12+a33*a32*(a31+a32*a21)
  bb13<-a33*(a31+a32*a21)
  bb20<-b20+c*a33*a32*(1+a32+a31+a32*a21)
  bb21<-b21+a33*a32*(a31+a32*a21)
  bb22<-b22+a33*a32*a32
  bb23<-a33*a32
  bb30<-c*a33*(1+a32+a31+a32*a21)
  bb31<-a33*(a31+a32*a21)
  bb32<-a33*a32
  bb33<-a33
  x1<-seq(0,TT,H)
  f0<-(-1) #nes q(0)=1
  intgr1<-H*sum(((y-1)*2*lambda*miu/sigma^2-1)*exp(-l3*x1))
  intgr2<-H*sum(((y-1)*2*lambda*miu/sigma^2-1)*exp(-2*l3*x1))
  intgr3<-H*sum(((y-1)*2*lambda*miu/sigma^2-1)*exp(-3*l3*x1))
  ft<-(bb10*(-1)+bb11*intgr1+bb12*intgr2+bb13*intgr3)*exp(-l3*t)+
    (bb20*(-1)+bb21*intgr1+bb22*intgr2+bb23*intgr3)*exp(-2*l3*t)+
    (bb30*(-1)+bb31*intgr1+bb32*intgr2+bb33*intgr3)*exp(-3*l3*t)
  qt<-(ft+1)*sigma^2/(2*lambda*miu)+1

  return(qt)
}


#Darbe suskaiciuota paklaidos israiska sudaryta is dvieju nariu (2.3 lygtis). Tik antrasis (su minuso zenklu) priklauso nuo parametro tau. Todel vietoj visos paklaidos minimizavimo, mes ieskome antro nario (be minuso) didziausios reiksmes. Antro nario israiska:
tau2<-function(l){
  A2<-1/(2*l)+c
  A3<-1/(3*l)+c
  A4<-1/(4*l)+c
  a21<-(-A3)/A2
  a22<-A2/(A4*A2-A3^2)
  a11<-1/A2
  x1<-seq(0,TT,H)
  f0<-(-1) #nes q(0)=1
  intgr1<-H*sum(((y-1)*2*lambda*miu/sigma^2-1)*exp(-l*x1))
  intgr2<-H*sum(((y-1)*2*lambda*miu/sigma^2-1)*exp(-2*l*x1))

  min<-(a11*(c*(-1)+intgr1)^2+a22*(c*(-1)*(1+a21)+a21*intgr1+intgr2)^2)
  return(min)
}
#optimalaus tau radimui naudojama funkcija antro aproksimacijos tipo atveju. Paklaidos antro nario israiska.
tau3<-function(l){
  A2<-1/(2*l)+c
  A3<-1/(3*l)+c
  A4<-1/(4*l)+c
  A5<-1/(5*l)+c
  a21<-(-A3)/A2
  a22<-A2/(A4*A2-A3^2)
  a11<-1/A2
  a31<-(-A4)/A2
  a32<-(-a22)*(A5+a21*A4)
```

```
  g3n<-c*(1+a32+a31+a32*a21)^2+1/(6*l)+(a32^2+2*a31+2*a32*a21)/(4*l)+(a31+a32*a21)^2/(2*l)+2*a32/(5*l)+2*a32*(a31+a32*a21)/(3*l)
  a33<-1/g3n

  x1<-seq(0,TT,H)
  f0<-(-1) #nes q(0)=1
  intgr1<-H*sum(((y-1)*2*lambda*miu/sigma^2-1)*exp(-l*x1))
  intgr2<-H*sum(((y-1)*2*lambda*miu/sigma^2-1)*exp(-2*l*x1))
  intgr3<-H*sum(((y-1)*2*lambda*miu/sigma^2-1)*exp(-3*l*x1))

  min<-(a11*(c*(-1)+intgr1)^2+a22*(c*(-1)*(1+a21)+a21*intgr1+intgr2)^2+a33*(c*(-1)*(1+a32+a31+a32*a21)+intgr3+a32*intgr2+(a31+a32*a21)*intgr1)^2 )
  return(min)
}

