VILNIAUS UNIVERSITETAS

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

Magistro darbas

CLAYTON'O KOPULOS RĖŽIAI IR UEND SAVYBĖ

BOUNDS FOR THE CLAYTON COPULA AND THE UEND PROPERTY

Gediminas Janušis

VILNIUS 2016

Matematinės analizės katedra

Darbo vadovas doc. dr. Martynas Manstavičius
Darbo recenzentas dr. Donata Puplinskaitė

Darbas apgintas 2016 m. sausio 14 d.
Darbas įvertintas ____________________

Registravimo Nr. ______________
2016-01-04 _________________

Clayton'o kopulos rėžiai ir UEND savybė

Santrauka

Sparčiai vystantis tiksliesiems mokslams, tobulėjant skaičiavimo technikai, geriau suvokiant bei įvertinant tarpusavio priklausomybes kopulos tapo neatsiejama mokslo dalimi, o jų tyrimo bei taikymo poreikis ir toliau auga. Praktikoje kopulos dažniausiai taikomos nusakyti ir modeliuoti priklausomybėms tarp kelių atsitiktinių dydžių, tačiau gali būti naudingos ir moksliniu požiūriu plečiant statistikos, tikimybių teorijos, laiko eilučių horizontus.

Vienas iš tokių pavyzdžių, tampriai su kopulomis susijusi UEND *(angl. upper extended negative dependence)* savybė yra dažnai naudojama kaip pagalbinis įrankis kai kurių teiginių bei teoremų įrodymuose.

Šiame darbe nagrinėjama Archimedo kopulų klasei priklausanti Clayton'o kopula. Pasinaudojant patikslintu Clayton'o kopulos viršutiniu rėžiu bei tuo, kad $n = 2$ atveju UEND savybė galioja, siekiama parodyti, jog UEND savybė galioja ir aukštesnių eilių atvejais. Taip pat pasiūlomas patikslintas Clayton'o kopulos rėžis iš apačios.

Raktiniai žodžiai : Archimedo kopula, Clayton'o kopula, UEND, Fréchet–Hoeffding kopulų rėžiai, patikslintas Clayton'o kopulos viršutinis rėžis, nepriklausomumo kopula.

Bounds for the Clayton Copula and the UEND Property

Abstract

The rapid development of exact sciences along with the improvements in computing technologies, better understanding of interdependence resulted in copulas becoming an integral part of science. The need of their application and futher investigations increase constantly. In practice copulas are used to describe and model the dependence between random variables. They can be useful for expanding the horizons of statistics, probability theory and time series as well.

One such example could be the upper extended negative dependence (UEND) property closely related to copulas. It is being used in some proofs of some propositions and theorems.

In this thesis, we consider Clayton copula from Archimedean copula class. Using an improved Clayton copula upper bound and the fact that in case $n = 2$ the UEND property holds, we seek to show that the UEND property holds in cases $n \geq 2$ as well. We also present an improved Clayton copula lower bound.

Key words : Archimedean copula, Clayton copula, UEND, Fréchet–Hoeffding bounds, an improved Clayton copula upper bound, independence copula.

Turinys

Žymenys

$C = C(u_1, \ldots, u_n)$ – n–matė kopula;

$C_\theta = C_\theta(u_1, \ldots, u_n)$ – n–matė Clayton'o kopula;

$\breve{C} = \breve{C}(u_1, \ldots, u_n)$ – n–matė išgyvenamumo funkcija;

$\overline{C} = \overline{C}(1 - u_1, \ldots, 1 - u_n)$ – n–matė išgyvenamumo kopula;

$\Pi = \Pi(u_1, \ldots, u_n)$ – n–matė nepriklausomumo kopula;

X_i – i–tasis atsitiktinis dydis, $i = 1, 2, \ldots, n$;

$F_i = F_i(x_i)$ – i–tojo atsitiktinio dydžio X_i marginalioji pasiskirstymo funkcija, $i = 1, 2, \ldots, n$;

$\overline{F_i} = \overline{F_i}(x_i)$ – i–tojo atsitiktinio dydžio X_i išgyvenamumo funkcija, $i = 1, 2, \ldots, n$;

$\mathbb{F} = \mathbb{F}(x_1, \ldots, x_n)$ – n–matė atsitiktinio vektoriaus $(X_1, \ldots, X_n)$ pasiskirstymo funkcija;

$\overline{\mathbb{F}} = \overline{\mathbb{F}}(x_1, \ldots, x_n)$ – n–matė atsitiktinio vektoriaus $(X_1, \ldots, X_n)$ išgyvenamumo funkcija;

$M = M(u_1, \ldots, u_n)$ – n–matės kopulos C Fréchet–Hoeffding viršutinis rėžis;

$W = W(u_1, \ldots, u_n)$ – n–matės kopulos C Fréchet–Hoeffding apatinis rėžis.

1 Įžanga

Kopulomis vadinamos tokios funkcijos, kurios apjungia daugiamačių skirstinių pasiskirstymo funkcijas su jų marginaliosiomis pasiskirstymo funkcijomis. Į kopulas taip pat galima žiūrėti kaip į daugiamates pasiskirstymo funkcijas, kurias sudarantys vienmačiai atsitiktiniai dydžiai yra tolygiai pasiskirstę intervale $[0, 1]$.

Esminis kopulų privalumas yra tai, jog jų pagalba galima nesunkiai modeliuoti ir įvertinti atsitiktinių vektorių pasiskirstymus. Tam pakanka žinoti vienmates pasiskirstymo funkcijas ir turėti kopulą. Taikymuose kopulos plačiai naudojamos priklausomybės tarp atsitiktinių dydžių tyrimui. Kaip vienus iš dažniausiai sutinkamų kopulų taikymo pavyzdžių galima paminėti neparametrinėje statistikoje plačiai taikomus Spearman'o koreliacijos koeficientą ρ ir Kendall'o τ, kuriuos galima užrašyti per kopulas (Nelsen [21]), atitinkamai

$$\rho(X_1, X_2) = 12 \int_{[0,1]^2} C(u_1, u_2) du_1 u_2 - 3$$

ir

$$\tau(X_1, X_2) = 4 \int_{[0,1]^2} C(u_1, u_2) dC(u_1, u_2) - 1.$$

Per kopulas taip pat gali būti išreikšti atsitiktinių dydžių skirstinių uodegų priklausomybės matai: viršutinis (aukščiausiame - dešiniausiame kvadrate) ir apatinis (žemiausiame - kairiausiame kvadrate) (Nelsen [21]), atitinkamai

$$\lambda_U = 2 - \lim_{t \to 1^-} \frac{1 - C(t,t)}{1 - t}$$

ir

$$\lambda_L = \lim_{t \to 0^+} \frac{C(t,t)}{t}.$$

Literatūros apie kopulas bei įvairius jų praktinio pritaikymo atvejus finansuose, rizikos valdyme, statistikoje, investicijų teorijoje, inžinerijoje yra gausu. Platesniam susipažinimui siūlome žiūrėti Embrechts, Frey, McNeil [9], Cherubini, Luciano, Vecchiato [2], Embrechts, McNeil, Straumann [10], Favre, Genest [11].

Įdėmiau panagrinėjus literatūrą kopulų tema nesunku pastebėti, jog ši mokslo kryptis yra ganėtinai jauna. Daugelis svarbių darbų dienos šviesą išvydo tik devintąjame dešimtmetyje, o kai kurie jau ir naujame tūkstantmetyje. Iš tiesų, ne taip seniai apie kopulas buvo žinoma dar visai nedaug.

Kopulų eros pradžia laikoma penktojo dešimtmečio pabaiga, kuomet Sklar'as (Sklar [23]) parodė, jog bet kuri daugiamatė pasiskirstymo funkcija gali būti išreikšta marginaliosiomis pasiskirstymo funkcijomis (vėliau ši teorema buvo pavadinta jo vardu). Iki Sklar'o daugiamačius skirstinius su fiksuotais vienmačiais skirstiniais tyrė Fréchet [13], Dall'Aglio [4], Féron [12]. Hoeffding'as dar 1940 m. [16], [17] pristatė dvimačius standartizuotus pasiskirstymus kvadrate $[-1/2, 1/2]^2$, sudarytus iš vienmačių skirstinių apibrėžtų intervale $[-1/2, 1/2]$. Jam nedaug trūko. Kaip pažymėjo Schweizer [22], Hoeffding'ui tereikėjo vietoj kvadrato $[-1/2, 1/2]^2$ savo skirstinių normalizavimui pasirinkti vienetinį kvadratą $[0, 1]^2$ ir jis būtų atradęs kopulas. Po Hoeffding'o ir Sklar'o kopulos įvairiais pavidalais buvo nepriklausomai atrastos dar keletą kartų: Kimeldorf, Sampson [18], Galambos [14], Deheuvels [6]. Nepaisant to, prireikė dar ne vieno dešimtmečio, kol kopulos sulaukė platesnio masto susidomėjimo.

