VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

Magistro darbas

Optimalus dalinis perdraudimas pagal spektrinius rizikos matus

Optimal Quota-Share Reinsurance under Spectral Risk Measures

Toma Kraujalytė

VILNIUS 2016

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
MATEMATINĖS ANALIZĖS KATEDRA

Darbo vadovas doc. dr. Martynas Manstavičius
Darbo recenzentas dr. Donata Puplinskaitė

Darbas apgintas 2016–01–14
Darbas įvertintas ___________

Registravimo NR. ___________________________________
Atidavimo į katedrą data 2016–01–04

Turinys

SANTRAUKA/ABSTRACT

Optimalus dalinis perdraudimas pagal spektrinius rizikos matus

Santrauka

Darbe pateikiama optimalaus dalinio perdraudimo koeficiento pagal spektrinius rizikos matus teorema ir jai apibrėžti bei įrodyti reikalinga spektrinių rizikos matų teorijos dalis. Supažindinama su rizikos vertinimo matais, tokiais kaip vertės pokyčio rizika (VaR) ir sąlyginiu uodegos vidurkiu (CTE) bei aprašomas šių rizikos matų optimizavimas pagal dalinio perdraudimo koeficiento atžvilgiu. Apžvelgiama van Heerwaarden ir Kaas, dalinės dispersijos, kvadratinio naudingumo draudimo įmokų skaičiavimo principai bei jų pritaikymas ieškant optimalaus dalinio perdraudimo. Praktinėje dalyje atliktas tyrimas su modeliuotais duomenimis, kuriuo siekta patikrinti teorinėje dalyje išvestų formulių pritaikomumą draudimo srityje. Teorinėje dalyje aprašyti optimalaus dalinio perdraudimo metodai pritaikyti Pareto ir eksponentiškai pasiskirsčiusių nuostolių analizėje, o gauti rezultatai palyginti tarpusavyje. Tyrimo eiga ir duomenų analizė aprašyti praktinėje darbo dalyje.

Raktiniai žodžiai : Optimalus dalinis perdraudimas, spektriniai rizikos matai, vertės pokyčio rizika, sąlyginis uodegos vidurkis, van Heerwaarden ir Kaas įmokų skaičiavimo principas, dalinės dispersijos įmokų skaičiavimo principas, kvadratinio naudingumo įmokų skaičiavimo principas.

Optimal Quota-Share Reinsurance under Spectral Risk Measures

Abstract

This thesis presents optimal quota-share reinsurance under spectral risk measures theorem and spectral risk measures theory that is necessary to prove it. Risk measures such as Value at Risk (VaR) and Conditional Tail Expectation (CTE) are introduced, together with optimization of these measures under quota-share reinsurance coefficient. Along with that Dutch, semi-variance and quadratic utility premium principles are reviewed and used for calculating optimal quota-share reinsurance. The practical part of the thesis provides an analysis of simulated data in order to verify how optimal quota-share reinsurance method could be applied by insurance company. Theoretical descriptions of optimal quota-share reinsurance method is also adapted for losses with exponential and Pareto distributions – optimal quota-share reinsurances under these distributions are compared. The process and results of analysis are provided in the practical part of the thesis.

Key words : Optimal Quota-Share Reinsurance, Spectral risk measures, Value at Risk, Conditional Tail Expectation, Dutch Premium Principle, Semi-variance Premium Principle, Quadratic Utility Premium Principle.

ĮVADAS

Draudimo įmonė, vykdydama savo veiklą, susiduria su begale draudimo rizikų, tokių kaip atsitiktinių akumuliuotų nuostolių rizika (pasireiškianti katastrofinių įvykių metu), pokyčių rizika (iškylanti po įstatiminės bazės pasikeitimo), klaidų rizika (atsirandanti vykdant produktų kainodarą) ir t.t. Šių rizikų pasekmė yra greitai ir smarkiai išaugęs žalų dažnis bei dydis, t.y. iškyla dar viena labai svarbi rizika, kad draudimo įmonė negalės įvykdyti turimų įsipareigojimų ir taps nemoki.

Norėdamos išvengti tokių pasekmių, draudimo įmonės (draudikas) kreipiasi į perdraudimo įmones (perdraudiką) ir pastarajai įmonei atiduoda dalį prisiimamos draudimo rizikos – taip įvykdomas įsipareigojimų pasidalijimas tarp draudiko ir perdraudiko. Tokiu atveju, draudikas perdraudikui atiduoda dalį gautų draudimo įmokų, o įvykus draudiminiam įvykiui, žala (arba draudimo nuostoliai) ta pačia dalimi yra pasidalijami tarp draudiko ir perdraudiko.

Greitai plečiantis draudimo rinkai, draudikai perdraudimo paslaugomis pradėjo naudotis ne tik siekdami sumažinti draudimo rizikas. Įvykdžius perdraudimą ir pasidalinus draudimo rizikas, draudikas gali manipuliuoti mokumo atsargos reikalavimu, didinti pardavimų apimtis ir tuo pačiu išlaikyti tą pačią nuosavo kapitalo atsargą. Perdraudikas taip pat gali teikti įvairias konsultacines paslaugas, pavyzdžiui, patarti portfelio formavimo ir vystymo, rizikos valdymo klausimais. Tad perdraudikas gali būti puikus informacijos šaltinis naujai besikuriančioms draudimo įmonėms.

Draudikas, nusprendęs pasinaudoti perdraudimo paslaugomis, turi įvertinti perdraudimo įtaką įmonės valdomam portfeliui. Akivaizdu, jog už galimybę atiduoti dalį draudimo rizikų, draudikas patiria papildomų išlaidų, t.y. turi sumokėti perdraudikui perdraudimo įmokas. Natūralu, kad kuo didesnė perleidžiama rizika, tuo brangesnės perdraudimo paslaugos, tad norėdamas sumažinti perdraudimo įmokas, draudikas turi pasilikti nemažą dalį draudimo rizikų. Taip atsirando poreikis surasti pusiausvyrą tarp pasiliekamos bei atiduodamos rizikos – iškyla optimalaus perdraudimo problema.

Pirmieji tyrimai optimalaus perdraudimo tema pradėti vykdyti septintajame dešimtmetyje. Praėjus beveik pusei amžiaus, šios problemos aktualumas tik dar labiau išaugo tiek akademinkų, tiek draudikų tarpe. Iki šių dienų yra analizuojami įvairaus pobūdžio perdraudimo modeliai, kurie pagal tam tikras funkcijas yra skirstomi į tokias pagrindines grupes:

- dispersiją minimizuojantys modeliai;
- laukiamą naudingumą maksimizuojantys modeliai;
- rizikos matus minimizuojantys modeliai;
- bankroto tikimybę minimizuojantys modeliai.

Atsižvelgus į tai, kad tiek finansų įstaigos, tiek priežiūros institucijos vis didesnį dėmesį skiria rizikos matų analizei ir jų pritaikymui praktikoje, buvo nuspręsta šiame darbe ieškoti tokio optimalaus perdraudimo, kuris minimizuotų spektrinius rizikos matus.

Perdraudimas taip pat yra skirstomas pagal tai, kaip pasidalinama draudimo rizika tarp draudiko ir perdraudiko. Pagal šį aspektą perdraudimas yra išskiriamas į proporcinį ir neproporcinį perdraudimus. Perdraudimas yra vadinamas proporciniu, kai atiduodamos rizikos, draudimo įmokos bei išmokos tarp draudiko ir perdraudiko yra paskirstomos tuo pačiu santykiu. Neproporcinio perdraudimo atveju yra pasidalinama jau įvykusios žalos ir išmokamos draudimo išmokos. Draudikas prisiima atsakomybę iki sutartos su perdraudiku ribos, o tai, kas viršija nustatytą limitą, yra padengiama perdraudiko.

Dažniausiai draudimo įmonės renkasi proporcinį perdraudimą. Pirma, draudikui proporcinis perdraudimas yra patrauklus tuo, kad pasinaudojus perdraudimo paslaugomis, galima sumažinti anksčiau minėtus mokumo atsargos reikalavimus. Antra, priešingai nei neproporcinio perdraudimo atveju, perdraudimo kaina yra fiksuota – lygi tai pačiai proporcijai, kaip ir perdraudžiamos rizikos dalis, tad nustatyti perdraudimo kainą nėra sudėtinga. Šiuo atveju perdraudimo įmoka nustatoma sutarties su perdraudikais sudarymo metu ir nekinta perdraudimo laikotarpiu, todėl proporcinis perdraudimas yra paprasčiau apskaitomas. Trečia, taikant proporcinį perdraudimą, draudikas gali susigrąžinti perdraudimo komisinius bei pelno komisinius.

Proporcinis perdraudimas turi keletą atšakų. Viena iš jų yra dalinis (*angl.*, quota-share) perdraudimas. Dalinio perdraudimo metu draudikas atiduota sutartyje numatytą rizikos dalį. Dažniausiai ta dalis išreiškiama tam tikru procentu nuo draudimo išmokos ir tas pats perdraudimo procentas arba kitaip, perdraudimo lygis, vadinamas dalinio perdraudimo koeficientu, taikomas visos draudimo portfelio sutartims.

Dalinį perdraudimą rekomenduojama taikyti tuo atveju, kai draudiko portfelį sudaro didelis kiekis panašaus tipo rizikų, kurios yra vienodai vertinamos nepaisant dydžio ar tipo. Taip dalinio perdraudimo metodas apsaugo draudiką nuo minėtų atsitiktinių nuostolių, pokyčių bei klaidų rizikų. Tad vykdant dalinį perdraudimą didelis mažų ar vidutinių žalų skaičius neturės didelės įtakos draudikui. Atsižvelgus į šiuos argumentus, buvo nuspręsta magistro darbe analizuoti optimalų dalinį perdraudimą.

Šis darbas suskirstytas į dvi dalis. Pirmoje dalyje supažindinama su spektriniais rizikos matais bei šiai rizikos matų klasei priklausančiais vertės pokyčio rizika (VaR) ir sąlyginiu uodegos vidurkiu (CTE). Remiantis Weng, Cai ir Tan atliktais optimalaus perdraudimo tyrimais suformuluojamas optimalaus dalinio perdraudimo pagal spektrinius rizikos matus uždavinys. Pasinaudojus spektrinių rizikos matų savybėmis ir minėtų tyrimų rezultatais įrodoma teorema apie optimalų dalinio perdraudimo koeficentą pagal spektrinius rizikos matus. Taip pat parodoma, kaip iš bendrojo spektrinių rizikos matų apibrėžimo gauti VaR ir CTE rizikos matus bei iš minėtos teoremos išvesti optimalaus dalinio perdraudimo sprendinius VaR bei CTE atvejais. Paskutiniame pirmosios dalies skyrelyje pateikiami konkretūs optimalaus dalinio perdraudimo pavyzdžiai.

Antroje dalyje pateikiamas praktinio tyrimo aprašas. Praktinis tyrimas taip pat susideda iš dviejų dalių. Pirmojo tyrimo metu tikrinamos pirmoje darbo dalyje išvestos formulės ir jų pritaikymas praktikoje. Analizuojama, kuris iš optimalių dalinių perdraudimų yra aktualiausias draudikui. Antrojo tyrimo metu lyginama du optimalaus dalinio perdraudimo atvejai: kai atsitiktiniai nuostoliai yra pasiskirstę eksponentiškai ir kai turi Pareto skirstinį. Aptariama, kokią įtaką optimalaus dalinio perdraudimo koeficientui turi atsitiktinių nuostolių uodegos sunkumas.

1. OPTIMALUS DALINIS PERDRAUDIMAS

Šiame skyriuje susipažinsime su daliniu perdraudimu (*angl.* quota-share reinsurance), suderintais (*angl.* coherent) bei spektriniais (*angl.* spectral) rizikos matais: vertės pokyčio rizika (*ang.* value at risk, VaR) ir sąlyginiu uodegos vidurkiu (*angl.* conditional tail expectation, CTE). Apibrėžę reikiamas sąvokas bei teiginius, rasime optimalų dalinį perdraudimą pagal spektrinių rizikos matų klasę bei šiai klasei priklausančius VaR ir CTE rizikos matus. Šis skyrius remiasi Acerbi straipsniu [3] apie spektrinius rizikos matus bei Cai, Tan ir Weng atliktais optimalaus perdraudimo tyrimais pagal VaR ir CTE (žr. [6], [4]).

