VILNIAUS UNIVERSITETAS

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

Magistro baigiamasis darbas

Bankroto tikimybės vertinimas nehomogeniniame rizikos atstatymo modelyje

An Estimate of the Ruin Probability for the Inhomogeneous Renewal Risk Model

Modestas Kievinas

VILNIUS 2016

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
MATEMATINĖS ANALIZĖS KATEDRA

Darbo vadovas prof. Jonas Šiaulys
Darbo recenzentas prof. Vigirdas Mackevičius

Darbas apgintas 2016 m. sausio 14 d.
Darbas įvertintas ______________

Registravimo NR. ______________
2016–01–04 ____________________

Bankroto tikimybės vertinimas nehomogeniniame rizikos atstatymo modelyje

Santrauka

Šiame darbe pateiktas bankroto tikimybės įvertinimas nehomogeniniam rizikos atstatymo modeliui. Toks modelis, skirtingai nei homogeninis, turi nebūtinai vienodai pasiskirsiučias ir nerpiklausomas žalas ir laiko tarpus tarp jų. Bankroto tikimybei gauta nelygybė, analogiška gerai žinomai Lundbergo nelygybei. Darbe pateikiami smulkmeniški teoremos ir jai įrodyti naudotos pagalbinės lemos įrodymai.

Raktiniai žodžiai: Nehomogeninis rizikos atstatymo modelis, Lundbergo nelygybė, Bankoroto tikimybė.

An Estimate of the Ruin Probability for the Inhomogeneous Renewal Risk Model

Abstract

This paper introduces estimation of probability of ruin in inhomogeneous renewal risk model. This model differs from its homogeneous variant, because it has independent, but not necessarily identically distributed claim sizes and time intervals between claims. New inequality, analogous to well known Lundberg's inequality, was found for probability of ruin. This paper consists of detailed proofs of the main theorem and an auxiliary lemma.

Keywords: Inhomogeneous renewal risk model, Lundberg's inequality, Probability of ruin.

Turinys

1 Įvadas

Rizikos atstatymo modelis aprašo draudimo įmonės kapitalo kitimą bėgant laikui. Tokio modelio pirmtaku galėtume vadinti Klasikinį rizikos modelį, pradėtą nagrinėti dar praėjusio šimtmečio pirmoje pusėje švedų matematikų – aktuarų F.Lundberg ir H.Cramer (žiūrėti [2] ir [3]). Klasikinis rizikos modelis turi konkretaus pavidalo procesą, kuris apibrėžia kiek žalų buvo per konkretų laiko periodą. Tai yra homogeninis Puasono procesas su intensyvumo parametru λ. Jis apibūdina žalų skaičių intervale $[0, t]$ ir dažniausiai yra žymimas kaip $N(t)$. Toks modelis yra palyginti paprastas dėl to, jog tokiu atveju žinoma, kad laiko tarpas tarp žalų yra eksponentinis atsitiktinis dydis. Laiko tarpai vienas su kitu yra nepriklausomi. Deja, praktiškai toks modelis yra sunkiai pritaikomas. Siekiant padidinti modelio lankstumą bei pritaikymo galimybes, buvo atsisakyta prielaidos, kad tarpai tarp žalų yra eksponentiniai atsitiktiniai dydžiai. Tokio tipo modelį savo darbe [1] pasiūlė E. Sparre Andersen, kuris laiko tarpus tarp žalų apibrėžė kaip nepriklausomus, vienodai pasiskirsčiusius, neneigiamus atsitiktinius dydžius. Žinoma, matematiškai modelis tapo sudėtingesnis, nes žalų skaičius konkrečiame intervale yra nusakomas atstatymo procesu. Visgi, toks modelis yra daug lanksčiau pritaikomas modeliuojant galimus ateities kapitalo svyravimus. Pateiksime tokio modelio apibrėžimą.

Apibrėžimas. *Draudiko valdomas turtas $U(t)$ kinta pagal rizikos atstatymo modelį, jeigu bet kuriame laiko momente $t \geqslant 0$*

$$U(t) = x + ct - \sum_{i=1}^{\Theta(t)} Z_i, t \geqslant 0.$$

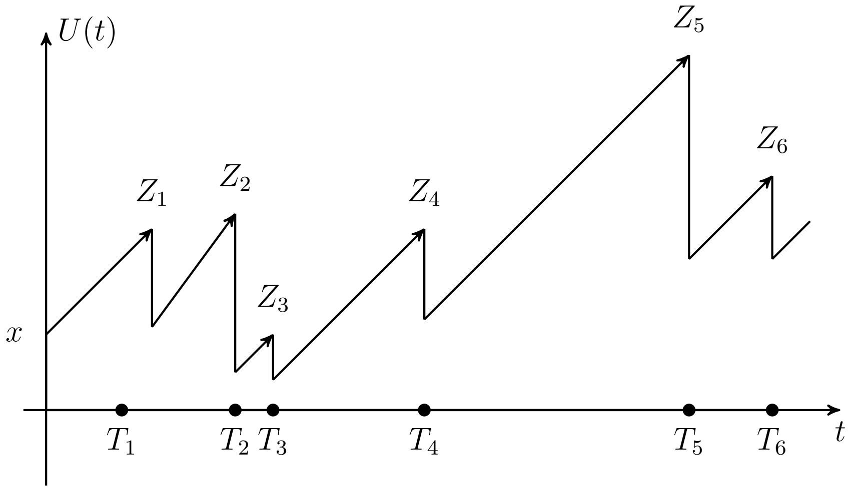
Šioje lygybėje:

- *$x \geqslant 0$ yra draudiko pradinis turtas.*
- *Žalų dydžiai $\{Z_1, Z_2, Z_3, \dots\}$ sudaro nepriklausomų, vienodai pasiskirsčiusių, neneigiamų atsitiktinių dydžių seką. Čia dydis $Z_i, i \geqslant 0$ yra i–osios žalos dydis.*
- *$c > 0$ yra pastovus, nepriklausantis nuo laiko, premijų surinkimo greitis per laiko vienetą.*
- *Tarpai tarp žalų $\{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots\}$ yra nepriklausomi, vienodai pasiskirstę, neneigiami ir neišsigimę taške 0 atsit. dydžiai.*
- *$\Theta(t)$ yra žalų skaičius intervale $[0, t]$, t.y*

  $$\Theta(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{T_n \leqslant t\}} = \sup\{n \geqslant 1 : T_n \leqslant t\},$$

  kur $T_n = \theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n, n \geqslant 1$.
- *Atsitiktinių dydžių sekos $\{Z_i, i \geqslant 0\}$ ir $\{\theta_i, i \geqslant 0\}$ yra tarpusavyje nepriklausomos.*

Kaip matome, taip apibrėžtame modelyje pakeitus kažkurią iš konstantų arba atsitiktinių dydžių gaunamas visai kitas modelis su kitokiomis savybėmis. Jeigu laikysime, kad sekos $\{\theta_i, i \geqslant 0\}$ nariai yra paskirstę pagal eksponentinį skirstinį, gausime prieš tai minėtą klasikinį rizikos modelį. Rizikos atstatymo modelyje proceso $U(t)$ tipinis grafikas atrodo taip:



1 pav.: Draudiko turtas $U(t)$ laiko momentu t

Apibrėšime bankroto, bankroto laiko ir bankroto tikimybės sąvokas, kurios bus naudojamos įrodymuose.

