VILNIAUS UNIVERSITETAS

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

**MAGISTRO DARBAS**

# Bankroto tikimybė sudėtiniame nehomogeniniame diskretaus laiko rizikos atstatymo modelyje

## Ruin Probability for Inhomogeneous Compound Discrete-Time Renewal Risk model

Almina Čegytė

VILNIUS 2016

**MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS**
**MATEMATINĖS ANALIZĖS KATEDRA**

Darbo vadovas prof. Jonas Šiaulys
Darbo recenzentas prof. Vigirdas Mackevičius

Darbas apgintas 2016 m. sausio 14 d.
Darbas įvertintas ________________

Registravimo Nr. ________________
2016-01-04 _______________________

# Bankroto tikimybė sudėtiniame nehomogeniniame diskretaus laiko rizikos atstatymo modelyje


**Santrauka**

Pirmoje darbo dalyje nagrinėjame sąlygas, kurių reikia, kad atsiktinės atsitiktinių dydžių sumos $\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_\eta$ skirstinys priklausytų klasei $\mathscr{L} \cap \mathscr{D}$. Čia $\{\xi_1, \xi_2, \ldots\}$ yra nepriklausomų, tačiau nebūtinai vienodai pasiskirsčiusių neneigiamų atsitiktinių dydžių (a.d.) seka, o $\eta$ yra sveikareikšmis, neneigiamas, nulyje neišsigimęs ir nepriklausomas nuo $\{\xi_1, \xi_2, \ldots\}$ a.d.

Antrojoje darbo dalyje suformavę reikiamas sąlygas, konstruojame baigtinio laiko bankroto tikimybės asimptotinę formulę sudėtiniam nehomogeniniam diskretaus laiko rizikos atstatymo modeliui, užrašomam formule:

$$\hat{U}(t) = u + ct - \sum_{k=1}^{t} \sum_{i=1}^{\eta_k} {\xi_i}^{(k)}, t \in \mathbb{N}$$

čia $u \geq 0$ aprašo pradinį turtą, $c > 0$ įmokų gavimo greitį. A.d. seka $\left\{\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)}, \ldots\right\}_{k=1}^{\infty}$ nusako žalų dydį momentu $k$. $\left\{\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)}, \ldots\right\}_{k=1}^{\infty}$ yra nepriklausomos a.d. sekos $\{\xi_1, \xi_2, \ldots\}$ kopijos su pasiskirstymo funkcijomis $\{F_{\xi_1}, F_{\xi_2}, \ldots\}$. Sveikareikšmis, neneigiamas ir nulyje neišsigimęs a.d. $\eta_k$ yra žalų skaičius laikotarpiu $(k-1, k]$, kurio pasiskirstymo funkcija $F_\eta$. Be to, laikome, kad a.d. $\eta_1, \eta_2, \ldots$ ir $\xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}, \ldots, \xi_1^{(2)}, \xi_2^{(2)} \ldots$ yra nepriklausomi.

Galiausiai gautą asimptotinę formulę pritaikome konkretesniam modeliui, kuomet a.d. $\eta$ turi baigtinę atramą ir $F_{\xi_i}$ priklauso klasei $\mathscr{L} \cap \mathscr{D}$ bet kuriam $i = 1, 2, \ldots$



*Raktiniai žodžiai:* bankroto tikimybė, asimptotinė formulė, rizikos atstatymo modelis, nevienodai pasiskirsčiusios žalos, atsitiktinė sąsuka, sunkiauodegiai skirstiniai, nehomogeninis modelis, klasė $\mathscr{L}$, klasė $\mathscr{D}$, baigtinė atrama

# Ruin Probability for Inhomogeneous Compound Discrete-Time Renewal Risk model

**Abstract**

In the beginning of the master thesis, the conditions are considered under which distribution of random sum $\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_\eta$ belongs to the class $\mathscr{L}\cap\mathscr{D}$. Here $\{\xi_1,\xi_2,\ldots\}$ is a sequence of independent but not necessarily identically distributed non-negative random variables (r.v), while $\eta$ is non-negative, non-degenerate at zero, integer valued and independent of $\{\xi_1,\xi_2,\ldots\}$ r.v.

In the second part of the thesis, after all necessary conditions are analyzed, the asymptotic formula is considered for the finite time ruin probability for Inhomogeneous Compound Discrete-Time Renewal Risk model. Such model is defined by the formula:

$$\hat{U}(t)=u+ct-\sum_{k=1}^{t}\sum_{i=1}^{\eta_k}\xi_i{}^{(k)}, t\in\mathbb{N}$$

where $u\geq 0$ is initial risk reserve, o $c>0$ premium intensity. A sequence of r.v. $\left\{\xi_1^{(k)},\xi_2^{(k)},\ldots\right\}_{k=1}^{\infty}$ describes claims sizes at moment $k$. We suppose that $\left\{\xi_1^{(k)},\xi_2^{(k)},\ldots\right\}_{k=1}^{\infty}$ are copies of independent sequence of r.v. $\{\xi_1,\xi_2,\ldots\}$ with distribution functions $\{F_{\xi_1},F_{\xi_2},\ldots\}$. Non-negative, non-degenerate at zero and integer-valued r.v. $\eta_k$ is the number of claims within time interval $(k-1,k]$ with distribution function $F_\eta$. In addition, we suppose that r.v. $\eta_1,\eta_2,\ldots$ and $\xi_1^{(1)},\xi_2^{(1)},\ldots,\xi_1^{(2)},\xi_2^{(2)}\ldots$ are independent.