#grafiku braizymo funkcija
grafikai<-function(){

#funkcijos q(t) grafiko braizymas.
rang<-c(min(y),max(y))
par(mfrow=c(1,1))
discr<-seq(time[1],time[2],H)
plot(cbind(discr,y),type="l",xlim=time, ylim=rang,xlab="laikas, t",ylab="q(t)",
     xaxs="i",yaxs="i",col="red", axes=FALSE, lwd=2)
par(new=TRUE)
plot(f2,time[1], time[2],xlab="",ylab="",xlim=time, ylim=rang,
     xaxs="i",yaxs="i",col="blue", axes=FALSE, lwd=2)
par(new=TRUE)
plot(f3,time[1], time[2],xlab="",ylab="",ylim=rang,
     xaxs="i",yaxs="i",col="green", axes=FALSE, lwd=2)
aa<-(2*lambda*miu/(sigma*sigma))-1
d<-1+(sigma*sigma)/(2*lambda*miu)
lines(rbind(c(time[1],d),c(time[2],d)),lty=2)
axis(1,lwd=2)
axis(2, lwd=2)
box(bty="l", lwd=2)
legend(x=43,y=1.04,c("Sumodeliuota q(t)", "Pirmas tipas", "Antras tipas"),col=c("red", "blue", "green"),
       cex=0.7, bty="o", bg="white", y.intersp=0.7, text.width=strwidth("Teoriniai momen"),
       lwd=c(2,2,2), lty=c(1,1,1) )


#Paklaidu Epsilon grafikai pagal parametra tau
z2=array()
s<-0
zing<-0.001
for (i in c(1:101)){
  s<-s+zing
  z2[i]<-c+H*sum(((y-1)*2*lambda*miu/sigma^2-1)^2)-tau2(s)}

z3=array()
s<-0
zing<-0.001
for (i in c(1:101)){
  s<-s+zing
  z3[i]<-c+H*sum(((y-1)*2*lambda*miu/sigma^2-1)^2)-tau3(s)+0.045
}
rang1<-c(min(min(z2),min(z3))+20, max(max(z2),max(z3))+5)
x1<-seq(0,0.1,0.001)
par(mfrow=c(1,1))
plot(x1,z2, type ="l",  xlab=expression(tau),ylab=expression(epsilon(tau)),
     xaxs="i",yaxs="i",col="blue", axes=FALSE, xlim=c(0, 0.1),ylim=c(0,1),lwd=2)
par(new=TRUE)
plot(x1,z3, type ="l",xlab="",ylab="",
     xaxs="i",yaxs="i",col="green", axes=FALSE, ylim=c(0,1),lwd=2)
axis(1,lwd=2)
```

```
axis(2, lwd=2)
box(bty="l", lwd=2)
legend(x=0.043,y=2.5,c("Pirmas tipas", "Antras tipas"),col=c("blue", "green"),
        cex=0.7, bty="o", bg="white", y.intersp=0.7, text.width=strwidth("Teoriniai moment"),
        lwd=c(2,2), lty=c(1,1))

#Momentu grafikai
d1<-miu
d2<-sqrt(miu*mub)
rang2<-c(min(y2,y1),max(y2,y1,d1,d2))
par(mfrow=c(1,1))
discr<-seq(time[1],time[2],H)
plot(cbind(discr,y1),type="l",xlim=time, ylim=rang2,xlab="laikas, t",ylab="palukanu norma, i",
      xaxs="i",yaxs="i",col="red", axes=FALSE, lwd=2)
par(new=TRUE)
plot(pirmas2,time[1], time[2],xlab="",ylab="",xlim=time, ylim=rang2,
      xaxs="i",yaxs="i",col="blue",axes=FALSE, lwd=2)
par(new=TRUE)
plot(cbind(discr,y2),type="l",xlim=time, ylim=rang2,xlab="",ylab="",
      xaxs="i",yaxs="i",col="red", axes=FALSE, lwd=2)
par(new=TRUE)
plot(antras2,time[1], time[2],xlab="",ylab="",xlim=time, ylim=rang2,
      xaxs="i",yaxs="i",col="green",axes=FALSE, lwd=2)
lines(rbind(c(time[1],d1),c(time[2],d1)),lty=2)
lines(rbind(c(time[1],d2),c(time[2],d2)),lty=2)
axis(1,lwd=2)
axis(2, lwd=2)
box(bty="l", lwd=2)
legend(x=43, y=0.038 ,c("Teoriniai momentai", "Pirmas momentas", "Antras momentas"),col=c("red", "blue", "green"),
        cex=0.7, bty="o", bg="white", y.intersp=0.7, text.width=strwidth("Teoriniai moment"),
        lwd=c(2,2,2), lty=c(1,1,1))
title("Pirmo tipo momentai")

