VILNIAUS UNIVERSITETAS

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

Magistro darbas

Mokumas II ir klasikiniai modeliai

Solvency II vs Classics

Aurimas Griciūnas

VILNIUS 2016

MATEMATINĖS ANALIZĖS KATEDRA

Darbo vadovas: doc. dr. Gintaras Bakštys

Darbo recenzentas: prof. dr. Jonas Šiaulys

Darbas apgintas: 2016 m. sausio 14 d.

Darbas įvertintas: ____________________________

Registravimo Nr. ____________________________

Registracijos data: 2016-01-04

Mokumas II ir klasikiniai modeliai

Santrauka

Nuo 2016 m. Sausio 1 dienos, Europos Sąjugoje įsigaliojo „Mokumas II“ direktyva. Kartu su daugeliu pokyčiu rizikos valdymo srityje, buvo pristatyta ir nauja techninių atidėjinių struktūra. Įprastinė Neišmokėtų Išmokų, Nepasibaigusios Rizikos ir Perkeltų Įmokų techninių atidėjinių struktūra buvo pakeista išmokų bei įmokų rezervų geriausiais įverčiais bei papildomu rizikos priedu. Nėra tiksliai apibrėžiama, kokiu metodu pastarieji įverčiai turėtų būti skaičiuojami. Šiame magistriniame darbe siekiama ištirti klasikinių rezervavimo metodų tinkamumą šiai užduočiai atlikti. Pirmoje darbo dalyje tiriamieji metodai trumpai pristatomi teoriškai. Antroje dalyje buvo sukurtas hipotetinis transporto priemonių valdytojų privalomojo civilinės atsakomybės draudimo žalų vystimosi modelis, lyginti klasikinių rezervavimo metodų įvertinių tikslumai vertinant geriausią išmokų rezervo įvertį minėtam modeliui. Taip pat lygintas Chain Ladder metodas su Bornhuetter-Ferguson metodu ir parodoma kaip galima palyginti jų tikslumą vidutinės kvadratinės paklaidos atžvilgiu. Parodoma, kad tiriamam portfeliui egzistuoja metodai įvertinių pakankamumui, tačiau deja nebūtinai tikslumui užtikrinti.

Raktiniai žodžiai : Mokumas II, ne gyvybės draudimas, Geriausias įvertis, IBNR, Bornhuetter-Ferguson, Chain Ladder, Benktander.

Solvency II vs Classics

Abstract

Starting from January 1, 2016 the "Solvency II" directive came into force in EU. Together with numerous changes in risk management a new structure of technical provisions was introduced. Usual structure consisting of Outstanding Claims Technical Provision, Unexpired Risk Technicnical Provision and Unearned Premium Technical Provision was changed into that consisting of Claims and Premium reserve Best Estimates and additional Risk Margin. There is no clear indication as to how these Best Estimates should be evaluated. The goal of the following Master thesis is to analyze the suitability of some of the well known classical reserving methods for the task. In the first part of the thesis, short theoretical introduction of the methods can be found, in the second part a hypothetical MTPL claim development model is created and suitability of classical reserving methods for estimation of the Claims Provision Best Estimate are then compared for this model. Also the Chain Ladder method was put against Bornhuetter-Ferguson method and it was shown how one can compare their precision with respect to Mean Squared Error. Also it is shown that there are methods suitable to ensure prudency but unfortunately not necesarily acurracy of the estimators.

Key words : Solvency II, general insurance, Best estimate, IBNR, Bornhuetter-Ferguson, Chain Ladder, Benktander.

Turinys

Įvadas

Nuo 2016 m. Sausio 1 dienos, Europos Sąjugoje įsigaliojo „Mokumas II“ direktyva. Draudimo įmonėms tai reiškia didelius pokyčius rizikos vertinime. Viena iš pagrindinių užduočių rizikos valdyme - turimų įsipareigojimų draudėjams vertinimas. Tai sritis, kurioje ne gyvybės įmonių aktuarinėms funkcijoms atsirado didelis įššukis - buvo pakeista techninių atidėjinių struktūra. Iki „Mokumas II“, techninių atidėjinių skaičiavimams leistinų naudoti metodų sarašą sudarydavo draudimo priežiūros institucijos, todėl rezervavimo problema retai keldavo galvos skausmą.

Po „Mokumas II“ įvedimo nebeturėtų būti apibrėžiami metodai, kuriais bus leistina vertinti naujos struktūros rezervus. Be viso to, vyravęs požiūris, jog techniniai atidėjiniai turi būti pakankami pasikeitė ir dabar reikalaujama kuo tikslesnių rezervų. Deja, atvirkčiai nei būtinosios mokumo atsargos skaičiavimui, standartinėje formulėje rezervų skaičiavimo metodika nepateikiama. Sudėjus paskutinius du faktus, akivaizdu, jog rezervavimo užduotis reikalaus žymiai daugiau kompetencijos ir žmogiškųjų išteklių negu iki šiol.

Techniniai atidėjiniai yra neatskiriama draudimo įmonės balanso dalis, užtikrinanti įsipareigojimų padengimą įmonės turtu. Kiekvienas, nors kiek susidūręs su ne gyvybės draudimo rezervavimo praktika yra girdėjęs tokių metodų kaip Chain Ladder ar Bornhuetter-Ferguson pavadinimus, darbe bus vertinamas šių klasikinių rezervavimo metodų tinkamumas rezervų vertinimui po rezervų struktūros pasikeitimo įvedus „Mokumas II“ direktyvą. Po pasikeitimų, didelė dalis draudimo įmonių naudoja ir naudos klasikinius metodus naudotus Neišmokėtų Išmokų Techninio Atidėjinio (kuris buvo sudaromas iki „Mokumas II“) vertinimui, todėl šių metodų tyrinėjimas įgyja kaip niekada didelę svarbą.

Darbe bandoma atsisakyti daromų prielaidų apie žalų vystimosi (apibrėšime vėliau) nepriklausomybę tarp vystimosi metų ir tada tiriama klasikinių rezervavimo metodų elgsena. Konstruotas hipotetinis draudimo įmonės transporto priemonių valdytojų privalomosios civilinės atsakomybės draudimo (TPVCAD) žalų portfelis, pasitelkiant Monte Karlo metodą sukonstruotos klasikinių rezervų įvertinių tankio funkcijos. Darbe iškeliamas klausimas apie Bornhuetter-Ferguson metodo silpnybę ir parodoma kaip galima ją tirti, parodoma kokiomis situacijoms pastaroji silpnybė pasirodo praktikoje. Taip pat sukonstruojami įvertinių pakankamumo pasiskirstymai, parodoma, kaip įvedus tam tikrą rizikos priedą priklausantį nuo uždirbtų įmokų galime apriboti įvertinių nepakankamumo tikimybę iki norimo dydžio. Deja, pastaroji procedūra negelbėja siekiant įvertinių tikslumo.

1 Rezervavimo metodai

Šiame skyriuje aprašomi istoriškai dar beveik nuo XX a. vidurio naudoti metodai įvykusių bet nepraneštų žalų (*angl. Incurred But Not Reported*) vertinimui, bei nauja rezervų struktūra po „Mokumas II“ įvedimo.

1.1 Žalų vystimosi trikampiai

Apibrėšime žalos vystimasį. Tarkime draudiminis įvykis įvyko kažkuriais metais, o draudimo suma buvo išmokama vienu arba keliais kartais, $k_1, k_2, ...$ metų po įvykio datos, tuomet skaičius $k_1, k_2, ...$ vadinsime žalos vystimosi metais. Ne gyvybės draudimo rezervų skaičiavimo procese dažnai naudojami, vadinamieji žalų vystimosi trikampiai (*angl. Run-off triangles*).

Tarkime $Z_{i,k}$ žymi draudimo portfelio žalas atsirandančias iš įvykių, įvykusių i-aisias (stebimais) metais ir atitinkamai apmokėtas k-aisiais vystimosi metais, tuomet galime sudaryti toliau pateiktą lentelę, dar vadinamą žalų prieaugių trikampiu (*angl. Incremental claims triangle*).

Įvykio	Žalų vystimosi metai						
metai	0	1	...	k	...	$n-1$	n
0	$Z_{0,0}$	$Z_{0,1}$	...	$Z_{0,k}$	...	$Z_{0,n-1}$	$Z_{0,n}$
1	$Z_{1,0}$	$Z_{1,1}$	...	$Z_{1,k}$	...	$Z_{1,n-1}$	$Z_{1,n}$
...	...	...	...	...	...	...	...
i	$Z_{i,0}$	$Z_{i,1}$	...	$Z_{i,k}$	...	$Z_{i,n-1}$	$Z_{i,n}$
...	...	...	...	...	...	...	...
$n-1$	$Z_{n-1,0}$	$Z_{n-1,1}$	...	$Z_{n-1,k}$	...	$Z_{n-1,n-1}$	$Z_{n-1,n}$
n	$Z_{n,0}$	$Z_{n,1}$	...	$Z_{n,k}$	...	$Z_{n,n-1}$	$Z_{n,n}$

1 lentelė: Žalų prieaugių trikampis

Bendru atveju, jeigu n yra einamieji metai, dydžiai $Z_{i,k}$ nėra žinomi, jeigu $i + k > n$ (dėl pastarosios priežasties taip pateikti duomenys ir yra vadinami trikampiais). Šių dydžių įvertinimas yra pagrindinė negyvybės draudimo įmonių užduotis vertinant išmokų rezervą.

Toliau iš žalų prieaugių trikampio išvesime kitą, agreguotų žalų trikampį (*angl. Cummulative claims triangle*). Pažymime

$$C_{i,k} = \sum_{j=0}^{k} Z_{i,j}, \quad i = 0, ..., n.$$

Panašiai, kaip ir pirmuoju atveju sudedame duomenis į trikampį (abiejuose atvejuose pilka spalva pažymėti duomenys nėra stebimi). Kaip pamatysime vėliau, abiejų pavidalų trikampiai yra svarbūs. Pirmasis bus naudotinas apibrėžiant išmokų rezervo geriausią įvertį, o antrasis yra naudojamas klasikiniuose rezervavimo metoduose.

Įvykio	Žalų vystimosi metai						
metai	0	1	...	k	...	$n-1$	n
0	$C_{0,0}$	$C_{0,1}$	...	$C_{0,k}$	...	$C_{0,n-1}$	$C_{0,n}$
1	$C_{1,0}$	$C_{1,1}$	...	$C_{1,k}$	...	$C_{1,n-1}$	$C_{1,n}$
...	...	...	...	...	...	...	...
i	$C_{i,0}$	$C_{i,1}$	...	$C_{i,k}$	...	$C_{i,n-1}$	$C_{i,n}$
...	...	...	...	...	...	...	...
$n-1$	$C_{n-1,0}$	$C_{n-1,1}$	...	$C_{n-1,k}$	...	$C_{n-1,n-1}$	$C_{n-1,n}$
n	$C_{n,0}$	$C_{n,1}$	...	$C_{n,k}$	...	$C_{n,n-1}$	$C_{n,n}$

2 lentelė: Agreguotas žalų trikampis

Verta paminėti, jog literatūroje galima rasti ir kitokių formų žalų vystimosi trikampių, tačiau čia apibrėžtas pavidalas yra dažniausiai sutinkamas ir šiame darbe bus remiamasi būtent tokia forma. Naudojami ne tik metiniai, bet ir ketvirtiniai ar mėnesiniai trikampiai. Taip pat praktikoje naudojami ir trikampiai, kur i žymi ne įvykio, o draudiminius metus. Tokius trikampius dažnai naudoja perdraudimo įmonės. Kadangi darbe kalbama apie įprastinio draudimo įmones, tai mūsų atveju i - įvykio metai.

Apibrėšime ir toliau šiame darbe naudosime įvykusių bet nepraneštų žalų (žymėsime $IBNR$) sąvoką taip:

$$IBNR = \sum_{i=1}^{n} IBNR_i,$$

čia

$$IBNR_i = C_{i,n} - C_{i,n-i} = \sum_{j=n-i+1}^{n} Z_{i,j} \tag{1}$$

$IBNR_i$ - įvykusios i-aisiais metais bet dar nepraneštos žalos. Būtina atkreipti dėmesį, kad taip apibrėžta $IBNR$ sąvoka neturėtų būti suprantama pažodžiui, ji apima žymiai daugiau nei tik nepraneštas žalas - labai dažnai egzistuoja vėlavimas tarp pranešimo apie žalą datos ir momento, kai duomenys patenka i draudimines sistemas, taip pat egzistuoja žalų reguliavimo procesai po žalos pranešimo, kurie, priklausomai nuo žalos pobūdžio gali stipriai įtakoti laiko tarpą tarp pranešimo apie įvykį ir žalos apmokėjimo. Sekančiuose skyriuose bus aprašomi trys klasikiniai $IBNR_i$ įvertiniai, kurių savybių tyrimas ir tinkamumas išmokų rezervo geriausiam įverčiui vertinti ir bus pagrindinis šio darbo tikslas.

1.2 Chain Ladder metodas

Chain ladder metodas yra ko gero plačiausiai žinomas metodas $IBNR$ žalų vertinimui. Tai yra deterministinis modelis ir remiasi tik praeities stebėjimais nedarydamas jokių prielaidų apie galimus ateities pokyčius ar galutinę išmokėtinų žalų sumą. Yra kelios pagrindinės priežastys įtakojusios šio vertinimo metodo populiarumą. Pagrindinės iš jų yra taikymo paprastumas ir tai, kad skirtingos įmonės taikydamos šį metodą gauna panašius rezultatus. Taip pat, iš pirmo žvilgsnio atrodo, jog metodas nekelia jokių reikalavimų duomenims, kuriems jis taikomas[5].

Toliau apašomiems metodams visur naudosime žymėjimus apibrėžtus 1.1 skyrelyje. Pagrindinė prielaida, kuria remiasi Chain ladder metodas yra tai, kad egzistuoja tokie žalų vystimosi koeficientai (*angl. Age-to-age factors*) $f_1, ..., f_{n-1} > 0$ tenkinantys sąlygą

$$\mathbf{E}\left(C_{i,k+1}|C_{i,1}, ..., C_{i,k}\right) = C_{i,k} f_k, \quad 0 \le i \le n, \quad 0 \le k \le n-1. \tag{2}$$

Chain Ladder algoritmas remiasi prognozavimo pažingsniui taisykle

$$\widehat{C}_{i,k+1} = \widehat{C}_{i,k}\widehat{f}_k$$

pradedant nuo $\widehat{C}_{i,n-i} = C_{i,n-i}$. Čia $\widehat{f}_k$ žymi žalų vystimosi keficientą, kuris apibrėžiamas formule

$$\widehat{f}_k = \frac{\sum_{i=1}^{n-k} w_{i,k} C_{i,k} F_{i,k}}{\sum_{i=1}^{n-k} w_{i,k} C_{i,k}}, \tag{3}$$

čia

$$\widehat{F}_{i,k} = \frac{C_{i,k+1}}{C_{i,k}}$$

yra individualūs i-ųjų įvykio metų žalų vystimosi koeficientai, o

$$w_{i,k} \in [0, 1],$$

žymi koeficientus, kuriuos už rezervų skaičiavimą atsakingas aktuaras gali koreguoti savo nuožiūra taip įnešdamas ekspertinio vertinimo įtaką Chain Ladder metodo rezultatams[3]. Bendru atveju, $w_{i,k} = 1$, $\forall i, k$.