1.1. Įvadas

Pirmiausia įvesime pagrindinius žymėjimus. Pažymėkime X draudiko prisiimamus atsitiktinius nuostolius (prieš perdraudimą). Tegul X yra neneigiamas atsitiktinis dydis su pasiskirstymo funkcija $F_X(x) = P(X \leq x)$, išgyvenamumo funkcija $S_X(x) = 1 - F_X(x) = P(X > x)$ ir vidurkiu $\mathbb{E}(X) > 0$. Draudiko pasiliekamus atsitiktinius nuostolius pažymime X_D, o perdraudikui atiduodamus atsitiktinius nuostolius pažymėkime X_P. Tuomet $X = X_D + X_P$. Toliau analizuosime dalinį perdraudimą su perleidžiamos draudimo rizikos koeficientu $c \in [0, 1]$. Tokiu atveju draudiko ir perdraudiko atsitiktiniai nuostoliai yra išreiškiami taip:

$$X_D = (1 - c)X \text{ ir } X_P = cX.$$

Dalinio perdraudimo metu draudikas atiduoda c dalį prisiimamų draudimo rizikų perdraudikui, o pats pasilieka $1 - c$ dalį draudimo rizikų (čia draudimo rizika suprantama kaip atsitiktiniai draudimo nuostoliai). Kai $c = 0$ ir $c = 1$, turime du trivialius atvejus. Pirmasis ($c = 0$) rodo, kad draudikas prisiima visus draudimo nuostolius ir perdraudimas nėra vykdomas. Antrasis ($c = 1$) sako, jog draudikas atiduoda visus turimus draudimo nuostolius ir yra vykdomas pilnas perdraudimas.

Už galimybę atiduoti dalį prisiimamos draudimo rizikos, draudikas perdraudikui turi sumokėti perdraudimo įmoką. Tegul $\pi(X_P) \geq 0$ žymi perdraudimo įmoką, kuri priklauso nuo perdraudikui perleidžiamų atsitiktinių nuostolių dydžio. Natūralu, kad, augant X_P, perdraudimo įmoka taip pat didėja, t.y. π yra griežtai didėjanti funkcija. Tuomet $\pi(X_P) = 0$ nurodo tą atvejį, kada perdraudimas nėra vykdomas, o $\pi(X_P) > 0$, kai perdraudikui yra perleidžiama tam tikra dalis atsitiktinių nuostolių.

Bendrus draudiko prisiimamus draudimo nuostolius po dalinio perdraudimo pažymime X_T. Šie draudimo nuostoliai susideda iš draudiko pasiliekamų draudimo nuostolių bei perdraudimo įmokos:

$$X_T = X_D + \pi(X_P) = (1-c)X + \pi(cX).$$

Iš sąryšio matome: jei dalinio perdraudimo dalis c yra maža, tuomet ir perdraudimo įmoka $\pi(X_P)$ yra sąlyginiai nedidelė, tačiau tuomet atitinkamai išauga draudiko pasiliekami draudimo nuostoliai. Jeigu norime mažesnių draudiko pasiliekamų nuostolių, tada auginame c bei $\pi(X_P)$. Taip iškyla vienas svarbiausių klausimų: kokį koeficientą c parinkti, kad draudikui vykdomas perdraudimas būtų optimalus? Norėdami atsakyti į šį klausimą, ieškosime optimalaus dalinio perdraudimo koeficiento c pagal spektrinius rizikos matus: VaR ir CTE.

1.2. VaR ir CTE rizikos matai

Pastaruoju metu vieni labiausiai analizuojamų rizikos matų yra vertės pokyčio rizika (toliau, VaR) bei sąlyginis uodegos vidurkis (toliau, CTE). VaR ir CTE yra plačiai taikomi tiek finansų, tiek draudimo srityse: vertinant rinkos rizikas, optimizuojant portfelius, nustatant kapitalo pakankamumą ir t.t. VaR rizikos matas taip pat dažnai naudojamas valstybinių priežiūros institucijų, kuomet yra vertinamas finansų įstaigų mokumas. Šiame skyrelyje susipažinsime su VaR ir CTE sąvokos bei savybėmis, o vėliau pastaruosius rizikos matus pritaikysime optimalaus dalinio perdraudimo problemos sprendime. Skyrelis parašytas remiantis Artzner [2] bei Wirch ir Hardy [9] straipsniais.

1 apibrėžimas. *Atsitiktinių nuostolių X $(1-\alpha)$–lygmens, kai $0 < \alpha < 1$, apatinis kvantilis yra vadinamas vertės pokyčio rizika:*

$$VaR_\alpha(X) = \inf\{x : \mathbb{P}\{X > x\} \leq \alpha\} = \inf\{x : \mathbb{P}\{X \leq x\} \geq 1-\alpha\}.$$

Trumpai tariant, vertės pokyčio rizika – tai atsitiktinių nuostolių dydis, kuris nebus viršytas su tikimybe, lygia pasitikėjimo dydžiui $1-\alpha$ arba kitaip, su tikimybe α atsitiktiniai nuostoliai bus didesni negu VaR. Tai reiškia, kad $\mathbb{P}\{X > \mathrm{VaR}_\alpha(X)\} \leq \alpha$, kai kiekvienam $x < \mathrm{VaR}_\alpha(X)$, $\mathbb{P}\{X > x\} > \alpha$. Dažniausiai tiek teorijoje, tiek praktikoje naudojama $\alpha \in (0, 0.05)$ ir, atitinkamai, $(1-\alpha) \in (0.95, 1)$. Pavyzdžiui, pagal Mokumas II direktyvą, draudimo įmonių rizikos kapitalas kalendoriniais metais turi būti nustatytas pagal vertės pokyčio riziką su pasikliovimo lygmeniu lygiu 0.995 (t.y. $\mathrm{VaR}_{0.005}$).

Čia ir toliau tarsime, kad atsitiktinių nuostolių X pasiskirstymo funkcija yra tolydi ir aprėžtai didėjanti intervale $(0, \infty)$ su galimu šuoliu taške 0. Tokiu atveju $\mathrm{VaR}_\alpha(X) = S_X^{-1}(\alpha) = F_X^{-1}(1-\alpha)$, čia S_X^{-1} ir F_X^{-1} yra atitinkamos funkcijų S_X ir F_X atvirkštinės funkcijos. Reikia pabrėžti, kad $S_X^{-1}(x)$ egzistuoja tiems x, kurie tenkina nelygybę $0 < x < S_X^{-1}(0)$. Be to, pažymėkime $S_X^{-1}(0) = \infty$ ir $S_X^{-1}(x) = 0$, kai x tenkina $S_X(0) \leq x \leq 1$. Norėdami išvengti trivialaus atvejo, kuomet $\mathrm{VaR}_\alpha(X) = 0$ su $\alpha \geq S_X(0)$, tarkime, jog $0 < \alpha < S_X(0)$ (kai $S_X(0) = 1$, atsitiktinių nuostolių X pasiskirstymo funkcija yra tolydi taške 0).

Nors vertės pokyčio rizika parodo atsitiktinių nuostolių pasisikirstymo funkcijos kvantilį, šis rizikos matas neįvertina pasiskirstymo funkcijos uodegos ir galimų didelių nuostolių įtakos. Tai yra vienas pagrindinių nagrinėjamų VaR trūkumų. Kaip vieną iš nuostolių, didesnių už VaR, analizavimo būdų Wirch ir Hardy [9] pasiūlė kitą rizikos matą - sąlyginį uodegos vidurkį.

2 apibrėžimas. *Atsitiktinių nuostolių X $(1-\alpha)$-lygmens kvantilio, kai $\alpha \in (0, 1)$, sąlyginiu uodegos vidurkiu yra vadinama pasiskirstymo funkcijos $\Psi_\alpha(\xi)$ dešiniosios uodegos vidurkis:*

$$CTE_\alpha(X) = \int_0^\infty (1 - \Psi_\alpha(\xi)) d\xi, \tag{1}$$

čia

$$\Psi_\alpha(\xi) = \begin{cases} 0, & kai\ \xi < VaR_\alpha(X), \\ \dfrac{\mathbb{P}(X \le \xi) - (1-\alpha)}{\alpha}, & kai\ \xi \ge VaR_\alpha(X). \end{cases}$$

Taip apibrėžtas CTE literatūroje yra dažnai tapatinamas su tokiais rizikos matais kaip sąlyginė vertės pokyčio rizika (*angl.* conditional value at risk, CVaR) ar uodegos vertės pokyčio rizika (*angl.* tail value at risk, TVaR). Išvardinti rizikos matai vertina nuostolių, didesnių už VaR vidurkį, ir gali būti apibrėžiami (1) formule. Vienas pagrindinių skirtumų tarp CTE ir kitų rizikos matų yra tas, kad pateiktas CTE apibrėžimas nereikalauja, kad atsitiktinių nuostolių skirstinys būtų tolydus.

Reikia paminėti, kad VaR ir CTE yra tarpusavyje susieti, o pasinaudoję CTE apibrėžimu galime išvesti tokį sąryšį:

$$\begin{aligned} \mathrm{CTE}_\alpha(X) &= \int_0^\infty (1 - \Psi_\alpha(\xi)) d\xi \\ &= \int_0^{\mathrm{VaR}_\alpha(X)} 1 d\xi + \int_{\mathrm{VaR}_\alpha(X)}^\infty \Big[1 - \frac{\mathbb{P}(X \le \xi) - (1-\alpha)}{\alpha}\Big] d\xi \qquad (2) \\ &= \mathrm{VaR}_\alpha(X) + \frac{1}{\alpha}\int_{\mathrm{VaR}_\alpha(X)}^\infty S_X(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Kai X – tolydus atsitiktinis dydis, CTE yra sutapatinamas su dar vienu rizikos matu – tikėtinu deficitu (*angl.* expected shortfall, ES). Rizikos matų teorijoje tikėtinas deficitas yra apibrėžiamas kaip atsitiktinių nuostolių, didesnių už VaR, vidurkis. Prisiminę, jog nagrinėjame tolydžius atsitiktinius nuostolius, CTE galime užrašyti šiuo pavidalu:

$$\mathrm{CTE}_\alpha(X) = \mathrm{ES}_\alpha(X) = \mathbb{E}(X \mid X > \mathrm{VaR}_\alpha(X)).$$

Rizikos matai gali pasižymėti viena ar keliomis rizikos matų aksiomomis: invariantiškumu poslinkiui (A1), teigiamu homogeniškumu (A2), monotoniškumu (A3) ar subadityvumu (A4). Tiek VaR, tiek CTE tenkina (A1) – (A3) aksiomas. CTE taip pat pasižymi subadityvumu (A4) bei yra vadinamas suderintu rizikos matu (*angl.*, coherent risk measure).

3 apibrėžimas. *Rizikos matas ρ yra suderintas, kai bet kuriems atsitikti-*

niams dydžiams Y, Z išpildytos šios savybės:

(A1) $\rho(Z+m) = \rho(Z) + m,$ *kiekvienam* $m \in \mathbb{R};$

(A2) $\rho(\lambda Z) = \lambda\rho(Z),$ *kiekvienam* $\lambda \geq 0;$

(A3) $\rho(Y) \geq \rho(Z),$ *jei* $Y(w) \geq Z(w)$ *kiekvienam* $w \in \Omega;$

(A4) $\rho(Y+Z) \leq \rho(Y) + \rho(Z).$

Pagrindinė aksioma, kuria naudosimės ieškodami optimalaus dalinio perdraudimo, yra invariantiškumas poslinkiui (A1). VaR ir CTE šią aksiomą tenkina:

$$\begin{aligned}
\mathrm{VaR}_\alpha(X+m) &= \inf\{x \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(X+m \leq x) \geq 1-\alpha\} \\
&= \inf\{(x-m)+m \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(X \leq x-m) \geq 1-\alpha\} \\
&= \inf\{s \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(X \leq s) \geq 1-\alpha\} + m \\
&= \mathrm{VaR}_\alpha(X) + m,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{CTE}_\alpha(X+m) &= \mathbb{E}[X+m|X+m > \mathrm{VaR}_{1-\alpha}(X+m)] \\
&= \mathbb{E}[X+m|X+m > \mathrm{VaR}_\alpha(X)+m] \\
&= \mathbb{E}[X|X > \mathrm{VaR}_\alpha(X)] + m \\
&= \mathrm{CTE}_\alpha(X) + m.
\end{aligned}$$

Apibrėžę VaR, CTE ir suderintus rizikos matus, bei susipažinę su keletu jų sąryšių ir savybių, pereisime prie bendresnės rizikos matų klasės – spektrinių rizikos matų.

1.3. Spektriniai rizikos matai

Kaip buvo minėta anksčiau, rizikos matai pagal tenkinamas savybes yra skirstomi į tam tikras klases. Nagrinėjami VaR ir CTE rizikos matai taip pat yra priskiriami plačiai spektrinių rizikos matų klasei, kuri apibrėžia rizikos matus, priklausančius nuo atsitiktinių nuostolių kvantilių funkcijos bei rizikos spektro funkcijos. Susitarsime, kad toliau galime imti tiek įprastąsias, tiek apibendrintąsias funkcijas. Šiame skyrelyje, remdamiesi Acerbi straipsniu [3], nagrinėsime ir apibrėšime spektrinius rizikos matus.