Apibrėžimas. *Bankrotu yra laikomas įvykis, kai draudiko turto vertė nukrenta žemiau* 0. *Kitaip tariant, bankrotu vadinamas įvykis*

$$B = \bigcup_{t \geqslant 0} \{\omega : U(\omega, t) < 0\}$$

Apibrėžimas. *Laiko momentas, kai draudiko turtas pirmą kartą nukrenta žemiau nulio yra vadinamas bankroto laiku. Matematiškai tai galima užrašyti:*

$$T_u = T_u(\omega) = \begin{cases} \inf\{t \geqslant 0 : U(\omega, t) < 0\}, & \textit{jeigu } \omega \in B, \\ \infty, & \textit{jeigu } \omega \notin B. \end{cases}$$

Apibrėžimas.*Bankroto tikimybe rizikos atstatymo modelyje vadiname*

$$\psi(u) = \mathbb{P}(B).$$

Būtent šios tikimybės įvertinimą nehomogeniniam rizikos atstatymo modeliui ir pateiksime. Eksponentiniai bankroto tikimybės įvertinimai homogeniniam rizikos atstatymo modeliui įprastai vadinami Lundbergo nelygybėmis. Savo įvertinimui naudosime gerai žinomą teoremą, kurios formuluotė paimta iš [8] vadovėlio.

Teorema. *Sakykime patenkinta įprastinės rizikos atstatymo modelio sąlygos. Tegul kažkokiam teigiamam* H

$$\mathbb{E}e^{HZ} < \infty$$

ir patenkinta grynojo pelno sąlyga

$$\mathbb{E}Z - c\mathbb{E}\theta < 0$$

Jeigu lygtis

$$\mathbb{E}e^{r(Z - c\theta)} = 1$$

turi teigiamą sprendinį $r \in (0, H)$, tai su visais $u \geqslant 0$

$$\psi(u) \leqslant \mathrm{e}^{-ru}.$$

Tokio paties įvertinimo norėtųsi ir nehomogeniniam rizikos atstatymo modeliui. Jo apibrėžimas pateiktas sekančiame skyriuje. Vėliau bus suformuluota ir įrodyta teorema ir įrodymui reikalinga pagalbinė lema, kurios leis neheomogeniniam rizikos atstatymo modeliui bankroto tikimybę parašyti panašaus tipo nelygybe.

Pagrindinis šio darbo tikslas buvo apibrendrinti I. A. Andrulytės, E. Bernackaitės, D. Kievinaitės, J. Šiaulio straipsnį [4] ir pasinaudojant ten esančiais įrodymais, parodyti, kad aibė nehomogeninių rizikos atstatymo modelių, kuriems galime sukonstruoti eksponentinį bankroto tikimybės įvertinimą, iš tikro yra didesnė. Pagrindinė teorema, įrodyta šiame darbe, yra formuluojama taip:

Pagrindinė teorema. *Sakykime, kad rizikos atstatymo modelyje žalų dydžiai $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots$ ir laiko tarpai tarp dviejų draudiminių įvykių $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots$ yra nepriklausomos atsitiktinių dydžių sekos, kurių elementai yra patys tarpusavyje nepriklausomi. Sakykime, kad a.d sekos dar tenkina tokias sąlygas:*

$$(R1)\ \sup_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\mathrm{e}^{\gamma Z_i} < \infty,$$

$$(R2)\ \lim_{u\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(\theta_i \mathbb{1}_{\{\theta_i > u\}}) = 0,$$

$$(R3)\ \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (\mathbb{E}Z_i - c\mathbb{E}\theta_i) < 0.$$

su kažkokia teigiama konstanta γ. Tuomet bankroto tikimybei $\psi(x)$ galioja nelygybė

$$\psi(x) \leqslant \mathrm{e}^{-a_4 x}, x \geqslant a_5,$$

kur $a_4, a_5 > 0$ yra tam tikros teigiamos konstantos.

2 Nehomogeninis rizikos atstatymo modelis

Šiame skyrelyje trumpai aptarsime nehomogeninius rizikos atstatymo modelius. Nehomogeniškumas gali būti supratamas įvairiai. Pradžioje tiksliai apibrėšime modelį, kuriam įrodysime pagrindinę teoremą iš 3 – o skyrelio. Apibrėžimas mažai skiriasi nuo įvade pateikto homogeninio rizikos atstatymo modelio apibrėžimo:

Apibrėžimas. *Draudiko valdomas turtas $U(t)$ kinta pagal rizikos atstatymo modelį, jeigu bet kuriame laiko momente $t \geqslant 0$*

$$U(t) = x + ct - \sum_{i=1}^{\Theta(t)} Z_i, t \geqslant 0.$$

Šioje lygybėje:

- *$x \geqslant 0$ yra draudiko pradinis turtas.*
- *Žalų dydžiai $\{Z_1, Z_2, Z_3, \ldots\}$ sudaro neneigiamų atsitiktinių dydžių seką. Čia dydis $Z_i, i \geqslant 0$ yra i–osios žalos dydis.*

- $c > 0$ *yra pastovus, nepriklausantis nuo laiko, premijų surinkimo greitis per laiko vienetą.*

- *Tarpai tarp žalų* $\{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots\}$ *neneigiami ir neišsigimę taške* 0 *atsit. dydžiai.*

- $\Theta(t)$ *yra žalų skaičius intervale* $[0, t]$*. Čia*

$$\Theta(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{T_n \leqslant t\}} = \sup\{n \geqslant 1 : T_n \leqslant t\},$$

  kur $T_n = \theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n, n \geqslant 1.$

- *Atsitiktinių dydžių sekos* $\{Z_i, i \geqslant 0\}$ *ir* $\{\theta_i, i \geqslant 0\}$ *yra tarpusavyje nepriklausomos.*

Kaip jau minėta, homogeninis rizikos atstatymo modelis apibrėžiamas vienareikšmiškai, tuo tarpu, nehomogeninis rizikos atstatymo modelis gali būti apibrėžtas įvairiai. Vienas iš variantų yra laikyti, kad tik žalos yra nebūtinai vienodai pasiskirsčiusios. Tokie modeliai nagrinėjami [9] Lefevre ir Picard straipsnyje apie nehomogeninio rizikos atstatymo modelio taikymą draudime. Taip pat skirtingai pasiskirsčiusios žalos nagrinėjamos [10] Blaževičiaus, Bieliauskienės, Šiaulio darbe, bei [11] Bieliauskienės, Šiaulio darbe. Tokio paties tipo modelį kaip šiame darbe nagrinėjamas [4] Andrulytės, Bernackaitės, Kievinaitės ir Šiaulio straipsnyje. Jame tiek žalos, tiek ir laiko tarpai tarp žalų yra nebūtinai vienodai pasiskirstę.

Nehomogeniškumas gali turėti ir kitokią prasmę, kuri gali remtis ne tik atsitiktinių dydžių nevienodu pasiskirstymu. Atsitiktiniai dydžiai gali būti vienu ar kitu būdu priklausomi vienas nuo kito. Tokio tipo darbo pavyzdys yra [12] Li, Tang ir Wu staipsnis, kuriame žalų dydžiai ir tarplaikiai tenkina sąlygą:

$$\mathbb{P}(Z > x | \theta = t) \sim \mathbb{P}(X > x) h(t), t \geqslant 0,$$

kur $h(t) : [0, \infty) \Rightarrow [0, \infty)$ yra kažkokia funkcija.

Panašaus požiūrio laikosi ir Albrecher, Teugels savo [13] darbe, kur laiko tarpai ir žalų dydžiai yra priklausomi. Priklausomi atsitiktiniai dydžiai gali būti ir pačiose sekose $\{Z_1, Z_2, Z_3, \dots\}$ ir $\{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots\}$. Tokius modelius nagrinėja kinų matematikai Y. Chen, K.W. Ng (žr. [14]) ir K. Wang, Y. Wang, Q. Gao (žr.[15]).