Taikydami aukščiau aprašytą algoritmą pažingsniui, galų gale gauname $C_{i,n}$ įvertį

$$\widehat{C}_{i,n}^{CL} = C_{i,n-i}\hat{f}_{n-i} \cdot ... \cdot \hat{f}_n$$

Iš pastarosios formulės ir (1) gauname Chain Ladder $IBNR_i$ įvertinį

$$\widehat{IBNR}_i^{CL} = \widehat{C}_{i,n}^{CL} - C_{i,n-i} = C_{i,n-i}\left(\hat{f}_{n-i} \cdot ... \cdot \hat{f}_n - 1\right) \tag{4}$$

Garsus matematikas Thomas Mack, daugiau nei 30 metų ėjęs vyr. aktuaro pareigas „Munich Re“ ir 2006 metais baigęs savo karjerą, keliuose straipsniuose[2-3][5] nagrinėjo Chain Ladder metodą ir jo įvertinių savybes. Esant tam tikroms prielaidoms apie žalų pasiskirstymą, kurios kyla iš Chain Ladder metodo, yra parodomos kitos savybės, kurios deja nevisada skamba įtikinamai kai kalbama apie žalų vystimosi portfelį. Tarkime, kad galioja prielaida (2), tuomet, papildomai pareikalavus, kad

$$\{C_{i,0}, ..., C_{i,n}\}, \{C_{j,0}, ..., C_{j,n}\} \tag{5}$$

yra nepriklausomi kai $i \neq j$ (tai yra dar viena Chain Ladder prielaida apie duomenų pasiskirstymą), straipsnyje[2] yra įrodoma, kad tuomet įvertiniai $\hat{f}_k$, $k = 1, ..., n$ apibrėžiami lygybėmis (3) yra nepaslinkti ir nekoreliuoti. Visų pirma, pats vienodų vystymosi koeficientų tenkinančių (2) prielaidą kiekvieniems įvykio metams egzistavimas yra gana kvestionuojamas faktas, tačiau jų įvertinio nekoreliuotumas yra sunkiai pateisinamas tikroje situacijoje, nes praktikoje dideli išmokėjimai linkę ateiti vėlesniais vystimosi metais dėl įvairių teisminių procesų. Būtent į pastarajį teiginį apie žalų vystimosi koeficientų įvertinio nekoreliotumą skirtingiems vystimosi metams bandysime neatsižvelgti modeliuodami žalų vystimasį. Tai bandysime įgyvendinti naudodami tikrus žalų vystimosi duomenis, neaproksimuodami jų kaip nepriklausomų atsitiktinių dydžių skirtingais vystimosi metais.

1.3 Bornhuetter-Ferguson metodas

Borhuetter-Ferguson metodas buvo straipsnyje[6] pasiūytas Ronaldo L. Bornhuetter ir Ronaldo E. Ferguson dar 1972 metais. Šis metodas buvo siūlomas kaip alternatyva Chain Ladder metodui siekiant sušvelninti akivaizdžias pastorojo silpnybes.

Iš (4) lygybės lengvai pastebima, kad Chain Ladder įvertinio rezultatai ypatingai priklauso nuo paskutinių stebimų agreguotų žalų sumų $C_{i,n-i}$. Tokia priklausomybė gali generuoti nepageidautinus šalutinius rezultatus, pavyzdžiui nulinį (arba artimą nuliui) rezervą naujesniems įvykio metams esant netikėtai mažam žalų apmokėjimų kiekiui pirmais vystimosi metais, arba atvirščiai, ypatngai didelį rezervą dėl netikėto išmokų šuolio ankstesniais vystimosi metais[5]. Ši savybė leidžia intuityviai nujausti Chain Ladder metodo nestabilumą.

Šiam nestabilumui mažinti ir buvo pasiūlytas Bornhuetter-Ferguson $IBNR$ įvertnys, kuris apibrėžiamas taip[4]:

$$\widehat{IBNR}_i^{BF} = (1 - b_{n-i})\,\widehat{U}_i^{BF} \tag{6}$$

čia

$$\widehat{U}_i^{BF} = v_i \hat{q}_i$$

kur

$\hat{q}_i$ - iš karto įvertintas galutinis nuostolingumas $q_i = \frac{U_i}{v_i}$ (*angl. ultimate loss ratio*) įvykio metams i,

v_i - kažkoks rizikos matas įvykio metams i (dažniausiai naudojamos uždirbtos įmokos),

$b_k \in [0, 1]$ yra galutinių nuostolių procentinė dalis, kuri tikimasi jog jau bus išmokėta po k vystimosi metų.

Praktikoje, koeficientai b_k išvedami iš Chain Ladder metodo žalų vystimosi koeficientų (3) tokiu būdu:

$$\begin{aligned}
b_n &= 1, \\
\hat{b}_{n-1} &= \hat{f}_n^{-1}, \\
\hat{b}_{n-2} &= \left(\hat{f}_{n-1}\hat{f}_n\right)^{-1}, \\
&..., \\
\hat{b}_0 &= \left(\hat{f}_1 \cdot ... \cdot \hat{f}_n\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

Iš (6) matome, jog įvertinys, atvirkščiai nei Chain Ladder įvertinys, tiesiogiai neatsižvelgia į sukauptas žalų iki paskutinių stebimų metų sumas $C_{i,n-i}$. Deja nėra tikslaus apibrėžimo kaip reikėtų nustatyti koeficientus $\hat{q}_i$. Praktikoje yra naudojama daug skirtingų metodų šiai užduočiai atlikti. Dažnai yra naudojamas Chain Ladder metodas atskirai vidutinės žalos ir jų skaičiaus įvertinimui taip gaunant $\widehat{U}_i^{BF}$. Taip pat, kartais įverčiai gaunami iš įmonės kainodaros skyrių ar naudojama rinkos statistika. Akivaizu, jog pastaroji savybė yra didžiausias metodo minusas, ypač, kai remiamasi Chain Ladder metodu, nes tuomet Bornhuetter-Fergusson metodas tampa ne „savarankišku“.

Atkreipkime dėmesį, jog $\widehat{U}_i^{BF}$ yra įvertinamas iš anksto, taigi taikant $\widehat{IBNR}_i^{BF}$ įvertinį – konstanta. Iš pastarojo fakto ir (6) išplaukia akivaizdi savybė:

Tarkime $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, ..., n$, taip pat $\widehat{U}_i^{BF*} = (1 + a_i)\,\widehat{U}_i^{BF}$, tada

$$\begin{aligned}
\widehat{IBNR}_i^{BF*} &= (1 - b_{n-i})\,\widehat{U}_i^{BF*} = \\
&= (1 - b_{n-i})\,(1 + a_i)\,\widehat{U}_i^{BF} = \\
&= (1 - b_{n-i})\,\widehat{U}_i^{BF} + a_i\,(1 - b_{n-i})\,\widehat{U}_i^{BF} = \\
&= \widehat{IBNR}_i^{BF} + a_i \widehat{IBNR}_i^{BF} = \\
&= (1 + a_i)\,\widehat{IBNR}_i^{BF}
\end{aligned} \tag{7}$$

Kaip vėliau parodysime, pastarąją savybę galėsime naudoti lygindami Chain Ladder ir Bornhuetter-Ferguson metodų tikslumą vidutinio kvadratinio nuokrypio prasme.

1.4 Benktander metodas

Metodą aprašomą šiame skyrelyje straipsnyje[7] pasiūlė Gunnaras Benktander 1976 metais. Įsigilinus į prieš tai aprašytus Chain Ladder ir Bornhuetter-Ferguson metodus akivaizdu, jog tai yra kraštutiniai metodai. Chain Ladder metodas visiškai remiasi praeities stebėjimais neatsižvelgdamas į jokias prielaidas apie ateitį, o Bornhuetter-Ferguson metodas remiasi iš anksto įvertintomis galutinėmis agreguotomis žalomis ir neatsižvelgia į praeities stebėjimus. Benktanderio metodas yra intuityvi pastarųjų dviejų metodų modifikacija.[1]

Darome prielaidą, kad mums žinomas žalų procentinis vystimasis

$$0 < p_0 < p_1 < p_2 < ... < p_n = 1$$

čia p_k yra procentinė dalis agreguotų galutinių žalų, kurios tikimasi, kad bus išmokėtos iki vystimosi metų k.

Daroma prielaida, kad po n metų žalos nebebus mokamos. Pasirenkame $\hat{U}_i^0$ taip pat, kaip $\hat{U}_i^{BF}$, aiškumo dėlei, toliau visur naudosime $\hat{U}_i^{BF}$ žymėjimą. Buvo pasiūlyta pakeisti $\hat{U}_i^{BF}$ į maišytą dydį

$$\hat{U}_i^c = c\hat{U}_i^{CL} + (1 - c)\,\hat{U}_i^{BF}$$

čia $\hat{U}_i^{CL}$ žymi galutinę (*angl. ultimate loss*) Chain Ladder agreguotų žalų prognozę, mūsų atveju $\hat{U}_i^{CL} = \hat{C}_{i,n}^{CL}$. Metodas remiasi prielaida, kad Bornhuetter-Ferguson metodas yra tinkamesnis prognozuoti įvykio metams, kuriuose žalos yra mažiau išsivysčiusios (kas yra gana akivaizdu, nes tokiais metais Chain Ladder metodas gali būti ypatingai nestabilus), o Chain Ladder tinkamesnis senesniems įvykio metams, kur žalos jau beveik pilnai išsivysčiusios. Dėl šios prielaidos G. Benktander straipsnyje[7] siūlo pasirinkti $c = p_k$, o p_k gaunami iš Chain Ladder koeficiedntų taip pat, kaip koeficientai b_k Bornhuetter-Ferguson atveju. Tuomet:

$$\widehat{IBNR}_i^{GB} = \widehat{IBNR}_i^{BF} \cdot \frac{\hat{U}_i^{p_k}}{\hat{U}_i^{BF}} \tag{8}$$

atkreipkime dėmesį, kad

$$\begin{aligned}
\widehat{IBNR}_i^{GB} &= \widehat{IBNR}_i^{BF} \cdot \frac{\hat{U}_i^{p_k}}{\hat{U}_i^{BF}} = \\
&= (1 - p_{n-i})\, \hat{U}_i^{BF} \cdot \frac{\hat{U}_i^{p_k}}{\hat{U}_i^{BF}} = \\
&= (1 - p_{n-i})\, \hat{U}_i^{p_k} = \\
&= (1 - p_{n-i}) \left(p_{n-i} \hat{C}_{i,n}^{CL} + (1 - p_{n-i})\, \hat{U}_i^{BF} \right) = \\
&= (1 - p_{n-i}) \left(C_{i,n-i} + \widehat{IBNR}_i^{BF} \right) = \\
&= (1 - p_{n-i})\, \hat{C}_{i,n}^{BF}
\end{aligned}$$

Butina suprasti, kad bendru atveju $\hat{C}_{i,n}^{BF} \neq \hat{U}_i^{BF}$. Parametras $\hat{U}_i^{BF}$ naudojamas tik $\widehat{IBNR}_i^{BF}$ apskaičiavimui, o galutinių žalų įvertis gaunamas iš formulės $\hat{C}_{i,n}^{BF} = C_{i,n-i} + \widehat{IBNR}_i^{BF}$. Ši savybė dar akivaizdžiau parodo faktą, jog Bornhuetter-Ferguson metodas vertinant $IBNR$ tisiogiai neatsižvelgia į žalų istoriją iki vertinimo datos.

Taigi matome, kad įvertis $\widehat{IBNR}_i^{GB}$ gaunamas papildomą kartą taikant Bornhuetter-Ferguson procedūrą su parametrais $\hat{U}_i^{BF}$ pakeistais į $\hat{C}_{i,n}^{BF}$ gautais taikant Bornhuetter-Ferguson metodą. Straipsnyje[1] parodyta, kad taikant Benktander metodą n kartų ir kai $n \to \infty$, tai $\widehat{IBNR}_i^{GB} \to \widehat{IBNR}_i^{CL}$.

1.5 „Mokumas II“ ir geriausias įvertis

Pristačius „Mokumas II“ direktyvą, buvo pateikta ir nauja techninių atidėjinių struktūra. Vietoj įprastinių Neišmokėtų Išmokų, Nepaisbaigusios Rizikos ir Perkeltų Įmokų techninių atidėjinių buvo pasiūlyta formuoti Išmokų ir Įmokų rezervų geriausius įverčius, bei papildomą rizikos priedą skirtą užtikrinti, kad techniniai atidėjiniai sudarytų sumą, kurią draudimo įmonė šią dieną turėtų sumokėti, norėdama rinkoje parduoti savo įsipareigojimų portfelį ir jį įsigijusi įmonė galėtų užtikrintai įvykdyti perimtus įsipareigojimus draudėjams.[8]

Šiame darbe bus nagrinėjamas tik išmokų rezervo geriausias įvertis. „Mokumas II“ pasiruošiamojo etapo tecninėje specifikacijoje[8] geriausias išmokų rezervo įvertis apibrėžiamas kaip busimų diskontuotų piniginių srautų vidurkis pagal visus galimus scenarijus. Išmokų rezervas kildinamas tik iš tų rizikų, kurios jau baigė galioti, taigi iš tų įvykių, kurie jau yra įvykę (čia į žaidimą įeina 1.1 skyrelyje apibrėžta duomenų struktūra).

Nors apibrėžimas ir skamba labai paprastai, tačiau pačio geriausio įverčio tiksli skaičiavimo metodika specifikacijoje nepateikiama. Šis faktas suteikia labai didelę laisvę individualioms įmonėms vertinant piniginius srautus. Tai - ne visada gera savybė, nes didelėms įmonėms suteikia manipuliavimo techniniais atidėjiniais galimybę, o didelei daliai vidutinių ir mažų įmonių yra apribojamas tinkamų vertinimo metodų pasirinkimas (tiek dėl duomenų kokybės, tiek dėl žmogiškųjų išteklių nepakankamumo), dažniausiai lieka tik praeituose skyreliuose aptarti klasikiniai rezervavimo metodai.