d1<-miu
d2<-sqrt(miu*mub)
rang2<-c(min(y2,y1),max(y2,y1,d1,d2))
par(mfrow=c(1,1))
discr<-seq(time[1],time[2],H)
plot(cbind(discr,y1),type="l",xlim=time, ylim=rang2,xlab="laikas, t",ylab="palukanu norma, i",
      xaxs="i",yaxs="i",col="red", axes=FALSE, lwd=2)
par(new=TRUE)
plot(pirmas3,time[1], time[2],xlab="",ylab="",xlim=time, ylim=rang2,
      xaxs="i",yaxs="i",col="blue",axes=FALSE, lwd=2)
par(new=TRUE)
plot(cbind(discr,y2),type="l",xlim=time, ylim=rang2,xlab="",ylab="",
      xaxs="i",yaxs="i",col="red", axes=FALSE, lwd=2)
par(new=TRUE)
plot(antras3,time[1], time[2],xlab="",ylab="",xlim=time, ylim=rang2,
      xaxs="i",yaxs="i",col="green",axes=FALSE, lwd=2)

lines(rbind(c(time[1],d1),c(time[2],d1)),lty=2)
lines(rbind(c(time[1],d2),c(time[2],d2)),lty=2)
axis(1,lwd=2)
axis(2, lwd=2)
box(bty="l", lwd=2)
legend(x=43, y=0.038,c("Teoriniai momentai", "Pirmas momentas", "Antras momentas"),col=c("red", "blue", "green"),
        cex=0.7, bty="o", bg="white", y.intersp=0.7, text.width=strwidth("Teoriniai moment"),
        lwd=c(2,2,2), lty=c(1,1,1))
title("Antro tipo momentai")
}
```

```
#Pirmo aproksimacijos tipo momentu funkcijos (2.4 lygtis).
pirmas2<-function(x){
  A2<-1/(2*l2)+c
  A3<-1/(3*l2)+c
  A4<-1/(4*l2)+c
  a21<-(-A3)/A2
  a22<-A2/(A4*A2-A3^2)
  a11<-1/A2
  b10<-(a11+a21*a22*(1+a21))*c
  b11<-a11+a21*a21*a22
  b12<-a21*a22
  b20<-a22*(1+a21)*c
  b21<-a22*a21
  b22<-a22
  x1<-seq(0,TT,H)
  f0<-(-1) #nes q(0)=1
  intgr1<-H*sum(((y-1)*2*lambda*miu/sigma^2-1)*exp(-l2*x1))
  intgr2<-H*sum(((y-1)*2*lambda*miu/sigma^2-1)*exp(-2*l2*x1))
  alpha1<-(b10*(-1)+b11*intgr1+b12*intgr2)
  alpha2<-(b20*(-1)+b21*intgr1+b22*intgr2)
  if (l2==lambda*mub) { 2*miu/((2*lambda*miu+sigma^2)/(lambda*mub)+(2*miu/x0-(2*miu*lambda+sigma^2)/(lambda*mub)+alpha1*sigma^2*x-alpha2*sigma^2/(lambda*mub-2*l2))*exp(-1*lambda*mub*x)+ alpha2*sigma^2/(lambda*mub-2*l2)*exp(-2*l2*x))}
  else if(2*l2==lambda*mub){ 2*miu/((2*lambda*miu+sigma^2)/(lambda*mub)+ (2*miu/x0-(2*miu*lambda+sigma^2)/(lambda*mub)-alpha1*sigma^2/(lambda*mub-l2)+alpha2*sigma^2*x)*exp(-1*lambda*mub*x)+ alpha1*sigma^2/(lambda*mub-l2)*exp(-1*l2*x))
    }
  else { 2*miu/((2*lambda*miu+sigma^2)/(lambda*mub)+ (2*miu/x0-(2*miu*lambda+sigma^2)/(lambda*mub)-alpha1*sigma^2/(lambda*mub-l2)-alpha2*sigma^2/(lambda*mub-2*l2))*exp(-1*lambda*mub*x)+ alpha1*sigma^2/(lambda*mub-l2)*exp(-1*l2*x)+alpha2*sigma^2/(lambda*mub-2*l2)*exp(-2*l2*x))}
    }
antras2<-function(x){
  sqrt(pirmas2(x)*pirmas2(x)*f2(x))
}