Finally, we apply obtained asymptotic formula for more specific risk renewal model, where r.v. $\eta$ has a bounded support and $F_{\xi_i}$ belong to class $\mathscr{L}\cap\mathscr{D}$ for each $i=1,2,\ldots$

*Keywords:* ruin probability, asymptotic formula, risk renewal model, not identically distributed claims, random convolution, long tailed distributions, inhomogeneous model, class $\mathscr{L}$, class $\mathscr{D}$, bounded support

# Turinys


**1 Įvadas** **4**

**2 Apibrėžimai** **7**

**3 Pagrindiniai rezultatai** **9**
3.1 Priklausymas klasei $\mathscr{D}$ . . . 9
3.2 Priklausymas klasei $\mathscr{L}$ . . . 12
3.3 Priklausymas klasei $\mathscr{L} \cap \mathscr{D}$ . . . 15
3.4 Bankroto tikimybės asimptotika . . . 17
3.4.1 Asimptotika, kai $\eta$ turi baigtinę atramą, o $F_{\xi_i} \in \mathscr{L} \cap \mathscr{D}$, $i = 1, 2, \ldots$ . . . 18

**4 Pavyzdžiai** **21**

**5 Išvados ir rekomendacijos** **26**

**6 Literatūra** **27**

**A Priedai** **28**
A.1 1 pavyzdžio kodas . . . 28
A.2 2 pavyzdžio kodas . . . 29

# 1 Įvadas

Kalbant apie rizikos atstatymo modelius, visų pirma reiktų pradėti nuo pačio paprasčiausiojo - diskretaus laiko rizikos modelio (1.1), kuris aprašo kaip draudiko kapitalas $U$ kinta bėgant laikui diskrečiais momentais:

$$U(n) = u + ct - S(n), \qquad S(n) = \sum_{i=1}^{n} Z_i \tag{1.1}$$

$c$ čia žymi premijų/įmokų surinkimo greitį per vieną laiko vienetą, o $u$ yra pradinis kapitalas. Modeliui taikomi tokie apribojimai:

- turtas pradiniu laiko momentu u=U(0) yra neneigiamas sveikasis skaičius t.y. $u \in 0 \cup \mathbb{N}$
- žalos $\{Z_1, Z_2, Z_3 \ldots\}$ yra nepriklausomos neneigiamo sveikareikšmio a.d. $Z$ kopijos.

Diskretaus laiko rizikos modelis aprašo draudiko kapitalo kitimą vien tik diskrečiais laiko momentais. Tuo tarpu klasikinis rizikos modelis (1.2) nusako draudiko kapitalo dydį bet kokiu laiko momentu. Kintamųjų $u$ ir $c$ reikšmės išlieka tokios pačios, tačiau be pagrindinių apribojimų atsiranda naujų:

- $N(t)$ yra žalų skaičius intervale $[0, t]$. Laikoma, kad $N$ yra homogeninis Puasono procesas su tam tikru teigiamu intensyvumu $\lambda$
- Procesas $N$ ir atsitiktinių dydžių seka $\{Z_1, Z_2, Z_3 \ldots\}$ yra nepriklausomi.

$$U(t) = u + ct - S(t), \qquad S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i, \quad t > 0 \tag{1.2}$$

Klasikinis rizikos modelis taip pat yra tam tikras realaus gyvenimo supaprastinimas. Modelyje neįvertinamas pajamų atsitiktinumas ir kapitalo investavimo galimybės. Be to, žalų skaičius $N(t)$ laiko intervale $[0, t]$ yra homogeninis Puasono procesas su tam tikru teigiamu intensyvumu $\lambda$. Tai gaunama tada ir tik tada, kai laiko tarpai tarp žalų yra nepriklausomi ir eksponentiškai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai. Toks apribojimas laiko tarpams klasikinį rizikos modelį daro sunkiai pritaikomą realioms draudimo veikloms aprašyti. 1957 metais E. Sparre Andersen pasiūlė laikyti, kad laiko tarpai tarp žalų yra nepriklausomi, vienodai pasiskirstę, teigiamas reikšmes įgyjantys, atsitiktiniai dydžiai. Tokiu būdu modelis tapo lengviau pritaikomu realioms trumpalaikio draudimo veiklos rūšims aprašyti. Naujasis patobulintas rizikos modelis paprastai vadinamas rizikos atstatymo modeliu arba E. Sparre Andersen modeliu:

$$U(t) = u + ct - S(t), \qquad S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i, \quad t > 0 \tag{1.3}$$

Laikoma, kad (1.4) formulėje aprašytas $N(t)$ yra skaičiuojantis atstatymo procesas nepriklausomoms kažkokio neneigiamo, neišsigimusio taške 0, atsitiktinio dydžio $\theta$ kopijoms $\{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots\}$, t.y.

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n \leq t\}} \tag{1.4}$$

Atsitiktinis dydis $\theta_1$ žymi pirmosios žalos pasirodymo laiką, o atsitiktiniai dydžiai $\theta_i, i \geq 2$ nusako laiko tarpą tarp (i-1)-osios ir i-osios žalos. Šiame modelyje taip pat laikoma, kad dydžių sekos $\{\theta_1, \theta_2, \theta_3 \ldots\}$ ir $\{Z_1, Z_2, Z_3 \ldots\}$ yra tarp savęs nepriklausomos.