Viena pagrindinių spektrinių rizikos matų savybių yra ta, kad šie rizikos matai atsižvelgia į finansų įstaigos rizikos vengimo lygį – spektrinis rizikos matas yra svertinis atsitiktinių nuostolių kvantilių funkcijos vidurkis, kur svertas priklauso finansų įstaigos požiūrio į riziką. Tokiuose rizikos matuose sverto poziciją arba rizikos vengimo lygį nusako rizikos spektro funkcija. Spektrinius rizikos matus siūloma naudoti nustatant privalomo kapitalo dydį, ieškant optimalių laukiamų rizikų apsiketimo sandorių ir t.t.

Tegul rizikos matas M_ϕ yra apibrėžtas lygybe:

$$M_\phi(X) = \int_0^1 \phi(p) F_X^{-1}(p) dp, \tag{3}$$

čia $F_X^{-1}(p) = \inf\{x : F(x) \geq p\}$ yra funkcijos F_X atvirkštinė funkcija (gali būti ir funkcijos apibendrintoji atvirkštinė) arba kitaip – atsitiktinio dydžio X p-lygmens kvantilio funkcija, o $\phi(p)$ – svertinė funkcija, $p \in [0, 1]$. M_ϕ apibrėžia nuo kvantilių priklausančių rizikos matų klasę, kur kiekvienas šios klasės rizikos matas yra nusakomas tam tikra svertine funkcija $\phi(p)$.

Rizikos vengianti finansų įstaiga teiks pirmenybę tokiems rizikos matams, kurie atsižvelgia į jos neigiamą požiūrį į riziką – taip atsiranda spektrinių rizikos matų poreikis. Bendruoju atveju, spektrinis rizikos matas, kai X yra neneigiami atsitiktiniai nuostoliai, gali būti apibrėžtas (3) lygybe, kur $\phi(p)$, vadinama rizikos spektro arba sverto funkcija, atspindi finansų įstaigos rizikos vengimo lygį.

Analizuodamas spektrinius rizikos matus, Acerbi taip pat apibrėžė tris sąlygas, kurias turi tenkinti funkcija $\phi : [0, 1] \to \mathbb{R}$:

(S1) $\phi(p) \geq 0$;

(S2) $\displaystyle\int_0^1 \phi(p) dp = 1$;

(S3) ϕ – nemažėjanti.

Pirmoji sąlyga reikalauja, kad rizikos spektro funkcija išreikštų rizikos vengiančias arba abejingas rizikai finansų įstaigas, t.y. prisiimamos rizikos svoris būtų neneigiamas. Antroji sąlyga sako, jog visų svorių suma turi būti lygi vienetui arba tai, kad rizikos spektras būtų tikimybinio mato tankis. Trečioji sąlyga yra pati svarbiausia – ji reikalauja, kad didesni nuostoliai atspindėtų nemažesnį rizikos svertą negu mažesnių nuostolių atveju. Taip per funkciją ϕ yra išreiškiamas subjektyvus finansų įstaigos požiūris į riziką. Šias savybes išpildanti funkcija yra vadinama leistina rizikos spektro funkcija.

1 pavyzdys (VaR ir CTE leistinos rizikos spektro funkcijos)**.** Šiame pavyzdyje apibrėšime funkciją $\phi(p)$ VaR ir CTE rizikos matams.

Bendruoju atveju VaR nėra suderintas rizikos matas, tačiau jį galima išreikšti (3) lygybe apibrėžta funkcija $M_\phi(X)$ ir taip gauti vieną iš spektrinių rizikos matų. Akivaizdu, kad $M_\phi(X) = \int_0^1 \phi(p)\ \mathrm{VaR}_p(X)dp$, kai $p \in (0,1)$. Kadangi VaR sukoncentruoja visą riziką į vieną tašką, t.y. į α kvantilį, tai

$$\mathrm{VaR}_\alpha(X) = M_\phi(X)\,\mathrm{su}\,\phi(p) = \delta(p-\alpha), \tag{4}$$

čia $\delta(p-\alpha)$ yra Dirako apibendrintoji δ-funkcija, taške $p = \alpha$ lygi begalybei, o visur kitur – 0. Pastebėsime, kad šiuo atveju naudojama Dirako δ-funkcija yra apibrėžiama lygybe: $\int_a^b f(x)\delta(x-c)dx = f(c), \forall c \in (a,b)$.

Išraiška, gauta (4) lygybėje, dar kartą parodo, jog VaR neįvertina uodegoje esančių nuostolių įtakos finansų įstaigai ir susikoncentruoja ties tam tikra kvantilio reikšme. Todėl rizikos spektro funkcija, išreikšta per Dirako δ-funkciją, atspindi nevisai adekvatų požiūrį į riziką. Norėdami gauti svaresnę rizikos spektro funkciją, paanalizuokime CTE rizikos matą.

Priešingai nei VaR, kai X – tolydus atsitiktinis dydis, CTE yra suderintas rizikos matas ir tuo pačiu – spektrinis, tad CTE taip pat galima išreikšti per M_ϕ funkciją ir rasti atitinkamą leistino rizikos spektro funkciją. Kadangi analizuojami nuostoliai yra neneigiami atsitiktiniai dydžiai, CTE apibrėžimui galima naudoti tokią išraišką:

$$\mathrm{CTE}_\alpha(X) = \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha \mathrm{VaR}_u(X)du,\ \alpha \in (0,1). \tag{5}$$

Tuomet akivaizdu, kad CTE leistino rizikos spektro funkcija yra lygi $\frac{1}{\alpha}$, kai $p \in [0, \alpha]$, t.y.

$$\text{CTE}_\alpha(X) = M_\phi(X) \,\text{su}\, \phi(p) = \frac{1}{\alpha}\mathbb{I}_{0 \le p \le \alpha}. \tag{6}$$

Iš (5) lygybės matome, jog CTE nusako vidurkį $\alpha 100\%$ didžiausių nuostolių su tuo pačiu svoriu, tad šiuo atveju ir $\phi(p)$ yra tolygiai pasiskirsčiusi svorio funkcija, kai $p \in (0, \alpha]$, o visur kitur lygi nuliui.

Nors (6) lygybėje apibrėžta leistino rizikos spektro funkcija neapima viso intervalo $[0, 1]$, vistik pasinaudojusi tokia funkcija, finansų įstaiga gali išreikšti objektyvų požiūrį į riziką ir varijuoti rizikos vengimo lygiu, imdama skirtingas ϕ funkcijas, ko negalima atlikti VaR atveju.

2 pavyzdys (Eksponentinė leistina rizikos spektro funkcija, [8])**.** Parodysime, kaip rasti funkciją $\phi(p)$, kada turime naudingumo funkciją $u(x)$. Tiek teorijoje, tiek praktikoje dažnai nagrinėjamos eksponentinės naudingumo funkcijos $u(x)$. Rizikos vengiančioms finansų įstaigoms naudingumo funkcija yra

$$u(x) = 1 - e^{-x/r}, r > 0, x \ge 0 \tag{7}$$

čia r yra konstanta, žyminti toleranciją rizikai: $r > 0$ rodo rizikos vengiančią finansų įstaigą. Atskirais atvejais eksponentinė naudingumo funkcija gali būti išreikšta neutralioms rizikai finansų įstagoms, tuomet $r = 0$, bei rizikos siekiančioms – tada $r < 0$.

Jeigu naudingumo funkcija $u(x)$ yra tolydi, $u'(x) > 0$, ir egzistuoja tolydi $u''(x)$, tuomet galime apibrėžti Arrow–Pratt absoliučią rizikos vengimo funkciją $R(x)$ bei santykinę rizikos vengimo funkciją $A(x)$:

$$R(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)},$$
$$A(x) = -\frac{xu''(x)}{u'(x)}.$$

Iš (7) formulės matome, kad eksponentinė naudingumo funkcija tenkina $R(x)$

bei $A(x)$ funkcijų sąlygas ir šiuo atveju:

$$R(x) = r,$$
$$A(x) = xr.$$

Reikia rasti tokią funkciją, kuri tenkintų (S1) – (S3) sąlygas. Žinome, kad eksponentinio atsitiktinio dydžio tankis yra $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$. Tuomet vietoje $-\lambda x$ įstatę $A(x) - R(x)$, gauname naują funkciją

$$\varphi(p) = \lambda e^{-r(1-p)}, \lambda > 0 \text{ ir } p \in [0, 1]. \tag{8}$$

Akivaizdu, kad (8) lygybe apibrėžta funkcija $\varphi(p)$ yra neneigiama ir nemažėjanti funkcija, t.y. tenkinamos (S1) ir (S3) savybės. (S2) sąlyga bus išpildyta tuomet, kai

$$\lambda = \frac{r}{1 - e^{-r}}. \tag{9}$$

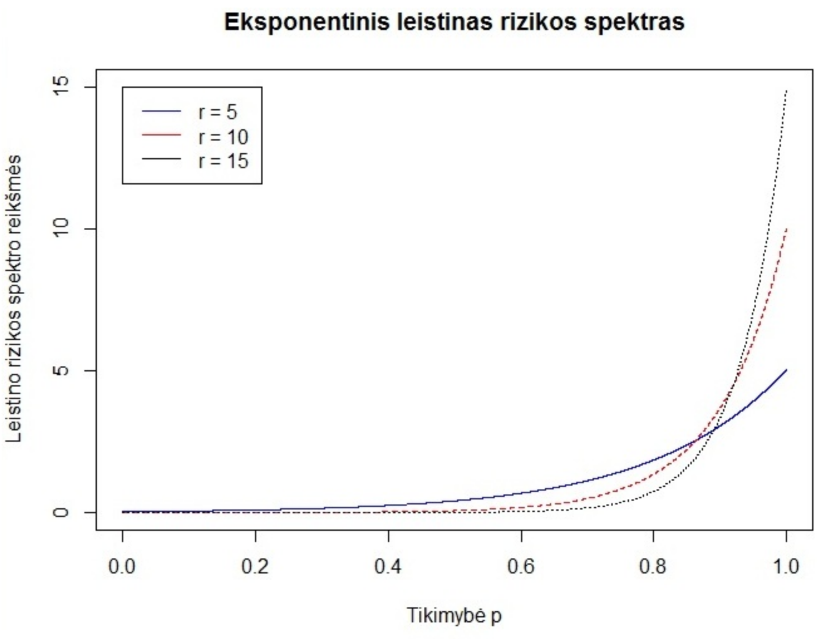
Įstatę (9) išraišką į (8) funkciją, gauname eksponentinę leistino rizikos spektro funkciją:

$$\phi(p) = \frac{re^{-r(1-p)}}{1 - e^{-r}}, \ \ p \in [0, 1]. \tag{10}$$

1 paveikslėlyje pateikiami eksponentinės leistino rizikos spektro funkcijos $\phi(p)$ grafikai su trimis skirstingai rizikos tolerancijos koeficientais ($r = 5$, $r = 10$, $r = 15$). Pastebėsime, kad $\phi(p)$ yra eksponentiškai didėjanti funkcija pagal p ir nuo tam tikro momento draudiko rizikos vengimo lygis auga greičiau nei draudimo nuostoliai.

$\square$

Reikia paminėti, jog Acerbi, apibrėždamas leistiną rizikos spektro funkciją, vietoj nemažėjimo sąlygos (S3) kartais naudoja nedidėjimo sąlygą. Tokia sąlyga galioja tuomet, kai analizuojamos neigiamų atsitiktinių dydžių pasiskirstymo funkcijos. Nagrinėjamu atveju atsitiktiniai nuostoliai X yra neneigiami atsitiktiniai dydžiai, todėl $\phi(p)$ – nemažėjanti funkcija, tenkinanti (S1) – (S2) sąlygas.



1 pav. Eksponentinių leistinų rizikos spektrų grafikai, kai tolerancijos koeficientas r yra 5, 10, 15.

4 apibrėžimas. *Tegul X yra neneigiamas atsitiktinis dydis, o ϕ tenkina (S1) – (S3) sąlygas. Tuomet rizikos matas*

$$M_\phi(X) = \int_0^1 \phi(p) F_X^{-1}(p) dp$$

yra vadinamas spektriniu rizikos matu, generuojamu leistinos rizikos spektro funkcijos ϕ.

Susipažinę su spektrinių rizikos matų klase M_ϕ ir apibrėžę pagrindines funkcijos ϕ sąlygas, toliau pereisime prie dalinio perdraudimo optimizavimo VaR, CTE ir spektrinių rizikos matų atžvilgiu.