#Antro aproksimacijos tipo momentu funkcijos (2.10 lygtis)
pirmas3<-function(x){
  A2<-1/(2*l3)+c
  A3<-1/(3*l3)+c
  A4<-1/(4*l3)+c
  A5<-1/(5*l3)+c
  a21<-(-A3)/A2
  a22<-A2/(A4*A2-A3^2)
  a11<-1/A2
  b10<-(a11+a21*a22*(1+a21))*c
  b11<-a11+a21*a21*a22
  b12<-a21*a22
  b20<-a22*(1+a21)*c
  b21<-a22*a21
  b22<-a22
  a31<-(-A4)/A2
  a32<-(-a22)*(A5+a21*A4)
  g3n<-c*(1+a32+a31+a32*a21)^2+1/(6*l3)+(a32^2+2*a31+2*a32*a21)/(4*l3)+(a31+a32*a21)^2/(2*l3)+2*a32/(5*l3)+2*a32*(a31+a32*a21)/(3*l3)
  a33<-1/g3n
  bb10<-b10+c*a33*(a31+a32*a21)*(1+a32+a31+a32*a21)
  bb11<-b11+a33*(a31+a32*a21)^2
  bb12<-b12+a33*a32*(a31+a32*a21)
  bb13<-a33*(a31+a32*a21)
  bb20<-b20+c*a33*a32*(1+a32+a31+a32*a21)
  bb21<-b21+a33*a32*(a31+a32*a21)
  bb22<-b22+a33*a32*a32
  bb23<-a33*a32
  bb30<-c*a33*(1+a32+a31+a32*a21)
  bb31<-a33*(a31+a32*a21)
```

```
  bb32<-a33*a32
  bb33<-a33
  x1<-seq(0,TT,H)
  f0<-(-1) #nes q(0)=1
  intgr1<-H*sum(((y-1)*2*lambda*miu/sigma^2-1)*exp(-l3*x1))
  intgr2<-H*sum(((y-1)*2*lambda*miu/sigma^2-1)*exp(-2*l3*x1))
  intgr3<-H*sum(((y-1)*2*lambda*miu/sigma^2-1)*exp(-3*l3*x1))
  alpha31<-(bb10*(-1)+bb11*intgr1+bb12*intgr2+bb13*intgr3)
  alpha32<-(bb20*(-1)+bb21*intgr1+bb22*intgr2+bb23*intgr3)
  alpha33<-(bb30*(-1)+bb31*intgr1+bb32*intgr2+bb33*intgr3)

 if ((l3!=lambda*mub)&(2*l3!=lambda*mub)&(3*l3==lambda*mub)) { 2*miu/((2*lambda*miu+sigma^2)/(lambda*mub)+ (2*miu/x0-(2*miu*lambda+sigma^2)/(lambda*mub)+(alpha33)*sigma^2*x-alpha31*sigma^2/(lambda*mub-l3)-alpha32*sigma^2/(lambda*mub-2*l3))*exp(-1*lambda*mub*x)+ alpha31*sigma^2/(lambda*mub-l3)*exp(-l3*x)+alpha32*sigma^2/(lambda*mub-2*l3)*exp(-2*l3*x))}
  else if ((l3!=lambda*mub)&(2*l3==lambda*mub)&(3*l3!=lambda*mub)) { 2*miu/((2*lambda*miu+sigma^2)/(lambda*mub)+ (2*miu/x0-(2*miu*lambda+sigma^2)/(lambda*mub)+(alpha32)*sigma^2*x-alpha31*sigma^2/(lambda*mub-l3)-alpha33*sigma^2/(lambda*mub-3*l3))*exp(-1*lambda*mub*x)+ alpha31*sigma^2/(lambda*mub-l3)*exp(-l3*x)+alpha33*sigma^2/(lambda*mub-3*l3)*exp(-3*l3*x))}
  else if ((l3==lambda*mub)&(2*l3!=lambda*mub)&(3*l3!=lambda*mub)) { 2*miu/((2*lambda*miu+sigma^2)/(lambda*mub)+(2*miu/x0-(2*miu*lambda+sigma^2)/(lambda*mub)+(alpha31)*sigma^2*x-alpha32*sigma^2/(lambda*mub-2*l3)-alpha33*sigma^2/(lambda*mub-3*l3))*exp(-1*lambda*mub*x)+ alpha32*sigma^2/(lambda*mub-2*l3)*exp(-2*l3*x)+alpha33*sigma^2/(lambda*mub-3*l3)*exp(-3*l3*x))}
  else { 2*miu/((2*lambda*miu+sigma^2)/(lambda*mub)+ (2*miu/x0-(2*miu*lambda+sigma^2)/(lambda*mub)-alpha31*sigma^2/(lambda*mub-l3)-alpha32*sigma^2/(lambda*mub-2*l3)-alpha33*sigma^2/(lambda*mub-3*l3))*exp(-1*lambda*mub*x)+ alpha31*sigma^2/(lambda*mub-l3)*exp(-1*l3*x)+alpha32*sigma^2/(lambda*mub-2*l3)*exp(-2*l3*x)+alpha33*sigma^2/(lambda*mub-3*l3)*exp(-3*l3*x))}
}
antras3<-function(x){
  sqrt(pirmas3(x)*pirmas3(x)*f3(x))
}