Šiame darbe nagrinėjame kiek sudėtingesnį ir realybei artimesnį rizikos atstatymo modelį. Tarkime, kad kiekviena žala $\xi_k$ yra akumuliuota ir sudaryta iš daugelio smulkesnių nepriklausomų žalų, įvykusių k-ajame laiko intervale $(k-1,k]$, kurių atsitiktinį kiekį pažymime $\eta_k$. Tokia situacija pakankamai artima draudimo kompanijų praktikoje, kuomet per vieną dieną įvyksta neviena žala. Kiekviena tokio modelio žala turi pavidalą:

$$\sum_{i=1}^{\eta_k} \xi_i^{(k)} \tag{1.5}$$

Tarkime $\left\{\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)}, \dots\right\}_{k=1}^{\infty}$ žalų dydžiai momentu $k$. $\left\{\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)}, \dots\right\}_{k=1}^{\infty}$ yra nepriklausomos a.d. sekos $\{\xi_1, \xi_2, \dots\}$ kopijos su pasiskirstymo f-omis $\{F_{\xi_1}, F_{\xi_2}, \dots\}$. Neneigiamas, nulyje neišsigimęs, sveikareikšmis a.d. $\eta_k$ - žalų skaičius laikotarpiu $(k-1,k]$, kurio pasiskirstymo f-ja $F_\eta$. Be to, a.d. $\eta_1, \eta_2, \dots$ ir $\xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}, \dots, \xi_1^{(2)}, \xi_2^{(2)} \dots$ yra nepriklausomi. Esant tokioms prielaidoms, gauname sudėtinį nehomogeninį diskretaus laiko rizikos atstatymo modelį. Pagal šį modelį draudiko kapitalas $\hat{U}(t)$ kinta pagal formulę:

$$\hat{U}(t) = u + ct - \sum_{k=1}^{t} \sum_{i=1}^{\eta_k} {\xi_i}^{(k)}, \quad t \in \mathbb{N} \tag{1.6}$$

kur $u \geq 0$, kaip ir anksčiau, pradinis turtas, o $c > 0$ įmokų gavimo greitis.

Vertinant kapitalo kitimą laike neretai bandoma atsakyti kiek šis dydis pakankamas ar kokia bankroto tikimybė 5, 10, 15, ir t.t. metų laikotarpyje. Į antrąjį klausimą padeda atsakyti baigtinio laiko bankroto tikimybė. Ši tikimybė diskrečiam rizikos modeliui (1.1) aprašoma šitaip:

$$\psi(u,T) = \mathbb{P}\left(\min_{t\in\{1,2,\dots T\}} U(t) \leq 0 | U(0) = u\right) = \mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq T} \sum_{j=1}^{k} (Z_j - c) \geq u\right) \tag{1.7}$$

Šiame darbe nagrinėjamo modelio (1.6) baigtinio laiko bankroto tikimybę $\hat{\psi}(u,T)$, galime užrašyti šitaip:

$$\hat{\psi}(u,T) = \mathbb{P}\left(\min_{t\in\{1,2,\dots T\}} \hat{U}(t) \leq 0 | \hat{U}(0) = u\right) = \mathbb{P}\left(\max_{1\leq t\leq T} \sum_{j=1}^{t} \left(\sum_{i=1}^{\eta_j} \xi_i^{(j)} - c\right) \geq u\right) \tag{1.8}$$

Baigtinio laiko bankroto tikimybė analitiškai gali būtų suskaičiuota nedaugeliui skirtingų žalų skirstinių. Daugeliu atvejų jos reikšmė randama tiesiogiai taikant Monte Karlo simuliacijų metodą, tačiau tai užima pakankamai nemažai laiko. Dėl šios priežasties iš ties svarbus uždavinys rasti tinkamą aproksimacinę formulę šiai tikimybei įvertinti.

Leipaus ir Šiaulio straipsnyje "Finite-horizon ruin probability asymptotics in the compound discrete-time risk model" (žiūrėti [11] šaltinį) nagrinėjamas (1.6) pavidalo sudėtinis homogeninis diskretaus laiko rizikos atstatymo modelis, kuriame žalos $\{\xi_1, \xi_2, \dots\}$ yra nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę a.d. su pasiskirstymo funkcija $F_\xi$. Minėtame straipsnyje autoriai remdamiesi Korshunov lema (žiūrėti 8 lemą 3.4. skyrelyje) ir tuo, kad atsiktinė žalų suma $F_{S_\eta}$ priklauso klasei $\mathscr{S}_*$ (žiūrėti 8 apibrežimą antrame skyrelyje) aproksimuoja baigtinio laiko bankroto tikimybę (1.8) suformuluodami tokią teoremą:.