Norint atlikti kokybišką vertinimą privalu gerai suprasti taikomus metodus bei žinoti ir mokėti analizuoti jų savybes, todėl šiame darbe aprašysime išmokų rezervo geriausią įvertį atsižvelgdami į 1.1 skyrelyje apibrėžtą duomenų struktūrą. Reikia atkreipti dėmesį į faktą, jog į ateities piniginius srautus įeina ne tik apmokamos žalos, bet ir įvairios administracinės sąnaudos, investavimo išlaidos, taip pat išlaidos mažinamos planuojamu atgauti regresu. Tačiau, šių papildomų išlaidų vertinimui naudojami atskiri metodai nei aprašyti prieš tai buvusiuose skyreliuose, todėl čia nagrinėsime tik išmokų dalį geriausiame įvertyje.

Tarkime, turime 1. lentelės struktūra pateiktus duomenis, stebime $n+1$ metų duomenis, darome prielaidą, kad per $n+1$ metų žalos galutinai išsivysto, t.y. jeigu $k > n$, tai $Z_{i,k} = 0$, $i = 0, ..., n$. Būtina atkrepti dėmesį jog tai gana stiprus modelio supaprastinimas, nes nors ne gyvybės draudimo žalos dažniausiai išsivysto per gana nedidelį skaičių metų, bet pasitaiko ir išskirtinių atvejų, kuriems įvertinti bendru atveju būtinas tam tikras uodegos faktorius modelyje. Uodegos faktoriaus vertinimo problema yra atskira užduotis, todėl nesiesime jos su šiuo darbu ir darysime pastarąją prielaidą.

Atkreipkime dėmesį, kad tokioje sruktūroje, tik tada kai $i + k > n$, $Z_{i,k}$ yra nežinomi, taigi atsitiktiniai dydžiai. Tačiau žiūrint į modelį iš bendresnės pusės ir neteigiant, kad n metų yra stebimi, $Z_{i,k}$ yra atsitiktiniai dydžiai $\forall i, k$ ir bendru atveju negalime formuluoti prielaidų apie jų nepriklausomumą. Tada paprastą ateities piniginių srautų vidurkį galime apibrėžti taip:

$$\mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i} Z_{i,n-j+1}\right)\middle| Z_{n,0}, Z_{n-1,0}, Z_{n-1,1}, ..., Z_{n-i,0}, ..., Z_{n-i,i}, ..., Z_{0,0}, ..., Z_{0,n}\right)$$

Atkreipkime dėmesį, kad, žalų prieaugių trikampyje, išmokų srautų diskontavimas vyksta įstrižainėmis, todėl geriausias išmokų rezervo įvertis, kurį žymėsime BE (*Best Estimate*) gali būti užrašytas taip:

$$BE = \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i}\frac{Z_{i,n-j+1}}{(1+q_{i-j+1})^{i-j+1}}\right)\middle| Z_{n,0}, Z_{n-1,0}, Z_{n-1,1}, ..., Z_{n-i,0}, ..., Z_{n-i,i}, ..., Z_{0,0}, ..., Z_{0,n}\right) \tag{9}$$

Čia q_i žymi Europos Centrinio Banko skelbiamas nerizikingas palūkanų normas i-iems vystimosi metams. Klasikinių rezervavimo metodų tinkamumas dydžio (9) vertinimui ir bus pagrindinis šio darbo tikslas.

2 Praktinė dalis

Šiame skyriuje aprašomas tyrimas, kuris yra pagrindinė šio darbo dalis. Poskyrije 2.1 trumpai aptariamos prielaidos, taikytos modeliuojant žalų vystimosi portfelį. Skyrelyje 2.2 aptariama būsimo tyrimo metodologija bei eiga, tyrimas plėtojamas ir pateikiami jo rezultatai grafikų ir lentelių pavidalu.

2.1 Aprašymas

2.1.1 Tikslas

Darbe aprašomo tyrimo tikslas yra sumodeliuoti ne gyvybės draudimo įmonės transporto priemonių valdytojų civilinės atsakomybės draudimo (TPVCAD) žalų portfelį, nedarant prielaidų apie nekoreliuotumą tarp žalų vystimosi koeficientų, keliamų Chain Ladder metodo. Tai atlikus, tirti klasikinių rezervavimo įvertinių savybes juos taikant sumodeliuotam portfeliui, bei patikrinti jų tinkamumą išmokų rezervo geriausio įverčio apibrėžto „Mokumas II“ direktyvos vertinimui.

2.1.2 Tyrime naudoti duomenys

Modeliavimui naudoti duomenys buvo paimti iš kelių šaltinių. Žalų vystimosi modeliavimui buvo naudoti draudimo įmonės koreguoti žalų apmokėjimų duomenys. Imtį sudaro 31 703 elementai, kurių kiekvienas yra penkiamatis vektorius $\{S_{j,0}, S_{j,1}, S_{j,2}, S_{j,3}, S_{j,4}\}$ (čia j žymi elemento numerį imtyje) vaizduojantis žalų mokėjimus penkiais vystimosi metais, jeigu kuriais nors vystimosi metais $k = 0, ..., 4$ nebuvo jokių išmokų, tai $S_{j,k} = 0$. Tyrime laikyta, jog tyrinėjamas portfelis - įmonės sudarančios tam tikrą procentinę dalį Lietuvos rinkos. Taip pat daryta prielaida, kad turima imtis yra baigtinis 5-matis įmonės žalų vystimosi skirstinys.

Įvykusių žalų skaičiui modeliuoti buvo naudota Lietuvos banko teikiama statistika (pateikiama prie modelio parametrų vertinimo). Naudoti duomenys - metinė statistika, kurią sudaro svertinis galiojusių sutarčių skaičius, įvykių skaičius, bei uždirbtos įmokos.

Geriausio įverčio skaičiavime, pinigų srautų diskontavimui naudojamos Europos Centrinio Banko kas mėnesį teikiamos nerizikingos palūkanų normos (naudojamos palūkanų normos teiktos 2014 metų gruodžio mėnesį).

2.1.3 Modelio prielaidos

Trumpai aprašysime prielaidas taikytas modeliuojant įmonės žalų vystimosi portfelį.

1. Modeliuojamas Transporto priemonių valdytojų civilinės atsakomybės draudimo (fiziniai asmenys, lengvieji automobiliai) žalų portfelis.
2. Įmonė užima 15% rinkos.
3. Daroma prielaida, jog žalos pilnai išsivysto per 5 stebėjimų metus. T.y. jeigu $k > 5$, tai $Z_{i,k} = 0$, $i = 0, ..., 4$.
4. Turimi empiriniai žalų vystimosi duomenys atitinka įmonės žalų statistinę elgseną ir yra diskretus, baigtinis skirstinys, kurio elementai - 5-mačiai vektoriai apibrėžti 2.1.2 skyrelyje.
5. Kiekvienas skirstinio elementas gali pasirodyti su vienoda tikimybe.
6. Įvykių skaičius tam tikrais įvykio metais yra pasiskirstęs pagal binominį skirstinį su parametrais n ir p įvertintais remiantis Lietuvos Banko statistika. Ivykių skaičius skirtingais įvykio metais - nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai.
7. n ir p parametrai įvykio metams $2010, ..., 2014$ vertinti atskirai.
8. Įvykių skaičius ir žalų vystimasis - nepriklausomi.

2.1.4 Modelio parametrai

Anksčiau, padarėme prielaidą, jog visos žalos išsivysto per 5 metus, taigi norėdami sudaryti žalų vystimosi trikampius klasikinių rezervavimo metodų taikymui turime turėti 5-ių paskutinių įvykio metų įvykių skaičiui modeliuoti reikalingus parametrus. Modeliuojama remiantis $2010, ..., 2014$ metų statistiniais duomenimis. Nuo šiol įvykio metai visur bus žymimi taip:

$$i = 0 : 2010, \quad i = 1 : 2011, \quad i = 2 : 2012, \quad i = 3 : 2013, \quad i = 4 : 2014.$$

Parametrų p_i ir n_i, kur $i = 0, ..., 4$ įverčiai gauti taikant formules:

$$\hat{n}_i = \lfloor SSS_i \cdot 15\% \rfloor,$$

$$\hat{p}_i = \frac{SSS_i}{IvS_i}$$

čia:

- SSS_i - per i-uosius apskaitos metus galiojęs svertinis sutarčių skaičius
- IvS_i - per i-uosius įvykio metus įvykusių įvykių skaičius (apmokėtos žalos ir dar neapmokėtų įvertis)
- $\hat{n}_i$ įverčiai dauginami iš 15% nes daroma prielaida, kad įmonė užima 15% rinkos.

Verta pabrėžti, jog svertinis galiojusių sutarčių skaičius yra geresnė statistika įvykių skaičiui vertinti, nei pasirašytų sutarčių skaičius, nes ją skaičiuojant yra įvertinamas sutarčių nutraukimas.

Kitas svarbus parametras yra $\widehat{U}_i^{BF}$, $i = 0, ..., 4$, kuris bus naudojamas skaičiuojant Bornhuetter-Ferguson metodo įverčius. Darysime prielaidą, kad draudikui, vertinančiam rezervus yra žinomas tiek žalų, tiek žalų skaičiaus pasiskirstymas ir jis pasirenka $\widehat{U}_i^{BF} = \mathbf{E}(U_i)$ (vėliau atsisakysime šios prielaidos). Mūsų atveju $\mathbf{E}(U_i) = \mathbf{E}(C_{i,4})$, nes pagal padarytą prielaidą $C_{i,k+1} = C_{i,k}$, kai $k + 1 > 4$. Kadangi prielaidomis apie savo modelį apibrėžėme nepriklausomybę tarp žalu skaičiaus ir vystimosi, tai reikalingą vidurkį galime lengvai apskaičiuoti iš turimo empirinio skirstinio, nes bendros galutinės žalos per įvykio metus i yra pasiskirsčiusios pagal atsitiktinį dydį

$$X_i = N_i C \quad i = 0, ..., 4$$

kur

$$N_i \sim \mathrm{B}\left(\hat{n}_i, \hat{p}_i\right) \quad i = 0, ..., 4,$$

o C yra baigtinis skirstinys, kurio elemntai yra $C_j = \sum_{k=0}^{4} S_{j,k}$, kur $S_{j,k}$ yra turimo žalų vystimosi skirstinio elementai. Elementams priskirtos vienodos tikimybės. Kadangi N_i ir C - nepriklausomi $\forall i = 0, ..., 4$, tai

$$\mathbf{E}\left(N_i C\right) = \mathbf{E} N_i \mathbf{E} C = \hat{n}_i \hat{p}_i \mathbf{E} C$$

mūsų atveju

$$\mathbf{E} C = \frac{1}{31703} \sum_{j=1}^{31703} \left(\sum_{k=0}^{4} S_{j,k} \right) = 720,64$$

$$\widehat{U}_i^{BF} = \hat{n}_i \hat{p}_i \mathbf{E} C$$

Dar vienas parametras, kurį naudosime, tai nerizikingos palūkanų normos pinigų srautų diskontavimui skaičiuojant geriausią išmokų rezervo įvertį, naudosime 2014 metų gruodžio mėnesį Europos Centrinio Banko teiktas nerizikingas palūkanų normas. Pirmiems keturiems vystimosi metams jos yra[9]

- $q_1 = 0,00062$,
- $q_2 = 0,00075$,
- $q_3 = 0,00120$,
- $q_4 = 0,00184$.

Lentelėje (3) yra pateikiami duomenys naudoti įverčių skaičiavime ir iš jų sekantys įverčiai.

i	SSS_i	IvS_i	$\hat{n}_i$	$\hat{p}_i$	$\widehat{U}_i^{BF}$
0	966 161, 68	60 874,66	144 924	0,0630	6 579 595,98
1	972 533,65	56 034,98	145 880	0,0576	6 055 313,08
2	984 206,23	59 729,93	147 630	0,0607	6 457 800,39
3	1 002 514,30	61 273,70	150 377	0,0611	6 621 265,33
4	1 042 379,53	64 906,69	156 356	0,0623	7 019 783,86

3 lentelė: Parametrai išmokų skaičiavimui

2.2 Modeliavimo eiga

Šiame skyriuje aprašoma tyrimo eiga ir pateikiami jo rezultatai.

2.2.1 Metodologija

Toliau aprašyto tyrimo skaičiavimams buvo naudotas statistinis R paketas. Skaičiavime naudoti 2.1 skyriuje aprašomi duomenys bei parametrai. Modeliavimas buvo atliktas asmeniniu kompiuteriu, naudojant vieną 3.5GHz spartos procesoriaus branduolį ir 8 GB RAM operatyviosios atminties. Metodas naudotas tyrime gana imlus laikui, visi skaičiavimai užtruko apie 170 valandų.

Siekiant palyginti tradiciniais rezervavimo įvertiniais gaunamus įverčius, buvo taikomas Monte Karlo algoritmas, brėžiami empiriniai įvertinių pasiskirstymo tankiai, apskaičiuojamos šios pagrindinės įvertinių charakteristikos:

1. $IBNR$ įverčių vidurkis
$$\overline{\widehat{IBNR}_i} = \frac{1}{L}\sum_{j=1}^{L} \widehat{IBNR}_{i,j} \ ;$$
2. Įverčių empirinis poslinkis
$$Posl_i = \overline{\widehat{IBNR}_i} - BE_i \ ;$$

3. Įverčių dispersija

$$Var\left(\widehat{IBNR_i}\right) = \frac{1}{L}\sum_{j=1}^{L}\left(\widehat{IBNR}_{i,j} - \overline{\widehat{IBNR_i}}\right)^2 \ ;$$

4. Įverčių vidutinis kvadratinis nuokrypis

$$MSE_i = Var\left(\widehat{IBNR_i}\right) + Posl_i^2 \ .$$

Čia L - procedūros atlikimų skaičius taikant Monte Karlo algoritmą, $\widehat{IBNR}_{i,j}$– j-asis $IBNR$ įvertis, kai $j = 1, ..., L$, o BE_i - geriausias išmokų rezervo įvertis i-aisiais įvykio metais (nes tiriamas metodų tinkamumas geriausiam įverčiui vertinti), kuris mūsų modeliui bus suskaičiuotas 2.2.2 skyrelyje. Procedūra buvo atlikta 50 000 kartų, dėl aiškumo toliau pateikiamas vienos iš 50 000 Monte Karlo procedūrų skaitinis pavyzdys:

Atsitiktinai generuojame penkis dydžius iš skirstinių $N_i \sim \mathrm{B}\left(\hat{n}_i, \hat{p}_i\right)$, $i = 0, ..., 4$ su parametrais $\hat{n}_i$ ir $\hat{p}_i$ pateiktais (3) lentelėje. Gauname įvykių skaičiaus įverčius 5-iems įvykio metams $\widehat{N_i}$, $i = 0, ..., 4$. Iš turimo empirinio žalų vystimosi skirstinio penkis kartus su vienoda tikimybe išrenkame ir į atskiras grupes sugrupuojame po $\widehat{N_i}$, $i = 0, ..., 4$ elementų. Turime 5 grupes vektorių $\{S_{j_i,0}, S_{j_i,1}, S_{j_i,2}, S_{j_i,3}, S_{j_i,4}\}$, čia $j_i = 1, ..., \widehat{N_i}$ žymi vektoriaus numerį grupėje i. Elementus grupėse susumuojame pakoordinačiui ir gauname žalų prieaugių vektorius $\{Z_{i,0}, Z_{i,1}, Z_{i,2}, Z_{i,3}, Z_{i,4}\}$, $i = 0, ..., 4$. Iš turimų duomenų galime sudaryti (1) pavidalo lentelę (duomenys $\times 10^{-4}$).