1.4. Optimizavimas spektrinių rizikos matų VaR ir CTE atžvilgiu

Pirmame skyrelyje apibrėžėme atsitiktinius nuostolius X, draudiko pasiliekamus atsitiktinius nuostolius X_D, perdraudikui atiduodamus atsitiktinius nuostolius $X_P = X - X_D$ bei draudiko mokamą perdraudimo įmoką $\pi(X_P)$. Dalinio perdraudimo atveju draudiko atsitiktiniai nuostoliai:

$$X_T = X_D + \pi(X_P) = (1-c)X + \pi(cX). \tag{11}$$

Pritaikę invariantiškumo poslinkiui savybę VaR ir CTE rizikos matams bei įstatę (11) atsitiktinių nuostolių išraišką gauname:

$$\begin{aligned} \mathrm{VaR}_\alpha(X_T) &= \mathrm{VaR}_\alpha(X_D) + \pi(X_P), \\ \mathrm{CTE}_\alpha(X_T) &= \mathrm{CTE}_\alpha(X_D) + \pi(X_P). \end{aligned} \tag{12}$$

Pasinaudoję (2) lygybe nusakytu VaR ir CTE sąryšiu, CTE pagal draudiko pasiliekamus nuostolius išskaidome į

$$\mathrm{CTE}_\alpha(X_D) = \mathrm{VaR}_\alpha(X_D) + \frac{1}{\alpha}\int_{\mathrm{VaR}_\alpha(X_D)}^{\infty} S_{X_D}(x)dx,$$

o pasinaudoję (12) lygybėmis, gauname CTE pagal bendrus draudiko pasiliekamus nuostolius:

$$\mathrm{CTE}_\alpha(X_T) = \mathrm{VaR}_\alpha(X_D) + \frac{1}{\alpha}\int_{\mathrm{VaR}_\alpha(X_D)}^{\infty} S_{X_D}(x)dx + \pi(X_P). \tag{13}$$

Taip išvedėme pagrindinius VaR ir CTE rizikos matų sąryšius atsitiktiniams pasiliekamiems draudiko nuostoliams bei bendriems draudiko nuostoliams, kai yra vykdomas perdraudimas. Toliau detaliau analizuosime šiuos sąryšius, kuomet yra vykdomas konkretus perdraudimo metodas, t.y. dalinis perdraudimas.

Dalinio perdraudimo atveju, pasiliekamų atsitiktinių nuostolių X_D išgyvenamumo funkcija yra

$$S_{X_D}(x) = \mathbb{P}((1-c)X > x) = \begin{cases} S_X(\frac{x}{1-c}), & \text{kai } 0 \le c < 1, \\ 0, & \text{kai } c = 1, \end{cases}$$

kai $x \ge 0$, o $(1-\alpha)$ pasikliovimo lygmens VaR, žymimas $\mathrm{VaR}_\alpha(X_D; c)$, yra:

$$\mathrm{VaR}_\alpha(X_D; c) = (1-c)S_X^{-1}(\alpha). \tag{14}$$

Ši lygybė kartu su invariantiškumu poslinkiui duoda VaR pagal bendrus draudiko nuostolius išraišką, kurią pažymime $\mathrm{VaR}_\alpha(X_T;c)$. Tuomet kiekvienam $0 \le c \le 1$ ir $0 < \alpha < S_X(0)$ turėsime:

$$\begin{aligned} \mathrm{VaR}_\alpha(X_T;c) &= \mathrm{VaR}_\alpha(X_T;c) + \pi(X_P) \\ &= (1-c)S_X^{-1}(\alpha) + \pi(cX). \end{aligned} \tag{15}$$

Analogiškai, pasinaudoję (13) ir (14) lygybėmis, gauname CTE pagal bendrus draudiko nuostolius, kuriuos pažymime $\mathrm{CTE}_\alpha(X_T;c)$. Šiuo atveju kiekvienam $0 \le c \le 1$ ir $0 < \alpha < S_X(0)$ CTE skaičiuosime pagal formulę:

$$\begin{aligned} \mathrm{CTE}_\alpha(X_T;c) &= \mathrm{VaR}_\alpha(X_D;c) + \frac{1}{\alpha}\int_{\mathrm{VaR}_\alpha(X_D,c)}^{\infty} S_{X_D}(x)dx + \pi(X_P) \\ &= (1-c)S_X^{-1}(\alpha) + \frac{1-c}{\alpha}\int_{S_X^{-1}(\alpha)}^{\infty} S_X(x)dx + \pi(cX). \end{aligned} \tag{16}$$

Pastebėsime, kad (14) ir (15) formulėse VaR bei CTE rizikos matai priklauso ne tik nuo pasiliekamų atsitiktinių nuostolių, bet ir nuo dalinio perdraudimo koeficiento c.

Grįžkime prie (12) lygybės, bendrų draudiko nuostolių išskaidymo. Šioje lygybėje išryškėja pagrindinė draudikui kylanti dilema. Prisiminkime, jog draudimo įmoka $\pi(X_P)$ yra X_P atžvilgiu didėjanti funkcija. Tai reiškia, kad, kuo mažesnė rizikos dalis yra perleidžiama perdraudikui, tuo mažesnius perdraudimo kaštus patiria draudikas. Kita vertus, kuo mažesnę rizikos dalį pasilieka draudikas, tuo didesnės yra patiriamos perdraudimo išlaidos. Todėl reikia rasti kompromisą tarp atiduodamų ir pasiliekamų atsitiktinių nuostolių dydžių: optimalaus perdraudimo problema iš esmės yra optimalaus X_D ir X_P padalijimo arba optimalaus dalinio perdraudimo koeficiento c^* nustatymo problema.

(14) ir (15) lygybėse esanti VaR ir CTE rizikos matų priklausomybė nuo koeficiento c sako, kad optimalaus perdraudimo modelių tikslas rasti optimalų koeficientą c^*, kuris minimizuotų analizuojamus rizikos matus. Taigi, šiuo atveju optimalaus dalinio perdraudimo modeliai ieško tokių dalinio perdraudimo koeficientų c^*, kurie būtų žemiau esančių VaR ir CTE optimizavimo

uždavinių sprendiniai:

$$\begin{aligned} &(\text{VaR optimizacija}) \quad \mathrm{VaR}_\alpha(X_T;c^*) = \operatorname*{argmin}_{c\in[0,1]}\Big\{\mathrm{VaR}_\alpha(X_T;c)\Big\}; \\ &(\text{CTE optimizacija}) \quad \mathrm{CTE}_\alpha(X_T;c^*) = \operatorname*{argmin}_{c\in[0,1]}\Big\{\mathrm{CTE}_\alpha(X_T;c)\Big\}. \end{aligned} \tag{17}$$

Vieni pirmųjų šiuos optimalaus dalinio perdraudimo modelius išvedė Cai ir Tan [5]. Pastebėsime, kad gautieji optimalaus dalinio perdraudimo modeliai yra nesudėtingi ir gali būti praktiškai pritaikomi draudime. Atiduodamas dalį nuostolių, draudikas siekia minimizuoti prisiimamą draudimo riziką. Optimalų draudiko portfelį būtų galima surasti išsprendus VaR ir CTE optimizavimo uždavinius.

Toliau suformuluosime apibendrintą dalinio perdraudimo optimizavimo uždavinį pagal spektrinius rizikos matus. Kaip jau minėjome ir parodėme 1 pavyzdyje, VaR ir CTE priklauso šiai rizikos matų klasei, tad VaR bei CTE optimizavimo uždavinius galime suvesti į vieną bendrą spektrinių rizikos matų optimizavimo problemą.

Pasinaudokime (11) lygybėje apibrėžtu bendrų draudiko nuostolių išskaidymu. Tuomet (3) formulėje vietoje atsitiktinių nuostolių X įstatome X_T ir pritaikome invariantiškumo poslinkiui aksiomą:

$$\begin{aligned} M_\phi(X_T) &= \int_0^1 \phi(p) F_{X_T}^{-1}(p)dp \\ &= \int_0^1 \phi(p) F_{X_D}^{-1}(p)dp + \pi(X_P). \end{aligned}$$

Žinome, jog dalinio perdraudimo atveju $X_D = (1-c)X$ ir $\pi(X_P) = \pi(cX)$, čia $c \in [0,1]$ – dalinio perdraudimo koeficientas. Tada $F_{X_D}^{-1}(p)$ galime išreikšti per išgyvenamumo funkciją $S_X^{-1}(p)$:

$$\begin{aligned} F_{X_D}^{-1}(p) &= \mathrm{VaR}_{1-p}((1-c)X) = (1-c)\mathrm{VaR}_{1-p}(X) \\ &= (1-c)F_X^{-1}(p) = (1-c)S_X^{-1}(1-p). \end{aligned}$$

Įstatome gautą $F_{X_D}^{-1}(p)$ išraišką į $M_\phi(X_T)$ funkciją:

$$M_\phi(X_T, c) = (1-c)\int_0^1 \phi(p) S_X^{-1}(1-p)dp + \pi(cX). \tag{18}$$

Gavome spektrinių rizikos matų priklausomybę ne tik nuo atsitiktinių nuostolių X, bet ir nuo dalinio perdraudimo koeficiento c. Todėl kaip ir VaR bei CTE atveju, optimalaus dalinio perdraudimą spektrinių rizikos matų prasme problemą išspręsime suradę optimalų dalinio perdraudimo koeficientą c^*, kuris minimizuotų spektrinius rizikos matus. Tuomet $M_\phi(X_T)$ pavidalo rizikos matų optimizavimo uždavinys atrodo taip:

$$(M_\phi \text{ optimizacija}) \quad M_\phi(X_T; c^*) = \underset{c\in[0,1]}{\operatorname{argmin}} \Big\{ M_\phi(X_T; c) \Big\}. \tag{19}$$

Šiame optimizavimo uždavinyje įstatę konkrečią leistino rizikos spektro funkciją, atitinkamai turėtumėme tam tikro rizikos mato optimizavimo uždavinį. Tarkime, jog $\phi(p)$ yra apibrėžta (11) lygybe (2 pavyzdys) tuomet (19) optimizacija tampa eksponentinio spektrinio rizikos mato optimizavimo uždaviniu. Analogiškai pasinaudoję 1 pavyzdyje aprašytomis VaR ir CTE funkcijos $\phi(p)$ išraiškomis, gautume atitinkamas (17) punktu išvestas optimizacijas.

1.5. Optimalus dalinis perdraudimas pagal spektrinius rizikos matus

Šiame skyrelyje pateikiama teorema apie optimizavimo uždavinio, apibrėžto (19) lygybe, sprendinius. Pasinaudoję ankstesniuose skyreliuose pateiktomis formulėmis įrodysime teoremą apie optimalaus dalinio perdraudimo koeficiento c^* reikšmes, kai naudojami spektriniai rizikos matai. Norėdami supaprastinti pateikiamos teoremos formuluotę, įvedame pažymėjimą w_ϕ:

$$w_\phi = \int_0^1 \phi(p) S_X^{-1}(1-p)dp. \tag{20}$$

1 teorema. *Optimalus dalinio perdraudimo koeficientas pagal spektrinius rizikos matus:*

i) Tegul perdraudimo įmoka $\pi(\cdot)$ tenkina lygybę $\pi(0) = 0$ ir teigiamo homogeniškumo salygą, t.y. $\pi(cX) = c\pi(X)$ kiekvienam $c > 0$. Tuomet optimalus dalinis perdraudimas yra trivialus ir optimalus dalinio perdraudimo koeficientas c^* yra:

$$c^* = \begin{cases} 0, & \text{kai } \pi_X > w_\phi, \\ \text{bet kuris skaičius iš } [0,1], & \text{kai } \pi_X = w_\phi, \\ 1, & \text{kai } \pi_X < w_\phi. \end{cases} \tag{21}$$

ii) Tegul perdraudimo įmokos funkcija $\pi(cX)$ yra griežtai iškila koeficiento c atžvilgiu kiekvienam $0 \leq c \leq 1$. Tuomet netrivialus optimalus dalinis perdraudimas egzistuoja tada ir tik tada, jei egzistuoja tokia konstanta $c^* \in (0,1)$, kad

$$\pi_c'(c^*X) - w_\phi = 0, \tag{22}$$

čia $\pi_c'(\cdot)$ yra funkcijos $\pi(cX)$ išvestinė pagal c taške $c = c^*$. Be to c^*, tenkinantis (21) lygybę, yra optimalus dalinio perdraudimo koeficientas.