#parametru ivedimas

H<-0.1
NN<-99999
X1<-0.03
X2<-0.03
x0<-0.03
gr<-1

lambda<-1.3
sigma<-0.25
miu<-0.035 #CIR lygties miu naudojama tiek akroksimacijose tiek split-step.
mub<-miu+sigma^2/(2*lambda)     #Verhulsto lygties miu. Naudojama momentuose
TT<-150
time=c(0,TT)
c<-100
split<-Moments() #generuoja Split-Step q(t) funkcija, pirma momenta ir sqrt(antras_momentas)
y<-split[,1]
y1<-split[,2]
y2<-split[,3]

#Darbe suskaiciuota paklaidos israiska sudaryta is dvieju nariu. Tik antrasis (su minuso zenklu) priklauso nuo parametro tau. Todel vietoj visos paklaidos minimizavimo, mes ieskome antro nario (be minuso) didziausios reiksmes.

L2<-print(optimize(tau2, interval=c(0, 0.2), maximum=TRUE)) #pirmo tipo aproksimacijos optimalaus parametro tau radimas
l2<-as.numeric(L2[1])

```

```
L3<-print(optimize(tau3, interval=c(0, 0.2), maximum=TRUE)) #antro tipo aproksimacijos optimalaus parametro tau radimas
l3<-as.numeric(L3[1])