Tai tik keletas pavyzdžių, kokios savybės gali būti priskiriamos nehomogeniniam rizikos atstatymo modeliui. Atsitiktinių dydžių priklausomumas bei nevienodas kažkurios iš modelio komponenčių pasiskirstymas ir yra pagrindinės dvi kryptys, kuriomis yra nagrinėjamas nehomogeninis rizikos atstatymo modelis.

3 Teoremos įrodymas

Šioje darbo dalyje įrodysime pagrindę teoremą. Pirmiausia bus įrodyta pagalbinė Lema, kuria vėliau naudosimės pagrindinės teoremos įrodyme. Patys įrodymai remiasi idėjomis, paimtomis iš [4], [6], [5] ir [7] darbų.

3.1 Pagalbinė Lema

Lema. *Tarkime, kad atsitiktiniai dydžiai η_1, η_2, η_3...yra tokie, kad jiems teisinga:*

$$(P1)\ \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\eta_i < 0,$$
$$(P2)\ \lim_{u\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(|\eta_i|\mathbb{1}_{\{\eta_i\leqslant -u\}}) = 0,$$
$$(P3)\ \sup_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\mathrm{e}^{\gamma\eta_i} < \infty$$

kur γ yra teigiama konstanta. Tada egzistuoja skaičiai $a_1, a_2 > 0$, tokie, kad:

$$\mathbb{P}\left(\sup_{k\geqslant 1}\sum_{i=1}^{k}\eta_i > x\right) \leqslant a_1\mathrm{e}^{-a_2 x}, x > 0.$$

Įrodymas.
Nesunku pastebėti, kad:

$$\mathbb{P}\left(\sup_{k\geqslant 1}\sum_{i=1}^{k}\eta_i > x\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\left\{\sum_{i=1}^{k}\eta_i > x\right\}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{k}\eta_i > x\right), \tag{1}$$

su bet kokiu pasirinktu $x > 0$.

Pasirinkę y tokį, kad $0 < y \leqslant \gamma$ ir pasinaudoję eksponentinės funkcijos sąvybėmis bei Markovo nelygybe gauname:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{k}\eta_i > x\right) &= \mathbb{P}\left(\mathrm{e}^{\sum_{i=1}^{k}\eta_i} > \mathrm{e}^{x}\right) = \mathbb{P}\left(\mathrm{e}^{y\sum_{i=1}^{k}\eta_i} > \mathrm{e}^{yx}\right)\\ &\leqslant \mathrm{e}^{-yx}\mathbb{E}\mathrm{e}^{y\sum_{i=1}^{k}\eta_i} = \mathrm{e}^{-yx}\mathbb{E}\mathrm{e}^{y(\eta_1+\eta_2+\ldots+\eta_k)}\\ &= \mathrm{e}^{-yx}\mathbb{E}\mathrm{e}^{y\eta_1+y\eta_2+\ldots+y\eta_k} = \mathrm{e}^{-yx}\mathbb{E}\mathrm{e}^{y\eta_1}\mathrm{e}^{y\eta_2}\ldots\mathrm{e}^{y\eta_k}\\ &= \mathrm{e}^{-yx}\mathbb{E}\mathrm{e}^{y\eta_1}\mathbb{E}\mathrm{e}^{y\eta_2}\ldots\mathbb{E}\mathrm{e}^{y\eta_k} = \mathrm{e}^{-yx}\prod_{i=1}^{k}\mathbb{E}\mathrm{e}^{y\eta_i},\end{aligned} \tag{2}$$

Išskaidome dalį (2) nelygybės:

$$\mathbb{E}\mathrm{e}^{y\eta_i} = \mathbb{E}(\mathrm{e}^{y\eta_i} + 1 - 1 + y\eta_i - y\eta_i) = 1 + y\mathbb{E}\eta_i + \mathbb{E}(\mathrm{e}^{y\eta_i} - 1 - y\eta_i). \tag{2+}$$

Be to,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\mathrm{e}^{y\eta_i} - 1 - y\eta_i) &= \mathbb{E}(\mathrm{e}^{y\eta_i} - 1 - y\eta_i)(\mathbb{1}_{\{\eta_i\leqslant -z\}} + \mathbb{1}_{\{-z<\eta_i\leqslant 0\}} + \mathbb{1}_{\{\eta_i>0\}})\\ &= \mathbb{E}((\mathrm{e}^{y\eta_i} - 1 - y\eta_i)\mathbb{1}_{\{\eta_i\leqslant -z\}}) + \mathbb{E}((\mathrm{e}^{y\eta_i} - 1 - y\eta_i)\mathbb{1}_{\{-z<\eta_i\leqslant 0\}})\\ &+ \mathbb{E}((\mathrm{e}^{y\eta_i} - 1 - y\eta_i)\mathbb{1}_{\{\eta_i>0\}}) = \mathbb{E}((\mathrm{e}^{y\eta_i} - 1)\mathbb{1}_{\{\eta_i\leqslant -z\}}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- y\mathbb{E}(\eta_i \mathbb{1}_{\{\eta_i \leqslant -z\}}) + \mathbb{E}((\mathrm{e}^{y\eta_i} - 1 - y\eta_i)\mathbb{1}_{\{-z<\eta_i\leqslant 0\}}) \\
&+ \mathbb{E}((\mathrm{e}^{y\eta_i} - 1 - y\eta_i)\mathbb{1}_{\{\eta_i>0\}}),
\end{aligned} \tag{3}
$$

jei $0 < y \leqslant \gamma, z > 0$ ir $i \in \mathbb{N}$.

Pastebėkime, kad teisingos tokios nelygybės:
$|\mathrm{e}^x - 1| \leqslant |x|, x \leqslant 0$
$|\mathrm{e}^x - x - 1| \leqslant \dfrac{x^2}{2}, x \leqslant 0$
$|\mathrm{e}^x - x - 1| \leqslant \dfrac{x^2}{2}\mathrm{e}^x, x \geqslant 0$

Iš tiesų:
$|\mathrm{e}^x - 1| = \left|\int_0^x \mathrm{e}^g dg\right| = \int_x^0 \mathrm{e}^g dg \leqslant \int_x^0 1 dg = -x = |x|$, jeigu $x \leqslant 0$
$|\mathrm{e}^x - x - 1| = \left|\int_0^x (\mathrm{e}^g - 1) dg\right| \leqslant \int_0^{|x|} |\mathrm{e}^g - 1| dg \leqslant \int_0^{|x|} g dg = \dfrac{x^2}{2}$, jeigu $x \leqslant 0$
$|\mathrm{e}^x - x - 1| = \left|1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \ldots - x - 1\right| = \left|\dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \ldots\right| = \dfrac{x^2}{2}\left(1 + \dfrac{2x}{3!} + \dfrac{2x^2}{4!} + \ldots\right) \leqslant$
$\dfrac{x^2}{2}\left(1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots\right) = \dfrac{x^2}{2}\mathrm{e}^x$, jeigu $x \geqslant 0$