Šiame darbe mes pasirinkome nagrinėti kopulų taikymą ne praktinių uždavinių sprendimui ir iliustravimui, o veikiau teorinio pagrindo plėtojimui ir stiprinimui. Iš esmės šis darbas paremtas Leipaus, Manstavičiaus straipsniu „Bounds for the Clayton copula“ [19] ir galėtų būti kaip nedidelis jo tęsinys. Minėtame straipsnyje pasirinkta Archimedo kopulų klasei priklausanti Clayton'o kopula $C_\theta(u_1, \ldots, u_n)$ ir jai pasiūlyti du tikslesni[1] viršutiniai rėžiai, kai $\theta > 0$ ir $n \geq 2$ ir vienas apatinis rėžis atvejui $\theta \in [-1, 0), n = 2$. Remiantis vienu iš gautųjų rėžių parodyta, jog $n = 2$ atveju galioja įdomi UEND savybė, kuri ir tapo vienu iš pagrindinių mūsų darbo objektų.

UEND *(angl. upper extended negative dependence)* savybė dažniausiai taikoma kaip įrankis arba komponentas tiriant skirstinių uodegų elgseną, asimptotiką, silpninant tam tikras bendresnes sąlygas. UEND savybės taikymo pavyzdžių galima rasti darbuose: Dindienė, Leipus [7], [8], Chen, Chen, Kai [1], Leipus, Šiaulys, Yang [20], da Silva [5].

Sekančiame skyriuje trumpai pristatysime kopulas ir plačiau Clayton'o kopulą bei kelis su jomis susijusius svarbiausius faktus. Trečiame skyriuje pritaikysime patikslintą viršutinį Clayton'o kopulos rėžį UEND savybės tikrinimui aukštesnių eilių atvejais. Ketvirtame skyriuje pasiūlysime patikslintą apatinį Clayton'o kopulos rėžį. A priede pateikiame dar kelis naudingus faktus, kurie susiję su nagrinėjamu objektu mažiau, bet buvo panaudoti šiame darbe. B priede pateikiamas R paketo programinis kodas, panaudotas darbe pavaizduotoms iliustracijoms gauti.

[1]Kopulos visada yra aprėžtos iš viršaus ir apačios Fréchet–Hoeffding rėžiais (žiūrėti Teoremą 3). Be to, Clayton'o kopula iš apačios yra dar griežčiau aprėžta nepriklausomumo kopula Π (žiūrėti Išvadą 1).

2 Įvadas į kopulų teoriją: svarbiausi faktai

Pateiksime kelis svarbiausius kopulų teorijos faktus, kurie yra gerai žinomi ir tapo pagrindu šiame darbe.

2.1 Kopula ir jos savybės

Visų pirma pateiksime du alternatyvius kopulos apibrėžimus.

Apibrėžimas 1 (Tikimybiniais terminais)**.** *n–mate kopula vadinama bet kokia funkcija $C : [0,1]^n \to [0,1]$, kuri yra n–mačio atsitiktinio vektoriaus su tolygaus atsitiktinio dydžio marginaliosiomis pasiskirstymo funkcijomis $(F_1(X_1) \le u_1, \dots, F_n(X_n) \le u_n)$ vienetiniame kube $[0,1]^n$ jungtinė pasiskirstymo funkcija*

$$C(u_1, \dots, u_n) = \mathbb{P}(F_1(X_1) \le u_1, \dots, F_n(X_n) \le u_n).$$

Apibrėžimas 2 (Analiziniais terminais)**.** *Atvaizdis $C : [0,1]^n \to [0,1]$ vadinamas n–mate kopula, jei tenkinamos sąlygos:*

1. $C(u_1, \dots, u_n) = 0$, *jei* $\exists$ *bent vienas* $i : u_i = 0, \quad i = 1, \dots, n;$
2. $C(1, \dots, 1, u_k, 1, \dots, 1) = u_k;$
3. *C yra n-didėjanti. Tai yra, kiekvienam hiperstačiakampiui*

   $$B = \prod_{i=1}^{n} [x_i, y_i] \subseteq [0,1]^n$$

   C-tūris yra neneigiamas. Kitaip tariant,

   $$\int_B dC(u) = \sum_{\mathbf{z} \in B} (-1)^{N(\mathbf{z})} C(\mathbf{z}) \ge 0,$$

   čia $N(\mathbf{z}) = \#\{k : z_k = x_k\}$.

Atskiru atveju, kai $n = 2$, teisingas toks apibrėžimas:

$C : [0,1]^2 \to [0,1]$ yra dvimatė kopula, jei:

1. $C(0, u) = C(u, 0) = 0;$
2. $C(1, u) = C(u, 1) = u;$
3. $C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \ge 0,$

   su visais $0 \le u_1 \le u_2 \le 1$ *ir* $0 \le v_1 \le v_2 \le 1$.

Bene pats svarbiausias kopulų teorijos rezultatų yra Sklar'o teorema.

Teorema 1 (Sklar'o teorema)**.** *Bet kurio atsitiktinio vektoriaus* $(X_1, \ldots, X_n)$ *n–matė pasiskirstymo funkcija*

$$\mathbb{F}(x_1, \ldots, x_n) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n)$$

gali būti išreikšta naudojant tik marginaliąsias pasiskirstymo funkcijas $F_i(x) = \mathbb{P}[X_i \leq x], \quad i = 1, \ldots, n$, *tai yra,*

$$\mathbb{F}(x_1, \ldots, x_n) = C(F_1(x_1), \ldots, F_n(x_n)),$$

čia C *yra kopula. Ši kopula yra vienintelė, jei marginaliosios pasiskirstymo funkcijos* F_i *yra tolydžios.*

Teisingas ir atvirkščias teiginys: duotai kopulai $C : [0,1]^n \to [0,1]$ *ir marginaliosioms pasiskirstymo funkcijoms* $F_i(x), \quad i = 1, \ldots, n$, $C(F_1(x_1), \ldots, F_n(x_n))$ *apibrėžia n–matę pasiskirstymo funkciją* $\mathbb{F}$.

Sklar'o teoremą galima suformuluoti ir išgyvenamumo funkcijų terminais.

Teorema 2 (Sklar'o kanoninė reprezentacija)**.** *Tegu* $\overline{\mathbb{F}}(x_1, \ldots, x_n) = \mathbb{P}(X_1 > x_1, \ldots, X_n > x_n)$ *yra atsitiktinio vektoriaus* $(X_1, \ldots, X_n)$ *n–matė išgyvenamumo funkcija, o* $\overline{F}(x_i) = \mathbb{P}(X_i > x_i)$, $i = 1, \ldots, n$, *marginaliosios išgyvenamumo funkcijos. Tada*

$$\overline{\mathbb{F}}(x_1, \ldots, x_n) = \breve{C}(\overline{F_1}(x_1), \ldots, \overline{F_n}(x_n)).$$

$\breve{C}$ *yra vienintelė, jei marginaliosios išgyvenamumo funkcijos* $\overline{F_i}$ *yra tolydžios.* $\breve{C}$ *toliau taip pat vadinsime išgyvenamumo funkcija.*

Išgyvenamumo funkcijos $\breve{C}$ ryšį su kopula C nusakysime apibrėždami išgyvenamumo kopulą $\overline{C}$.

Apibrėžimas 3. *Pažymėkime*

$$\begin{aligned} \overline{C}(1-u_1, \ldots, 1-u_n) \quad := \quad & 1 - \sum_{i=1}^{n} u_i + \sum_{i<j} C(u_i, u_j) - \\ - \quad & \sum_{i<j<k} C(u_i, u_j, u_k) + \cdots + (-1)^n C(u_1, \ldots, u_n) = \\ = \quad & \mathbb{P}(X_1 > x_1, \ldots, X_n > x_n). \end{aligned}$$

Aišku, kad $\breve{C}(u_1, \ldots, u_n) = \overline{C}(1-u_1, \ldots, 1-u_n)$*. Toliau* $\overline{C}(1-u_1, \ldots, 1-u_n)$ *vadinsime išgyvenamumo kopula.*

Dar vienas kopulų teorijoje svarbus faktas yra vadinamieji Fréchet–Hoeffding kopulų rėžiai.