Įrodymas. Įrodydami šią teoremą samprotausime kaip ir Weng, [4] 52-53 pusl., įrodydamas optimalaus dalinio perdraudimo pagal VaR teoremą.

i) Jei $\pi(cX) = c\pi(X)$, kai $c > 0$, tai pagal (18) lygybę:

$$\begin{aligned} M_\phi(X_T, c) &= \int_0^1 \phi(p)\big((1-c)S_X^{-1}(1-p) + c\pi(X)\big)dp \\ &= (1-c)\int_0^1 \phi(p)S_X^{-1}(1-p)dp + c\pi(X)\int_0^1 \phi(p)dp \\ &= (1-c)\int_0^1 \phi(p)S_X^{-1}(1-p)dp + c\pi(X) \\ &= (1-c)w_\phi + c\pi(X) \\ &= w_\phi + c(\pi(X) - w_\phi) \end{aligned}$$

– gavome tiesinę $M_\phi(X_T, c)$ funkciją pagal c. Tuomet, kai $\pi(X) < w_\phi$, tai $\pi(X) - w_\phi < 0$ ir $M_\phi(X_T; c)$ minimali reikšmė yra taške $c = 1$. Jei $\pi(X) > w_\phi$, tai $\pi(X) - w_\phi > 0$ ir minimali reikšmė bus pasiekta, kai c artės prie 0, tuomet $M_\phi(X_T; c)$ reikšmė mažės ir taške $c = 0$ bus lygi w_ϕ. Todėl optimalus dalinio perdraudimo koeficientas $c^* = 0$. Kai $\pi(X) = w_\phi$, tuomet $M_\phi(X_T; c) = w_\phi$, t.y. $M_\phi(X_T; c)$ nepriklausys nuo c reikšmės ir minimumas bus pasiektas su kiekvienu $c \in [0, 1]$. Taigi, įvertinę visus galimus variantus, gavome, jog optimalus dalinis perdraudimas yra trivialus ir optimalaus dalinio perdraudimo koeficientas c^* yra apibrėžiamas (21) lygybe.

ii) Jei $\pi(cX)$ yra griežtai iškila funkcija pagal c, tai iš (19) lygybės seka, kad ir $M_\phi(X_T; c)$ yra griežtai iškila funkcija. Vadinasi, $M_\phi(X_T; c)$ pasiekia minimalią reikšmę tokiam c^*, kuris yra tenkina lygybę:

$$\frac{\partial}{\partial c} M_\phi(X_T; c)\bigg|_{c=c^*} = (1 - c)w_\phi + \frac{\partial}{\partial c}\pi(cX)\bigg|_{c=c^*} = \frac{\partial}{\partial c}\pi(cX)\bigg|_{c=c^*} - w_\phi = 0.$$

□

Gavome dvi optimalaus dalinio perdraudimo koeficiento c^* išraiškas pagal spektrinius rizikos matus. Pirmuoju atveju turime trivialų dalinį perdraudimą, o antruoju – netrivialų. Abiem atvejais perdraudimo įmoka gali būti skaičiuojama praktikoje taikomais įmokų nustatymo principais, kurie tenkina teoremoje apibrėžtas sąlygas. Toliau šią teoremą pritaikysime konkretesniems atvejams: VaR ir CTE rizikos matams.

1.6. Optimalus dalinis perdraudimas pagal VaR ir CTE

Pasinaudosime ankstesniame skyrelyje pateikta 1 teorema ir parodysime, kaip iš jos išplaukia Weng [4] rezultatai. 1 teoremoje naudojamas pažymėjimas w_ϕ. Tegul $p = \alpha$ ir $\phi(p)$ yra lygi 1 pavyzdyje apibrėžtai VaR leistino rizikos spektro funkcijai. Tuomet $w_\phi = S_X^{-1}(\alpha)$. Įstatę šią w_ϕ išraišką į 1 teoremą gauname naują optimalaus dalinio perdraudimo uždavinio sprendimą pagal VaR.

2 teorema. *Optimalus dalinio perdraudimo koeficientas pagal VaR ([4], 2.1 teorema):*

i) Tegul perdraudimo įmoka $\pi(\cdot)$ tenkina lygybę $\pi(0) = 0$ ir teigiamo homogeniškumo salygą, t.y. $\pi(cX) = c\pi(X)$ kiekvienam $c > 0$. Tuomet *optimalus dalinis perdraudimas yra trivialus ir optimalus dalinio perdraudimo koeficientas* c^* *yra:*

$$c^* = \begin{cases} 0, & \textit{kai } \pi_X > S_X^{\leftarrow 1}(\alpha), \\ \textit{bet kuris skaičius iš } [0,1], & \textit{kai } \pi_X = S_X^{\leftarrow 1}(\alpha), \\ 1, & \textit{kai } \pi_X < S_X^{\leftarrow 1}(\alpha). \end{cases} \tag{23}$$

ii) Tegul perdraudimo įmokos funkcija $\pi(cX)$ *yra griežtai iškila koeficiento* c *atžvilgiu kiekvienam* $0 \leq c \leq 1$*. Tuomet netrivialus optimalus dalinis perdraudimas egzistuoja tada ir tik tada, jei egzistuoja tokia konstanta* $c^* \in (0,1)$*, kad*

$$\pi_c'(c^*X) - S_X^{\leftarrow 1}(\alpha) = 0, \tag{24}$$

čia $\pi_c'(\cdot)$ *yra funkcijos* $\pi(cX)$ *išvestinė pagal* c*. Be to* c^**, tenkinantis (24) lygybę, yra optimalus dalinio perdraudimo koeficientas.*

Atlikę panašaus pobūdžio pakeitimus funkcijai w_ϕ gausime optimalaus dalinio perdraudimo koeficiento c^* sąlygas pagal CTE rizikos matą. Norėdami supaprastinti žemiau esančios teoremos formuluotę, įveskime pažymėjimą u_α:

$$\mathrm{u}_\alpha = \mathrm{S}_X^{-1}(\alpha) + \frac{1}{\alpha}\int_{\mathrm{S}_X^{-1}(\alpha)}^{\infty} S_X(x)dx.$$

3 teorema. *Optimalus dalinio perdraudimo koeficientas pagal CTE ([4], 2.2 teorema):*

i) Tegul perdraudimo įmoka $\pi(\cdot)$ *tenkina lygybę* $\pi(0) = 0$ *ir teigiamo homogeniškumo salygą, t.y.* $\pi(cX) = c\pi(X)$ *kiekvienam* $c > 0$*. Tuomet optimalus dalinis perdraudimas yra trivialus ir optimalus dalinio perdrau-dimo koeficientas* c^* *yra:*

$$c^* = \begin{cases} 0, & \textit{kai } \pi_X > u_\alpha, \\ \textit{bet kuris skaičius iš } [0,1], & \textit{kai } \pi_X = u_\alpha, \\ 1, & \textit{kai } \pi_X < u_\alpha. \end{cases} \tag{25}$$

ii) Tegul perdraudimo įmokos funkcija $\pi(cX)$ *yra griežtai iškila koeficiento* c *atžvilgiu kiekvienam* $0 \leq c \leq 1$*. Tuomet netrivialus optimalus dalinis* *perdraudimas egzistuoja tada ir tik tada, jei egzistuoja tokia konstanta* $c^* \in (0,1)$*, kad*

$$\pi_c'(c^*X) - u_\alpha = 0, \tag{26}$$

kur $\pi_c'(\cdot)$ *yra funkcijos* $\pi(cX)$ *išvestinė pagal* c*. Be to* c^**, tenkinantis (26) lygybę, yra optimalus dalinio perdraudimo koeficientas.*

Taigi, gavome optimalų dalinį perdraudimą pagal VaR ir CTE rizikos matus. Sekančiame skyrelyje esančiuose pavyzdžiuose parodysime 1, 2 ir 3 teoremų pritaikymus teigiamai homogeniškoms bei griežtai iškiloms perdraudimo įmokoms.

1.7. Optimalaus dalinio perdraudimo pavyzdžiai

Šiame skyrelyje apžvelgsime keletą optimalaus dalinio perdraudimo pavyzdžių, kai perdraudimo įmoka π yra apibrėžta konkrečiais, praktikoje naudojamais, draudimo įmokų skaičiavimo principais. Vėliau praktiniam tyrimui naudosime taip pat konkrečius atsitiktinių nuostolių X skirstinius – eksponentinį ir Pareto. Tad šiame skyrelyje toliau tarsime, kad X yra eksponentiškai pasiskirstę, t.y. $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, $S_X(x) = e^{-\lambda x}$, čia $x \geq 0$, $\lambda > 0$ ir $S_X^{-1}(x) = -\frac{1}{\lambda}\ln(x)$, $x \in (0,1]$.

1, 2 ir 3 teoremose pateikiami du optimalaus dalinio perdraudimo koeficiento c^* problemos sprendiniai: trivialus ir netrivialus. Tinkamai parinkus perdraudimo įmokos skaičiavimo principą, galima gauti vieną iš minimų koeficiento c^* sprendinių: trivialaus sprendinio atveju perdraudimo įmoka turi būti teigiamai homogeniška, o netrivialaus – griežtai iškila. Atsižvelgus į tokį koeficiento c^* sprendinių aibės ir perdraudimo įmokų skaičiavimo principų skaidymą, toliau analizuojami pavyzdžiai taip pat padalinti į atitinkamas sprendinių grupes.

Trivialus optimalus dalinio perdraudimo koeficientas c^*. Kaip jau minėjome, šiuo atveju perdraudimo įmoka turi tenkinti dvi savybes: $\pi(cX) = c\pi(X)$ ir $\pi(0) = 0$, kai $c \in [0,1]$. Didžioji dalis literatūroje pateikiamų draudimo įmokų skaičiavimo principų, pavyzdžiui, vidurkio, standartinio nuokrypio, svertinio vidurkio ir kiti, tenkina šias savybes. Tačiau dažniausiai tam tikras skaičiavimo principas turi išpildyti papildomas sąlygas, todėl galutiniai rezultatai (draudimo įmokos) yra skirtingi.

Tarkime, kad perdraudimo įmoka π yra apskaičiuojama pagal van Heerwaarden ir Kaas apibrėžtą draudimo įmokų skaičiavimo principą (*angl.*, Dutch premium principle, žr. [1], [10]):

$$\pi(X) = \mathbb{E}(X) + \theta\mathbb{E}[(X - \beta\mathbb{E}(X))_+], \;\; \beta \geq 1, \;\; 0 < \theta \leq 1,$$

čia θ yra teigiamos atsargos koeficientas, o β – rizikos naštos koeficientas. Akivaizdu, jog taip apibrėžta perdraudimo įmoka yra teigiamai homogeniška, o tuo atveju, kai perdraudikas nepatiria nuostolių, yra lygi nuliui. Ši draudimo įmoka gali būti naudojama tiek draudimo, tiek perdraudimo įmonių veikloje – atsižvelgdami į draudimo rizikingumą, draudiminių įvykių istoriją, žalų administravimo sąnaudas ir t.t., draudikas ar perdraudikas gali parinkti atitinkamus θ bei β koeficientus ir taip nustatyti optimalią draudimo/perdraudimo įmoką.

Panagrinėkime konkretų perdraudimo atvejį, t.y. kai X – eksponentiškai pasiskirstęs atsitiktinis dydis. Žinome, kad tokio atsitiktinio dydžio vidurkis yra $\frac{1}{\lambda}$. Tuomet perdraudimo įmoka $\pi(X)$:

$$\begin{aligned}
\pi(X) &= \frac{1}{\lambda} + \theta\mathbb{E}[(X - \frac{\beta}{\lambda})_+] \\
&= \frac{1}{\lambda} + \theta\lambda\int_0^\infty [(x - \frac{\beta}{\lambda})_+]e^{-\lambda x}dx \\
&= \frac{1}{\lambda} + \theta\lambda\int_{\frac{\beta}{\lambda}}^\infty xe^{-\lambda x}dx - \theta\beta\int_{\frac{\beta}{\lambda}}^\infty e^{-\lambda x}dx \\
&= \frac{1}{\lambda} - \theta\lambda\Big(\frac{(\lambda x + 1)e^{-\lambda x}}{\lambda^2}\Big|_{\frac{\beta}{\lambda}}^\infty\Big) + \theta\beta\Big(\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\Big|_{\frac{\beta}{\lambda}}^\infty\Big) \\
&= \frac{1}{\lambda} + \theta\frac{(\beta+1)e^{-\beta}}{\lambda} - \theta\beta\frac{e^{-\beta}}{\lambda} \\
&= \frac{1}{\lambda}\Big(1 + \theta e^{-\beta}\Big), \;\; \lambda > 0, \;\; \beta \geq 1, \;\; 0 < \theta \leq 1.
\end{aligned}$$

O spektrinio rizikos mato optimizavimo uždavinys atrodys taip:

$$
\begin{aligned}
M_\phi(X_T, c) &= (1-c)\int_0^1 \phi(p)\frac{\ln(1-p)}{-\lambda}dp + \frac{c}{\lambda}(1+\theta e^{-\beta}) \\
&= \int_0^1 \phi(p)\frac{\ln(1-p)}{-\lambda}dp + c\Big(\frac{1+\theta e^{-\beta}}{\lambda} - \int_0^1 \phi(p)\frac{\ln(1-p)}{-\lambda}dp\Big)
\end{aligned}
$$

Pritaikę 1 teoremos i) dalies įrodymo schemą, gauname šio uždavinio sprendinį, t.y. optimalaus dalinio perdraudimo koeficiento c^* išraišką:

$$
c^* = \begin{cases} 0, & \text{kai } -\theta e^{-\beta} - 1 < \int_0^1 \phi(p)\ln(1-p)dp, \\ \text{bet kuris skaičius iš } [0,1]\,, & \text{kai } -\theta e^{-\beta} - 1 = \int_0^1 \phi(p)\ln(1-p)dp, \\ 1, & \text{kai } -\theta e^{-\beta} - 1 > \int_0^1 \phi(p)\ln(1-p)dp. \end{cases}
$$

Parodėme, kad pagal Van Heerwaarden ir Kaas apibrėžtą draudimo įmokos skaičiavimo principą egzistuoja trivialus (19) uždavinio sprendinys, bei radome jo išraišką, kai atsitiktiniai nuostoliai yra pasiskirstę eksponentiškai. Atitinkamai parinkus rizikos spektro funkciją ϕ (žr. 1 pavyzdį), sprendinys gali būti gautas VaR ir CTE atvejais.