Grįžkime prie (3) įverčio. Pasinaudoję ką tik įrodytomis nelygybėmis galime įvertinti:

$$
\begin{aligned}
|\mathbb{E}(\mathrm{e}^{y\eta_i} - 1 - y\eta_i)| &= |\mathbb{E}((\mathrm{e}^{y\eta_i} - 1)\mathbb{1}_{\{\eta_i\leqslant -z\}}) - y\mathbb{E}(\eta_i \mathbb{1}_{\{\eta_i\leqslant -z\}}) \\
&+ \mathbb{E}((\mathrm{e}^{y\eta_i} - 1 - y\eta_i)\mathbb{1}_{\{-z<\eta_i\leqslant 0\}}) \\
&+ \mathbb{E}((\mathrm{e}^{y\eta_i} - 1 - y\eta_i)\mathbb{1}_{\{\eta_i>0\}})| \\
&\leqslant |\mathbb{E}((\mathrm{e}^{y\eta_i} - 1)\mathbb{1}_{\{\eta_i\leqslant -z\}})| + y|\mathbb{E}(\eta_i \mathbb{1}_{\{\eta_i\leqslant -z\}})| \\
&+ |\mathbb{E}((\mathrm{e}^{y\eta_i} - 1 - y\eta_i)\mathbb{1}_{\{-z<\eta_i\leqslant 0\}})| \\
&+ |\mathbb{E}((\mathrm{e}^{y\eta_i} - 1 - y\eta_i)\mathbb{1}_{\{\eta_i>0\}})| \\
&\leqslant \mathbb{E}(|\mathrm{e}^{y\eta_i} - 1|\mathbb{1}_{\{\eta_i\leqslant -z\}}) + y\mathbb{E}(|\eta_i|\mathbb{1}_{\{\eta_i\leqslant -z\}}) \\
&+ \mathbb{E}(|\mathrm{e}^{y\eta_i} - 1 - y\eta_i|\mathbb{1}_{\{-z<\eta_i\leqslant 0\}}) \\
&+ \mathbb{E}(|\mathrm{e}^{y\eta_i} - 1 - y\eta_i|\mathbb{1}_{\{\eta_i>0\}}) \\
&\leqslant \mathbb{E}(|y\eta_i|\mathbb{1}_{\{\eta_i\leqslant -z\}}) + y\mathbb{E}(|\eta_i|\mathbb{1}_{\{\eta_i\leqslant -z\}}) \\
&+ \frac{1}{2}\mathbb{E}(|y\eta_i|^2\mathbb{1}_{\{-z<\eta_i\leqslant 0\}}) + \frac{1}{2}\mathbb{E}(|(y\eta_i)^2\mathrm{e}^{y\eta_i}|\mathbb{1}_{\{\eta_i>0\}}) \\
&\leqslant 2y\mathbb{E}(|\eta_i|\mathbb{1}_{\{\eta_i\leqslant -z\}}) + \frac{y^2}{2}\mathbb{E}(\eta_i^2\mathbb{1}_{\{-z<\eta_i\leqslant 0\}}) \\
&+ \frac{y^2}{2}\mathbb{E}(\eta_i^2\mathrm{e}^{y\eta_i}\mathbb{1}_{\{\eta_i>0\}}) \leqslant 2y\mathbb{E}(|\eta_i|\mathbb{1}_{\{\eta_i\leqslant -z\}}) \\
&+ \frac{y^2z^2}{2} + \frac{y^2}{2}\mathbb{E}(\eta_i^2\mathrm{e}^{y\eta_i}\mathbb{1}_{\{\eta_i>0\}}),
\end{aligned} \tag{4}
$$

kur $i \in \mathbb{N}, 0 < y \leqslant \gamma$ ir $z > 0$.

Pritaikė Liopitalio taisyklę gauname, kad bet kokiam $y > 0$:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{yx}}{x^2} &= \lim_{x\to\infty} \frac{(\mathrm{e}^{yx})'_x}{(x^2)'_x} = \lim_{x\to\infty} \frac{y\mathrm{e}^{yx}}{2x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{(y\mathrm{e}^{yx})'_x}{(2x)'_x} = \lim_{x\to\infty} \frac{y^2\mathrm{e}^{yx}}{2} = \infty.
\end{aligned}
$$

Vadinasi egzistuoja toks skaičius $K(\gamma) > 0$, priklausantis nuo γ, kad visiems x, kurie yra už jį didesni, yra teisinga nelygybė $\mathrm{e}^{\frac{\gamma}{2}x} \geqslant x^2$.

Todėl

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\eta_i^2 \mathrm{e}^{\frac{\gamma}{2}\eta_i} \mathbb{1}_{\{\eta_i>0\}}) &= \mathbb{E}(\eta_i^2 \mathrm{e}^{\frac{\gamma}{2}\eta_i} \mathbb{1}_{\{0<\eta_i\leqslant K\}}) + \mathbb{E}(\eta_i^2 \mathrm{e}^{\frac{\gamma}{2}\eta_i} \mathbb{1}_{\{\eta_i>K\}}) \\
&\leqslant K^2 \mathbb{E}\mathrm{e}^{\frac{\gamma}{2}\eta_i} + \mathbb{E}(\mathrm{e}^{\frac{\gamma}{2}\eta_i}\mathrm{e}^{\frac{\gamma}{2}\eta_i} \mathbb{1}_{\{\eta_i>K\}}) \\
&\leqslant K^2 \mathbb{E}\mathrm{e}^{\gamma\eta_i} + \mathbb{E}(\mathrm{e}^{\gamma\eta_i} \mathbb{1}_{\{\eta_i>K\}}) \\
&\leqslant (K^2+1)\mathbb{E}\mathrm{e}^{\gamma\eta_i}. \qquad (5)
\end{aligned}$$

Sujungę gautus rezultatus iš (4) ir (5) ir pasirinkę $z = \frac{1}{\sqrt[4]{y}}$ gauname štai tokį įvertinimą:

$$\begin{aligned}
|\mathbb{E}(\mathrm{e}^{y\eta_i} - 1 - y\eta_i)| &\leqslant 2y\mathbb{E}(|\eta_i| \mathbb{1}_{\{\eta_i \leqslant -\frac{1}{\sqrt[4]{y}}\}}) + \frac{y^{\frac{3}{2}}}{2} + \frac{y^2}{2}\mathbb{E}(\eta_i^2 \mathrm{e}^{y\eta_i} \mathbb{1}_{\{\eta_i>0\}}) \\
&= y\left(2\mathbb{E}(|\eta_i| \mathbb{1}_{\{\eta_i \leqslant -\frac{1}{\sqrt[4]{y}}\}}) + \frac{y^{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{y}{2}\mathbb{E}(\eta_i^2 \mathrm{e}^{y\eta_i} \mathbb{1}_{\{\eta_i>0\}})\right) \\
&\leqslant y\left(2\mathbb{E}(|\eta_i| \mathbb{1}_{\{\eta_i \leqslant -\frac{1}{\sqrt[4]{y}}\}}) + \frac{y^{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{y}{2}\mathbb{E}(\eta_i^2 \mathrm{e}^{\frac{\gamma}{2}\eta_i} \mathbb{1}_{\{\eta_i>0\}})\right) \\
&\leqslant y\left(2\mathbb{E}(|\eta_i| \mathbb{1}_{\{\eta_i \leqslant -\frac{1}{\sqrt[4]{y}}\}}) + \frac{y^{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{y}{2}(K^2+1)\mathbb{E}\mathrm{e}^{\gamma\eta_i}\right)
\end{aligned} \qquad (6)$$