### 1 Teorema

*Tarkime, nagrinėjame sudėtinį homogeninį diskretaus laiko rizikos atstatymo modelį (aprašytą* (1.6) *lygybėje). Laikykime, kad* $\left\{\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)}, \dots\right\}_{k=1}^{\infty}$ *žalų dydžiai momentu* $k$. $\left\{\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)}, \dots\right\}_{k=1}^{\infty}$ *yra nepriklausomos a.d. sekos* $\{\xi_1, \xi_2, \dots\}$ *kopijos, kur* $\xi_i$, $i = 1, 2, \dots$ *nepriklausomi vienodai pasiskirstę a.d. su pasiskirstymo f-ija* $F_\xi$ *ir baigtiniu vidurkiu* $\beta = \mathbb{E}\xi$. *Neneigiamas, nulyje neišsigimęs, sveikareikšmis a.d.* $\eta_k$ *- žalų skaičius laikotarpiu* $(k-1,k]$, *kurio pasiskirstymo f-ja* $F_\eta$ *ir baigtinis* *teigiamas vidurkis $\nu = \mathbb{E}\eta$. Be to, a.d. $\eta_1, \eta_2, \dots$ ir $\xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}, \dots, \xi_1^{(2)}, \xi_2^{(2)} \dots$ yra nepriklausomi. Jeigu $c - \nu\beta = \mu > 0$, $F_\xi \in \mathscr{S}_*$ ir $\overline{F}_\eta(\frac{x}{b}) = o(\overline{F_\xi}(x))$ kažkokiam $b > \beta$, tai*

$$\hat{\psi}(u, T) \sim \frac{\nu}{\mu} \int_u^{u+T\mu} \overline{F}_\xi(x)dx \tag{1.9}$$

*tolygiai visiems $T \in \mathbb{N}$*

Ši teorema galioja sudėtiniam homogeniniam diskretaus laiko rizikos atstatymo modeliui, kuomet žalos $\{\xi_1, \xi_2, \dots\}$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę a.d. Pagrindinis šiame darbe išsikeltas tikslas - gauti analogišką teoremą, nagrinėjant sudėtinį nehomogeninį diskretaus laiko rizikos atstatymo modelį, tokį, kuriame žalos yra nepriklausomi, tačiau nebūtinai vienodai pasiskirstę a.d. Nagrinėsime kiek siauresnę skirstinių klasę $\mathscr{L} \cap \mathscr{D} \subset \mathscr{S}^*$ (žiūrėti 9 apibrėžimą antrame skyrelyje), kurios uždarumą atsitiktinės sąsukos homogeniniu atveju 2012 m. [12] straipsnyje aprašė Šiaulys ir Leipus. Šiame darbe, rasime sąlygas, kurias $\{F_{\xi_1}, F_{\xi_2}, \dots\}$ ir $F_\eta$ turėtų tenkinti, kad $F_{S_\eta}(x)$ priklausytų klasei $\mathscr{L} \cap \mathscr{D}$.

Šis darbas pradedamas išvardinant pagrindines naudojamas sąvokas ir apibrėžimus. Toliau pereinama prie pagrindinių rezultatų: 3.1. skyriuje atskirai nagrinėjama skirstinių klasė $\mathscr{D}$, 3.2. - klasė $\mathscr{L}$. Galiausiai gauti rezultatai apibendrinami 3.3. skyrelyje, kuriame surandamos reikalingos sąlygos klasės $\mathscr{L} \cap \mathscr{D}$ uždarumui atsitiktinės sąsūkos atžvilgiu. 3.4 skyrelyje pateikiamas pagrindinis šio darbo rezultatas - 12 teorema. Kitame skyriuje demostruojamas išvestosios teoremos pritaikymas konkretiems pavyzdžiams. Paskutinėje darbo dalyje pateikiamos darbo išvados ir rekomendacijos.

## 2 Apibrėžimai

**1 Apibrėžimas.** Pasiskirstymo funkcijos uodega vadinama funkcija $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$, kur $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$.

**2 Apibrėžimas.** Sakoma, kad a.d. $X$ skirstinys, kurio pasiskirstymo funkcija apibrėžta intervale $[0, \infty)$ turi sunkią uodegą ($F \in \mathscr{H}$), jei $\forall$ fiksuotam $\delta > 0$,

$$\lim_{x \to \infty} \mathbb{P}(X > x)e^{\delta x} = \infty.$$

**3 Apibrėžimas.** Sakoma, kad a.d. $X$ skirstinys turi reguliariai kintančią uodegą ($F \in \mathscr{R}$) (*angl. Regular Variation*), jei

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} = y^{-\alpha}$$

kokiam nors $\alpha \geq 0$ ir bet kuriam $y > 0$

**4 Apibrėžimas.** Sakoma, kad a.d. $X$ skirstinys turi ilgą uodegą ($F \in \mathscr{L}$), jei $\forall$ fiksuotam $y > 0$,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(x)} = 1.$$

**5 Apibrėžimas.** Sakoma, kad a.d. $X$ skirstinys turi dominuojančio kintamumo uodegą ($F \in \mathscr{D}$) (*angl. dominated-varying tail*), jei $\forall$ fiksuotam $y \in (0, 1)$,

$$\limsup_{x \to \infty} \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} < \infty.$$

*Pastaba.* Pasiskirstymo funkcija $F \in \mathscr{D}$ tada ir tik tada, jei viršutinis Matuszewska indeksas

$$J_F^+ = -\lim_{y \to \infty} \frac{1}{\log y} \log \lim_{x \to \infty} \inf \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} < \infty. \tag{2.1}$$

**6 Apibrėžimas.** Tarkime, kad $F$ ir $G$ yra dvi pasiskirstymo funkcijos, tuomet funkcija

$$H(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(z - x)dG(x),$$

žymima $H = F * G$, vadinama funkcijų $F$ ir $G$ sąsuka.