Įvykio	Žalų vystimosi metai				
metai	0	1	2	3	4
0	426,79	163,47	28,87	18,23	7,28
1	412,46	172,14	48,27	48,85	7,95
2	423,51	183,47	22,92	16,26	7,25
3	454,84	177,22	38,23	24,41	6,77
4	459,65	184,11	28,26	13,49	10,02

4 lentelė: Žalų prieaugių trikampis

Atkreipkime dėmesį, jog bendru atveju nestebimi duomenys čia mums žinomi, tuo pasinaudosime vėliau tirdami įvertinių pakankamumą. Iš gautų duomenų suformuojame (2) tipo agreguotų žalų lentelę (duomenys $\times 10^{-4}$) ir apskaičiuojame žalų vystimosi koeficientus $\hat{f}_k$, $k = 1, ..., 4$.

Įvykio metai	Žalų vystimosi metai				
	0	1	2	3	4
0	$426,79$	$590,27$	$619,14$	$637,37$	$644,65$
1	$412,46$	$584,60$	$632,87$	$681,72$	$689,67$
2	$423,51$	$606,98$	$629,90$	$646,16$	$653,52$
3	$454,84$	$632,06$	$670,30$	$694,70$	$701,47$
4	$459,65$	$643,76$	$672,02$	$685,51$	$695,53$
$\hat{f}_k$		$1,4054$	$1,0562$	$1,0536$	$1,0114$

5 lentelė: Agreguotas žalų trikampis

iš turimų duomenų jau galime suskaičiuoti klasikinių metodų įverčius. Žymėsime $\widehat{IBNR}_i^{CL}$, $\widehat{IBNR}_i^{BF}$, $\widehat{IBNR}_i^{GB}$, jie pateikti 6 lentelėje. Taip pat šalia įverčių pateikiamas ir atsitiktinai generuotas tikrasis $IBNR$, jį žymėsime $\widehat{IBNR}_i^{*}$.

i	$\widehat{IBNR}_i^{CL}$	$\widehat{IBNR}_i^{BF}$	$\widehat{IBNR}_i^{GB}$	$\widehat{IBNR}_i^{*}$
1	$77\,862,49$	$68\,379,26$	$77\,755,40$	$79\,453,79$
2	$413\,311,66$	$397\,641,11$	$412\,346,70$	$234\,974,83$
3	$792\,970,89$	$738\,088,53$	$786\,853,00$	$693\,240,81$
4	$2\,673\,881,48$	$2\,581\,708,20$	$2\,639\,982,40$	$2\,355\,989,09$
Bendras	$3\,958\,026,52$	$3\,785\,817,10$	$3\,916\,937,50$	$3\,363\,658,52$

6 lentelė: Parametrai išmokų skaičiavimui

Net neatlikę tolesnių modeliavimo žingsnių jau galime pastebėti, jog Benktander metodas generuoja tarpinius rezultatus tarp Chain Ladder ir Bornhuetter-Ferguson metodo. To ir buvo galima tikėtis. Nors mūsų tikslas įvertinti metodų tinkamumą geriausio įverčio vertinimui, tačiau matome, jog yra ganėtinas įverčių neatitikimas tikrąjai generuotai $\widehat{IBNR}_i^{*}$ reikšmei, todėl kiekviename Monte Karlo procedūros žingsnyje taip pat suskaičiuojame ir dydžius

$$\begin{aligned}
\widehat{IBNR}_i^{CLdif} &= \widehat{IBNR}_i^{CL} - \widehat{IBNR}_i^{*} \quad i = 1, ..., 4,\\
\widehat{IBNR}_i^{BFdif} &= \widehat{IBNR}_i^{BF} - \widehat{IBNR}_i^{*} \quad i = 1, ..., 4,\\
\widehat{IBNR}_i^{GBdif} &= \widehat{IBNR}_i^{GB} - \widehat{IBNR}_i^{*} \quad i = 1, ..., 4.
\end{aligned} \tag{10}$$

Atkreipkime dėmesį, jog bendru atveju, šie dydžiai yra atsitiktiniai, juos vadinsime atitinkamo metodo įvertinio pakankamumu ir plačiau panagrinėsime skyrelyje 3.2.5. Sekančiame skyrelyje suskaičiuojamas geriausias įvertis mūsų žalų portfelio modeliui.

2.2.2 Geriausias įvertis

Suskaičiuosime geriausią išmokų rezervo įvertį mūsų modeliuojamam žalų vystimosi portfeliui. Remsimės (9) formule. Mūsų atveju galime užrašyti

$$BE = \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{4}\left(\sum_{j=1}^{i}\frac{Z_{i,4-j+1}}{(1+q_{i-j+1})^{i-j+1}}\right)\middle| Z_{4,0}, Z_{3,0}, Z_{3,1}, ..., Z_{0,0}, ..., Z_{0,4}\right)$$

Kadangi žalų vystimosi skirstinys yra baigtinis vektorių rinkinys ir apibrėžėme nepriklausomybę tarp įvykių skaičiaus skirtingais įvykio metais, bei įvykių skaičiaus ir vystimosi, galime užrašyti

$$\begin{aligned} BE_i &= \hat{n}_i\hat{p}_i\mathbf{E}\left(\sum_{j=1}^{i}\frac{Z_{i,4-j+1}}{(1+q_{i-j+1})^{i-j+1}}\middle| Z_{i,4-j}, ..., Z_{i,0}\right) = \\ &= \hat{n}_i\hat{p}_i\mathbf{E}\left(\sum_{j=1}^{i}\frac{Z_{i,4-j+1}}{(1+q_{i-j+1})^{i-j+1}}\right) = \\ &= \hat{n}_i\hat{p}_i \cdot \frac{1}{31703}\left(\sum_{j=1}^{i}\frac{S_{i,4-j+1}}{(1+q_{i-j+1})^{i-j+1}}\right) \end{aligned}$$

kur $S_{j,k}$ yra turimo žalų vystimosi skirstinio elementai.

Į pastarają formulę surašę turimus duomenis gauname tokius geriausius išmokų rezervo įverčius:

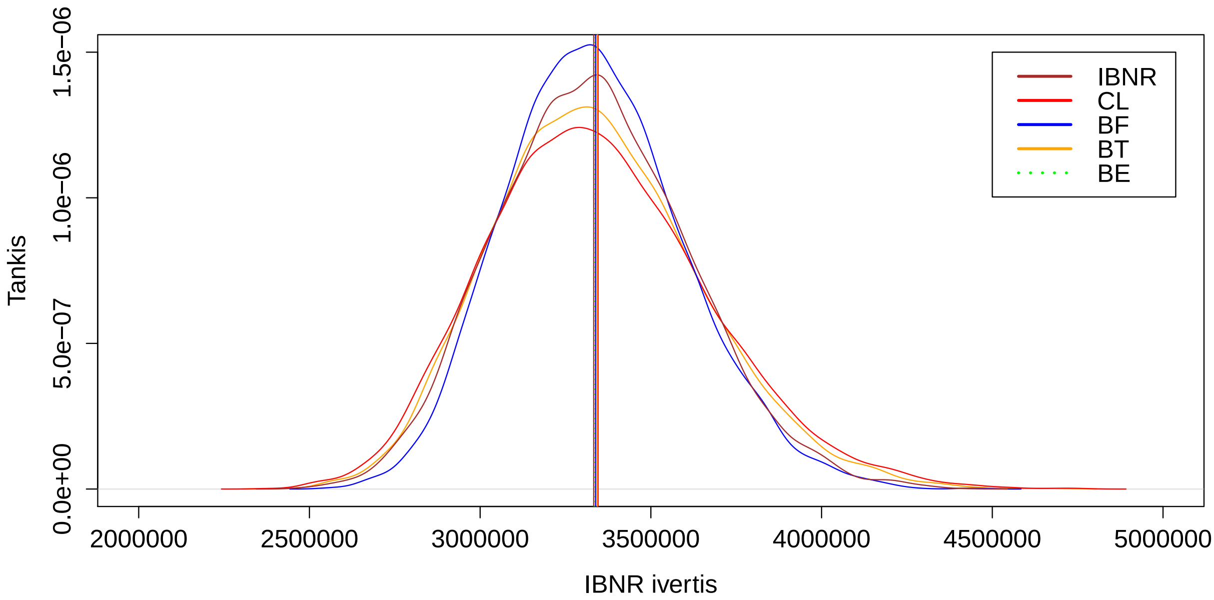
- $BE_1 = 55\,675,67$
- $BE_2 = 295\,205,20$
- $BE_3 = 588\,363,89$
- $BE_4 = 2\,395\,765,38$

Pabrėšime, kad svarbu turėti geriausius įverčius kiekvieniems įvykio metams atskirai, nes bus norima lyginti kasikinių rezervavimo metodų tinkamumą atskirų įvykio metų prognozavimui.

2.2.3 IBNR įvertinių tinkamumas geriausiam įverčiui vertinti

Praeitame skyrelyje suskaičiavome geriausią išmokų rezervo įvertį mūsų modeliui. Atlikę Monte Karlo algoritmą aprašytą 2.2.1 skyrelyje jau galime nubraižyti empirinius klasikinių $IBNR$ įvertinių tankio funkcijų grafikus. Grafike[1] (1 pav.) matome $IBNR$ įvertinių tankius visiems įvykio metams bendrai, taip pat palyginimui ruda spalva nubrėžtas ir tikrųjų $IBNR$

[1] CL - Chain Ladder, BF - Bornhuetter-Ferguson, BT - Benktander, BE - Geriausias įvertis, IBNR - tikras IBNR

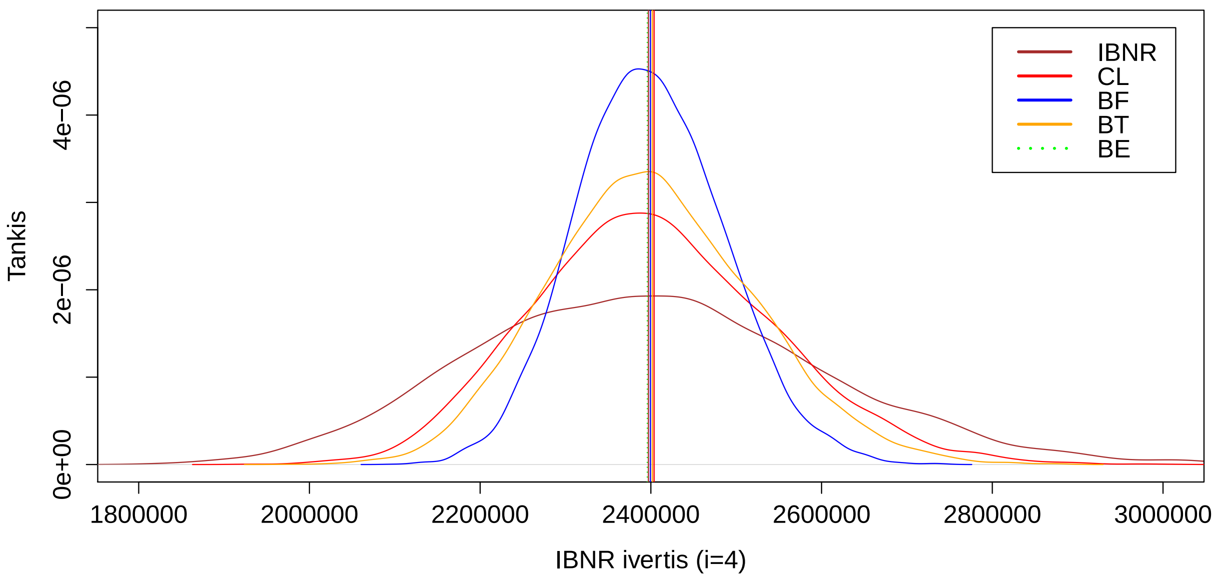


1 pav.: Klasikinių įvertinių tankių grafikai visiems įvykio metams

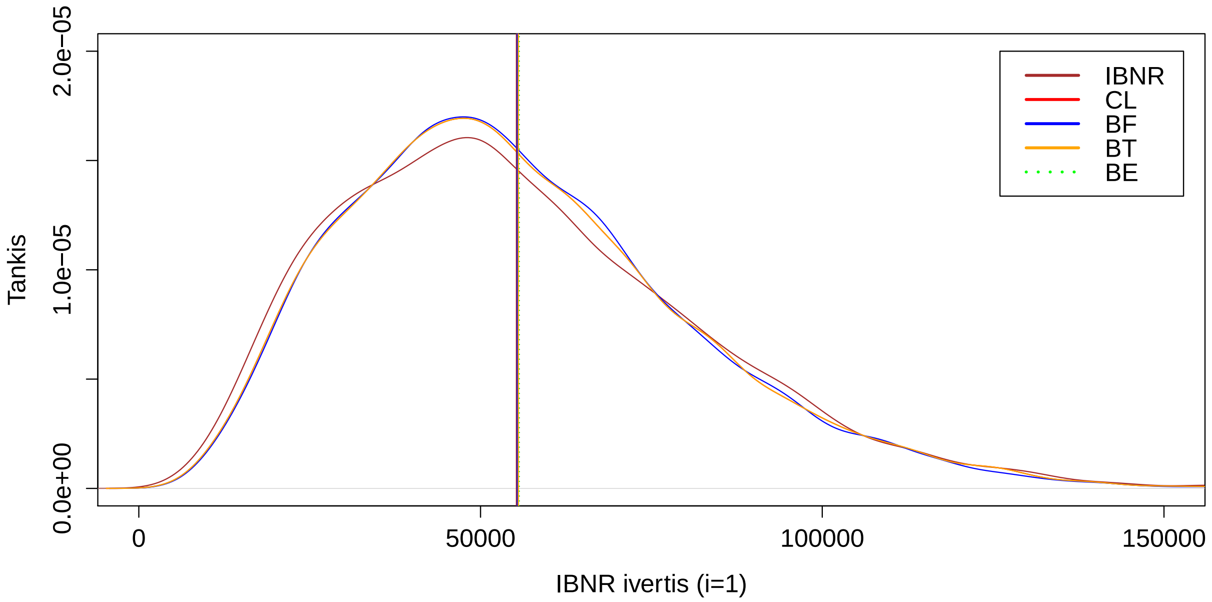
reikšmių tankis. Pirmas faktas kurį galima pastebėti yra įvertinių nepaslinktumas, arba artima nepaslinktumui situacija (žalia brūkšninė linija grafike nematoma, nes persidengia su tiesėmis, vaizduojančiomis klasikinių įvertinių empirinius vidurkius). Nors ir buvo galima tikėtis kažkokio paslinktumo, bendru atveju grafikai atspindi daugumą savybių kurių buvo galima tikėtis. Bornhutter-Ferguson įvertinys atrodo stabilesnis tiek už Benktander tiek už Chain Ladder įvertinį, Benktander įvertinys generuoja tarpinius stabilumo rezultatus. Taip pat matome, jog egzistuoja pakankamai didelė sklaida apie geriausią įvertį, todėl ypatingai svarbu pasirinkti tikslesnį vertinimo metodą.