Toks sprendimo būdas yra paprastas ir lengvai pritaikomas praktikoje, tad daugiau trivialių sprendinių pavyzdžių nenagrinėsime. Netrivialaus sprendinio atveju, parinktai perdraudimo įmokai gali tenkinti apibrėžti būtinas ir pakankamas sąlygas, kad egzistuotų optimalus dalinio perdraudimo koeficientas $c^* \in (0,1)$, todėl matematiškai šis atvejis yra daug įdomesnis, ir toliau analizuosime keletą tokio tipo sprendinių.

Netrivialus optimalus dalinio perdraudimo koeficientas c^*. Pagal 1 teoremos ii) dalį, griežtai iškiloms draudimo įmokoms optimalus dalinis perdraudimas gali būti rastas iš (21) lygties. Iškilų draudimo įmokų klasei priklauso eksponentinis, dispersijos, kovariacijos ir kiti įmokų skaičiavimo principai. Dalis šios klasės principų taip yra ir teigiamai homogeniški, tad pasirinkus tam tikrą π, reikėtų atkreipti dėmesį ir teisingai pritaikyti 1 teoremos i) arba ii) dalį. Plačiau apie iškilus draudimo įmokų skaičiavimo metodus ir jų pritaikymą ieškant optimalaus perdraudimo galima paskaityti [13].

Tarkime, jog perdraudimo įmoka π yra apskaičiuojama pagal dalinės dispersijos principą (*angl.* semi-variance principle):

$$\pi(X) = \mathbb{E}(X) + \theta \mathbb{E}\big[(X - \mathbb{E}(X))_+\big]^2, \ \ \theta > 0, \tag{27}$$

čia θ yra teigiamos atsargos koeficientas, kuris pasirinkta dalimi padidina vidutinius draudimo nuostolius, t.y. draudiko prisiimamą vidutinę riziką. Perdraudimo atveju šis koeficientas turi svarią reikšmę ir, nustatant perdraudimo įmokos dydį, tiek draudikas, tiek perdraudikas turi rasti abi puses tenkinantį koeficientą θ.

Pagal dalinės dispersijos principą apibrėžta dalinio perdraudimo įmoka $\pi(cX) = c\mathbb{E}(X) + c^2\theta\mathbb{E}\big[(X - \mathbb{E}(X))_+\big]^2$ yra griežtai iškila pagal parametrą c. Todėl iš 1 teoremos ii) dalies seka, jog optimalus dalinis perdraudimas pagal spektrinius rizikos matus yra netrivialus tada ir tik tada, kai egzistuoja toks koeficientas $c^* \in (0, 1)$, kad

$$\frac{\partial}{\partial c}\pi(cX)\bigg|_{c=c^*} - w_\phi = \mathbb{E}(X) + 2c^*\theta\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))_+]^2 - w_\phi = 0.$$

Akivaizdu, jog šios lygties sprendinys koeficiento c^* atžvilgiu yra

$$c^* = \frac{w_\phi - \mathbb{E}(X)}{2\theta\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))_+]^2}, \tag{28}$$

kai $\mathbb{E}(X) < w_\phi < 2\theta\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))_+]^2 + \mathbb{E}(X)$. Pastebėsime, jog dalinės dispersijos įmokų skaičiavimo principas nėra teigiamai homogeniškas. Tuo atveju, kai w_ϕ netenktina nurodytos nelygybės, negalime teigti, jog optimalus dalinio perdraudimo koeficientas yra $c^* = 0$ arba $c^* = 1$ – tuomet optimalus dalinis perdraudimas neegzistuoja.

Kai X yra eksponentiškai pasiskirstę atsitiktiniai nuostoliai su $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{\lambda}$, optimalus dalinio perdraudimo koeficientas c^* lygus

$$c^* = \frac{\int_0^1 \phi(p)\dfrac{\ln(1-p)}{-\lambda}dp - \dfrac{1}{\lambda}}{2\theta\lambda\int_0^\infty [(x - \dfrac{1}{\lambda})_+]^2 e^{-\lambda x}dx}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{-\frac{1}{\lambda}\big(\int_0^1 \phi(p)\ln(1-p)dp + 1\big)}{2\theta\lambda \int_{\frac{1}{\lambda}}^{\infty}\big(x^2 - 2x\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2}\big)e^{-\lambda x}dx} \\
&= \frac{-\frac{1}{\lambda}\big(\int_0^1 \phi(p)\ln(1-p)dp + 1\big)}{2\theta\lambda\big(\int_{\frac{1}{\lambda}}^{\infty} x^2 e^{-\lambda x}dx - \frac{2}{\lambda}\int_{\frac{1}{\lambda}}^{\infty} x e^{-\lambda x}dx + \frac{1}{\lambda^2}\int_{\frac{1}{\lambda}}^{\infty} e^{-\lambda x}dx\big)} \\
&= \frac{-\frac{1}{\lambda}\big(\int_0^1 \phi(p)\ln(1-p)dp + 1\big)}{2\theta\lambda\Big[-\Big(\frac{(\lambda^2x^2 + 2\lambda x + 2)e^{-\lambda x}}{\lambda^3}\Big|_{\frac{1}{\lambda}}^{\infty}\Big) + \frac{2}{\lambda}\Big(\frac{(\lambda x + 1)e^{-\lambda x}}{\lambda^2}\Big|_{\frac{1}{\lambda}}^{\infty}\Big) - \frac{1}{\lambda^2}\Big(\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\Big|_{\frac{1}{\lambda}}^{\infty}\Big)\Big]} \\
&= \frac{-\frac{1}{\lambda}\big(\int_0^1 \phi(p)\ln(1-p)dp + 1\big)}{2\theta\lambda\Big[\frac{5}{e\lambda^3} - \frac{4}{e\lambda^3} + \frac{1}{e\lambda^3}\Big]} \\
&= \frac{-\frac{1}{\lambda}\big(\int_0^1 \phi(p)\ln(1-p)dp + 1\big)}{\frac{1}{\lambda}\frac{4\theta}{e\lambda}} \\
&= \frac{-e\lambda\big(\int_0^1 \phi(p)\ln(1-p)dp + 1\big)}{4\theta}
\end{aligned} \tag{29}
$$

su sąlygomis, kad

$$
1 < -\int_0^1 \phi(p)\ln(1-p)dp < 1 + \frac{4\theta}{\lambda e}, \;\; \theta > 0, \;\; \lambda > 0, \;\; p \in [0, 1).
$$

Gavome optimalaus dalinio perdraudimo koeficiento c^* išraišką, kai perdraudimo įmoka yra apskaičiuota pagal dalinės dispersijos principą. Analizuokime dar vieną π skaičiavimo principą. Tegul π yra apibrėžta pagal kvadratinio naudingumo įmokų skaičiavimo principą (*angl.* quadratic utility principle, žr. [12]):

$$
\pi(X) = \mathbb{E}(X) + \gamma - \sqrt{\gamma^2 - \mathbb{D}(X)}, \;\; \gamma > 0 \text{ ir } \gamma^2 \geq \mathbb{D}(X), \tag{30}
$$

čia parametras $\gamma > 0$ žymi draudiko (analizuojamu atveju, perdraudiko) neigiamą požiūrį į riziką, t.y rizikos vengimą. Tad šis principas gali būti pritaikytas perdraudikui, kuris nenori prisiimti pernelyg didelės rizikos.

Taip apibrėžta perdraudimo įmoka $\pi(cX)$ taip pat yra griežtai iškila pagal parametrą: $\pi(cX) = c\mathbb{E}(X) + \gamma - \sqrt{\gamma^2 - c^2\mathbb{D}(X)}$. Vadinasi, optimalus dalinis perdraudimas pagal spektrinius rizikos matus egzistuos tokiam $c^* \in (0,1)$, kuris tenkins lygybę:

$$\frac{\partial}{\partial c}\pi(cX)\bigg|_{c=c^*} - w_\phi = \mathbb{E}(X) + \frac{c^*\mathbb{D}(X)}{\sqrt{\gamma^2 - (c^*)^2\mathbb{D}(X)}} - w_\phi = 0.$$

Tuomet optimalus dalinio perdraudimo koeficientas c^* yra

$$c^* = \frac{|w_\phi - \mathbb{E}(X)|\gamma}{\sqrt{\mathbb{D}(X)[\mathbb{D}(X) + (w_\phi - \mathbb{E}(X))^2]}}, \tag{31}$$

kai

$$\frac{|w_\phi - \mathbb{E}(X)|\gamma}{\sqrt{\mathbb{D}(X)[\mathbb{D}(X) + (w_\phi - \mathbb{E}(X))^2]}} < 1.$$

Kai atsitiktinių nuostolių X pasisikirstymo funkcija yra eksponentinė, tai $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{\lambda}$ ir $\mathbb{D}(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$, o koeficientas c^* lygus

$$\begin{aligned} c^* &= \frac{\left|\int_0^1 \phi(p)\dfrac{\ln(1-p)}{-\lambda}dp - \dfrac{1}{\lambda}\right|\gamma}{\sqrt{\dfrac{1}{\lambda^2}\left[\dfrac{1}{\lambda^2} + \left(\int_0^1 \phi(p)\dfrac{\ln(1-p)}{-\lambda}dp - \dfrac{1}{\lambda}\right)^2\right]}} \\ &= \frac{\dfrac{1}{\lambda}\left|\int_0^1 \phi(p)\ln(1-p)dp + 1\right|\gamma}{\dfrac{1}{\lambda}\sqrt{\dfrac{1}{\lambda^2}\left(1 + \left(\int_0^1 \phi(p)\ln(1-p)dp + 1\right)^2\right)}} \\ &= \frac{\lambda\left|\int_0^1 \phi(p)\ln(1-p)dp + 1\right|\gamma}{\sqrt{1 + \left(\int_0^1 \phi(p)\ln(1-p)dp + 1\right)^2}} \end{aligned} \tag{32}$$

su sąlyga, kad

$$\frac{\lambda\left|\int_0^1 \phi(p)\ln(1-p)dp + 1\right|\gamma}{\sqrt{1 + \left(\int_0^1 \phi(p)\ln(1-p)dp + 1\right)^2}} < 1.$$

Kaip ir dalinės dispersijos įmokų atveju, kvadratinio naudingumo įmoka nėra teigiamai homogeniška, tad tuo atveju, kada nėra tenkinama aukščiau apibrėžta sąlyga, optimalus dalinis perdraudimas neegzistuoja.

Taigi, pritaikėme optimalaus dalinio perdraudimo pagal spektrinius rizikos matus teoremą van Heerwaarden ir Kaas, dalinės dispersijos bei kvadratinio naudingumo draudimo įmokų skaičiavimo principams bei eksponentiškai pasiskirsčiusiems atsitiktiniams nuostoliams. Taip gavome konkrečias optimalaus dalinio perdraudimo koeficiento c^* reikšmes. Vietoje rizikos spektro $\phi(p)$ įstačius funkcijas, apibrėžtas 1 pavyzdyje, turėtumėme VaR bei CTE optimizavimo uždavinių sprendinius c^* atžvilgiu.

2. PRAKTINIS TYRIMAS

Šiame skyriuje aprašytas praktinis tyrimas susideda iš dviejų dalių. Pirmoje dalyje apskaičiuojama teorinis optimalus dalinis koeficientas c^* pagal 1.7. skyrelyje išvestas formules. Teorinis c^* sprendinys yra palyginamas su praktinių skaičiavimų metu gautais rezultatais. Antroje dalyje lyginama atsitiktinių nuostolių, pasiskirsčiusių pagal eksponentinį bei Pareto skirstinius, optimalaus dalinio perdraudimo koeficientai.

Tyrimo tikslas. Patikrinti ar 1.7. skyrelyje apibrėžtas optimalus dalinis perdraudimas ((29) išraiška) ir atsitiktinai sugeneruotų eksponentinių žalų optimalus dalinis perdraudimas sutampa. Palyginti optimalaus dalinio perdraudimo rezultatus, kai atsitiktiniai nuostoliai turi eksponentinį ir Pareto pasiskirstymus.