*Pastaba.* A. N. Shiryaev knygoje "Probabily" ([15] knyga, 241-244 psl.) parodė, kad naudodami sąsukas galime rasti nepriklausomų a.d. sumos pasiskirstymo funkciją t.y.

$$\mathbb{P}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n \leq x) = F_{X_1} * F_{X_2} * \ldots * F_{X_n}(x)$$

**7 Apibrėžimas.** Sakoma, kad a.d. $X$ pasiskirtymo funkcija $F$, apibrėžta intervale $[0, \infty)$, yra subeksponentinė ($F \in \mathscr{S}$), jei

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\overline{F * F(x)}}{\overline{F}(x)} = 2.$$

Klüppelberg (žiūrėti [5] šaltinyje) aprašė stipriai subeksponentinių skirstinių klasę. Pažymėkime ją $\mathscr{S}_*$.

**8 Apibrėžimas.** Sakoma, kad a.d. $X$ pasiskirtymo funkcija $F$, apibrėžta intervale $[0, \infty)$ priklauso klasei $\mathscr{S}_*$, jei $F$ turi baigtinį vidurkį $\mu$ ir

$$\lim_{x \to \infty} \int_0^x \frac{\overline{F}(x - y)}{\overline{F}(x)} \overline{F}(y)dy = 2\mu$$

Vėliau Korshunov [6] straipsnyje aprašė kiek kitokią stipriai subeksponentinių skirstinių klasę:

**9 Apibrėžimas.** Tarkime $F$ apibrėžta visoje realiųjų skaičių tiesėje su baigtiniu vidurkiu. Tuomet bet kuriam $t > 0$ apibrėžkime funkciją $F_t \in \mathbb{R}^+$, kurios pasiskirstymo f-ija yra

$$\overline{F_t}(x) = \min\left(1, \int_x^{x+t} \overline{F}(u)du\right), \quad x > 0$$

Tuomet, sakoma, kad $F$ yra stipriai subeksponentinė, žymima $F \in \mathscr{S}^*$, jeigu

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F_t * F_t}(x)}{\overline{F_t}(x)} = 2$$

tolygiai, kai $t \in [1, \infty)$.

**10 Apibrėžimas.** A.d. $X$ Levy koncentracijos funkcija $Q(X, \lambda)$, vadinama funkcija, apibrėžiama lygybe:

$$Q(X, \lambda) = \sup_x \mathbb{P}(x \le X \le x + \lambda) \tag{2.2}$$

$\forall\lambda \ge 0$. Akivaizdu, kad $Q(X, \lambda)$ yra $\lambda$ atžvilgiu nemažėjanti funkcija, tenkinanti nelygybę:

$$0 \le Q(X, \lambda) \le 1, \quad \forall\lambda > 0$$

**11 Apibrėžimas.** Monte Karlo metodas *(angl. Monte Carlo (MC))* - kompiuterinis skaičiavimo metodas, kuriame uždaviniui spręsti naudojamas atsitiktinių skaičių generatorius. Šis metodas pagrįstas statistiniu modeliavimu ir gautų rezultatų apdorojimu statistiniais metodais.

# 3 Pagrindiniai rezultatai

Nagrinėsime neneigiamus nepriklausomus atsitiktinius dydžius (a.d) $\{\xi_1, \xi_2, \ldots\}$, kurių pasiskirstymo funkcijos atitinkamai yra $\{F_{\xi_1}, F_{\xi_2}, \ldots\}$ ir $\eta$ neneigiamas, nulyje neišsigimęs, sveikareikšmis a.d. nepriklausomas nuo $\{\xi_1, \xi_2, \ldots\}$. Pažymėkime $S_0 = 0$, $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n, n \geq 0$. ir $S_\eta = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_\eta$. Pagrindinis dėmesys bus skiriamas atsiktinės sumos $S_\eta$ pasiskirstymo funkcijai $F_{S_\eta}$. Aišku, kad

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_\eta \leq x) &= \mathbb{P}(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_\eta \leq x) \\
&= \mathbb{P}(\eta = 1)\mathbb{P}(\xi_1 \leq x) + \mathbb{P}(\eta = 2)\mathbb{P}(\xi_1 + \xi_2 \leq x) + \ldots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(\eta = n)\mathbb{P}(S_n \leq x) \qquad (3.1) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(\eta = n) F_{\xi_1} * F_{\xi_2} * \ldots * F_{\xi_n}(x)
\end{aligned}$$

Šiaulio ir Leipaus [11] darbe įrodyta teorema (žr. 1 teoremą pirmajame skyrelyje) galioja, kuomet atsitiktinės žalos yra vienodai pasiskirstę ir jų pasiskirstymo funkcija priklauso klasei $\mathscr{S}_*$. Šiame darbe nagrinėsime klasę $\mathscr{L} \cap \mathscr{D}$, kurią pasirinkome remiantis daugeliui gerai žinomu ir nagrinėtu (žiūrėti [14] psl. 39-53, [5], [2], [4] šaltiniuose) tokiu ilgauodegių skirstinių, turinčių baigtinius vidurkius, tarpusavio sąryšiu

$$\mathscr{R} \subset \mathscr{L} \cap \mathscr{D} \subset \mathscr{S}_* \subset \mathscr{S}^* \subset \mathscr{S} \subset \mathscr{L} \qquad (3.2)$$

Šiuo sąryšiu taip pat remiasi ir [11] straipsnio autoriai. Toliau darbe ieškosime kokių sąlygų reikia klasės $\mathscr{L}$ ir $\mathscr{D}$ uždarumui atsitiktinės sąsukos atžvilgiu t.y. kada atsitiktinė žalų sumos pasiskirstymo funkcija $F_{S_\eta}$ priklauso klasei $\mathscr{L} \cap \mathscr{D} \subset \mathscr{S}_*$.