Įdomu ir svarbu peržvelgti tankio grafikus ir kiekvienais įvykio metais atskirai, ypač turėtų dominti įvykio metai $i = 4$, nes tuomet prognozuojamas ilgiausias vystimosi laikotarpis. Paveikslėlyje (2 pav.) pateikti tankio grafikai įvertiniams kai $i = 4$. Akivaizdžiai metodų stabilumas žymiai mažesnis negu visų metų bendrai atveju, tačiau matomos tos pačios tendencijos lyginant metodus tarpusavyje. Taip pat matomas nepaslinktuams geriausio įverčio atžvilgiu. Tendencija išlieka ta pati ir su $i = 3$, $i = 2$ ir $i = 1$, tik galų gale metodų stabilumai beveik susilygina. Galima pastebėti, kad metodų įvertinių tankių grafikai praranda simetriją vidurkių atžvilgiu ir metodai tampa linkę nepakankamai įvertinti geriausią įvertį įvykio metams kai žalos labiau išsivysčiusios. Šiam faktui pavaizduoti pateikiamas (3 pav.) grafikas ($i = 1$), kitus grafikus galima rasti prieduose.

Lentelėje (7) yra apibendrinamos savybės, kurias galime įžvelgti grafikuose. Kiekvieno metodo generuotiems įverčiams pateikiami vidutiniai kvadratiniai nuokrypiai, poslinkiai



2 pav.: Klasikinių įvertinių tankių grafikai 2014 įvykio metams



3 pav.: Klasikinių įvertinių tankių grafikai 2011 įvykio metams

ir dispersijos. Kaip matome iš pateiktų skaičių, anksčiau iš grafikų padarytos prielaidos pasitvirtino. Stebimas minimalus poslinkis lyginant su tikrąja geriausio įverčio reikšme. Naujausiais įvykio metais pastebimas ypatingai didelis (skiriasi daugiau nei du kartus) stabilumo skirtumas tarp Bornhuetter-Ferguson ir Chain Ladder įverčių. Senesniais įvykių metais, kai žalos jau beveik išsivysčiusios visi metodai turi neigiamą poslinkį, t.y. yra linkę nuvertinti geriausią įvertį, stabilumas šiuo atveju beveik susilygina. Benktander metodas duoda tarpinius rezultatus visais įvykio metais tiek paslinktumo tiek stabilumo prasme. Galima būtų daryti išvadą, kad visada geriausia taikyti Bornhuetter-Ferguson metodą, o prielaida, kuria remiasi Benktander metodas, jog Bornhuetter-Ferguson metodas yra tinkamesnis įvykio metams kur žalos dar nėra labai išsivysčiusios, o Chain Ladder metodas atvirkščiai, nėra teisinga. Tačiau, kaip pamatysime kitame skyrelyje, tai nėra visiškai tiesa.

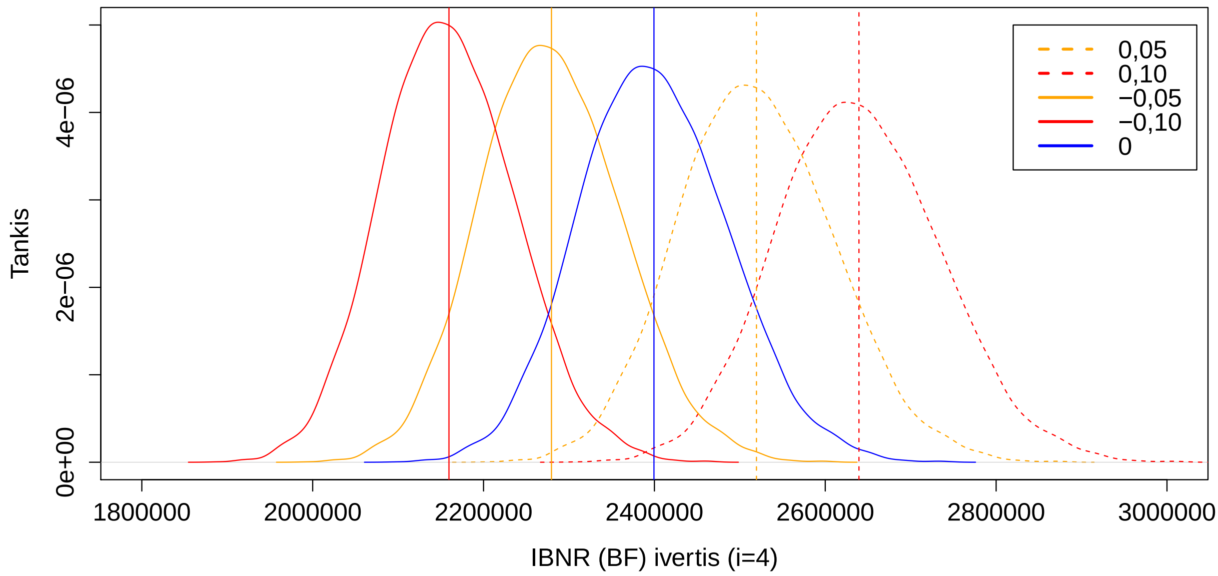
	$Posl$ ($\times 10^{-3}$)	$Var(\widehat{IBNR_i})$ ($\times 10^{-10}$)	MSE ($\times 10^{-10}$)
$i=4$:			
Chain Ladder	3,851	1,993	1,995
Bornhuetter-Ferguson	1,631	0,754	0,754
Benktander	2,541	1,461	1,462
$i=3$:			
Chain Ladder	0,854	1,109	1,109
Bornhuetter-Ferguson	-0,492	0,894	0,894
Benktander	0,596	1,085	1,085
$i=2$:			
Chain Ladder	0,207	0,776	0,776
Bornhuetter-Ferguson	-0,897	0,692	0,692
Benktander	0,010	0,770	0,770
$i=1$:			
Chain Ladder	-0,219	0,065	0,065
Bornhuetter-Ferguson	-0,348	0,063	0,063
Benktander	-0,222	0,065	0,065

7 lentelė: $IBNR$ vertinimo metodų palyginimas

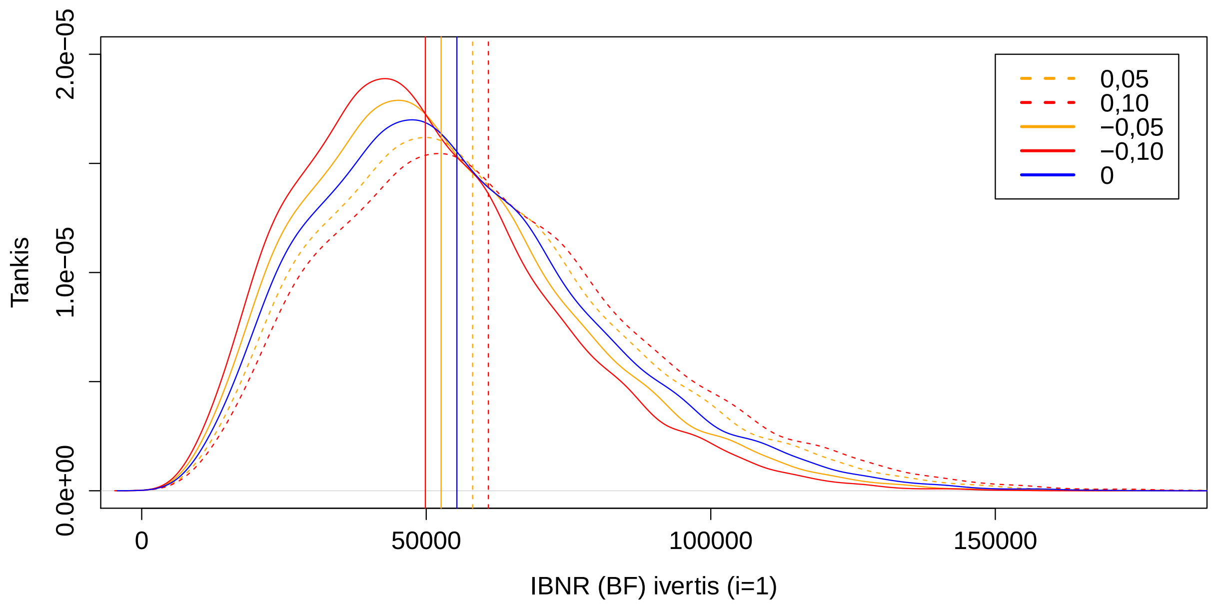
2.2.4 Chain Ladder prieš Bornhuetter-Ferguson

Iš praeitame skyrelyje pateiktų rezultatų galėtume daryti išvadą, jog Bornhuetter-Ferguson metodas duoda geresnius rezultatus nei Chain Ladder metodas ne tik bendru atveju, bet ir kiekvienais įvykio metais atskirai. Tačiau nereikia pamiršti stiprios prielaidos, kurią padarėme Bornhuetter-Ferguson įvertiniui. Teigėme, jog asmuo skaičiuojantis rezervus žino žalų portfelio pasiskirstymą ir pasirenka $\widehat{U}_i^{BF} = \mathbf{E}(U_i)$, šis parametras buvo apskaičiuotas ir laikomas konstanta taikant Bornhuatter-Ferguson įvertinį. Kaip matėme, toks parametro pasirinkimas duoda gerus rezultatus (nepaslinktumą ir galima būtų tikėtis minimalų vidutinį kvadratinį nuokrypį).

Bendru atveju, draudikui tikras $\mathbf{E}(U_i)$ nėra žinomas, įdomu panagrinėti, kas atsitiktų jeigu parametras būtų pervertintas ar nepakankamai įvertintas. Šiame skyrelyje atsisakysime prielaidos apie vidurkio žinojimą ir nagrinėsime Bornhuetter-Ferguson įvertinio elgseną esant nuokrypiams pastarajame parametre. Remsimės skyriuje 1.3 aprašyta Bornhuetter-



4 pav.: BF įvertinių tankiai skirtingiems a_4

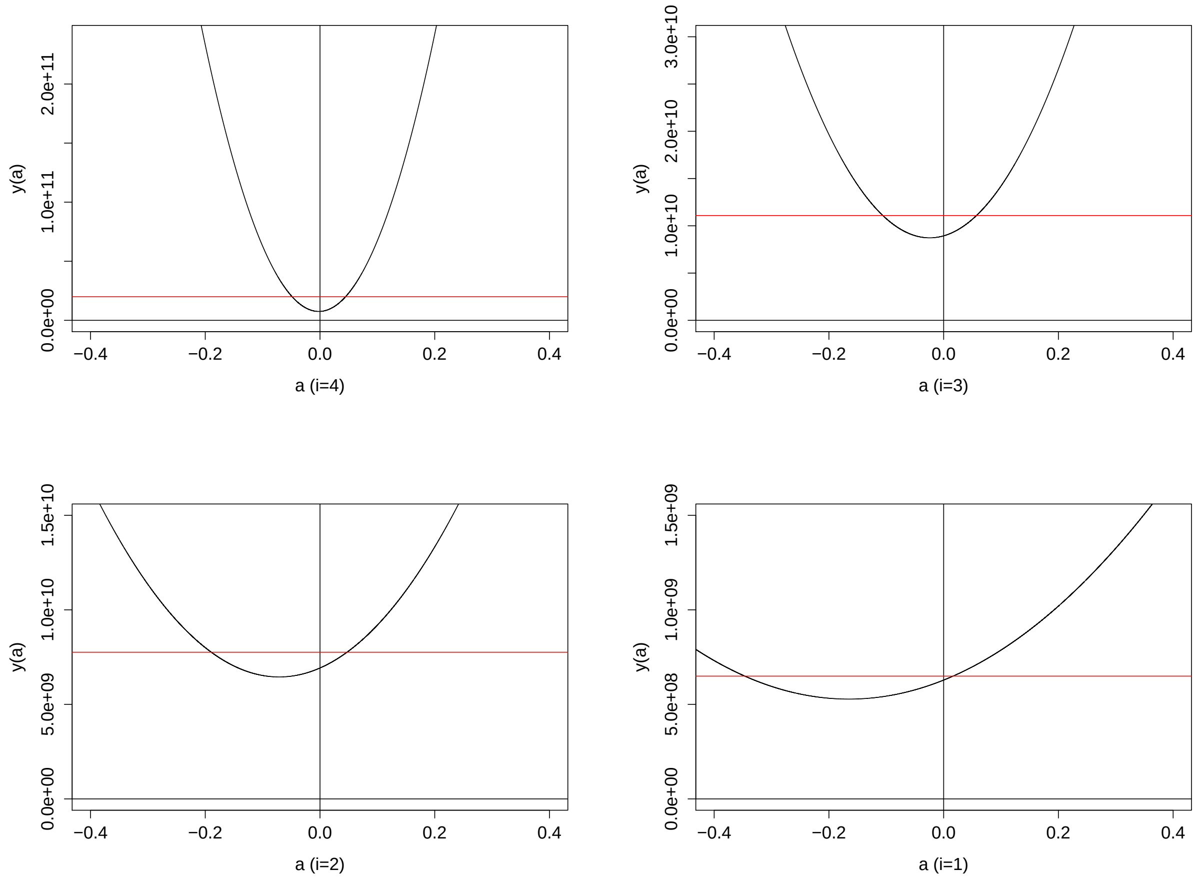


5 pav.: BF įvertinių tankiai skirtingiems a_1

Ferguson įvertinio savybe (7).

$$\widehat{IBNR}_i^{BF*} = (1 + a_i)\,\widehat{IBNR}_i^{BF} \quad i = 1, ..., 4.$$

čia įvertinyje $\widehat{IBNR}_i^{BF}$ naudojamas parametras $\widehat{U}_i^{BF}$, o įvertinyje $\widehat{IBNR}_i^{BF*}$ naudojamas $(1 + a_i)\left(\widehat{U}_i^{BF}\right)$. Tarkime, kad paliekama prielaida kaip ir anksčiau $\widehat{U}_i^{BF} = \mathbf{E}(U_i)$. Pateikiami



7 pav.: Funkcijos $y(a_i)$ grafikai skirtingiems i

grafikai (4 pav. ir 5 pav.), kuriuose matosi kaip pasikeičia Bornhuetter-Ferguson įvertinio tankio funkcijų grafikai su $a_i = -0,1; -0,05; 0,05; 0,1$. Pateikiami grafikai, kai $i = 4$ ir $i = 1$, likusius du grafikus su $i = 2$ ir $i = 3$ galite rasti darbo prieduose.