Tyrimo eiga. Sugeneruojama 10 000 atsitiktinių imčių po 300 000 eksponentiškai pasiskirsčiusių atsitiktinių nuostolių su parametru $\lambda = 0.001$. Pasinaudojus (28) formule apskaičiuojamas optimalaus dalinio perdraudimo koeficientas c^* pagal VaR, CTE bei spektrinį rizikos matą su $\phi(p)$, apibrėžta 2 pavyzdyje esančia (10) išraiška, kai rizikos tolerancijos koeficientas $r = 8$. Atitinkamai paskaičiuojama teorinė bei praktinė perdraudimo įmoka $\pi(c^*X)$, rizikos matai: $M_\phi(X_T, c^*)$, $\mathrm{VaR}_\alpha(X_T, c^*)$, $\mathrm{CTE}_\alpha(X_T, c^*)$, kuomet $\alpha = 0.05, 0.04., ..., 0.005$, ir palyginami gauti rezultatai. Tyrimo metu perdraudimo įmokos yra skaičiuojamos pagal dalinės dispersijos (27) principą su teigiamos atsargos koeficientu θ, lygiu 0.1.

Toliau generuojama 10 000 atsitiktinių imčių po 300 000 atsitiktinių nuostolių, kurie turi Pareto pasiskirstymą. Tyrimo metu naudojama Pareto pasiskirstymo funkcija

$$F_X(x) = 1 - \left(\frac{a}{x+a}\right)^b,$$

kur $a > 0$ yra skalės parametras, o $b > 0$ yra formos parametras. Atitinkamai analizuojamos Pareto išgyvenamumo ir atvirkštinė išgyvenamumo funkcijos yra:

$$S_X(x) = \left(\frac{a}{x+a}\right)^b, \ \ S_X^{-1}(x) = \left(\frac{a(1-x^{1/b})}{x^{1/b}}\right)^b.$$

Atsitiktinių nuostolių generavimui parinktas skalės parametras $a = 500$ ir formos parametras $b = 2$. Atlikus tokį pasirinkimą vidutiniai nuostoliai tiek Pareto, tiek eksponentinio pasiskirstymo (kai $\lambda = 0.001$) atvejais apytiksliai lygūs 1 000.

Pasinaudojus (28) formule, analogiškai kaip ir atsitiktinių eksponentinių nuostolių atveju, apskaičiuojama optimalaus dalinio perdraudimo koeficientas, perdraudimo įmoka ir rizikos matai: spektrinis, VaR, CTE. Gauti rezultatai yra palyginami su pirmoje tyrimo dalyje apskaičiuotu optimaliu daliniu perdraudimu, kuomet atsitiktiniai nuostoliai yra eksponentiškai pasiskirstę.

Atsitiktinių dydžių generavimui, optimalaus dalinio perdraudimo parametrų skaičiavimui bei grafinei duomenų analizei naudotas kompiuterinis matematinės statistikos paketas R (biblioteka *actuar*). Gautų duomenų apdorojimui, statistinių charakteristikų bei teorinių optimalaus dalinio perdraudimo parametrų skaičiavimui naudota Microsoft Excel programa.

Duomenų analizė 1. Iš pradžių palyginsime rezultatus, gautus tuo atveju, kai perdraudimo įmoka yra skaičiuojama pagal dalinės dispersijos principą. Tuomet optimizavimo uždavinio sprendinys yra apibrėžiamas (28) formule. 1 lentelėje pateikiami optimalūs dalinio perdraudimo koeficientai c^*, kai atsitiktiniai nuostoliai X yra eksponentiškai pasiskirstę. Čia $c^*_{M_\phi}$ yra apskaičiuotas pagal (29) formulę, VaR ir CTE atveju c^* apskaičiuoti pagal šias išraiškas:

$$c^*_{\mathrm{VaR}} = \frac{-\lambda e(\ln(\alpha)+1)}{4\theta} \quad \text{ir} \quad c^*_{\mathrm{CTE}} = \frac{-\lambda e \ln(\alpha)}{4\theta}.$$

Taip buvo gauti teoriniai optimalaus dalinio perdraudimo koeficientai, o praktiniai $c^*_{\cdot real}$ suskaičiuoti sugeneravus 300 000 atsitiktinių eksponentinių nuostolių 10 000 kartų, kiekvienai naujai imčiai pritaikius (28) formulę ir išvedus gautų optimalaus dalinio perdraudimo koeficientų vidurkį.

Iš 1 lentelėje esančių duomenų matome, kad visais trimis atvejais (spektrinio rizikos mato, VaR ir CTE), tiek teorinis, tiek praktinis optimalaus dalinio perdraudimo koeficientai faktiškai sutampa ir tik keletą atvejų paklaida lygi 0.00001. Tokie rezultatai leidžia daryti išvadą, kad 1.7. skyrelyje išvesta (29) formulė yra teisinga ir pagal ją apskaičiuoti teoriniai rezultatai gali būti tiesiogiai naudojami praktikoje.

α	0.05	0.04	0.03	0.02	0.01	0.005
$c^*_{M_\phi}$	0.01126					
$c^*_{M_\phi real}$	0.01127					
c^*_{VaR}	0.01356	0.01508	0.01703	0.01979	0.02450	0.02921
$c^*_{\text{VaR}real}$	0.01356	0.01508	0.01704	0.01979	0.02450	0.02921
c^*_{CTE}	0.02036	0.02187	0.02383	0.02658	0.0313	0.03601
$c^*_{\text{CTE}real}$	0.02036	0.02188	0.02383	0.02659	0.0313	0.03601

1 lentelė. Optimalaus dalinio perdraudimo koeficientas c^* pagal spektrinį rizikos matą, VaR ir CTE – teorinis bei praktinis.

Taip pat reikia pastebėti, kad analizuojamu atveju $c^*_{M_\phi}$ yra mažiausias. Ieškant optimalaus dalinio perdraudimo pagal spektrinius rizikos matus svarbu tai, kokia yra leistino rizikos spektro funkcija $\phi(p)$. Todėl tikėtina, kad parinkus tokią $\phi(p)$, kuri atspindi draudiką su dideliu rizikos vengimo lygiu, $c^*_{M_\phi}$ bus didesnis nei c^*_{VaR} ar c^*_{CTE}. Lyginant tarpusavyje c^*_{VaR} ir c^*_{CTE} matome, jog didesnis optimalus dalinio perdraudimo koeficientas yra CTE atveju. Tai yra savaime suprantama, kadangi CTE yra atsitiktinių nuostolių, didesnių už VaR vidurkis, todėl ir pedraudikui atiduodama didesnė atsitiktinių nuostolių dalis.

Pagal 1.7. skyrelį, optimalaus dalinio perdraudimo uždavinio sprendinys egzistuoja tik tuomet, kai funkcija $w_\phi = \int_0^1 \phi(p)S_X^{-1}(1-p)dp$ tenkina (28) nelygybės sąlygą. Tad reikia patikrinti, ar skaičiavimuose naudojama w_ϕ priklauso (28) nurodytai nelygybei. Pagal tyrime naudojamus parametrus gauname reikiamą intervalą: (1 000, 148 152). Spektrinio rizikos mato atveju $w_\phi = 2657.586$, taigi ši reikšmė priklauso gautąjam intervalui ir apskaičiuotas $c^*_{M_\phi}$ tikrai yra optimalaus dalinio perdraudimo koeficientas.

VaR ir CTE atvejais šis parametras priklauso ir nuo α reikšmės. Kuo mažesnis α tuo didesnis bus w_ϕ, tad užtenka patikrinti, ar gautam intervalui priklauso w_ϕ reikšmės, kai $\alpha = 0.05$ ir $\alpha = 0.005$. VaR atveju, kai $\alpha = 0.05$, $w_\phi = S_X^{-1}(\alpha) = 22995.732$, o kai $\alpha = 0.005$, $w_\phi = 5298.317$ – gautos reikšmės priklauso nustatytam intervalui. CTE atveju, pasinaudoję funkcija $\mathrm{u}_\alpha = \mathrm{S}_X^{-1}(\alpha) + \frac{1}{\alpha}\int_{\mathrm{S}_X^{-1}(\alpha)}^{\infty} S_X(x)dx$, turime $\mathrm{u}_{0.05} = 3995.732$ ir $\mathrm{u}_{0.005} = 6298.317$.

Taigi, egzistuoja optimalus dalinis perdraudimas tiek pagal VaR, tiek pagal CTE rizikos matus bei yra lygus 1 lentelėje nurodytoms reišmėms.

α	0.05	0.04	0.03	0.02	0.01	0.005
$\pi(c^*X)_{M_\phi}$	20.60					
$\pi(c^*X)_{M_\phi real}$	20.60					
$\pi(c^*X)_{\mathrm{VaR}}$	27.10	31.81	38.38	48.60	68.66	91.99
$\pi(c^*X)_{\mathrm{VaR}real}$	27.10	31.81	38.39	48.61	68.67	92.00
$\pi(c^*X)_{\mathrm{CTE}}$	50.85	57.08	65.61	78.59	103.36	131.39
$\pi(c^*X)_{\mathrm{CTE}real}$	50.85	57.08	65.61	78.59	103.36	131.40

2 lentelė. Optimalaus dalinio perdraudimo įmoka $\pi(c^*X)$ pagal spektrinį rizikos matą, VaR ir CTE – teorinis bei praktinis.

α	0.05	0.04	0.03	0.02	0.01	0.005
M_ϕ	2648.25					
$M_\phi real$	2648.25					
VaR_α	2982.20	3202.15	3485.21	3883.21	4561.01	5235.54
$\mathrm{VaR}_\alpha real$	2982.20	3202.14	3485.21	3883.21	4561.00	5235.53
CTE_α	3965.24	4183.67	4464.78	4860.02	5533.11	6202.93
$\mathrm{CTE}_\alpha real$	3965.24	4183.67	4464.78	4860.02	5533.11	6202.93

3 lentelė. Optimalaus dalinis perdraudimas pagal spektrinį rizikos matą, VaR ir CTE – teorinis bei praktinis.

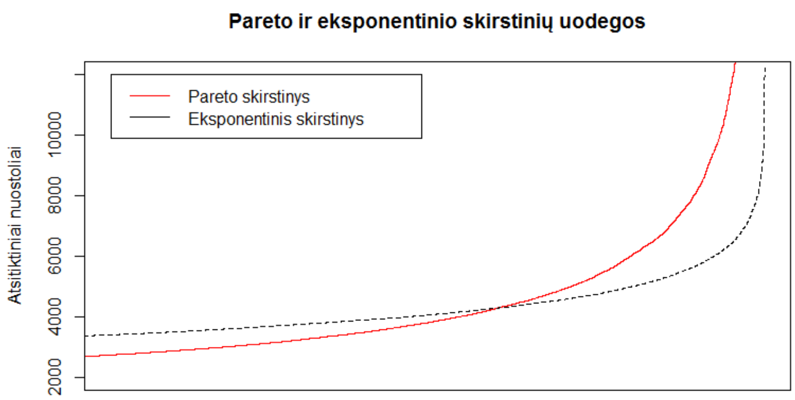
Pasinaudojus 1 lentelėje esančiais optimalaus dalinio perdraudimo koeficientais, buvo apskaičiuota optimalaus dalinio perdraudimo įmokos, kurias draudikas turėtų sumokėti perdraudikui. Skaičiavimų rezultatai pateikiami 2 lentelėje. Teorinė perdraudimo įmoka visais trimis atvejais (M_ϕ, VaR ir CTE) suskaičiuota pagal formulę:

$$\pi(c^*X) = \frac{c^*}{\lambda} + \frac{2(c^*)^2\theta}{e\lambda^2},$$

kai $\lambda = 0.001$, $\theta = 0.1$, o atitinkamas c^* yra paimtas iš 1 lentelės. Praktinė perdraudimo įmoka gaunama pasinaudojus (27) formule bei c^*_{real} reikšmėmis.

Analogiškai, pritaikius (15), (16), (18) formules, buvo apskaičiuotaos optimalios spektrinio, VaR ir CTE rizikos matų reikšmės. Gauti rezultatai yra pateikiami 3 lentelėje. Iš abiejų (2 ir 3) lentelių matome, jog teorinių ir praktinių skaičiavimų paklaida tesiekia 0.01 cento ribą. Taigi, dar kartą įsitikinome, kad teorinėje dalyje išvestos formulės yra nesudėtingai pritaikomos praktikoje, o, žinant atsitiktinių nuostolių skirstinį, galima lengvai ir greitai apskaičiuoti optimalų dalinį perdraudimą pagal spektrinius rizikos matus.

Duomenų analizė 2. Antroje duomenų analizės dalyje lyginama optimalus dalinis perdraudimas pagal spektrinius rizikos matus, kai atsitiktiniai nuostoliai turi eksponentinį ir Pareto pasiskirstymą, t.y. patikrinama, kokią įtaką optimalaus dalinio perdraudimo koeficientui c^* daro tai, kad atsitiktiniai nuostoliai turi sunkiauodegį (Pareto) skirstinį. Tyrimo metu naudojama pirmoje dalyje gauti eksponentinio pasiskirstymo rezultatais ir papildomai 10 000 kartų sugeneruojama 300 000 atsitiktinių Pareto nuostolių.



2 pav. Pareto ir eksponentinių atsitiktinių nuostolių skirstinių uodegos.