grafikai()
```

B Fourier dalinių sumų metodas II

```
#Funkcija generuojanti q(t) reiksmes split -step metodu.
Moments <- function(h=H,Nm=NN,x1=X1,x2=X2,grsk=gr,la=lambda,mu=miu,si=sigma,T=TT){
Ef<-system2("C:/Users/Monika/Dropbox/Monika 2015/Kodai/verh_M1M2m4.exe", args=c(h, Nm,x1,x2,grsk,la,mu,si,T), stdout=TRUE)
N<-T/h
M1<-array(0,dim=c(grsk,N+1))
M2<-array(0,dim=c(grsk,N+1))
M1apr<-array(0,dim=c(grsk,N+1))
M1apr<-array(0,dim=c(grsk,N+1))
M2apr<-array(0,dim=c(grsk,N+1))
for (k in 1:grsk){
M1[k,]<-Ef[((4*k-4)*N+4*k-3):((4*k-3)*N+4*k-3)] #M1
M2[k,]<-Ef[((4*k-3)*N+4*k-2):((4*k-2)*N+4*k-2)] #sqrt(M2)
M1apr[k,]<-Ef[((4*k-2)*N+4*k-1):((4*k-1)*N+4*k-1)] #sqrt(M2)
M2apr[k,]<-Ef[((4*k-1)*N+4*k):((4*k)*N+4*k)]
}
M11<-as.numeric(M1[k,])
M22<-as.numeric(M2[k,])
q<-(M22^2)/(M11^2)
pirmas<-M11 #pirmas momentas
antras<-M22 #saknis is antro momento
return(cbind(q,pirmas,antras))
}
#trecio tipo q(t) aproksimacijos reiksmiu gavimas. Pirma suskaiciuojamos funkcijos h reiksmes (3.1 lygtis), toliau raunama funkcija q.
h<-function(t){
  a<-sigma^2/(2*lambda*miu)
    x1<-seq(0,TT,H)
  intgr1<-H*sum((y-1-a+a*exp(-l*x1))*(exp(-l*x1)-exp(-2*l*x1)))
  intgr2<-H*sum((y-1-a+a*exp(-l*x1))*(7/5*exp(-2*l*x1)-exp(-3*l*x1)-2/5*exp(-l*x1)))
  ht<-12*l*intgr1*(exp(-l*t)-exp(-2*l*t))+
      300*l*intgr2*(7/5*exp(-2*l*t)-exp(-3*l*t)-2/5*exp(-l*t))
  qt<-ht+1+a-a*exp(-l*t)
  return(qt)
}
#Pirmo momento israiska randama pasinaudojus 3.3 lygtimi
pirmas<-function(t){
  a<-sigma^2/(2*lambda*miu)
  x1<-seq(0,TT,H)
  intgr1<-H*sum((y-1-a+a*exp(-l*x1))*(exp(-l*x1)-exp(-2*l*x1)))
  intgr2<-H*sum((y-1-a+a*exp(-l*x1))*(7/5*exp(-2*l*x1)-exp(-3*l*x1)-2/5*exp(-l*x1)))
  alpha1<-12*l*intgr1 -120*l*intgr2
  alpha2<-(-12)*l*intgr1+420*l*intgr2
  alpha3<-(-300)*l*intgr2
  if(l==lambda*mub){ 1/((2*lambda*miu+sigma^2)/(2*miu*lambda*mub)+
      (1/x0-(2*miu*lambda+sigma^2)/(2*miu*lambda*mub)+(2*alpha1*lambda*miu-sigma^2)/(2*miu)*t-alpha2*lambda/(lambda*mub-2*l)-alpha3*lambda/(lambda*mub-3*l))*exp(-1*lambda*mub*t)+ alpha2*lambda/(lambda*mub-2*l)*exp(-2*l*t)+alpha3*lambda/(lambda*mub-3*l)*exp(-3*l*t))}
  else if (2*l==lambda*mub) { 1/((2*lambda*miu+sigma^2)/(2*miu*lambda*mub)+ (1/x0-(2*miu*lambda+sigma^2)/(2*miu*lambda*mub)-(2*alpha1*lambda*miu-sigma^2)/(2*miu*(lambda*mub-l))+alpha2*lambda*t-alpha3*lambda/(lambda*mub-3*l))*exp(-1*lambda*mub*t)+ (2*alpha1*lambda*miu-sigma^2)/(2*miu*(lambda*mub-l))*exp(-1*l*t)+alpha3*lambda/(lambda*mub-3*l)*exp(-3*l*t))}
```

```r
  else if (3*l==lambda*mub) { 1/((2*lambda*miu+sigma^2)/(2*miu*lambda*mub)+ (1/x0-(2*miu*lambda+sigma^2)/(2*miu*lambda*mub)-(2*alpha1*lambda*miu-sigma^2)/(2*miu*(lambda*mub-l))-alpha2*lambda/(lambda*mub-2*l)+alpha3*lambda*t)*exp(-1*lambda*mub*t)+ (2*alpha1*lambda*miu-sigma^2)/(2*miu*(lambda*mub-l))*exp(-1*l*t)+alpha2*lambda/(lambda*mub-2*l)*exp(-2*l*t))}
  else { 1/((2*lambda*miu+sigma^2)/(2*miu*lambda*mub)+ (1/x0-(2*miu*lambda+sigma^2)/(2*miu*lambda*mub)-(2*alpha1*lambda*miu-sigma^2)/(2*miu*(lambda*mub-l))-alpha2*lambda/(lambda*mub-2*l)-alpha3*lambda/(lambda*mub-3*l))*exp(-1*lambda*mub*t)+ (2*alpha1*lambda*miu-sigma^2)/(2*miu*(lambda*mub-l))*exp(-1*l*t)+alpha2*lambda/(lambda*mub-2*l)*exp(-2*l*t)+alpha3*lambda/(lambda*mub-3*l)*exp(-3*l*t))}
}
#antro momento israiska
antras<-function(x){
  sqrt(pirmas(x)*pirmas(x)*h(x))
}
#Siuo atveju abu paklaidos nariai priklauso nuo parametro tau, todel minimizuosime visa funkcija, uzrasyta 3.2 lygtimi.
opt<-function(l){
  a<-sigma^2/(2*lambda*miu)
  x1<-seq(0,TT,H)
  hn<-H*sum((y-1-a+a*exp(-l*x1))^2)
  pirmas<-(H*sum((y-1-a+a*exp(-l*x1))*(exp(-l*x1)-exp(-2*l*x1))))^2
  antras<-(H*sum((y-1-a+a*exp(-l*x1))*(7/5*exp(-2*l*x1)-exp(-3*l*x1)-2/5*exp(-l*x1))))^2
  min<-hn-12*l*pirmas-300*l*antras
  return(min)
}