Akivaizdu, kad netikslumai $\widehat{U}_i^{BF}$ vertinime turi stiprią įtaką Bornhuetter-Ferguon įverčių tankiams. Pervertinus parametrą, proporciškai pervertinimui didėja poslinkis į dešinę pusę bei mažėja įvertinio stabilumas. Atsiradus tendencijai nepakankamai įvertinti parametrą, atsiranda poslinkis į neigiamą pusę, bet didėja stabilumas. Po tokių pastebėjimų norisi tiksliau ištirti įvertinių tikslumo elgseną esant parametro $\widehat{U}_i^{BF}$ nuokrypiams nuo $\mathbf{E}(U_i)$. Apibrėžkime funkciją:

$$y\left(a_i\right) = MSE_i^{BF*}(a_i) = Var\left(\left(1+a_i\right)\widehat{IBNR}_i^{BF}\right) + \left(\overline{\left(1+a_i\right)\widehat{IBNR}_i^{BF}} - BE_i\right)^2 \qquad (11)$$

Paveikslėlyje (7 pav.) pateikiame pastarosios funkcijos grafikus intervaluose $a_i \in [-0,4; 0,4]$, taip pat y ašyje atidedame Chain Ladder įverčių MSE_i^{CL}, $i = 1, ..., 4$, nes pastarieji nepriklauso nuo prieš modeliavimą padarytų prielaidų ir yra kostantos. Grafikai yra parobolės pavidalo, todėl mus domina funkcijų susikirtimo taškai su MSE_i^{CL}, nes sužinome, kokia procentine dalimi nuvertinus ar pervertinus $\mathbf{E}(U_i)$, MSE_i^{BF*} tampa didesniu už MSE_i^{CL}. Pirmas faktas, kurį pastebime iš grafikų, yra tai, jog Bornhuetter-Ferguson metodas, esant didesniam žalų išsivystimui tampa vis jautresnis $\mathbf{E}(U_i)$ pervertinimui ir mažiau jautrus pastarojo parametro nuvertinimui. Ypač, kai $i = 1$ - vienas iš sankirtos taškų yra labai artimas nuliui, kas reiškia, kad nors kiek pervertinus parametrą $\mathbf{E}(U_i)$, Chain Ladder metodas tampa tikslesniu už Bornhuetter-Ferguson metodą, ko, kaip akivaizdu nebūtų galima pasakyti apie parametro nuvertinimą. Taip pat įdomus pastebėjimas yra tai, kad atvejais $i = 1$, $i = 2$ ir $i = 3$, parametras $\mathbf{E}(U_i)$ neduoda minimalaus vidutinio kvadratinio nuokrypio, taigi šio taško ieškojimas irgi gana įdomi užduotis, tačiau apie tai šiame darbe nekalbama.

Taigi, sprendžiame lygtis $y\left(a_i\right) = MSE_i^{CL}$. Kadangi funkcija taškinė, lentelėje (8) pateikiami apytiksliai lygties sprendiniai.

	$a_{i,1}$	$a_{i,2}$
$i = 4$	-0.04846	0,04449
$i = 3$	-0,10597	0,05718
$i = 2$	-0,18951	0,04709
$i = 1$	-0,34656	0,01638

8 lentelė: lygties $y\left(a_i\right) = MSE_i^{CL}$ sprendiniai

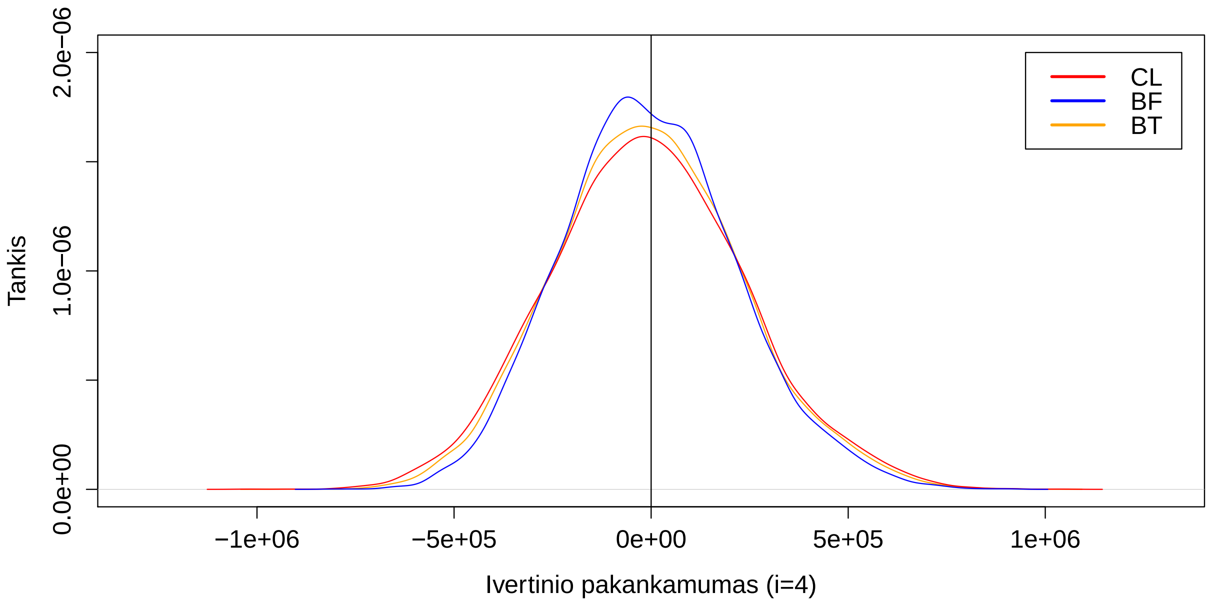
iš lentelėje pateiktų sprendinių išplaukia kad

$$\begin{aligned}
MSE_4^{BF*}(a_4) &< MSE_4^{CL}, \quad a_4 \in \left(-0,04846; 0,04449\right), \\
MSE_3^{BF*}(a_3) &< MSE_3^{CL}, \quad a_3 \in \left(-0,10597; 0,05718\right), \\
MSE_2^{BF*}(a_2) &< MSE_2^{CL}, \quad a_2 \in \left(-0,18951; 0,04709\right), \\
MSE_1^{BF*}(a_1) &< MSE_1^{CL}, \quad a_1 \in \left(-0,34656; 0,01638\right).
\end{aligned}$$

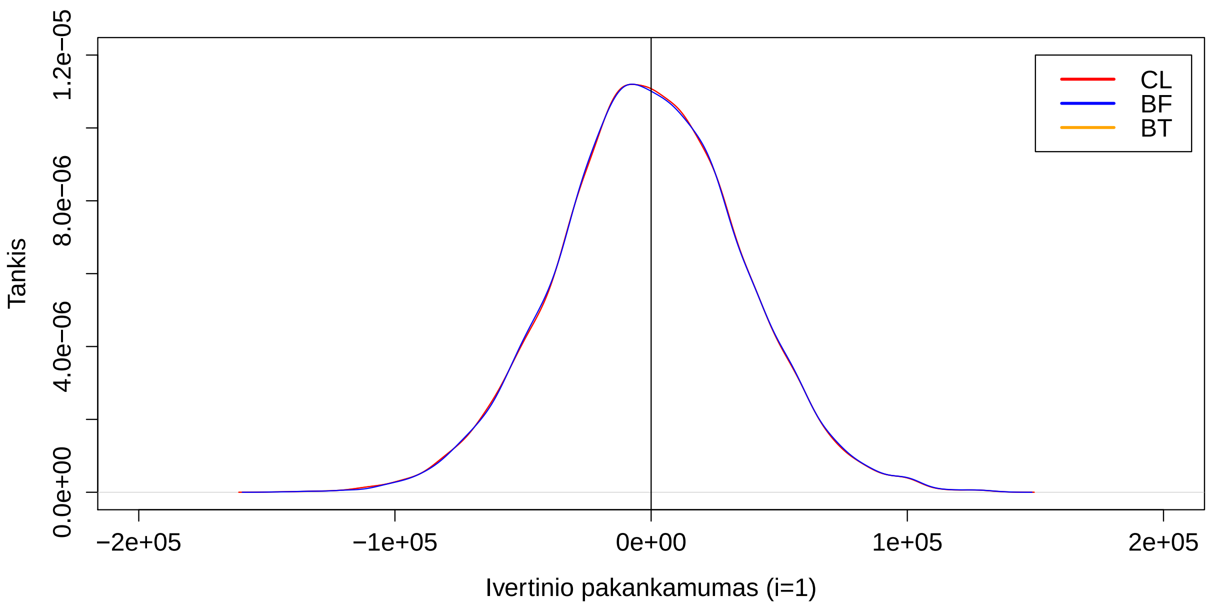
Taigi, jeigu procentinė dalis, kuria vertinant $\widehat{U}_i^{BF}$ yra nukrypstama nuo $\mathbf{E}(U_i)$ nepakliūna į anksčiau apibrėžtus intervalus, Chain Ladder įvertinys tampa tikslesniu už Bornhuetter-Ferguson įvertinį. Kaip buvo minėta skyrelyje 1.3, vertinant $\widehat{U}_i^{BF}$ labai dažnai yra naudojamas Chain Ladder metodas, jis taikomas atskirai žalų vienetams ir vidutinėms žaloms vertinti, taip prieinant prie $\widehat{U}_i^{BF}$. Kaip jau matėme, Chain Ladder yra labai nestabilus metodas, todėl galime kalbėti tik apie pakliuvimą į intervalus su tam tikra tikimybe. Sugebėjimas įvertinti šias tikimybes yra svarbi užduotis norint pasirinkti tikslesnį vertinimo metodą (galbūt net skirtingą metodą atskiriems įvykio metams). Šiame darbe pastarųjų tikimybių vertinimas neatliekamas, nes nedisponuojama reikiamais duomenimis.

2.2.5 IBNR įvertinių pakankamumo pasiskirstymas

Prisiminkime, kad taikydami Monte Karlo metodą, kiekviename žingsnyje pagal (10) formules apskičiavome dydžius $\widehat{IBNR}_i^{CLdif}$, $\widehat{IBNR}_i^{BFdif}$ ir $\widehat{IBNR}_i^{GBdif}$, $i = 1, ...4$, kuriuos pavadinome klasikinių $IBNR$ įvertinių pakankamumu. Turėdami Monte Karlo realizacijas galime iš karto nubrėžti pastarųjų dydžių empyrinius tankius. Kaip ir ankstesniuose sky-

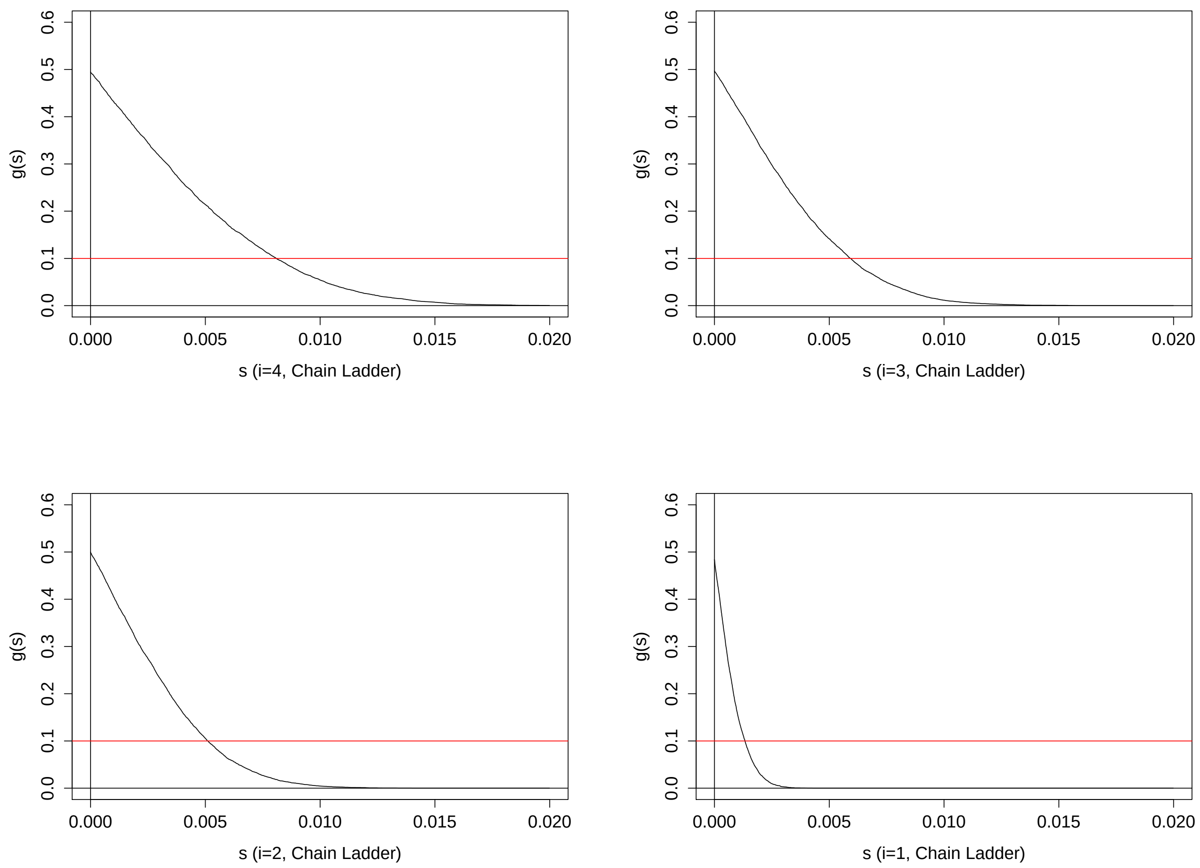


8 pav.: IBNR įverčių pakankamumo tankio funkcija (2014 įvykio metai)



9 pav.: IBNR įverčių pakankamumo tankio funkcija (2011 įvykio metai)

reliuose pateiksime atvejus kai $i = 4$ (8 pav.) ir $i = 1$ (9 pav.), likę du grafikai pateikiami



11 pav.: Funkcijos $g(s_i)$ grafikai skirtingiems i

prieduose.