Pirmiausia įsitikinama, ar sugeneruoti Pareto atsitiktiniai dydžiai, kurie vėliau bus naudojami skaičiavimams, tikrai turi sunkesnę uodegą nei atitinkami eksponentiniai dydžiai. Iš 2 paveikslėlyje esančio grafiko matome, jog pagal Pareto skirstinį pasiskirstę atsitiktiniai nuostoliai nuo tam tikro momento yra didesni nei atitinkami eksponentiniai nuostoliai. Žinome, kad skirstinys gali būti laikomas sunkiauodegiu, jeigu jo uodegos reikšmės yra didesnės nei eksponentinio skirstinio, tad iš 2 paveikslėlio galime daryti dvi išvadas: pirma, Pareto skirstinio uodega yra sunkesnė nei eksponentinio, antra – Pareto skirstinys yra sunkiauodegis.

Svarbu patikrinti ne tik analizuojamų duomenų uodegų sunkumą, bet ir statistines charakteristikas. Atliekama analizė bus tiksli tuomet, kai eksponentinio ir Pareto atsitiktinių nuostolių vidurkiai bus vienodi. Generuojant eksponentinius atsitiktinius dydžius nustatytas parametras $\lambda = 0.001$, o Pareto atveju – $a = 500$ ir $b = 2$. Kiekvienai sugeneruotai imčiai, kurią sudaro 300 000 atsitiktinių dydžių (nuostolių), paskaičiuotas vidutinis imties nuostolis. Tuomet, iš gautų 10 000 vidutinių imčių nuostolių, apskaičiuotas bendras nuostolių vidurkis, standartinis nuokrypis, minimali bei maksimali vidutinių nuostolių reikšmė.

Skirstinys	Vidurkis	Stand. nuokrypis	Minimumas	Maksimumas
Eksponentinis	1000.01	1.8339	993.07	1007.66
Pareto	1000.02	3.9457	988.73	1077.45

4 lentelė. Eksponentinio ir Pareto skirstinių statistinės charakteristikos.

Iš 4 lentelėje pateiktų rezultatų matome, jog ekponentinio bei Pareto atsitiktinių nuostolių vidurkiai skiriasi tik per 0.01. Šiek tiek didesnis skirtumas tarp standartinio nuokrypio reikšmių, tačiau tai didelės įtakos tolimesnei analizei neturi. Tad galima teigti, kad vidutiniai nuostoliai abiem atvejais sutampa ir galima adekvačiai palyginti optimalų dalinį perdraudimą eksponentinių ir Pareto atsitiktinių nuostolių atvejais.

Toliau pereiname prie optimalaus dalinio perdraudimo koeficiento c^*, optimalios perdraudimo įmokos $\pi(c^*X)$ ir optimalių M_ϕ, VaR_α, CTE_α rizikos matų skaičiavimo. Eksponentinių nuostolių atveju naudojami rezultatai, gauti pirmoje tyrimo dalyje. Pareto atveju c^* yra apskaičiuojama pagal (28) formulę, kai $S_X^{-1}(x) = \left(\dfrac{500(1-\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\right)^2$ ir $x \in [0,1]$, perdraudimo įmoka – pagal (27) formulę, o M_ϕ, VaR_α, CTE_α atitinkamai pagal (18), (15), (16) formules. Reikia paminėti, kad skaičiavimuose naudojama išgyvenamumo funkcija yra $S_X(x) = \left(\dfrac{500}{x+500}\right)^2$, kai $x \geq 0$. 5 lentelėje pateikiami gauti rezultatai.

Iš šios lentelės matome, kad optimalus dalinio perdraudimo koeficientas c^* yra mažesnis Pareto skirstinio atveju. Tokį rezultatą galima nesunkiai paaiškinti. Pareto atveju didžioji dalis nuostolių yra mažesni už eksponentinius nuostolius, tačiau Pareto nuostolių uodegoje yra keletas labai didelių

	$M_\phi(c^*, \pi(c^*X))$	
	Eksponentinis	Pareto
	2648.25 (0.011, 20.60)	2006.34 (0.002, 2.89)
	$\mathrm{VaR}_\alpha(c^*, \pi(c^*X))$	
α	Eksponentinis	Pareto
0.05	2982.20 (0.014, 27.10)	1735.55 (0.001, 1.93)
0.04	3202.14 (0.015, 31.81)	1999.04 (0.002, 2.87)
0.03	3485.21 (0.017, 38.39)	2384.91 (0.003, 4.49)
0.02	3883.21 (0.020, 48.61)	3031.57 (0.004, 7.85)
0.01	4561.00 (0.025, 68.67)	4488.29 (0.007, 18.39)
0.005	5235.53 (0.029, 92.00)	6541,41 (0.011, 40.29)
	$\mathrm{CTE}_\alpha(c^*, \pi(c^*X))$	
α	Eksponentinis	Pareto
0.05	3965.24 (0.020, 50.85)	3944.03 (0.006, 13.89)
0.04	4183.67 (0.022, 57.08)	4463.77 (0.007, 18.08)
0.03	4464.78 (0.024, 65.61)	5223.46 (0.008, 25.14)
0.02	4860.02 (0.027, 78.59)	6492.79 (0.010, 39.46)
0.01	5533.11 (0.031, 103.36)	9334.89 (0.016, 83.02)
0.005	6202.93 (0.036, 131.40)	13300.48 (0.024, 170.84)

5 lentelė. Optimalus dalinis perdraudimas pagal spektrinį, VaR, CTE rizikos matus, kai atsitiktinių nuostolių skirstiniai yra eksponentinis ir Pareto.

žalų. Todėl Pareto atveju atsiranda rizika, jog draudikas patirts keletą labai didelių žalų, o eksponentinio skirstinio atveju – kad patirs daugiau panašaus dydžio žalų. Taigi, siekdamas išlaikyti optimalų perdraudimą, draudikas atiduos mažesnę dalį prisiimamų nuostolių, tačiau tuo pačiu apsisaugos nuo katastrofinių žalų.

Savaime suprantama, kad tuomet ir atitinkamos Pareto skirstinio perdraudimo įmokos yra mažesnės už eksponentinio – tai taip pat parodo 5 lentelėje esantys skaičiai. Tačiau galima pastebėti, kad imant vienodus dalinio perdraudimo koeficientus c eksponentinio ir Pareto nuostolių atvejais, Pareto perdraudimo įmoka turėtų būti didesnė. Taip būtų dėl to, nes perdraudiko prisiimama draudimo rizika Pareto atveju būtų didesnė, tad perdraudikas atitinkamai norėtų didesnės perdraudimo įmokos.

Analogiškai palyginama spektrinis, VaR ir CTE rizikos matai. Reikia pastebėti, kad mažėjant parametrui α, tiek VaR, tiek CTE reikšmės Pareto skirstinio atveju auga greičiau ir tam tikru momentu „aplenkia" eksponentinio skirstinio reikšmes. Vėlgi, taip atsitinka dėl Pareto skirstinio uodegos sunkumo. Tą puikiai pailiustruoja $\mathrm{CTE}_{0.005}$ reikšmės: eksponentiniu atveju $\mathrm{CTE}_{0.005} = 6202.93$, o Pareto – $\mathrm{CTE}_{0.005} = 13300.48$, t.y. sąlyginis uodegos vidurkis išauga dvigubai. Tuomet Pareto skirstinio atsitiktiniai nuostoliai yra rizikingesni nei atitinkamo eksponentinio skirstinio atsitiktiniai nuostoliai, tad renkantis α reikšmę, nereikėtų imti mažesnės nei 0.01.

Tyrimo išvados. Pirmoje tyrimo dalyje įsitikinome, jog 1.7. skyrelyje išvestos (28), (29) formulės yra teisingos bei lengvai pritaikomos praktikoje. Draudikui užtenka turėti istorinius patirtų nuostolių duomenis arba žinoti nuostolių pasiskirstymo funkciją ir sutarti su perdraudiku, koks turėtų būti taikomas perdraudimo įmokų principas. Turėdamas šią informaciją draudikas gali naudoti tiek 1.7. skyrelyje išvestas formules konkrečiais optimalaus dalinio perdraudimo atvejais, tiek pasinaudoti 1, 2 arba 3 teorema ir pritaikyti ją šiame darbe neanalizuojamam perdraudimo įmokų principui.

Antroje tyrimo dalyje buvo palyginti optimalūs daliniai perdraudimai pagal eksponentinį ir Pareto skirstinius. Draudikas, ieškodamas optimalaus dalinio perdraudimo turi atsižvelgti į nuostolių skirstinio uodegą. Jei uodegoje yra didelių išskirčių, t.y. didelių nuostolių, tuomet vertėtų optimalų dalinį perdraudimą skaičiuoti pagal vieną iš sunkiauodegių skirstinių ir nustatyti mažesnę dalinio perdraudimo koeficiento c reikšmę nei įprastu atveju. Taip pat reikėtų atkreipti dėmesį į pasikliovimo lygmens parinkimą ir sunkiauodegiams skirstiniams nenustatinėti mažesnio nei 0.01.

IŠVADOS

Šio darbo metu, pasinaudojus Weng ir Cai tyrimais, buvo apibrėžta ir įrodyta 1 teorema apie optimalų dalinį perdraudimą pagal spektrinius rizikos matus. Pastaroji teorema pateikia du optimalaus dalinio perdraudimo koeficiento c^* sprendinius: trivialų ir netrivialų. Pirmuoju atveju reikalaujama, kad perdraudimo įmoka būtų teigiamai homogeniška, o antruoju – kad būtų griežtai iškila.

Darbe taip pat apibrėžti ir aprašyti spektrinių rizikos matų klasei priklausantys VaR ir CTE rizikos matai. Parodžius sąryšį tarp spektrinių rizikos matų apibrėžimo ir VaR bei CTE, iš 1 teoremos išvesta 2 ir 3 teoremos, kurios nurodo optimalų dalinį perdraudimą pagal VaR, CTE rizikos matus.

Optimalaus dalinio perdraudimo teoremos pritaikytos konkretiems perdraudimo įmokų skaičiavimo principams bei eksponentinio nuostolių pasiskirstymo atvejais. Praktinio tyrimo metu optimalus dalinis perdraudimas rastas atsitiktinai sumodeliuotiems eksponentiškai pasiskirsčiusiems bei Pareto skirstinį turintiems nuostoliams.

Teorinėje tyrimo dalyje išvestos optimalaus dalinio perdraudimo formulės gali būti nesunkiai pritaikomos draudimo įmonėse. Tai patvirtina ir praktinės dalies tyrimas. Vistik pritaikant minėtąsias formules reikėtų atkreipti dėmesį į nuostolių skirstinio uodegą, parinkti tinkamą nuostolių skirstinį, o VaR bei CTE atveju, gerą pasikliovimo lygmenį.

Literatūra

[1] R. Kass A. E. van Heerwaarden. The dutch premium principle. *Insurance: Mathematics and Economics*, 11:129–133, 1992.

[2] Eber J. ir Heath D. Artzner P., Delbaen F. Coherent measures of risk. *Mathematical Finance*, 9:203–228, July 1999.

[3] Acerbi C. Spectral measures of risk: A coherent representation of subjective risk aversion. *Journal of Banking and Finance*, 26:1505–1518, 2002.

[4] Weng C. *Optimal Reinsurance Designs: from an Insurer's Perspective.* PhD thesis, University of Waterloo, 2009.

[5] Tan K. S. Cai J. Optimal retention for a stop–loss reinsurance under the var and cte risk measures. *Astin Bulletin*, 37:93–112, 2007.

[6] Weng C. Zhang Y. Cai J., Tan K. S. Optimal retention under the var and cte risk measures. *Insurance: Mathematics and Economics*, 43:185–196, 2008.

[7] Goovaerts M.J. Kaas R. Tang Q. ir Vyncke D. Dhaene J., Vanduffel S. Risk measures and comotonicity: A review. *Stochastic Models*, 22:573–606, 2006.

[8] Cotter J. ir Sorwar G. Dowd K. Spectral risk measures: Properties and limitations. *Journal of Financial Services Research*, 34:61–75, 2008.

[9] Wirch J. L. ir Hardy M.R. A synthesis of risk measures for capital adequacy. *Insurance: Mathematics and Economics*, 25:337–347, December 1999.

[10] Sundt B. ir Teugels J. L. *Encyclopedia of Actuarial Science.* Wiley, 2004.

[11] Rockafellar R.T. ir Uryasev S. Conditional value-at-risk for general loss distributions. *Journal of Banking and Finance*, 26:1443–1471, 2002.

[12] Guo J. Liang Z. Optimal proportional reinsurance under two criteria: maximizing the expected utility and minimizing the value at risk. *ANZIAM Journal*, 5:449–463, 2010.

[13] Kaluszka M. Optimal reinsurance under convex principles of premium calculation. *Insurance: Mathematics and Economics*, 36:375–398, 2005.