Teorema 3 (Fréchet–Hoeffding rėžiai)**.** *Bet kuriai kopulai* $C : [0,1]^n \to [0,1]$ *ir vektoriui* $(u_1, \ldots, u_n) \in [0,1]^n$ *teisingos tokios nelygybės:*

$$W(u_1, \ldots, u_n) \le C(u_1, \ldots, u_n) \le M(u_1, \ldots, u_n),$$

čia $W(u_1, \ldots, u_n) = \max\{\sum_{i=1}^n u_i - n + 1, 0\}$ *ir* $M(u_1, \ldots, u_n) = \min(u_1, \ldots, u_n)$.

M visada yra kopula. W yra kopula tik atveju $n = 2$.

Daugiamačių kopulų konstravimas yra sudėtingas. Daugelyje literatūros šaltinių aprašytos kopulos vienmačiams ar dvimačiams skirstiniams neturi akivaizdaus apibendrinimo daugiamačiu atveju. Dėl šios priežasties gana dažnai pasirenkama nagrinėti kopulas iš Archimedo kopulų klasės, kurioje įmanomas pakankamai apibendrintas daugiamačių kopulų konstravimas.

Apibrėžimas 4. *Kopula C vadinama Archimedo, jei ji gali būti išreikšta pavidalu*

$$C(u_1, \ldots, u_n) = \psi_\theta^{[-1]}\left(\psi_\theta(u_1) + \cdots + \psi_\theta(u_n)\right), \quad (u_1, \ldots, u_n) \in [0,1]^n,$$

čia $\psi_\theta : [0,1] \times \Theta \to [0,1)$ *yra tolydi, griežtai mažėjanti ir iškila funkcija tokia, kad* $\psi_\theta(1) = 0$*.* θ *yra koks nors parametras iš parametrų erdvės* Θ*.* ψ_θ *dar vadinamas Archimedo kopulos generatoriumi, o* $\psi_\theta^{[-1]}$ *apibrėžiamas taip:*

$$\psi_\theta^{[-1]}(t) = \begin{cases} \psi_\theta(t), & \text{jei } 0 \le t \le \psi_\theta(0); \\ 0, & \text{jei } \psi_\theta(0) \le t \le +\infty. \end{cases}$$

$\psi_\theta^{[-1]}$ *formulėje galima keisti* ψ_θ^{-1}*, jei* ψ_θ^{-1} *yra n–monotoniška intervale* $[0, +\infty)$; *tai yra, jei* ψ_θ^{-1} *yra* $(n-2)$ *kartus diferencijuojama, o išvestinės tenkina*

$$(-1)^k \psi_\theta^{-1(k)}(t) \ge 0, \quad \forall t \ge 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n-2,$$

ir $(-1)^{n-2}\psi_\theta^{-1(n-2)}(t)$ *yra nedidėjanti bei iškila.*

Vienas iš paprasčiausių Archimedo kopulos pavyzdžių yra mums labai svarbi nepriklausomumo kopula.

Apibrėžimas 5. *Nepriklausomumo kopula vadinsime kopulą*

$$\Pi(u_1, \dots, u_n) := \prod_{i=1}^{n} u_i, \qquad (u_1, \dots, u_n) \in [0,1]^n.$$

Nepriklausomumo kopula yra Archimedo kopula su generatoriumi $\psi_\theta(t) = -\ln(t)$.

Pateiksime svarbią išvadą, susijusią su ką tik apibrėžta nepriklausomumo kopula (Nelsen [21]).

Išvada 1. *Jei Archimedo kopulos C generatoriaus ψ_θ atvirkštinė ψ_θ^{-1} yra monotoninė, tai $C \geq \Pi$.*

2.2 Clayton'o kopula

Apibrėžimas 6. *Clayton'o kopula turi pavidalą:*

$$C_\theta(u_1, \dots, u_n) := \max\left\{\sum_{i=1}^{n} u_i^{-\theta} - n + 1,\ 0\right\}^{-1/\theta}, \ (u_1, \dots, u_n) \in [0,1]^n,$$

čia $\theta > 0$, jei $n \geq 3$ ir $\theta \in [-1, 0) \cup (0, +\infty)$, jei $n = 2$. Tai yra Archimedo kopula su generatoriumi $\psi_\theta(t) = (1/\theta)(t^{-\theta} - 1)$.

Kadangi nagrinėsime atvejus, kai $n \geq 2$, tai Clayton'o kopula mums bus aktuali tik su $\theta > 0$[2]*. Dėl to galime užrašyti paprasčiau:*

$$C_\theta(u_1, \dots, u_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} u_i^{-\theta} - n + 1\right)^{-1/\theta}, \ (u_1, \dots, u_n) \in [0,1]^n, \quad \theta > 0.$$

Clayton'o kopula yra įdomi, nes ji gali modeliuoti įvairius priklausomybės atvejus pradedant nuo visiškai teigiamo priklausomumo (*angl. comonotonicity*) riboje, kai $\theta \to \infty$; nepriklausomumo, kai $\theta \downarrow 0$ (taip pat, kai $\theta \uparrow 0$;) iki visiškai neigiamo priklausomumo (*angl. countermonotonicity*), kai $\theta = -1$.

Šiame darbe didžiausias dėmesys skiriamas Clayton'o kopulos rėžiams. Išsamiau aptarsime turimus rezultatus.

---

[2] Norėdami gauti aukštesnės eilės ($n > 2$) Clayton'o kopulas, kai $\theta < 0$, turėtume siaurinti parametro θ intervalą taip, kad galiotų $n < 1 - 1/\theta$. Šio darbo apimtyje nusprendėme tokių atvejų nenagrinėti.

Remiantis Išvada 1, Clayton'o kopula yra aprėžta iš apačios nepriklausomumo kopulos, jei $\theta > 0$, tai yra, $C_\theta \geq \Pi$.

Patikslintas n–matės Clayton'o kopulos viršutinis rėžis turi pavidalą (Leipus, Manstavičius [19]):

$$\begin{aligned} C_\theta(u_1, u_2, \ldots, u_n) \;&\leq\; \Big[\theta(1 - u_{(1)} - u_{(2)}) + (1+\theta)u_{(1)}u_{(2)}\Big]\, \mathbb{1}_{\{u_{(1)} \geq \frac{\theta}{1+\theta}\}} + \\ &+\; u_{(1)}\mathbb{1}_{\{u_{(1)} < \frac{\theta}{1+\theta}\}}. \qquad (1) \end{aligned}$$

Jis yra geresnis už Fréchet–Hoeffding viršutinį rėžį M, jei $u_{(1)}$ yra nemažesnis už $\theta/(1+\theta)$. Čia $u_{(1)} \leq u_{(2)} \leq \cdots \leq u_{(n)}$ žymi elementus $u_1, \ldots, u_n$ išrikiuotus didėjimo tvarka.

1 pav. pavaizduota Clayton'o kopula su parametru $\theta = 2$ (a); Clayton'o ir nepriklausomumo kopulos (b); taip pat Clayton'o kopula, jos patikslintas viršutinis rėžis ir Fréchet–Hoeffding viršutinis rėžis, kai $\theta = 2$ ir $\theta = 0.2$, atitinkamai, (c) ir (d). Vaizdumo dėlei kopulų galus nupjovėme.

Iš pateiktų (c) ir (d) paveikslėlių matyti, jog patikslintasis Clayton'o kopulos rėžis ypač gerai veikia su mažu θ. Priešingu atveju, pranašesnis yra Fréchet–Hoeffding viršutinis rėžis M.

Kaip minėjome, Clayton'o kopula priklauso Archimedo kopulų klasei, kurioje įmanomas pakankamai apibendrintas n–mačių kopulų konstravimas. Pasinaudojus tuo, galima parodyti dar vieną naudingą nelygybę. Nemažindami bendrumo parodysime tik atveju $n = 3$.