Gebėjimas sukonstruoti tokį pasiskirstymą turėtų buti viena iš labiausiai, už rezervavimą atsakingą aktuarą, dominančių užduočių. Ilgus metus draudimo priežiūros institucijos iš draudimo įmonių reikalavo atidėjinių pakankamumo. Aukščiau pateikti grafikai rodo su kokia tikimybe formuojami rezervai gali būti nepakankami. Disponuojant tokia informacija galima formuoti tam tikrus papildomus rezervų nepakankamumo rizikos priedus, kurie galėtų pastarąją tikimybę sumažinti. Čia pateiksime vieną pavyzdį. Apibrėškime funkcijas

$$g^{CL}(s_i) = P\left(\widehat{IBNR}_i^{CLdif} + s_i EP_i < 0\right),$$
$$g^{BF}(s_i) = P\left(\widehat{IBNR}_i^{BFdif} + s_i EP_i < 0\right),$$
$$g^{GB}(s_i) = P\left(\widehat{IBNR}_i^{GBdif} + s_i EP_i < 0\right),$$

čia EP_i žymi per apskaitos metus i uždirbtas įmokas (Lietuvos Banko statistika pateikiama prieduose), $i = 1, ..., 4$, o $\widehat{IBNR}_i^{CLdif}$, $\widehat{IBNR}_i^{BFdif}$ ir $\widehat{IBNR}_i^{GBdif}$ apibrėžiami lygybėmis (10). Ši funkcija rodo kiek tam tikras procentas s nuo uždirbtų įmokų, atidėtas kaip papildomas atidėjinys, įtakoja atidėjinių sudarytų naudojant tam tikrą klasikinį rezervavimo metodą nepakankamumo tikimybę. Manipuliuodami dydžiu s galime apriboti nepakankamumo tikimybę iki norimos reikšmės. Iš turimų duomenų galime nubrėžti pastarųjų funkcijų grafikus. Kadangi jų yra 12, pateiksime tik Chain Ladder atvejį (11 pav.), kitus grafikus galite rasti darbo prieduose.

Tarkime, nusprendžiama apriboti įvertinių nepakankamumo tikimybę 10%, tuomet grafikuose atvaizduotos raudonos linijos ir funkcijos $g^{CL}(s_i)$ susikirtimo taškas ant s_i ašies rodo, kokią procentinę dalį uždirbtų i-aisiais apskaitos metais įmokų reikėtų atidėti kaip papildomą rezervą norint užtikrinti 10% nepakankamumo tikimybę. Funkcijų pavidalas yra natūraliai suprantamas, kuo žalos labiau išsivysčiusios (tai yra kuo mažesnis i), tuo mažesnės dalies nuo uždirbtų įmokų reikia, norint apriboti nepakankamumo tikimybę. Įdomus faktas, kurį galima įžvelgti iš grafikų yra tai, kad yra įmanoma apriboti atidėjinių nepakankamumą artima 0 tikimybe ir tam pakanka apie 15% nuo uždirbtų įmokų, kai $i = 4$, apie 10%, kai $i = 3$ ir $i = 2$, ir tik apie 3% nuo uždirbtų įmokų, kai $i = 1$.

Išvados

Įsigaliojus „Mokumas II“ direktyvai ir pasikeitus draudimo įmonės techninių atidėjinių struktūrai, pastarųjų įmonių aktuarinės funkcijos susidurs su dideliu iššukiu vertindamos išmokų rezervo geriausią įvertį. Atvirkščiai nei iki „Mokumas II“, dabar iš draudimo įmonių bus reikalaujama ne vertinimo pakankamumo o vertinimo tikslumo. Kaip parodyta darbe pakankamumą rezervų vertinime yra pakankamai lengva užtikrinti sudarant papildomus nepakankamumo rizikos priedus.

Deja, su tikslumu yra visai kita situacija. Iš tiesų, mūsų modeliuotam žalų portfeliui klasikinių rezervavimo metodų įvertiniai generuoja nepaslinktus įverčius, tačiau matomas ypatingai didelis metodų nestabilumas, ypač naujesniais įvykio metais. Net parodžius tokias įvertinių savybes, jie vistiek bus taikomi praktikoje daugumoje įmonių, nes neegzistuoja tvirtos alternatyvos. Esant šiai problemai, didelis dėmesys turėtu būti skiriamas tikslesnio vertinimo metodo pasirinkimui. Taip susiklostė, jog dažniausiai renkamasi tarp Chain Ladder ir Bornhuetter-Ferguson metodų, o Bornhuetter-Ferguson metodas populiarumu lenkia Chain Ladder metodą.

Kaip parodyta darbe, lyginant pastaruosius du metodus ir naudojant vidutinę kvadratinę paklaidą kaip tikslumo matą, galima parodyti tikimybinę priklausomybę lyginant metodų tikslumą. Praktikoje labai dažnai pasirenkamas Bornhuetter-Ferguson metodas dėl galimybės manipuliuoti jo parametrais. Parodėme, kad toks požiūris gali būti labai ydingas nepilnai suprantant pasirenkamų parametrų tikimybinį pasiskirstymą, ypač naujesniais įvykio metais.

Darbas gali būti plėtojamas keliomis kryptimis. Įdomi dalis čia tyrinėto modelio yra uodegos faktorius modelio pasiskirstyme, kuris nebuvo tirtas. Taip pat siūlytina tirti $\widehat{U}_i^{BF}$ parametro pasiskirstymą, jeigu pastarojo parametro vertinimas atliekamas Chain Ladder metodu. Taip pat būtų įdomu pamėginti modeliuoti žalų vystimosi portfelį naudojant tolydžius pasiskirstymus. Galų gale, būtų įdomus kokios nors kitos nei TPVCAD draudimo rūšies žalų portfelio tyrimas, nes gali būti, jog čia tyrinėtas modelis atitinka visus Chain Ladder metodo keliamus reikalavimus žalų pasiskirstymui.

Literatūra

[**1**] Thomas Mack. Credible Claims Reserves: the Benktander Method. *ASTIN Bulletin*, 30(2):333-347, 2000.

[**2**] Thomas Mack. Distribution-free Calculation of the Standard Error of Chain Ladder Reserve Estimates. *ASTIN Bulletin*, 23(2):213-225, 1993.

[**3**] Thomas Mack. The Standard Error of Chain Ladder Reserve Estimates: Recursive Calculation and Inclusion of a Tail Factor. *ASTIN Bulletin*, 29(2):361-366, 1999.

[**4**] Thomas Mack. Parameter Estimation for Bornhuetter/Ferguson. *2006 CAS Fall Forum*, 141-157, 2006.

[**5**] Thomas Mack. Measuring the Variability of Chain Ladder Reserve Estimates. *1994 CAS Spring Forum, Vol. 1*, 101-182, 1994.

[**6**] R. L. Bornhuetter and R. E. Ferguson. The Actuary And IBNR. *PCAS*, 181-195, 1972.

[**7**] G. Benktander. An Approach to Credibility in Calculating IBNR for Casualty Excess Reinsurance. In *The Actuarial Review*, p.7, 1976.

[**8**] A Technical Specification for the Preparatory Phase Part I: `https://eiopa.europa.eu/Publications/Standards/A_-_Technical_Specification_for_the_Preparatory_Phase__Part_I_disclaimer.pdf`

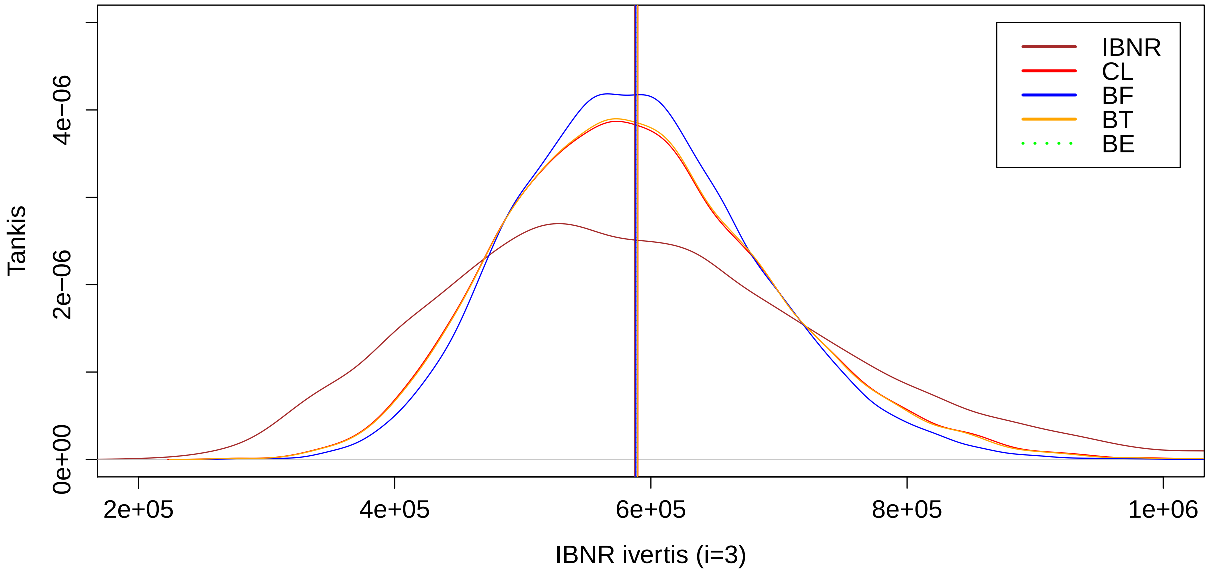
[**9**] Solvency II Preparatory Phase Risk-Free Interest Rate Term Structures: `https://eiopa.europa.eu/regulation-supervision/insurance/solvency-ii-technical-information/solvency-ii-preparatory-phase-risk-free-interest-rate-term-structures`

Priedai

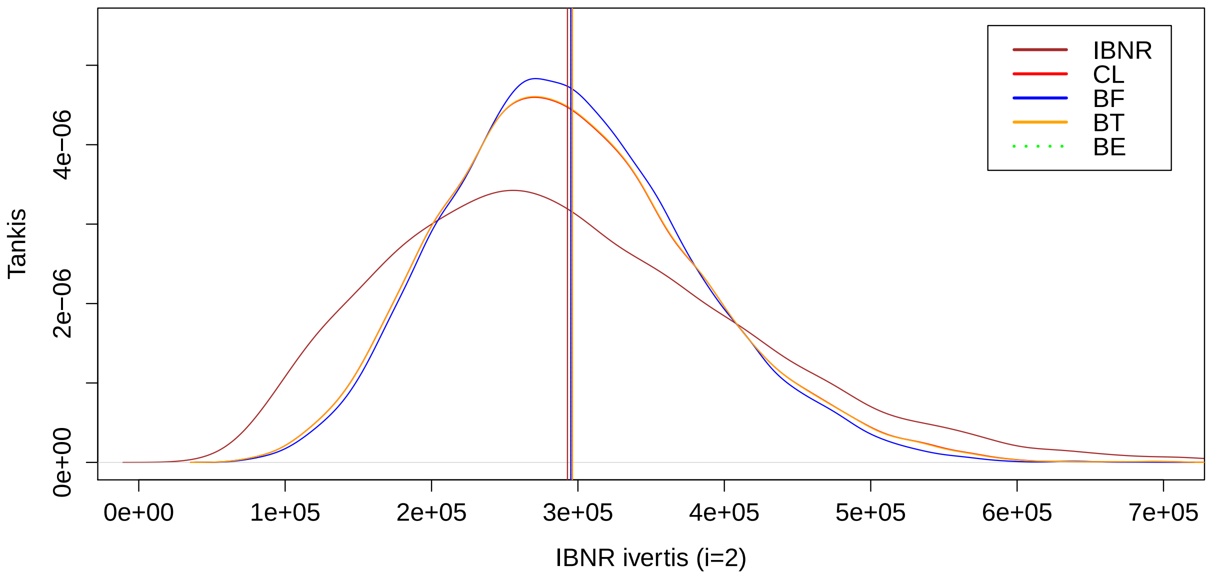
Priedai pateikiami elektroninėje laikmenoje

Modeliavimui naudoti duomenys, R programos kodas (su komentarais, *.R* ir *.txt* formatu), Lietuvos Banko statistika apie galiojusį svertinį draudimo sutarčių skaičių.