Vadinasi iš (2), (2+), (6) nelygybės ir įverčio $\ln(1+u) \leqslant u, u \geqslant 0$ turime:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^k \eta_i > x\right) &\overset{(2)}{\leqslant} \mathrm{e}^{-yx}\prod_{i=1}^k \mathbb{E}\mathrm{e}^{y\eta_i} \overset{(2+)}{=} \mathrm{e}^{-yx}\prod_{i=1}^k (1 + y\mathbb{E}\eta_i + \mathbb{E}(\mathrm{e}^{y\eta_i} - 1 - y\eta_i)) \\
&\overset{(6)}{\leqslant} \mathrm{e}^{-yx}\prod_{i=1}^k (1 + y\mathbb{E}\eta_i + y(2\mathbb{E}(|\eta_i| \mathbb{1}_{\{\eta_i \leqslant -\frac{1}{\sqrt[4]{y}}\}}) + \frac{y^{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{y}{2}(K^2+1)\mathbb{E}\mathrm{e}^{\gamma\eta_i})) \\
&= \mathrm{e}^{-yx}\prod_{i=1}^k \mathrm{e}^{\ln(1+y(\mathbb{E}\eta_i + 2\mathbb{E}(|\eta_i| \mathbb{1}_{\{\eta_i \leqslant -\frac{1}{\sqrt[4]{y}}\}}) + \frac{y^{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{y}{2}(K^2+1)\mathbb{E}\mathrm{e}^{\gamma\eta_i}))} \\
&\leqslant \mathrm{e}^{-yx}\prod_{i=1}^k \mathrm{e}^{y(\mathbb{E}\eta_i + 2\mathbb{E}(|\eta_i| \mathbb{1}_{\{\eta_i \leqslant -\frac{1}{\sqrt[4]{y}}\}}) + \frac{y^{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{y}{2}(K^2+1)\mathbb{E}\mathrm{e}^{\gamma\eta_i})} \\
&= \exp\{-yx\}\exp\left\{\sum_{i=1}^k y(\mathbb{E}\eta_i + 2\mathbb{E}(|\eta_i| \mathbb{1}_{\{\eta_i \leqslant -\frac{1}{\sqrt[4]{y}}\}}) + \frac{y^{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{y}{2}(K^2+1)\mathbb{E}\mathrm{e}^{\gamma\eta_i})\right\} \\
&= \exp\left\{ -yx + y\sum_{i=1}^k \mathbb{E}\eta_i + 2ky\frac{1}{k}\sum_{i=1}^k \mathbb{E}(|\eta_i| \mathbb{1}_{\{\eta_i \leqslant -\frac{1}{\sqrt[4]{y}}\}}) + y\sum_{i=1}^k \frac{y^{\frac{1}{2}}}{2} \right. \\
&\quad \left. + k\frac{y^2}{2}(K^2+1)\frac{1}{k}\sum_{i=1}^k \mathbb{E}\mathrm{e}^{\gamma\eta_i}\right\} \\
&= \exp\left\{ -yx + y\sum_{i=1}^k \mathbb{E}\eta_i + yk\left(2\frac{1}{k}\sum_{i=1}^k \mathbb{E}(|\eta_i| \mathbb{1}_{\{\eta_i \leqslant -\frac{1}{\sqrt[4]{y}}\}}) + \frac{y^{\frac{1}{2}}}{2} \right.\right. \\
&\quad \left.\left. + \frac{y}{2}(K^2+1)\frac{1}{k}\sum_{i=1}^k \mathbb{E}\mathrm{e}^{\gamma\eta_i}\right)\right\} \\
&\leqslant \exp\left\{ -yx + y\sum_{i=1}^k \mathbb{E}\eta_i + yk\left(2\sup_{k\in\mathbb{N}}\frac{1}{k}\sum_{i=1}^k \mathbb{E}(|\eta_i| \mathbb{1}_{\{\eta_i \leqslant -\frac{1}{\sqrt[4]{y}}\}}) + \frac{y^{\frac{1}{2}}}{2} \right.\right.
\end{aligned}$$

$$
+\frac{y}{2}(K^2+1)\sup_{k\in\mathbb{N}}\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\mathbb{E}\mathrm{e}^{\gamma\eta_i}\Big)\Big\}
$$

$$
=\exp\Big\{-yx+y\sum_{i=1}^{k}\mathbb{E}\eta_i+yk\beta(y)\Big\}. \tag{7}
$$

Čia $\beta(y)$ yra apibrėžtas kaip:

$$
\beta(y):=2\sup_{k\in\mathbb{N}}\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\mathbb{E}(|\eta_i|\mathbb{1}_{\{\eta_i\leqslant-\frac{1}{\sqrt[4]{y}}\}})+\frac{y^{\frac{1}{2}}}{2}+\frac{y}{2}(K^2+1)\sup_{k\in\mathbb{N}}\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\mathbb{E}\mathrm{e}^{\gamma\eta_i}. \tag{8}
$$

Pastebime, kad jei $y\to 0$, tai $\frac{1}{\sqrt[4]{y}}\to\infty$ ir galima pritaikyti prielaidą (P2) pirmajam nariui, o trečiąjam nariui galime pritaikyti prielaidą (P3). Gauname, kad $\beta(y)\to 0, y\to 0$.

Sakykime, kad Lemos prielaidoje (P1) viršutinė riba yra kažkoks fiksuotas baigtinis skaičius $-a_3>0$. Tada pasirinkę pakankamai didelius $k\geqslant M+1$ turime:

$$
\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\mathbb{E}\eta_i\leqslant-\frac{a_3}{2},\ \ 0<a_3<\infty.
$$

Be to, $\exists y^*\in(0,\frac{\gamma}{2}):\beta(y^*)\leqslant\frac{a_3}{4}$, nes $\beta(y)\to 0, y\to 0$. Pasinaudoję turimais įverčiais gauname:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\Big(\sup_{k\geqslant 1}\sum_{i=1}^{k}\eta_i>x\Big)&=\mathbb{P}\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}\Big\{\sum_{i=1}^{k}\eta_i>x\Big\}\Big)\overset{(1)}{\leqslant}\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}\Big(\sum_{i=1}^{k}\eta_i>x\Big)\\
&=\sum_{k=1}^{M}\mathbb{P}\Big(\sum_{i=1}^{k}\eta_i>x\Big)+\sum_{k=M+1}^{\infty}\mathbb{P}\Big(\sum_{i=1}^{k}\eta_i>x\Big)\\
&\overset{(2)}{\leqslant}\sum_{k=1}^{M}\mathrm{e}^{-y^*x}\prod_{i=1}^{k}\mathbb{E}\mathrm{e}^{y^*\eta_i}+\sum_{k=M+1}^{\infty}\mathbb{P}\Big(\sum_{i=1}^{k}\eta_i>x\Big)\\
&\overset{(7)}{\leqslant}\sum_{k=1}^{M}\mathrm{e}^{-y^*x}\prod_{i=1}^{k}\mathbb{E}\mathrm{e}^{y^*\eta_i}+\sum_{k=M+1}^{\infty}\mathrm{e}^{-y^*x+y^*\sum_{i=1}^{k}\mathbb{E}\eta_i+y^*k\beta(y^*)}\\
&\leqslant\mathrm{e}^{-y^*x}\Big(\sum_{k=1}^{M}\prod_{i=1}^{k}\mathbb{E}\mathrm{e}^{y^*\eta_i}+\sum_{k=M+1}^{\infty}\mathrm{e}^{-y^*k\frac{a_3}{2}+y^*k\frac{a_3}{4}}\Big)\\
&\leqslant\mathrm{e}^{-y^*x}\Big(\sum_{k=1}^{M}\prod_{i=1}^{k}\mathbb{E}\mathrm{e}^{y^*\eta_i}+\sum_{k=M+1}^{\infty}\mathrm{e}^{-y^*k\frac{a_3}{4}}\Big)\\
&\leqslant\mathrm{e}^{-y^*x}\Big(\sum_{k=1}^{M}\prod_{i=1}^{k}\mathbb{E}\mathrm{e}^{y^*\eta_i}+\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-y^*k\frac{a_3}{4}}\Big)\\
&\leqslant\mathrm{e}^{-y^*x}\Big(\sum_{k=1}^{M}\prod_{i=1}^{k}A+\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\frac{a_3}{4}y^*}}\Big)\\
&=\mathrm{e}^{-xy^*}\Big(\sum_{k=1}^{M}A^k+\frac{\mathrm{e}^{\frac{a_3}{4}y^*}}{\mathrm{e}^{\frac{a_3}{4}y^*}-1}\Big)=:a_1\mathrm{e}^{-a_2x},
\end{aligned}
$$

čia $x>0, A:=\max_{1\leqslant i\leqslant M}\mathbb{E}\mathrm{e}^{\gamma\eta_i}, a_2=a_2(\gamma)=y^*\in(0,\frac{\gamma}{2})$ ir

$a_1=a_1(\gamma,a_3)=\sum_{k=1}^{M}s^k+\frac{e^{\frac{a_3}{4}}}{e^{\frac{a_3}{4}y^*}-1}>0.$

Lemos įrodymas baigtas.