Tarkime, $\theta > 0$. Nagrinėkime $C_\theta(u_1, u_2, u_3)$. Sugrupavę narius ir pasinaudoję tuo, kad

$$C_\theta(u_1, u_2) = \Big(x^{-\theta} + y^{-\theta} - 1\Big)^{-\frac{1}{\theta}},$$

galime užrašyti

$$\begin{aligned} C_\theta(u_1, u_2, u_3) \;&=\; \Big(x^{-\theta} + y^{-\theta} + z^{-\theta} - 2\Big)^{-\frac{1}{\theta}} = \\ &=\; \left(x^{-\theta} + \left(\Big(y^{-\theta} + z^{-\theta} - 1\Big)^{-\frac{1}{\theta}}\right)^{-\theta} - 1\right)^{-\frac{1}{\theta}} = \\ &=\; C_\theta(u_1, C_\theta(u_2, u_3)). \end{aligned}$$

Iš čia,

$$C_\theta(u_1, u_2, u_3) \geq u_1 C_\theta(u_2, u_3). \qquad (2)$$

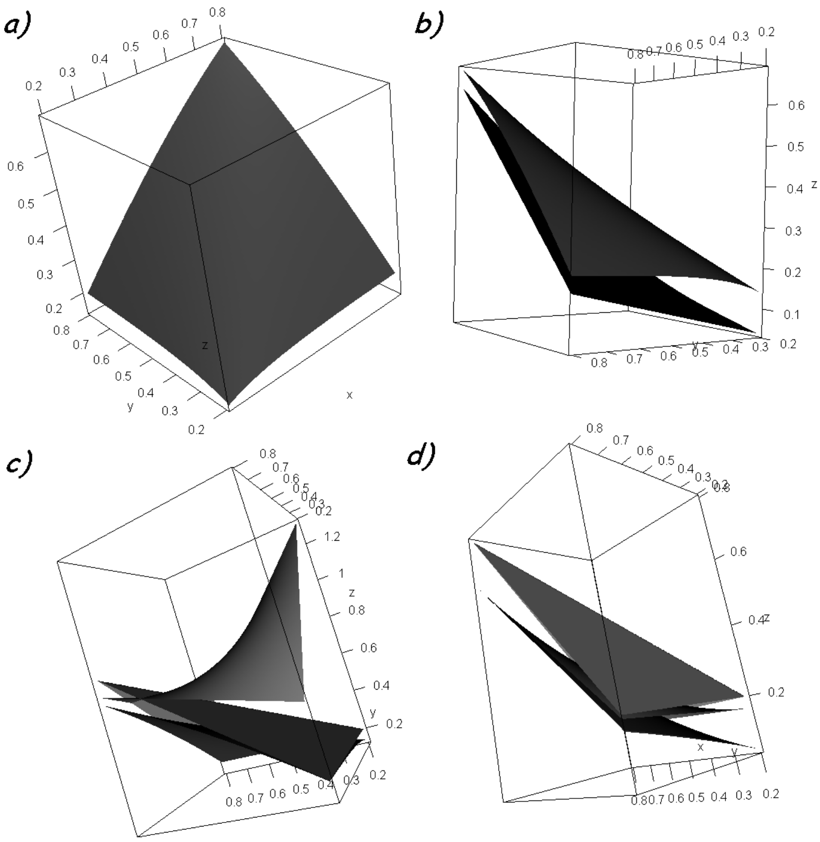
Pastebėkime, kad

$$u_1 C_\theta(u_2, u_3) \geq u_1 u_2 u_3 = \Pi(u_1, u_2, u_3),$$

tai yra, gavome dar vieną rėžį iš apačios, šiek tiek griežtesnį nei nepriklausomumo kopula Π.

Bendrai visus aukščiau pristatytus rezultatus galime užrašyti viena nelygybių eilute:

$$\begin{aligned} W(u_1, u_2, \ldots, u_n) &\leq \Pi(u_1, u_2, \ldots, u_n) \leq \\ &\leq u_1 C_\theta(u_2, \ldots, u_n) \leq \\ &\leq C_\theta(u_1, u_2, \ldots, u_n) \leq \\ &\leq \Big[\theta(1 - u_{(1)} - u_{(2)}) + (1+\theta) u_{(1)} u_{(2)}\Big] \mathbb{1}_{\{u_{(1)} \geq \frac{\theta}{1+\theta}\}} + u_{(1)} \mathbb{1}_{\{u_{(1)} < \frac{\theta}{1+\theta}\}} \leq \\ &\leq M(u_1, u_2, \ldots, u_n). \end{aligned}$$



1 pav.: Clayton'o kopula ir jos rėžiai

3 Clayton'o kopulos rėžių taikymas UEND savybei patikrinti

Apibrėžimas 7. *Atsitiktiniai dydžiai* $X_k, \quad k = 1, \ldots, n$, *vadinami apibendrintais iš viršaus neigiamai priklausomais (UEND) (angl. upper extended negatively dependent), jei* $\exists A > 0$:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}(X_k > x_k)\right) \leq A \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_k > x_k), \quad \forall x_k, \quad k = 1, \ldots, n.$$

UEND savybė yra vienas iš galimų atsitiktinių dydžių neigiamos priklausomybės atvejų. Pavyzdžiui, apsukę nelygybę į priešingą pusę gautume, jog atsitiktiniai dydžiai yra LEND (*angl. lower extended negatively dependent*). Atsitiktiniai dydžiai, kurie yra UEND ir LEND, vadinami END (*angl. extended negatively dependent*). Tuo tarpu, jei nebūtų konstantos A, tai yra, $A = 1$, atitinkamai turėtume UND, LND ir ND.

UEND savybę taip pat galima laikyti kopulų ir jų rėžių savotiška tikimybine interpretacija. Leipus, Manstavičius [19] parodo, jog su jų pristatytu viršutiniu Clayton'o kopulos rėžiu (1) atveju $n = 2$ UEND savybė galioja. Pateikiama tokia nelygybė:

$$\mathbb{P}(X_1 > x_1, X_2 > x_2) \leq (1+\theta)\overline{F_1}(x_1)\overline{F_2}(x_2). \tag{3}$$

Iš tiesų, pasinaudoję Įdėties–pašalinimo principu (A Priedas, A1) įvykiams $A_1 = \{X_1 \leq x_1\}$ ir $A_2 = \{X_2 \leq x_2\}$ bei Sklar'o teorema turime, jog

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 > x_1, X_2 > x_2) &= 1 - \mathbb{P}(X_1 \leq x_1) - \mathbb{P}(X_2 \leq x_2) + \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) = \\
&= 1 - F_1(x_1) - F_2(x_2) + \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) = \\
&= 1 - F_1(x_1) - F_2(x_2) + C_\theta(F_1(x_1), F_2(x_2))
\end{aligned}$$

Tada, jei $F_1(x_1) \geq \frac{\theta}{1+\theta}$, gauname

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 > x_1, X_2 > x_2) &\leq 1 - F_1(x_1) - F_2(x_2) + \\
&+ \theta(1 - F_1(x_1) - F_2(x_2)) + (1+\theta)F_1(x_1)F_2(x_2) = \\
&= 1 - F_1(x_1) - F_2(x_2) + F_1(x_1)F_2(x_2) + \\
&+ \theta(1 - F_1(x_1) - F_2(x_2) + F_1(x_1)F_2(x_2)) = \\
&= (1+\theta)\overline{F_1}(x_1)\overline{F_2}(x_2).
\end{aligned}$$

Kita vertus, jei $F_1(x_1) \leq \frac{\theta}{1+\theta}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 > x_1, X_2 > x_2) &\leq 1 - F_1(x_1) - F_2(x_2) + F_1(x_1) = 1 - F_2(x_2) \leq \\
&\leq (1+\theta)\overline{F_1}(x_1)\overline{F_2}(x_2),
\end{aligned}$$

nes šiuo atveju $(1+\theta)(1-F_1(x_1)) \geq 1$.