## 3.1 Priklausymas klasei $\mathscr{D}$

Bingham, Goldie ir Teugels [8] knygoje "Regular Variation" (žr. 2.2.1 teiginį) įrodė žemiau suformuotą lemą:

**1 Lema.** *Tarkime $F \in \mathscr{D}$ ir $p > J_F^+$, tuomet $\exists\ c_1, c_2 > 0$:*

$$\frac{\overline{F}(u)}{\overline{F}(v)} \leq c_1 \left(\frac{v}{u}\right)^p, \qquad v \geq u \geq c_2$$

*Be to,*

$$u^{-p} = o(\overline{F}(u)), \qquad \forall p > J^+_{F_{\xi_\kappa}}$$

Žemiau pateiktos lema ir teorema paimtos iš Šiaulio ir Danilenko rankraščio "Randomly stopped sums of not identically distributed heavy tailed random variables" (žr. [13] 4.2 lema).

**2 Lema.** *Tarkime yra tenkinamos šios žemiau išvardintos prielaidos:*

- $\{\xi_1, \xi_2, \ldots\}$ *neneigiami nepriklausomi a.d., kurių pasiskirstymo f-jos atitinkamai yra* $\{F_{\xi_1}, F_{\xi_2}, \ldots\}$
- $F_{\xi_\kappa} \in \mathscr{D}$, *kažkuriam* $\kappa \geq 1$.
- $\limsup\limits_{x\to\infty} \sup\limits_{n \geq \kappa} \frac{1}{n\overline{F_{\xi_\kappa}}(x)} \sum_{i=1}^{n} \overline{F_{\xi_i}}(x) < \infty$

*Tuomet* $\forall p > J^+_{F_{\xi_\kappa}}\ \exists\ \hat{c}_3 > 0$ :

$$\frac{\overline{F_{\xi_1} * F_{\xi_2} * \ldots * F_{\xi_n}}(x)}{\overline{F_{\xi_\kappa}}(x)} \leq \hat{c}_3 n^{p+1}$$

$\forall n \geq \kappa$ *ir* $x \geq 0$

*Įrodymas.* Tarkime $n \geq \kappa$ ir $x \geq 0$. Tuomet

$$\mathbb{P}(S_n > x) = \mathbb{P}(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n > x)$$

Jeigu $\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n > x$, tai $\exists$ koks nors $\xi_i > \frac{x}{n}$. Priešingu atveju, jeigu $\xi_i \leq \frac{x}{n}$ $\forall$ $i$ nelygybė negaliotų - gautume $\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n \leq x$. Taigi,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n > x) &\leq \mathbb{P}\left(\exists i \in \{1, 2, \ldots, n\} : \xi_i > \frac{x}{n}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} \left\{\xi_i > \frac{x}{n}\right\}\right) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(\xi_i > \frac{x}{n}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \overline{F_{\xi_i}}\left(\frac{x}{n}\right)
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Dėl trečios lemos sąlygos $\exists$ konstantos $c_3$ ir $c_4$:

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{F_{\xi_i}}(x) \leq c_4 n \overline{F_{\xi_\kappa}}(x),$$

jeigu $x \geq c_3$. Todėl pratęsiant (3.3), gauname, kad

$$\mathbb{P}(S_n > x) \leq c_4 n \overline{F_{\xi_\kappa}}\left(\frac{x}{n}\right), \tag{3.4}$$

jeigu $x \geq c_3 n$.
Kadangi $F_{\xi_\kappa} \in \mathscr{D}$ pagal 1 lemą $\exists$ $c_5, c_6$:

$$\frac{\overline{F_{\xi_\kappa}}(u)}{\overline{F_{\xi_\kappa}}(v)} \leq c_5 \left(\frac{v}{u}\right)^p, \qquad \textit{kai} \quad v \geq u \geq c_6. \tag{3.5}$$

Apjungus (3.4) ir (3.5) nelygybes galiausiai gauname:

$$\frac{\mathbb{P}(S_n > x)}{\overline{F_{\xi_\kappa}}(x)} \leq c_4 n \frac{\overline{F_{\xi_\kappa}}(\frac{x}{n})}{\overline{F_{\xi_\kappa}}(x)} \leq c_4 c_5 n^{p+1}, \tag{3.6}$$

$\forall x \geq c_7 n$, kur $c_7 = \max\{c_3, c_6\}$.
Priešingu atveju, jeigu $0 \leq x \leq c_7 n$:

$$\frac{\mathbb{P}(S_n > x)}{\overline{F_{\xi_\kappa}}(x)} \leq \frac{1}{\overline{F_{\xi_\kappa}}(x)} \leq \frac{1}{\overline{F_{\xi_\kappa}}(c_7 n)} = \frac{\overline{F_{\xi_\kappa}}(c_7)}{\overline{F_{\xi_\kappa}}(c_7 n)} \frac{1}{\overline{F_{\xi_\kappa}}(c_7)} \leq c_5 n^p \frac{1}{\overline{F_{\xi_\kappa}}(c_7)} \tag{3.7}$$