3.2 Teoremos įrodymas

Šiame skyrelyje pateiksime detalų pagrindinės teoremos įrodymą.

Pasinaudosime prieš tai įrodyta pagalbine lema. Šiuo atveju atsitiktinį dydį η_i pakeisime dydžiu $Z_i - c\theta_i$, čia $i \in \mathbb{N}$. Įstatę tokį reiškinį į lemos rezultatą gauname:

$$\mathbb{P}\left(\sup_{k\geqslant 1}\sum_{i=1}^{k}\eta_i > x\right) = \mathbb{P}\left(\sup_{k\geqslant 1}\left\{\sum_{i=1}^{k}(Z_i - c\theta_i)\right\} > x\right) \leqslant a_1\mathrm{e}^{-a_2 x}, x > 0.$$

Pastebėkime, kad gautas reiškinys atitinka bankroto tikimybės apibrėžimą, taigi nelygybė bankroto tikimybei išplaukia tiesiogiai iš lemos rezultato. Būtent:

$$\psi(x) = \mathbb{P}\left(\sup_{k\geqslant 1}\left\{\sum_{i=1}^{k}(Z_i - c\theta_i)\right\} > x\right) \leqslant a_1\mathrm{e}^{-a_2 x}, x > 0,$$

čia a_1 ir a_2 yra tegiamos konstantos, o gauta nelygybė yra ekvivalenti pagrindinės teoremos nelygybei. Norint įrodyti, kad bankroto tikimybę galime įvertinti būten taip, mums užtenka to, kad atsitiktiniai dydžiai $Z_i - c\theta_i$ tenkintų pagalbinėje lemoje esančias sąlygas (P1), (P2) ir (P3).

Pasinaudodami dydžių $\theta_i, i \in \mathbb{N}$ neneigiamumu ir (R1) sąlyga gauname, kad lemos prielaida (P3) galioja atsitiktiniams dydžiams $Z_i - c\theta_i$. Būtent:

$$\sup_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\mathrm{e}^{\gamma(Z_i - c\theta_i)} \leqslant \sup_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\mathrm{e}^{\gamma Z_i} < \infty, \gamma > 0.$$

Toliau, pasinaudodami vidurkio savybėmis, (R3) sąlyga,iš karto gauname, kad lemos prielaida (P1) taip pat yra tenkinama.

Liko įsitikinti, kad atsitiktiniai dydžiai $Z_i - c\theta_i, i \in \mathbb{N}$ tenkina antrąją lemos prielaidą (P2). Kadangi reiškinyje yra modulis, tai galime teigti, kad toks reiškinys tikrai yra didesnis arba lygus nuliui. Būtent:

$$0 \leqslant \lim_{u\to\infty}\sup_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(|Z_i - c\theta_i|\mathbb{1}_{\{Z_i - c\theta_i \leqslant -u\}}). \tag{9}$$

Išskaidykime dešinėje pusėje esančią išraišką pasinaudoję modulio ir supremumo savybėmis:

$$\begin{aligned}
\lim_{u\to\infty}\sup_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(|Z_i - c\theta_i|\mathbb{1}_{\{Z_i - c\theta_i \leqslant -u\}}) &\leqslant \lim_{u\to\infty}\sup_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big(\mathbb{E}(|Z_i|\mathbb{1}_{\{Z_i - c\theta_i \leqslant -u\}}) \\
&\quad + \mathbb{E}(|c\theta_i|\mathbb{1}_{\{Z_i - c\theta_i \leqslant -u\}})\Big) \\
&\leqslant \lim_{u\to\infty}\sup_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(Z_i\mathbb{1}_{\{Z_i - c\theta_i \leqslant -u\}}) \\
&\quad + c\lim_{u\to\infty}\sup_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(\theta_i\mathbb{1}_{\{Z_i - c\theta_i \leqslant -u\}}). \qquad (10)
\end{aligned}$$

Nagrinėkime reiškinio (10) narius atskirai, pradėkime nuo pirmojo:

$$\begin{aligned}
\lim_{u\to\infty}\sup_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(Z_i\mathbb{1}_{\{Z_i - c\theta_i \leqslant -u\}}) &\leqslant \lim_{u\to\infty}\sup_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(Z_i\mathbb{1}_{\{Z_i - c\theta_i \leqslant -u\}}\mathbb{1}_{\{\theta_i \leqslant \frac{u}{2c}\}}) \\
&\quad + \lim_{u\to\infty}\sup_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(Z_i\mathbb{1}_{\{Z_i - c\theta_i \leqslant -u\}}\mathbb{1}_{\{\theta_i > \frac{u}{2c}\}})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{u\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(Z_i \mathbb{1}_{\{Z_i \leqslant -\frac{u}{2}\}}) \\
&+ \lim_{u\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(Z_i \mathbb{1}_{\{Z_i - c\theta_i \leqslant -u\}} \mathbb{1}_{\{\theta_i > \frac{u}{2c}\}}) \\
&= \lim_{u\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(Z_i \mathbb{1}_{\{Z_i - c\theta_i \leqslant -u\}} \mathbb{1}_{\{\theta_i > \frac{u}{2c}\}}) \\
&\leqslant \lim_{u\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(Z_i \mathbb{1}_{\{\theta_i > \frac{u}{2c}\}}) \\
&= \lim_{u\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}Z_i \mathbb{E}\mathbb{1}_{\{\theta_i > \frac{u}{2c}\}}. \qquad (11)
\end{aligned}
$$

Pirmasis sumos dėmuo išnyko dėl to, jog atsitiktiniai dydžiai $Z_i, i \in \mathbb{N}$ yra neneigiami. Iš nelygybės $1 + x \leqslant \mathrm{e}^x, \forall x$ gauname:

$$
1 + \frac{\gamma}{2} Z_i \leqslant \mathrm{e}^{\frac{\gamma}{2} Z_i} \Rightarrow Z_i \leqslant \frac{2}{\gamma}(\mathrm{e}^{\frac{\gamma}{2} Z_i} - 1) \Rightarrow \mathbb{E}Z_i \leqslant \frac{2}{\gamma}\mathbb{E}\mathrm{e}^{\frac{\gamma}{2} Z_i}.
$$

Pasinaudoję Koši nelygybe ir ką tik parodytu sąryšiu, turime:

$$
\begin{aligned}
\lim_{u\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}Z_i \mathbb{E}\mathbb{1}_{\{\theta_i > \frac{u}{2c}\}} &\leqslant \lim_{u\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} (\mathbb{E}Z_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} (\mathbb{E}\mathbb{1}_{\{\theta_i > \frac{u}{2c}\}})^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \lim_{u\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (\mathbb{E}Z_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (\mathbb{E}\mathbb{1}_{\{\theta_i > \frac{u}{2c}\}})^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \lim_{u\to\infty} \left(\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (\mathbb{E}Z_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (\mathbb{E}\mathbb{1}_{\{\theta_i > \frac{u}{2c}\}})^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \lim_{u\to\infty} \left(\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (\frac{2}{\gamma}\mathbb{E}\mathrm{e}^{\frac{\gamma}{2} Z_i})^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (\mathbb{E}\mathbb{1}_{\{\theta_i > \frac{u}{2c}\}})^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\frac{4}{\gamma^2} \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\mathrm{e}^{\gamma Z_i}\right)^{\frac{1}{2}} \lim_{u\to\infty} \left(\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (\mathbb{E}\mathbb{1}_{\{\theta_i > \frac{u}{2c}\}})^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\frac{4}{\gamma^2} \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\mathrm{e}^{\gamma Z_i}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\lim_{u\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (\mathbb{P}(\theta_i > \frac{u}{2c}))^2\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (12)
\end{aligned}
$$