Sunkumų kyla norint parodyti UEND aukštesnių eilių atvejais. Trimačiu atveju tikimybės $\mathbb{P}(X_1 > x_1, X_2 > x_2, X_3 > x_3)$ išraiška iš Įdėties–pašalinimo principo gaunama gerokai sudėtingesnė:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 > x_1, X_2 > x_2, X_3 > x_3) &= 1 - \mathbb{P}(X_1 \leq x_1) - \mathbb{P}(X_2 \leq x_2) - \mathbb{P}(X_3 \leq x_3) + \\ &+ \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) + \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, X_3 \leq x_3) + \\ &+ \mathbb{P}(X_2 \leq x_2, X_3 \leq x_3) - \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, X_3 \leq x_3).\end{aligned}$$

Pasinaudojus Sklar'o teorema, tai yra,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 > x_1, X_2 > x_2, X_3 > x_3) &= 1 - F_1(x_1) - F_2(x_2) - F_3(x_3) + \\ &+ C_\theta(F_1(x_1), F_2(x_2)) + C_\theta(F_1(x_1), F_3(x_3)) + \\ &+ C_\theta(F_2(x_2), F_3(x_3)) - C_\theta(F_1(x_1), F_2(x_2), F_3(x_3)),\end{aligned}$$

nesunku matyti, jog šiuo atveju teks iš viršaus vertinti jau nebe vieną kartą, o tris kartus. Tuo tarpu trimatę kopulą su minuso ženklu apskritai teks vertinti iš apačios. Sudėjus visus turimus įverčius, gaunama šiek tiek per daug ir jau atveju $n = 3$ norimos UEND savybės parodyti nepavyksta.

Negalėdami turimais įverčiais parodyti UEND savybės $n = 3$ atvejui pasitenkinsime įrodydami žemiau suformuluotą teiginį:

Teiginys 1. *Tarkime, C_θ yra Clayton'o kopula su kokiu nors fiksuotu parametru $\theta > 0$, o F_1, F_2, F_3 žymi atitinkamai atsitiktinių dydžių X_1, X_2, X_3 pasiskirstymo funkcijas. Tada*

$$\mathbb{P}(X_1 > x_1, X_2 > x_2, X_3 > x_3) \leq (1+\theta)\overline{F_1}(x_1)\overline{F_2}(x_2)\overline{F_3}(x_3) + \theta\left[\overline{F_1}(x_1) + \overline{F_2}(x_2)\right]\overline{F_3}(x_3),$$

čia, kaip ir anksčiau, $\overline{F_i} := 1 - F_i, \quad i = 1, 2, 3.$

Pastaba 1. *Su bet kokia eile n iš apačios galioja nelygybė*

$$\mathbb{P}(X_1 > x_1, X_2 > x_2, \ldots, X_n > x_n) \geq \prod_{i=1}^{n} \overline{F_i}(x_i).$$

Turimi Clayton'o kopulos įverčiai (pritaikius juos priešingiems ženklams) šios nelygybės patikslinti neleidžia.

Įrodymas. Paprastumo dėlei įvesime naujus žymėjimus:

$$x := F_1(x_1), \quad y := F_2(x_2), \quad z := F_3(x_3),$$

$$u := 1 - x, \quad v := 1 - y, \quad t := 1 - z.$$

Be to, nemažindami bendrumo, dėl simetrijos galime laikyti, kad

$$0 \le x \le y \le z \le 1 \quad \text{ir}$$
$$0 \le t \le v \le u \le 1.$$

Pastebėkime, jog mūsų nagrinėjamoji tikimybė yra ne kas kita kaip išgyvenamumo kopula:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 > x_1, X_2 > x_2, X_3 > x_3) &= \overline{C}_\theta(1-x, 1-y, 1-z) = \\ &=: \breve{C}_\theta(x, y, z). \end{aligned}$$

Taigi toliau šią tikimybę nagrinėsime kaip išgyvenamumo kopulą ir jai žymėti naudosime žymenis $\breve{C}_\theta$ ir $\overline{C}_\theta$.

$\breve{C}_\theta$ galime perrašyti taip:

$$\begin{aligned} \breve{C}_\theta(x, y, z) &= 1 - x - y - z + C_\theta(x, y) + C_\theta(y, z) + C_\theta(x, z) - C_\theta(x, y, z) = \\ &= (1-x) + (1-y) + (1-z) - 2 + C_\theta(1-(1-x), 1-(1-y)) + \\ &+ C_\theta(1-(1-y), 1-(1-z)) + C_\theta(1-(1-x), 1-(1-z)) - \\ &- C_\theta(1-(1-x), 1-(1-y), 1-(1-z)). \end{aligned}$$

Iš čia,

$$\begin{aligned} \overline{C}_\theta(u, v, t) &= u + v + t - 2 + \\ &+ C_\theta(1-u, 1-v) + C_\theta(1-v, 1-t) + C_\theta(1-u, 1-t) - \\ &- C_\theta(1-u, 1-v, 1-t) = \\ &= u + v + t - 2 + (\overline{C}_\theta(u, v) + 1 - u - v) + (\overline{C}_\theta(v, t) + 1 - v - t) + \\ &+ (\overline{C}_\theta(u, t) + 1 - u - t) - C_\theta(1-u, 1-v, 1-t) = \\ &= 1 - u - v - t + \overline{C}_\theta(u, v) + \overline{C}_\theta(v, t) + \overline{C}_\theta(u, t) - C_\theta(1-u, 1-v, 1-t). \end{aligned}$$

Iš (3) turime, jog

$$\overline{C}_\theta(a, b) \le (1+\theta)ab, \quad \forall (a, b) \in [0, 1]^2,$$

o iš (2) turime, jog

$$\begin{aligned} C_\theta(1-u, 1-v, 1-t) &\ge (1-t)C_\theta(1-u, 1-v) = \\ &= (1-t)(\overline{C}_\theta(u, v) + 1 - u - v). \end{aligned}$$

Įstatę gauname

$$\begin{aligned}
\overline{C}_\theta(u,v,t) &= 1-u-v-t+\overline{C}_\theta(u,v)+\overline{C}_\theta(v,t)+\overline{C}_\theta(u,t)- \\
&- C_\theta(1-u,1-v,1-t) \leq \\
&\leq 1-u-v-t+\overline{C}_\theta(u,v)+(1+\theta)vt+(1+\theta)ut- \\
&- (1-t)(\overline{C}_\theta(u,v)+1-u-v)= \\
&= t\overline{C}_\theta(u,v)+(1+\theta)t(v+u)-t(v+u) \leq \\
&\leq (1+\theta)uvt+\theta t(v+u).
\end{aligned}$$

□

Ką tik įrodytą nelygybę galima dar šiek tiek padidinti pastebėjus, jog $u+v-1 \leq uv$ su $\forall u,v \in [0,1]$. Tada

$$\begin{aligned}
\overline{C}_\theta(u,v,t) &\leq (1+\theta)uvt+\theta t(v+u-1+1) \leq \\
&\leq (1+2\theta)uvt+\theta t.
\end{aligned}$$

Bet kuriuo atveju gaunami du dėmenys. Pirmasis dėmuo – tai, ką siekėme gauti norėdami parodyti UEND savybę, antrasis dėmuo – perteklinis. Kitaip tariant, turimi Clayton'o kopulos įverčiai iš viršaus ir apačios sumoje grąžina per daug. Juos reikėtų dar šiek tiek patikslinti.

Pastebėkime, jog įvertyje iš apačios nėra daugiklio θ. Tai galėtų būti viena iš priežasčių, kodėl neišnyksta antrasis dėmuo. Anksčiau pateiktame 1 (a) pav. matyti, jog tarp Clayton'o ir nepriklausomumo kopulų yra erdvės *įsitaisyti* tikslesniam įverčiui iš apačios. Sekančiame skyriuje pamėginsime tokį įvertį rasti.

Pastaba 2. *Atveju $n=4$ išgyvenamumo kopulą galima užrašyti taip:*

$$\begin{aligned}
\overline{C}_\theta(u,v,t,s) &= -2+u+v+t+s-\overline{C}_\theta(u,v)-\overline{C}_\theta(u,t)-\overline{C}_\theta(u,s)- \\
&- \overline{C}_\theta(v,t)-\overline{C}_\theta(v,s)-\overline{C}_\theta(t,s)+\overline{C}_\theta(u,v,t)+ \\
&+ \overline{C}_\theta(u,v,s)+\overline{C}_\theta(v,t,s)+C_\theta(1-u,1-v,1-t,1-s).
\end{aligned}$$

Pastebėkime, jog keturmačiu atveju ženklai keičiasi į priešingus, nei buvo trimačiu atveju. Taip pat pastebėkime, jog gautoje išraiškoje figūruoja visi nariai iki 4-os eilės. Kitaip tariant, tęsdami toliau turime naudotis tuo, ką gavome prieš tai. Tiesmukai įstačius gautus rezultatus į išraišką gaunama labai nedaili ir praktikoje vargu, ar pritaikoma nelygybė. Jos čia nepateikiame.