#F-ja braizanti grafikus
grafikai<-function(){
z3=array()
s<-0
zing<-0.005
for (i in c(1:101)){
  s<-s+zing
  z3[i]<-opt(s)
}

x1<-seq(0,0.5,0.005)
plot(x1,z3, type ="l",  xlab=expression(tau(t)),ylab=expression(delta(t)),
     xaxs="i",yaxs="i",col="blue", lwd=2)

rang<-c(min(y),max(y)+0.03)
par(mfrow=c(1,1))
discr<-seq(time[1],time[2],H)
plot(cbind(discr,y),type="l",xlim=time, ylim=rang,xlab="laikas, t",ylab="q(t)",
     xaxs="i",yaxs="i",col="red", axes=FALSE, lwd=2)
par(new=TRUE)
plot(h,time[1], time[2],xlab="",ylab="",xlim=time, ylim=rang,
     xaxs="i",yaxs="i",col="blue", axes=FALSE, lwd=2)
aa<-(2*lambda*miu/(sigma*sigma))-1
d<-1+(sigma*sigma)/(2*lambda*miu)
lines(rbind(c(time[1],d),c(time[2],d)),lty=2)
axis(1,lwd=2)
axis(2, lwd=2)
box(bty="l", lwd=2)

#Momentu grafikai
d1<-miu
d2<-sqrt(miu*mub)
rang2<-c(min(y2,y1),max(y2,y1,d1,d2)+0.003)
par(mfrow=c(1,1))
discr<-seq(time[1],time[2],H)
plot(cbind(discr,y1),type="l",xlim=time, ylim=rang2,xlab="laikas, t",ylab="palukanu norma, i",
     xaxs="i",yaxs="i",col="red", axes=FALSE, lwd=2)
```

```
par(new=TRUE)
plot(pirmas, time[1], time[2], xlab="", ylab="", xlim=time, ylim=rang2,
      xaxs="i", yaxs="i", col="blue", axes=FALSE, lwd=2)
par(new=TRUE)
plot(cbind(discr, y2), type="l", xlim=time, ylim=rang2, xlab="", ylab="",
      xaxs="i", yaxs="i", col="red", axes=FALSE, lwd=2)
par(new=TRUE)
plot(antras, time[1], time[2], xlab="", ylab="", xlim=time, ylim=rang2,
      xaxs="i", yaxs="i", col="green", axes=FALSE, lwd=2)
lines(rbind(c(time[1], d1), c(time[2], d1)), lty=2)
lines(rbind(c(time[1], d2), c(time[2], d2)), lty=2)
axis(1, lwd=2)
axis(2, lwd=2)
box(bty="l", lwd=2)
legend(x=65, y=0.044 , c("Teoriniai momentai", "Pirmas momentas", "Antras momentas"), col=c("red", "blue", "green"),
         cex=0.7, bty="o", bg="white", y.intersp=0.7, text.width=strwidth("Teoriniai moment"),
         lwd=c(2,2,2), lty=c(1,1,1))
title("Pirmos formos momentai")
}

#Parametru ivedimas
H<-0.1
NN<-99999
X1<-0.03
X2<-0.03
x0<-0.03
gr<-1
lambda<-1.4
sigma<-0.12
miu<-0.05 #CIR lygties miu naudojama tiek akroksimacijose tiek split-step.
mub<-miu+sigma^2/(2*lambda)     #Verhulsto lygties miu. Naudojama momentuose
TT<-100
time=c(0,TT)
split<-Moments() #generuoja Split-Step q(t) funkcija, pirma monta ir sqrt(antras_momentas)
y<-split[,1]
y1<-split[,2]
y2<-split[,3]

#paklaidos minimizavimo funkcija
L2<-print(optimize(opt, interval=c(0, 0.2)))
l<-as.numeric(L2[1])

grafikai()
```