čia pritaikėme (3.5) nelygybę , nes $c_7 n \geq c_7 \geq c_6$.
Galiausiai iš (3.6) ir (3.7) nelygybių gauname, kad

$$\frac{\overline{F_{\xi_1} * F_{\xi_2} * \ldots * F_{\xi_n}}(x)}{\overline{F_{\xi_\kappa}(x)}} = \frac{\mathbb{P}(S_n > x)}{\overline{F_{\xi_\kappa}}(x)} \leq \max\left\{c_4 c_5, \frac{c_5}{\overline{F_{\xi_\kappa}}(c_7)}\right\} n^{p+1}, \qquad \forall x \geq 0.$$

□

**3 Teorema.** *Tarkime $\{\xi_1, \xi_2, \ldots\}$ yra neneigiami ir nepriklausomi atsiktiniai dydžiai (a.d.), kurių pasiskirstymo funkcijos yra $\{F_{\xi_1}, F_{\xi_2} \ldots\}$. A.d $\eta$ yra nepriklausomas nuo $\{\xi_1, \xi_2, \ldots\}$, sveikareikšmis, neneigiamas ir neišsigimęs nulyje, kurio atrama $supp(\eta) = \{n \in \mathbb{N}_0 : \mathbb{P}(\eta = n) > 0\}$. Tuomet a.d. sumos pasiskirstymo funkcija $F_{S_\eta} \in \mathscr{D}$, jei tenkinamos šios sąlygos:*

*(a)* $F_{\xi_\kappa} \in \mathscr{D}$ *kažkuriam* $\kappa \in$ *supp*$(\eta) \setminus \{0\}$

*(b)* $\limsup\limits_{x\to\infty} \sup\limits_{n\geq\kappa} \frac{1}{n\overline{F_{\xi_\kappa}}(x)} \sum_{i=1}^{n} \overline{F_{\xi_i}}(x) < \infty$

*(c)* $\mathbb{E}\eta^{p+1} < \infty$ *kažkokiam* $p > J^{+}_{F_{\xi_\kappa}}$.

*Įrodymas.* Norėdami parodyti, kad $S_\eta \in \mathscr{D}$ pagal 5 apibrėžimą, užtenka parodyti, kad

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{F_{S_\eta}}(\frac{x}{2})}{\overline{F_{S_\eta}}(x)} = \limsup_{x\to\infty} \frac{\mathbb{P}(S_\eta > \frac{x}{2})}{\mathbb{P}(S_\eta > x)} < \infty \tag{3.8}$$

Tarkime $x > 0$, tuomet

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(S_\eta > \frac{x}{2}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(S_n > \frac{x}{2}\right)\mathbb{P}(\eta = n) \\
&= \sum_{n=1}^{\kappa} \mathbb{P}\left(S_n > \frac{x}{2}\right)\mathbb{P}(\eta = n) + \sum_{n=\kappa+1}^{\infty} \mathbb{P}\left(S_n > \frac{x}{2}\right)\mathbb{P}(\eta = n) \\
&\leq \mathbb{P}\left(S_\kappa > \frac{x}{2}\right)\mathbb{P}(\eta = \kappa) + \sum_{n=\kappa+1}^{\infty} \mathbb{P}\left(S_n > \frac{x}{2}\right)\mathbb{P}(\eta = n) \\
&\leq \mathbb{P}\left(S_\kappa > \frac{x}{2}\right) + \sum_{n=\kappa+1}^{\infty} \mathbb{P}\left(S_n > \frac{x}{2}\right)\mathbb{P}(\eta = n) \\
&\overset{Lema(2)}{\leq} c_3\kappa^{p+1}\overline{F_{\xi_\kappa}}\left(\frac{x}{2}\right) + \sum_{n=\kappa+1}^{\infty} c_3 n^{p+1}\overline{F_{\xi_\kappa}}\left(\frac{x}{2}\right)\mathbb{P}(\eta = n) \\
&= c_3\overline{F_{\xi_\kappa}}\left(\frac{x}{2}\right)\left(\kappa^{p+1} + \sum_{n=\kappa+1}^{\infty} n^{p+1}\mathbb{P}(\eta = n)\right) \\
&\leq c_3\overline{F_{\xi_\kappa}}\left(\frac{x}{2}\right)\left(\kappa^{p+1} + \mathbb{E}\eta^{p+1}\right),
\end{aligned} \tag{3.9}$$

$c_3 > 0$.

Dabar įvertinkime kitą tikimybę:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_\eta > x) &= \sum_{\substack{n=1 \\ n\in supp(\eta)}}^{\infty} \mathbb{P}(S_n > x)\mathbb{P}(n = \eta) \\
&\geq \mathbb{P}(S_\kappa > x)\mathbb{P}(n = \kappa) \\
&\geq \mathbb{P}(\xi_\kappa > x)\mathbb{P}(n = \kappa) \\
&= \overline{F_{\xi_\kappa}}(x)\mathbb{P}(n = \kappa) > 0
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Apjungę gautas (3.9) ir (3.10) nelygybes dėl a) ir c) teoremos sąlygų gauname, kad

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\mathbb{P}(S_\eta > \frac{x}{2})}{\mathbb{P}(S_\eta > x)} \leq \frac{c_3\left(\kappa^{p+1} + \mathbb{E}\eta^{p+1}\right)}{\mathbb{P}(n = \kappa)} \limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{F_{\xi_\kappa}}(\frac{x}{2})}{\overline{F_{\xi_\kappa}}(x)} < \infty \tag{3.11}$$

□

## 3.2 Priklausymas klasei $\mathscr{L}$

Šiame skyrelyje rasime sąlygas, kurioms esant skirtingai pasiskirsčiusių a.d. sumos pasiskirstymo funkcija priklauso klasei $\mathscr{L}$. Pirmoji šio skyrelio lema yra nehomogeninė Albino (žr. [1]) 2.1. lemos versija.