Akivaizdu, jog turimų rėžių nepakanka norint parodyti UEND savybę aukštesnėms eilėms arba bent jau gauti praktiškai pritaikomas nelygybes. Dėl šios priežasties didesnių nei $n=3$ atvejų toliau nenagrinėjome.

4 Patikslintas apatinis Clayton'o kopulos rėžis

Šiame skyriuje pasiūlysime vieną patikslintą Clayton'o kopulos rėžį iš apačios. Jį sukonstravome naudodami panašią techniką, kuri buvo panaudota konstruojant viršutinį Clayton'o kopulos rėžį (1), tik šiuo atveju apsukome nelygybes į priešingą pusę.

Esminis šio skyriaus rezultatas suformuluotas teoremoje:

Teorema 4. *Tarkime, $\theta > 0$. Tada su bet kokiais $(u_1, \ldots, u_n) \in [0,1]^n$, $n \geq 2$ galioja nelygybė*

$$C_\theta(u_1, \ldots, u_n) \geq \Pi(u_1, \ldots, u_n) \left(1 + \frac{\ln u_{(1)} \ln u_{(2)}}{n-1} \cdot \frac{\left(\prod_{i=1}^n u_i\right)^\theta - 1}{\ln\left(\prod_{i=1}^n u_i\right)}\right), \tag{4}$$

čia $u_{(1)} \leq u_{(2)} \leq \cdots \leq u_{(n)}$ žymi elementus $u_1, \ldots, u_n$ išrikiuotus didėjimo tvarka.

Teoremos įrodymui mums prireiks poros žemiau suformuluotų lemų.

Lema 1. *Laikysime, kad $x_{[1]} \geq x_{[2]} \geq \cdots \geq x_{[n]}$ žymi elementus $x_1, \ldots, x_n$ išrikiuotus mažėjimo tvarka. Pažymėkime funkcijas*

$$g_n(x_1, \ldots, x_n) := \left(\sum_{i=1}^n x_i - n + 1\right) \ln\left(\sum_{i=1}^n x_i - n + 1\right) - \sum_{i=1}^n x_i \ln x_i \tag{5}$$

ir

$$\widetilde{g}_n(x_1, \ldots, x_n) := (n-1)^{-1} \ln x_{[1]} \ln x_{[2]}.$$

Tada su bet kokiais $(x_1, \ldots, x_n) \in [1, \infty)^n$, $n \geq 2$ teisinga nelygybė

$$f_n(x_1, \ldots, x_n) := g_n(x_1, \ldots, x_n) - \widetilde{g}_n(x_1, \ldots, x_n) \geq 0.$$

Įrodymas. Pastebėkime, jog dėl funkcijos f_n simetriškumo galime tarti, kad $(x_1, \ldots, x_n) = (x_{[1]}, \ldots\ x_{[n]})$. Tada

$$\frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_n) = \ln\left(\sum_{i=1}^n x_i - n + 1\right) - \ln x_1 - \frac{\ln x_2}{(n-1)x_1}$$

ir

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f_n}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, \ldots, x_n) &= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - n + 1\right)^{-1} - \frac{1}{(n-1)x_1 x_2} = \\
&= \frac{(n-1)x_1 x_2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - n + 1\right)}{(n-1)x_1 x_2 \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - n + 1\right)} = \\
&= \frac{[x_1 x_2 - (x_1 + x_2 - 1)] + [(n-2)x_1 x_2 - \sum_{i=3}^{n} (x_i - 1)]}{(n-1)x_1 x_2 \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - n + 1\right)}.
\end{aligned}
$$

Paskutinėje lygybėje skaitiklyje sugrupavę narius matome, kad $\frac{\partial^2 f_n}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, \ldots, x_n) \geq 0$ su $(x_1, \ldots, x_n) \in [1, \infty)^n$, $n \geq 2$. Iš to išplaukia, jog funkcija $\frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_n)$ yra nemažėjanti x_2 atžvilgiu visiems $(x_1, \ldots, x_n) \in [1, \infty)^n$, $n \geq 2$ ir todėl

$$
\frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_n) \geq \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_1, 1, x_3 \ldots, x_n) = \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_1, 1, \ldots, 1) = 0,
$$

nes jei $x_2 = x_{[2]} = 1$, tai $x_2 = x_3 = \cdots = x_n = 1$. Tai reiškia, jog f_n yra nemažėjanti x_1 atžvilgiu ir todėl

$$
f_n(x_1, \ldots, x_n) \geq f_n(1, \ldots, x_n) = f_n(1, \ldots, 1) = 0,
$$

nes jei $x_1 = x_{[1]} = 1$, tai $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$. $\square$

Lema 2. *Tarkime, $\theta > 0$. Tada su bet kokiais $(u_1, \ldots, u_n) \in (0, 1)^n$, $n \geq 2$ teisingos nelygybės*

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \theta} C_\theta(u_1, \ldots, u_n) &\geq C_\theta(u_1, \ldots, u_n) \frac{\ln u_{(1)} \ln u_{(2)}}{(n-1)\left(\sum_{i=1}^{n} u_i^{-\theta} - n + 1\right)} \geq \\
&\geq [\Pi(u_1, \ldots, u_n)]^{1+\theta} \frac{\ln u_{(1)} \ln u_{(2)}}{(n-1)}.
\end{aligned}
$$

Įrodymas. Užrašę $C_\theta(u_1, \ldots, u_n) = \exp\{H_\theta(u_1, \ldots, u_n)\}$ turime, kad

$$
\frac{\partial}{\partial \theta} C_\theta(u_1, \ldots, u_n) = C_\theta(u_1, \ldots, u_n) \frac{\partial}{\partial \theta} H_\theta(u_1, \ldots, u_n),
$$

čia

$$
\frac{\partial}{\partial \theta} H_\theta(u_1, \ldots, u_n) = \frac{g_n\left(u_1^{-\theta}, \ldots, u_n^{-\theta}\right)}{\theta^2 \left(\sum_{i=1}^{n} u_i^{-\theta} - n + 1\right)},
$$

čia funkcija $g_n(x_1, \ldots, x_n)$ apibrėžta (5). Pasinaudoję Lema 1 turime, jog

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\theta} H_\theta(u_1, \ldots, u_n) &\geq \frac{\widetilde{g}_n\left(u_1^{-\theta}, \ldots, u_n^{-\theta}\right)}{\theta^2\left(\sum_{i=1}^n u_i^{-\theta} - n + 1\right)} = \\
&= \frac{\ln u_{(1)}^{-\theta} \ln u_{(2)}^{-\theta}}{\theta^2\,(n-1)\left(\sum_{i=1}^n u_i^{-\theta} - n + 1\right)} = \\
&= \frac{\ln u_{(1)} \ln u_{(2)}}{(n-1)\left(\sum_{i=1}^n u_i^{-\theta} - n + 1\right)}.
\end{aligned}$$

Paskutinioji nelygybė išplaukia iš to, kad

$$C_\theta(u_1, \ldots, u_n) = \left(\sum_{i=1}^n u_i^{-\theta} - n + 1\right)^{-\frac{1}{\theta}} \geq \prod_{i=1}^n u_i = \Pi(u_1, \ldots, u_n).$$

□

Teoremos 4. Įrodymas. Jei $u_{(1)} = 1$ arba $u_{(2)} = 1$, tai įrodomoji nelygybė tampa akivaizdi. Todėl tarkime, jog $u_{(1)} < 1$ ir $u_{(2)} < 1$. Yra žinoma, kad (Nelsen [21])

$$\lim_{\theta \downarrow 0} C_\theta(u_1, \ldots, u_n) = \Pi(u_1, \ldots, u_n).$$