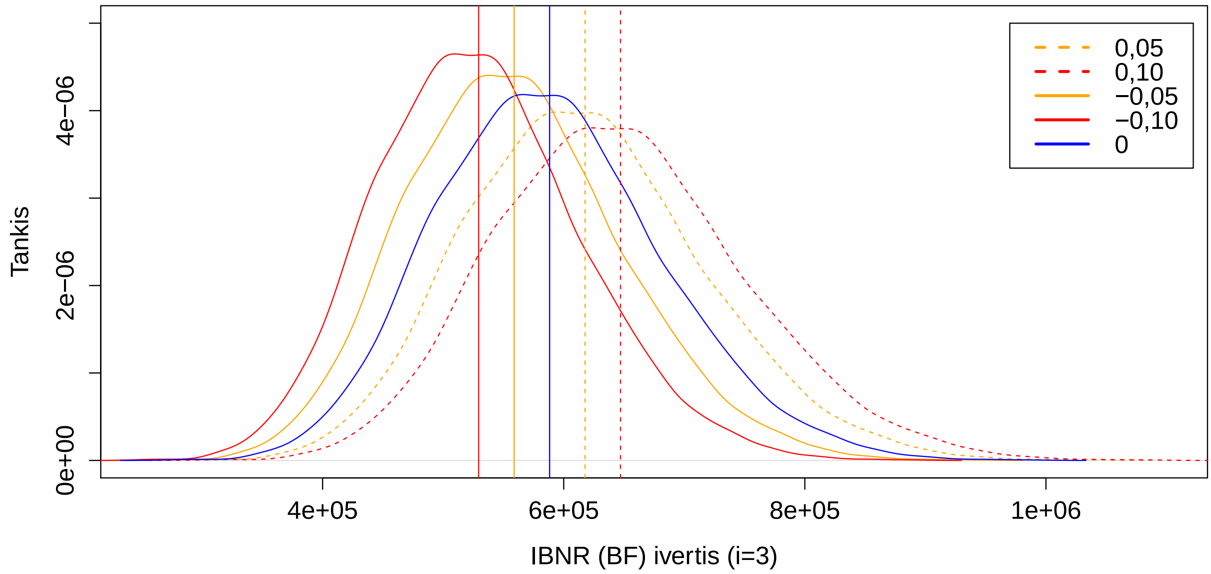
Grafikai



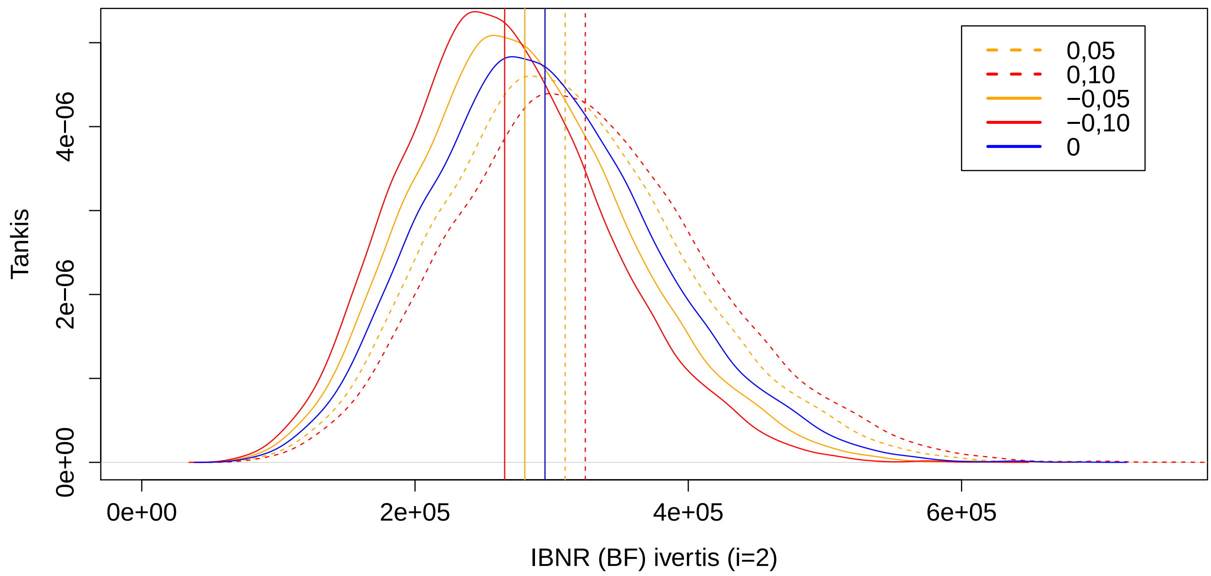
12 pav.: Klasikinių įvertinių tankių grafikai 2013 įvykio metams



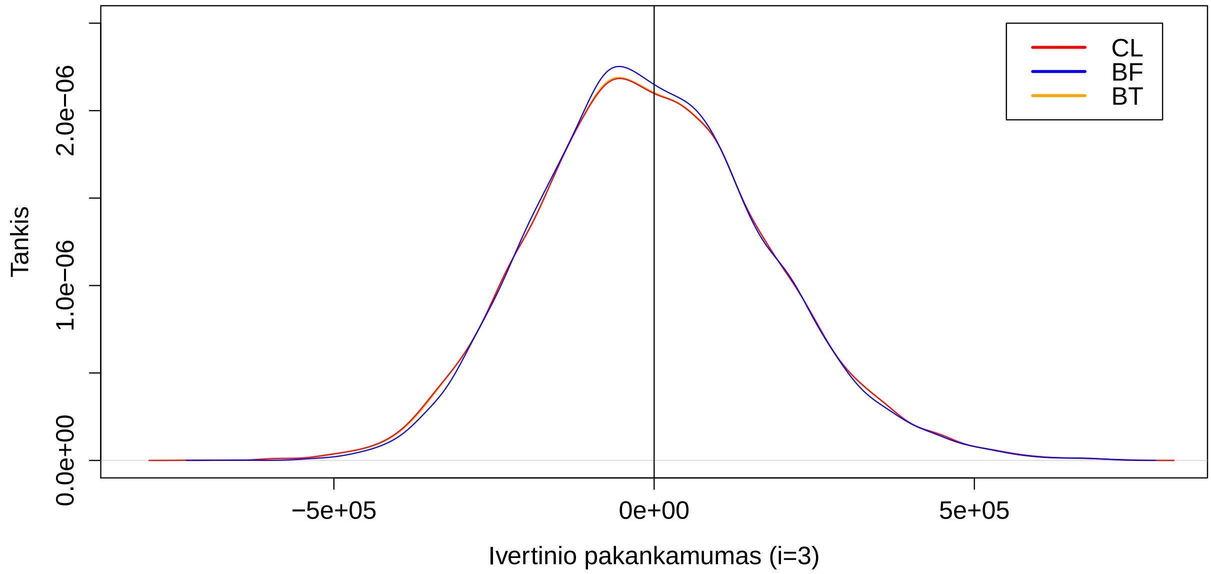
13 pav.: Klasikinių įvertinių tankių grafikai 2012 įvykio metams



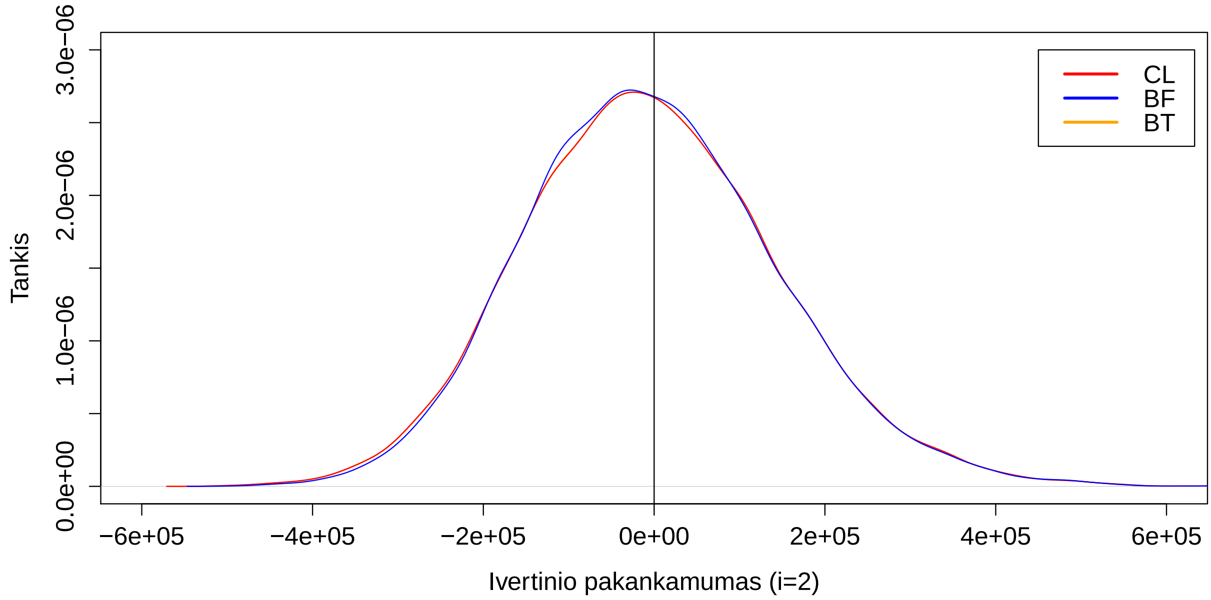
14 pav.: BF įvertinių tankiai skirtingiems a_3



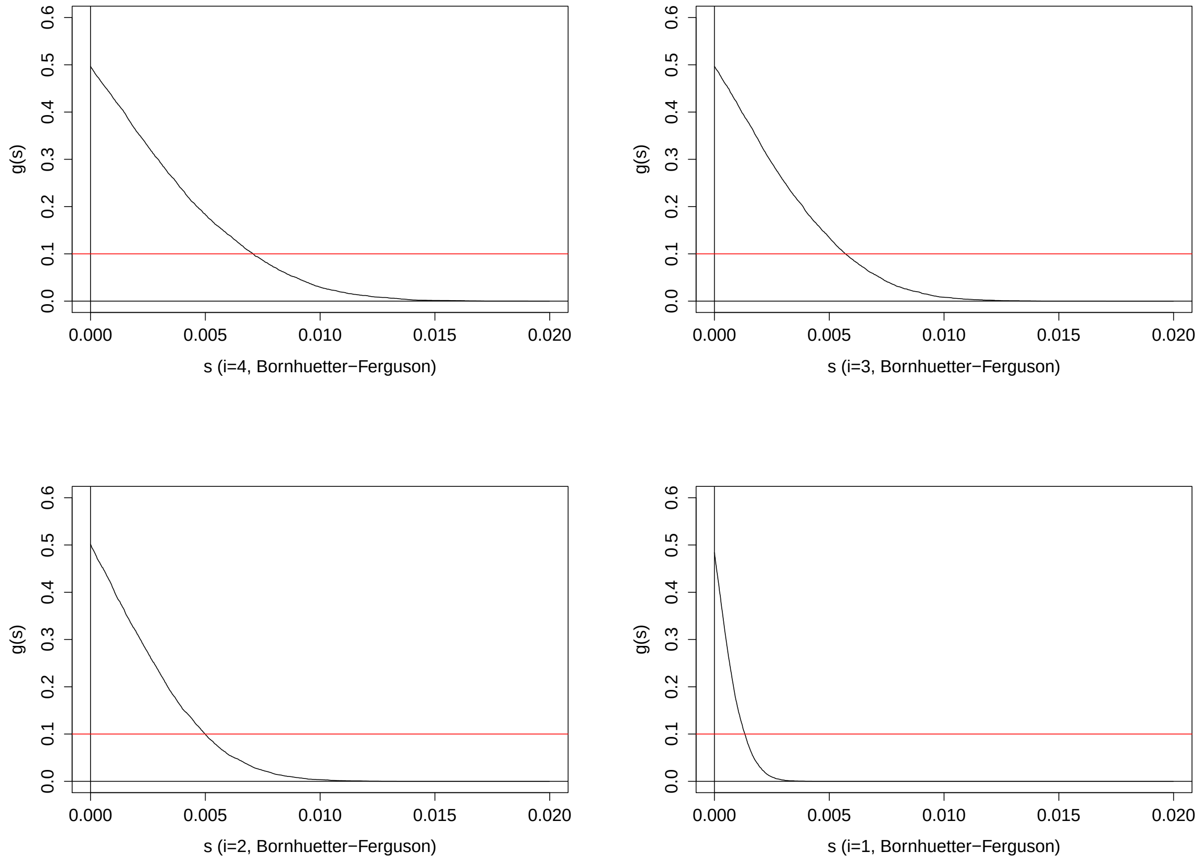
15 pav.: BF įvertinių tankiai skirtingiems a_2



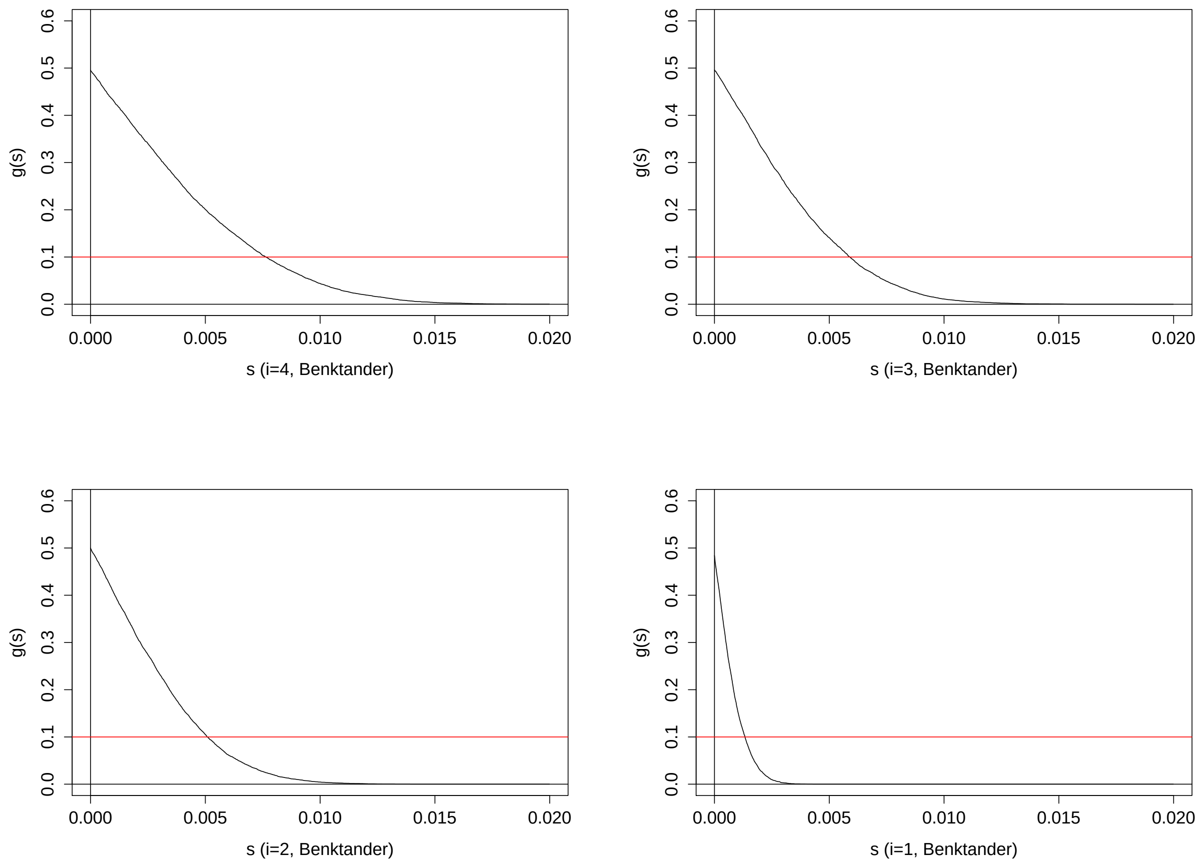
16 pav.: IBNR įverčių pakankamumo tankio funkcija (2013 įvykio metai)



17 pav.: IBNR įverčių pakankamumo tankio funkcija (2012 įvykio metai)



19 pav.: Funkcijos $g(s_i)$ grafikai skirtingiems i (Bornhuetter-Ferguson atvejis)



21 pav.: Funkcijos $g(s_i)$ grafikai skirtingiems i (Benktander atvejis)