Iš (R1) turime, kad pirmasis sandaugos narys yra baigtinis. Antrajame sandaugos naryje remdamiesi tuo, kad bet kokia tikimybė yra teigiama ir nedidesnė už vienetą, galime panaikinti kvadratą. Pasinaudoję (R2) prielaida gausime, kad antrasis (12) sandaugos narys yra mažesnis arba lygus nuliui. Iš tiesų:

$$
\begin{aligned}
\lim_{u\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(\mathbb{P}(\theta_i > \frac{u}{2c})\right)^2 &\leqslant \lim_{u\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\theta_i > \frac{u}{2c}) = \lim_{u\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\mathbb{1}_{\{\theta_i > \frac{u}{2c}\}} \\
&= \lim_{u\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\frac{\theta_i \mathbb{1}_{\{\theta_i > \frac{u}{2c}\}}}{\theta_i} \leqslant \lim_{u\to\infty} \frac{2c}{u} \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\theta_i \mathbb{1}_{\{\theta_i > \frac{u}{2c}\}} = 0. \qquad (13)
\end{aligned}
$$

Pasinaudoję (11), (12) ir (13) gauname:

$$
\lim_{u\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(Z_i \mathbb{1}_{\{Z_i - c\theta_i \leqslant -u\}}) = 0. \qquad (14)
$$

Nagrinėkime antrąjį reiškinio (10) narį. Čia taip pat pasinaudosime (R2) sąlyga:

$$\begin{aligned}\lim_{u\to\infty}\sup_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(\theta_i\mathbb{1}_{\{Z_i-c\theta_i\leqslant -u\}}) &= \lim_{u\to\infty}\sup_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(\theta_i\mathbb{1}_{\{\theta_i\geqslant\frac{1}{c}(Z_i+u)\}})\\ &\leqslant \lim_{u\to\infty}\sup_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(\theta_i\mathbb{1}_{\{\theta_i\geqslant\frac{u}{c}\}})=0. \qquad (15)\end{aligned}$$

Įstatę (14) ir (15) rezultatus į (10) turime, kad

$$\lim_{u\to\infty}\sup_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(|Z_i-c\theta_i|\mathbb{1}_{\{Z_i-c\theta_i\leqslant -u\}})\leqslant 0. \qquad (16)$$

Ir galiausiai pasinaudoję (9) ir (16), gauname, kad atsitiktiniai dydžių seka $Z_i - c\theta_i$ tenkina antrąją pagalbinės lemos sąlygą (P2):

$$\lim_{u\to\infty}\sup_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(|Z_i-c\theta_i|\mathbb{1}_{\{Z_i-c\theta_i\leqslant -u\}})=0.$$

Teorema įrodyta.

4 Tolesnė lemos sąlygų analizė

Šiame skyrelyje šiek tiek pakeiskime lemos sąlygas, panaikinikime ten esančias ribas. Pamėginkime gauti tikslesnį eksponentinį tikimybės įvertį, kuris priklausytų nuo pradinėse sąlygose apsibrėžtų konstantų. Naujosios lemos sąlygos atitinkamai atrodys šitaip:

$$(S1)\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\eta_i \leqslant -c_1, n \geqslant c_2$$

$$(S2)\ \sup_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(|\eta_i|\mathbb{1}_{\{\eta_i\leqslant -c_4\}}) \leqslant \frac{1}{c_4^3},$$

$$(S3)\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\mathrm{e}^{\gamma\eta_i} < c_3, n \geqslant c_2$$

Pažiūrėkime, ar lemoje įrodytos nelygybės konstantas galime išreikšti čia esančiomis konstantomis. Imkime (7) nelygybę ir tarkime, kad prieš tai įrodyme y pasirinkome ne bet kokį, o konkrečiai $y = \frac{1}{c_4^4}$, be to $0 < \frac{1}{c_4^4} < \gamma$.

$$\mathbb{P}\Bigg(\sum_{i=1}^{k}\eta_i > x\Bigg) \leqslant \exp\Bigg\{-\frac{x}{c_4^4} + \frac{1}{c_4^4}\sum_{i=1}^{k}\mathbb{E}\eta_i + \frac{1}{c_4^4}k\Bigg(2\sup_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\mathbb{E}(|\eta_i|\mathbb{1}_{\{\eta_i\leqslant -c_4\}}) + \frac{1}{2c_4^2} + \frac{1}{2c_4^4}(K^2+1)\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\mathbb{E}\mathrm{e}^{\gamma\eta_i}\Bigg)\Bigg\}.$$

Čia $K = K(\gamma) > 0$, kaip ir lemos įrodyme, yra toks skaičius, kad visiems x, kurie yra už jį didesni, yra teisinga nelygybė $\mathrm{e}^{\frac{\gamma}{2}x} \geqslant x^2$.

Tuomet pasirinkime pakankamai didelius $k \geqslant c_2$ ir pasinaudoję aukščiau esančia nelygybe, naujas sąlygas ir paskutiniu lemos įrodyme esančiu tikimybės įvertinimu:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\Bigg(\sup_{k\geqslant 1}\sum_{i=1}^{k}\eta_i > x\Bigg) &= \mathbb{P}\Bigg(\bigcup_{k=1}^{\infty}\Bigg\{\sum_{i=1}^{k}\eta_i > x\Bigg\}\Bigg) \overset{(1)}{\leqslant} \sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}\Bigg(\sum_{i=1}^{k}\eta_i > x\Bigg)\\
&= \sum_{k=1}^{c_2-1}\mathbb{P}\Bigg(\sum_{i=1}^{k}\eta_i > x\Bigg) + \sum_{k=c_2}^{\infty}\mathbb{P}\Bigg(\sum_{i=1}^{k}\eta_i > x\Bigg)\\
&\overset{(2)}{\leqslant} \sum_{k=1}^{c_2-1}\mathrm{e}^{-\frac{x}{c_4^4}}\prod_{i=1}^{k}\mathbb{E}\mathrm{e}^{\frac{\eta_i}{c_4^4}} + \sum_{k=c_2}^{\infty}\mathbb{P}\Bigg(\sum_{i=1}^{k}\eta_i > x\Bigg)\\
&\leqslant \sum_{k=1}^{c_2-1}\mathrm{e}^{-\frac{x}{c_4^4}}\prod_{i=1}^{k}\mathbb{E}\mathrm{e}^{\frac{\eta_i}{c_4^4}} + \sum_{k=c_2}^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{x}{c_4^4}-\frac{kc_1}{c_4^4}+\frac{k}{c_4^4}\left(\frac{2}{c_4^3}+\frac{1}{2c_4^2}+c_3(K(\gamma)^2+1)\frac{1}{2c_4^4}\right)}\\
&= \mathrm{e}^{-\frac{x}{c_4^4}}\Bigg(\sum_{k=1}^{c_2-1}\prod_{i=1}^{k}\mathbb{E}\mathrm{e}^{\frac{\eta_i}{c_4^4}} + \sum_{k=c_2}^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{kc_1}{c_4^4}+\frac{k}{c_4^4}\left(\frac{2}{c_4^3}+\frac{1}{2c_4^2}+c_3(K(\gamma)^2+1)\frac{1}{2c_4^4}\right)}\Bigg)\\
&= \mathrm{e}^{-\frac{x}{c_4^4}}\Bigg(\sum_{k=1}^{c_2-1}\prod_{i=1}^{k}\mathbb{E}\mathrm{e}^{\frac{\eta_i}{c_4^4}} + \sum_{k=c_2}^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{k}{c_4^4}\left(c1-\frac{2}{c_4^3}-\frac{1}{2c_4^2}-c_3(K(\gamma)^2+1)\frac{1}{2c_4^4}\right)}\Bigg)\\
&= \mathrm{e}^{-\frac{x}{c_4^4}}\Bigg(\sum_{k=1}^{c_2-1}\prod_{i=1}^{k}\mathbb{E}\mathrm{e}^{\frac{\eta_i}{c_4^4}} + \sum_{k=c_2}^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{k}{c_4^4}S}\Bigg)\\
&\leqslant \mathrm{e}^{-\frac{x}{c_4^4}}\Bigg(\sum_{k=1}^{c_2-1}\prod_{i=1}^{k}\mathbb{E}\mathrm{e}^{\frac{\eta_i}{c_4^4}} + \sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{k}{c_4^4}S}\Bigg)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \mathrm{e}^{-\frac{x}{c_4^4}} \left(\sum_{k=1}^{c_2-1} \prod_{i=1}^{k} A + \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\frac{S}{c_4^4}}} \right) \\
&= \mathrm{e}^{-\frac{x}{c_4^4}} \left(\sum_{k=1}^{c_2-1} A^k + \frac{\mathrm{e}^{\frac{S}{c_4^4}}}{\mathrm{e}^{\frac{S}{c_4^4}} - 1} \right) =: a_1 \mathrm{e}^{-a_2 x},
\end{aligned}
$$