Taigi pakanka parodyti, kad bet kokiam $\epsilon \in (0, \theta)$ teisinga

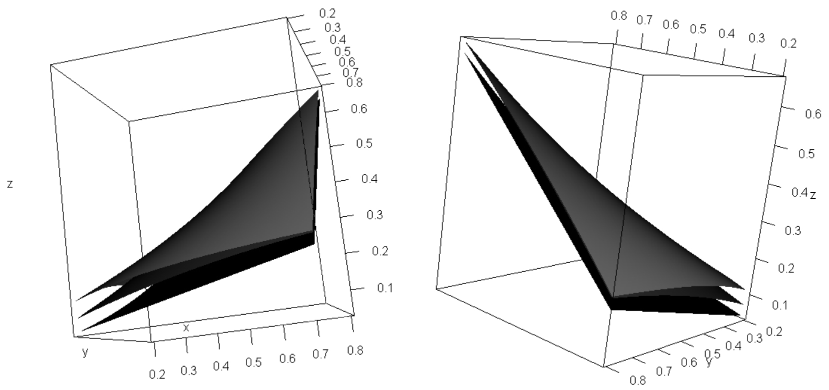
$$\begin{aligned}
C_\theta(u_1, \ldots, u_n) - C_\epsilon(u_1, \ldots, u_n) = \int_\epsilon^\theta \frac{\partial}{\partial x} C_x(u_1, \ldots, u_n) dx \geq \\
\geq \Pi(u_1, \ldots, u_n) \frac{\ln u_{(1)} \ln u_{(2)}}{n-1} \int_\epsilon^\theta \left[\Pi(u_1, \ldots, u_n)\right]^x dx \qquad (6)
\end{aligned}$$

ir pereiti prie ribos, kai $\epsilon \downarrow 0$. Bet (6) išplaukia iš to, kad

$$\int_\epsilon^\theta \left(\frac{\partial}{\partial x} C_x(u_1, \ldots, u_n) - \left[\Pi(u_1, \ldots, u_n)\right]^{(1+x)} \frac{\ln u_{(1)} \ln u_{(2)}}{n-1}\right) dx \geq 0,$$

o tai savo ruožtu išplaukia iš Lemos 2. □

2 pav. trimatėje erdvėje iš eilės nuo viršaus pavaizduota dvimatė Clayton'o kopula su parametru $\theta = 2$, jos patikslintas apatinis rėžis ir nepriklausomumo kopula. Vaizdumo dėlei kopulų galus nupjovėme. Matome, jog dvimačiu atveju mūsų sukonstruotas apatinis Clayton'o kopulos rėžis visame kube yra geresnis nei nepriklausomumo kopula.



2 pav.: Clayton'o kopula, jos patikslintasis apatinis rėžis ir nepriklausomumo kopula

Pastaba 3. *Giliau paanalizavus aukščiau pristatytą įrodymą nesunku pastebėti, jog esminis viso įrodymo momentas yra funkcijos $\widetilde{g}_n$ pasirinkimas. Mes siekėme pasirinkti funkciją $\widetilde{g}_n$ kuo paprastesnę bei tokią, kuri nekomplikuotų integralo ir jį galėtume tiksliai suintegruoti. Aišku, kad funkciją $\widetilde{g}_n$ galima pasirinkti nevienareikšmiškai, todėl tokių rėžių, tiek iš apačios, tiek iš viršaus turėtų būti įmanoma sukonstruoti ne vieną ir kiekvienas būtų savaip geras bei įdomus.*

Pastaba 4. *Iš* (4) *matome, jog parametras θ tėra tik laipsnyje, be to, nelygybę apsunkina logaritmai. Todėl gautoji apatinio Clayton'o kopulos rėžio išraiška nėra patogi ją taikyti UEND savybės tikrinimui. Kita vertus, jei pavyktų rasti ir pasinaudoti naudingomis nelygybėmis, galbūt šio rėžio išraišką pavyktų pakeisti gražesne. Tačiau tą daryti derėtų apdairiai, nepamirštant, jog gautoji išraiška turėtų likti apribota Clayton'o kopulos C_θ iš viršaus bei nepriklausomumo kopulos Π iš apačios.*

Vienas iš galimų būdų - pasinaudoti Teiloro formule su Lagranžo formos liekamuoju nariu (A Priedas, A3) ir daugiklį $\left[\left(\prod_{i=1}^n u_i\right)^\theta - 1\right]$ pakeisti dviejų narių eilute, tai yra,

$$\left(\prod_{i=1}^n u_i\right)^\theta - 1 \geq \theta \ln\left(\prod_{i=1}^n u_i\right) + \frac{1}{2}\theta^2 \ln^2\left(\prod_{i=1}^n u_i\right).$$

Tada patikslinto apatinio Clayton'o kopulos rėžio išraišką būtų galima pakeisti taip:

$$\Pi(u_1, \ldots, u_n)\left(1 + \frac{\ln u_{(1)} \ln u_{(2)}}{n-1} \cdot \frac{\left(\prod_{i=1}^n u_i\right)^\theta - 1}{\ln\left(\prod_{i=1}^n u_i\right)}\right) \geq$$

$$\geq \Pi(u_1, \ldots, u_n) \left(1 + \frac{\ln u_{(1)} \ln u_{(2)}}{n-1} \cdot \left(\theta + \frac{1}{2}\theta^2 \ln\left(\Pi_{i=1}^n u_i\right)\right)\right).$$

Laimime tai, jog parametras θ iš laipsnio persikelia į daugiklį. Tačiau daugiklyje atsiradęs θ, o ypač θ^2, veikia gana jautriai ir dėl to naujoji rėžio išraiška yra geresnė už nepriklausomumo kopulą Π tik, kai $\ln\left(\prod_{i=1}^n u_i\right) \geq -\frac{2}{\theta}$. Priešingu atveju, geresnė nepriklausomumo kopula.

5 Išvados ir tolimesnio tyrimo kryptys

Šiame darbe tyrėme Clayton'o kopulos rėžius ir jų taikymą UEND savybės tikrinimui. Pasirodo, jau trimačiu atveju vertinamos tikimybės išraiška tampa pernelyg komplikuota, jog būtų galima su turimais įrankiais parodyti UEND savybę. Nepavykus parodyti UEND, ėmėme ieškoti, kaip būtų galima tikslinti turimus rėžius. Sukonstravome vieną patikslintą Clayton'o kopulos rėžį iš apačios.

Iš tiesų, tokių rėžių, tiek iš apačios, tiek iš viršaus turėtų būti įmanoma sukonstruoti ir daugiau. Mūsų atveju rėžio išraišką lėmė funkcijos $\widetilde{g}_n$ pasirinkimas. Rinkdamiesi šią funkciją siekėme kuo paprastesnio integravimo arba to integralo vertinimo. Tačiau liko nepatikrintas tokio pasirinkimo optimalumas Clayton'o kopulos vertinime. Be to, rėžio išraiška vis tiek gavosi kiek griozdiška ir nepatogi tikrinti UEND savybei. Galima būtų ieškoti būdų, kaip šią išraišką pakeisti patogesne.

Ateityje būtų įdomu keičiant funkciją $\widetilde{g}_n$ kitokiomis funkcijomis sukonstruoti naujų įverčių, tiek iš viršaus, tiek iš apačios; ieškoti būdų, kaip sukonstruoti patį optimaliausią ar patogiausią įvertį; ištirti jau turimų bei naujai gautų įverčių optimalumą ir pabandyti pritaikyti naujai gautus įverčius UEND savybės įrodymui.

Literatūra

[1] CHEN, A.; CHEN, Y.; and KAI, W. NG. The Strong Law of Large Numbers for Extended Negatively Dependent Random Variables. *Journal of Applied Probability*, Vol. 47, 4, 2010. p. 908–922.

[2] CHERUBINI, U.; LUCIANO, E.; and VECCHIATO, W. Copula Methods in Finance. Chichester: Wiley, 2004. 310 p.

[3] CLAYTON, D. G. A model for association in bivariate life tables and its application in epidemiological studies of familial tendency in chronic disease incidence. *Biometrika*, 65, 1978. p. 141–151.

[4] DALL'AGLIO, G. Sugli estremi dei momenti delle funzioni de ripartizione doppia. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze*, Série 3, tomme 10, 1956. p. 35–74.

[5] DA SILVA, J. L. Limiting Behaviour for Arrays of Upper Extended Negatively Dependent Random Variables. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 92, 01, 2015. p. 159–167.

[6] DEHEUVELS, P. Caractérisation complète des lois extrêmes multivariées et de la convergence des types extremes. *Publications de l'Institut de Statistique de l'Univiversité de Paris*, 23, 1978. p. 1–37.

[7] DINDIENĖ, L.; and LEIPUS, R. A note on the tail behavior of randomly weighted and stopped dependent sums. *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, 20, 2015. p. 263–273.