čia $x > 0, A := \max_{1 \leqslant i \leqslant M} \mathbb{E}\mathrm{e}^{\gamma\eta_i}, a_2 = a_2(\gamma) = \frac{1}{c_4^4}$,
$a_1 = \sum_{k=1}^{c_2-1} A^k + \frac{\mathrm{e}^{\frac{S}{c_4^4}}}{\mathrm{e}^{\frac{S}{c_4^4}}-1}$, o $S = c1 - \frac{2}{c_4^3} - \frac{1}{2c_4^2} - c_3(K(\gamma)^2+1)\frac{1}{2c_4^4}$.

Štai taip pakeitę lemos sąlygas ir pasirinkę atitinkamas konstantas c_1, c_2, c_3 ir c_4, kad $S > 0$, gauname eksponentinį tikimybės įvertį.

5 Vienas pavyzdys

Šiame skyrelyje pateiksime pavyzdį, kuris parodo, kad aibė atsitiktinių dydžių η_i yra didesnė nei [4] straipsnyje, remiantis pagalbinės lemos sąlygomis. Paimkime tokius atsitiktinius dydžius η_i, kurie tenkintų pirmąsias dvi lemos savybes (P1) ir (P2), o taip pat:

$$
\mathbb{E}\mathrm{e}^{\gamma\eta_i} = \begin{cases} \sqrt{i}, \text{ kai } i = k^2, \text{ kur } k \in \mathbb{N}, \\ \frac{1}{2^i}, \text{ kitais atvejais} \end{cases}
$$

Akvaizdu, kad lemos prielaida

$$
(P3) \ \sup_{n \geqslant 1} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\mathrm{e}^{\gamma\eta_i} < \infty
$$

tokiu atveju bus tenkinama, tačiau sąlyga

$$
\sup_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{E}\mathrm{e}^{\gamma\eta_i} < \infty
$$

nebus tenkinama, nes supremumas tokiu atveju nėra baigtinis. Taigi pakeitimai įvestį pagalbinės lemos prielaidose, leidžia praplėsti aibę atsitiktinių dydžių sekų, kurioms galima taikyti 3 – jame skyrelyje esančią teoriją.

6 Išvados

Šiame darbe buvo apibendrinta nehomogeninio rizikos atstatymo modelio bankroto tikimybės eksponentis įvertis. Matome, kad Lundberg tipo nelygybei užtenka ne tokių griežtų sąlygų. Perėjimas nuo homogeninio prie nehomogeninio modelio yra sudėtingas ir iki pakankamai plataus praktinio pritaikymo dar daug darbo reikalaujantis procesas. Remiantis šiuo darbu, tolesnės tyrimo kryptys gali būtų tokios:

1. Nagrinėjimas, modeliavimas, ir tokiai teoremai tinkančių rizikos atstatymo modelių radimas.
2. Teoremos tobulinimas modifikuojant jos sąlygas.
3. Konstantų konkretizavimas laikant teoremos pradinius reikalavimus. Sąlygų pavyzdžiai pateikti 4 – ajame skyrelyje.
4. Remiantis 4 – o skyrelio analizės pavyzdžiu, tinkamų konstantų radimas pagrindinei, įrodytai teoremai.

Literatūra

[1] E. Sparre Andersen, On the collective theory of risk in the case of contagion between the claims, *Transactions XVth International Congress of Actuaries*, 2(6):219–229, 1957.

[2] F. Lundberg, Approximerad framställning av sannolikhetsfunktionen Återförsäkring av kollektivrisker,*Acad. Afhandling. Almqvist och Wiksell*, Upsala, 1903.

[3] H. Cramer, On the mathematical theory of risk, Skandia Jubilee volume, Stockholm, 1930.

[4] I. A. Andrulytė, E. Bernackaitė, D. Kievinaitė, J. Šiaulys, The Lundberg–type inequality for and inhomogeneous risk renewal model, *Modern Stochastics: Theory and Applications*, 2015

[5] E. Bernackaitė, J. Šiaulys, The exponential moment tail of inhomogeneous renewal process,*Statistics and Probability Letters*, 97:9-15, 2015.

[6] E. Bernackaitė, J. Šiaulys, The finite-time ruin probability for an inhomogeneous renewal risk model, submitted, 2015.

[7] W.L. Smith, On the elementary renewal theorem for non-identicaly distributed variables, *Pacific Journal of Mathematics*, 14(2):673-699, 1964.

[8] H. Pragarauskas, Draudos matematika, *Matematikos ir informatikos institutas*, 2007.

[9] C. Lefevre, P. Picard, A nonhomogeneous risk model for insurance, *Computers and Mathematics with Applications*, 2006.

[10] K. Blaževičius, E. Bieliauskienė, J. Šiaulys, Finite-time ruin probability in the inhomogeneous claim case, *Lithuanian Mathematical Journal*, 50(3):260-270, 2010.

[11] E. Bieliauskienė, J. Šiaulys, Infinite time ruin probability in inhomogeneous claim case, *Lietuvos matematikos rinkinys*, 51:352-356, 2010.

[12] J. Li, Q. Tang, R. Wu, Subexponential tails of discounted aggregate claims in a time-dependent renewal risk model, *Advances in Applied Probability*, 42(4):1126–1146, 2010.

[13] H. Albrecher, J.L. Teugels, Exponential behavior in the presence of dependence in risk theory,*Journal of Applied Probability*, 43(1):257–273, 2006.

[14] Y. Chen, K.W. Ng, The ruin probability of the renewal model with constant interest force and negatively dependent heavy-tailed claims, *Insurance: Mathematics & Economics*, 40(3):415–423, 2007.

[15] K. Wang, Y. Wang, Q. Gao, Uniform asymptotics for the finite-time ruin probability of a dependent risk model with a constant interest rate, *Methodology and Computing in Applied Probability*, 15(1):109-124, 2013.