[8] DINDIENĖ, L.; and LEIPUS, R. Weak max–sum equivalence for dependent heavy–tailed random variables. Preprint, 2014. 13 p.

[9] EMBRECHTS, P.; FREY, R.; and MCNEIL, A.J. Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools. Princeton University Press, 2005. 538 p.

[10] EMBRECHTS, P.; MCNEIL, A.J.; and STRAUMANN, D. Correlation and dependency in risk management: properties and pitfalls. *Cambridge University Press*, 2002. p. 176–223.

[11] FAVRE A. C.; and GENEST, C. Everything You Always Wanted to Know about Copula Modeling but Were Afraid to Ask, *Journal of Hydrologic Engineering*, July / August, 2007. p. 347–368.

[12] FÉRON, R. Sur les tableaux de corrélation dont les marges sont données, cas de l'espace à trois dimensions. *Publications de l'Institut de Statistique de l'Univiversité de Paris*, 5, 1956. p. 3–12.

[13] FRÉCHET, M. Sur les tableaux de corrélation dont les marges sont données. *Annales de l'Université de Lyon*, Sect A, 9, 1951. p. 53–77.

[14] GALAMBOS, J. The Asymptotic Theory of Extreme Order Statistics. Wiley, New York, 1978. 414 p.

[15] GEORGES, P.; LAMY, A–G.; NICOLAS, E.; QUIBEL, G.; and RONCALLI, T. Multivariate survival modelling: a unified approach with copulas. Credit Lyonnais, 2001. 72 p.

[16] HOEFFDING, W. Masstabinvariante Korrelationstheorie. *Schriften des Matematischen Instituts und des Instituts für Angewandte Mathematik der Universität Berlin*, 5 Heft, 3, 1940. p. 179–233. [Reprinted as Scale-invariant correlation theory. In: Fisher NI, Sen PK (eds) *The Collected Works of Wassily Hoeffding.* Springer, New York. p. 57–107.]

[17] HOEFFDING, W. Masstabinvariante Korrelationsmasse für diskontinuierliche Verteilungen. *Arkiv für matematischen Wirtschaften und Sozialforschung*, 7, 1941. p. 49–70. [Reprinted as Scale-invariant correlation measures for discontinuous distributions. In: Fisher NI, Sen PK (eds) *The Collected Works of Wassily Hoeffding.* Springer, New York. p. 109–133.]

[18] KIMELDORF, G.; and SAMPSON, A. Uniform representations of bivariate distributions. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 4, 1975. p. 617–627.

[19] LEIPUS, R.; and MANSTAVIČIUS, M. Bounds for the Clayton copula. Preprint, 2014. 8 p.

[20] LEIPUS, R.; ŠIAULYS, J.; and YANG, Y. Asymptotics for randomly weighted and stopped dependent sums. Preprint, 2015. 22 p.

[21] NELSEN, R. B. An Introduction to Copulas, 2nd ed. Springer Series in Statistics. Springer, New York, 2006. 270 p.

[22] SCHWEIZER, B. Thirty years of copulas. In: Dall'Aglio, G.; Kotz, S.; Salinetti, G.; (eds) Advances in Probability Distributions with Given Marginals. Kluwer, Dordrecht, 1991. p. 13–50.

[23] SKLAR, A. Fonctions de répartition à n dimensions e leurs marges. *Publications de l'Institut de Statistique de l'Univiversité de Paris*, 8, 1959. p. 229–231.

A Priedas

A1 Įdėties - pašalinimo (rėčio) principas.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) &= \sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}\left(A_i\right) - \sum_{i<j}\mathbb{P}\left(A_i \cap A_j\right) + \sum_{i<j<k}\mathbb{P}\left(A_i \cap A_j \cap A_k\right) - \cdots + \\ &+ (-1)^{n-1}\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right),\end{aligned}$$

čia $A_1, \ldots, A_n$ – įvykiai tikimybinėje erdvėje $(\Omega, F, \mathbb{P})$.

A2 De Morgan'o dėsniai.

$$\overline{\bigcap_{i\in I} A_i} \equiv \bigcup_{i\in I}\overline{A_i};$$

$$\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} \equiv \bigcap_{i\in I}\overline{A_i},$$

čia I - bet kokia, nebūtinai skaiti indeksų aibė, $A_1, \ldots, A_n$ – bet kokios aibės.

A3 Teiloro teorema.

Jei $f \in C^n\left[x_0; x\right]$ (arba $f \in C^n\left[x; x_0\right]$) ir $f^{(n)}$ yra diferencijuojama intervale $(x_0; x)$ (atitinkamai $(x; x_0)$), tai $\exists c \in (x_0; x)$:

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\left(x - x_0\right)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\left(x - x_0\right)^{n+1};$$

čia $P_n\left(x_0; x\right) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\left(x - x_0\right)^k$ vadinamas funkcijos f n–tosios eilės Teiloro daugianariu, o $R_n\left(x_0; x\right) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\left(x - x_0\right)^{n+1}$ vadinamas Teiloro formulės (Lagranžo pavidalo) liekamuoju nariu.

B Priedas (Pateiktų iliustracijų R kodas)

Žemiau pateikiamas darbe pavartototų iliustracijų R paketo (versija 3.0.3) kodas.

```
#Tyrimui reikalingi paketai.
library(rgl)

#Pasirenkame parametrą theta = 2.
theta <- 2

#Dvimatė Clayton'o kopula.
Ctheta <- function(x, y) {(x^(-theta) + y^(-theta) - 1)^(-1/theta)}

#Nepriklausomumo kopula.
Pi <- function(x, y) {x*y}

#Patikslintasis Clayton'o kopulos viršutinis rėžis.
Cupper <- function(x, y) {theta*(1-x-y) + (1+theta)*x*y}

#Clayton'o ir nepriklausomumo kopulos trimatėje erdvėje.
#Vaizdumo dėlei nupjovėme kopulų galus (galuose susilieja į vieną objektą)
plot3d(Ctheta, xlim=c(0.2, 0.8), ylim=c(0.2, 0.8), xlab="x", ylab="y",
  zlab="z", col="grey30")
plot3d(Pi, xlim=c(0.2, 0.8), ylim=c(0.2, 0.8), col="black", add=TRUE)

#Clayton'o kopula ir jos viršutinis rėžis trimatėje erdvėje.
plot3d(Cupper, xlim=c(0.2, 0.8), ylim=c(0.2, 0.8), xlab="x", ylab="y",
  zlab="z", col="grey70")
plot3d(Ctheta, xlim=c(0.2, 0.8), ylim=c(0.2, 0.8), col="grey30", add=TRUE)

#Taip pat palyginimui pridedame Frechet-Hoeffding viršutinį rėžį, kurį
#"pagaminame" pasinaudoję tuo, kad Clayton'o kopula koverguoja į
#Frechet-Hoeffding viršutinį rėžį, kai theta -> begalybę.
theta <- 400
plot3d(Ctheta, xlim=c(0.2, 0.8), ylim=c(0.2, 0.8), col="grey70", add=TRUE)

#Analogišką veiksmų seką atliekame pasirinkę theta = 0.2.
theta <- 0.2
plot3d(Cupper, xlim=c(0.2, 0.8), ylim=c(0.2, 0.8), xlab="x", ylab="y",
  zlab="z", col="grey70")
```

```
plot3d(Ctheta, xlim=c(0.2, 0.8), ylim=c(0.2, 0.8), col="grey30", add=TRUE)
theta <- 400
plot3d(Ctheta, xlim=c(0.2, 0.8), ylim=c(0.2, 0.8), col="grey70", add=TRUE)

#Patikslintasis Clayton'o kopulos rėžis iš apačios.
Clower <- function(x, y){x*y*(1+log(x)*log(y)*((x*y)^theta-1)/log(x*y))}

#Clayton'o kopula, patikslintasis jos apatinis rėžis ir nepriklausomumo
#kopula trimatėje erdvėje.
plot3d(Ctheta, xlim=c(0.2, 0.8), ylim=c(0.2, 0.8), xlab="x", ylab="y",
  zlab="z", col="grey30")
plot3d(Clower, xlim=c(0.2, 0.8), ylim=c(0.2, 0.8), col="grey70", add=TRUE)
plot3d(Pi, xlim=c(0.2, 0.8), ylim=c(0.2, 0.8), col="black", add=TRUE)
```