**4 Lema.** *Tarkime* $\{\xi_1, \xi_2, \ldots\}$ *neneigiami ir nepriklausomi a.d. su pasiskirstymo funkcijomis* $\{F_{\xi_1}, F_{\xi_2}, \ldots\}$. *Jeigu*

$$\sup_{x \geq d_3} \frac{\overline{F_{S_\kappa}}(x-1)}{\overline{F_{S_\kappa}}(x)} \leq 1+\epsilon$$

*ir*

$$\sup_{x \geq d_3} \sup_{k \geq \kappa} \frac{\overline{F_{\xi_k}}(x-1)}{\overline{F_{\xi_k}}(x)} \leq 1+\epsilon$$

*kažkokiam* $\epsilon > 0$ *ir* $d_3 > 1$, *tai* $\forall n \geq \kappa$, *galioja nelygybė*

$$\sup_{x \geq n(d_3-1)+1} \frac{\overline{F_{S_n}}(x-1)}{\overline{F_{S_n}}(x)} \leq 1+\epsilon$$

*Įrodymas.* Matome, kad, kai $n = \kappa$ lygybė teisinga. Tarkime, kad ji teisinga, kai $n = N, N \geq \kappa$. Parodysime, kad nelygybė teisinga ir tuo atveju, kai $n = N+1$.

Pažymėkime $H \coloneqq F_{S_N} = F_{\xi_1} * F_{\xi_2} * \ldots * F_{\xi_N}$. Naudodami integravimo dalimis formulę realiems $x$ ir $v$, taip pat remiantis (2.11) ir (2.12) Embrechts ir Goldie (žr. [9]) lygybėmis, gauname:

$$\overline{H * F_{\xi_{N+1}}}(x) = \int_{-\infty}^{x-v} \overline{H}(x-u)dF_{\xi_{N+1}}(u) + \overline{H}(v)\overline{F_{\xi_{N+1}}}(x-v) + \int_{-\infty}^{v} \overline{F_{\xi_{N+1}}}(x-u)dH(u).$$

Todėl, realiems $x$ ir $v$, turime

$$\begin{aligned}
\overline{H * F_{\xi_{N+1}}}(x-1) &= \int_{-\infty}^{x-v} \overline{H}(x-u-1)dF_{\xi_{N+1}}(u) + \overline{H}(v-1)\overline{F_{\xi_{N+1}}}(x-v) \\
&+ \int_{-\infty}^{v-1} \overline{F_{\xi_{N+1}}}(x-u-1)dH(u) \\
&= \int_{-\infty}^{x-v} \frac{\overline{H}(x-u-1)}{\overline{H}(x-u)}\overline{H}(x-u)dF_{\xi_{N+1}}(u) + \frac{\overline{H}(v-1)}{\overline{H}(v)}\overline{H}(v)\overline{F_{\xi_{N+1}}}(x-v) \\
&+ \int_{-\infty}^{v-1} \frac{\overline{F_{\xi_{N+1}}}(x-u-1)}{\overline{F_{\xi_{N+1}}}(x-u)}\overline{F_{\xi_{N+1}}}(x-u)dH(u) \\
&\leq \max\left\{\sup_{y \geq v} \frac{\overline{H}(y-1)}{\overline{H}(y)}, \sup_{y \geq x-v+1} \frac{\overline{F_{\xi_{N+1}}}(y-1)}{\overline{F_{\xi_{N+1}}}(y)}\right\} \times \left(\int_{-\infty}^{x-v} \overline{H}(x-u)dF_{\xi_{N+1}}(u)\right. \\
&+ \left.\overline{H}(v)\overline{F_{\xi_{N+1}}}(x-v) + \int_{-\infty}^{v} \overline{F_{\xi_{N+1}}}(x-u)dH(u)\right) \\
&= \max\left\{\sup_{y \geq v} \frac{\overline{H}(y-1)}{\overline{H}(y)}, \sup_{y \geq x-v+1} \frac{\overline{F_{\xi_{N+1}}}(y-1)}{\overline{F_{\xi_{N+1}}}(y)}\right\} \overline{H * F_{\xi_{N+1}}}(x)
\end{aligned}$$

Taigi, gavome, kad

$$\frac{\overline{H * F_{\xi_{N+1}}}(x-1)}{\overline{H * F_{\xi_{N+1}}}(x)} \leq \max\left\{\sup_{y \geq v} \frac{\overline{H}(y-1)}{\overline{H}(y)}, \sup_{y \geq x-v+1} \frac{\overline{F_{\xi_{N+1}}}(y-1)}{\overline{F_{\xi_{N+1}}}(y)}\right\}$$

Paskutinėje nelygybėje pasirinkę $v = \frac{Nx}{N+1} + \frac{1}{N+1}$, gauname:

$$
\begin{aligned}
&\sup_{x \geq (N+1)(d_3-1)+1} \frac{\overline{F_{\xi_1} * F_{\xi_2} * \ldots * F_{\xi_{N+1}}}(x-1)}{\overline{F_{\xi_1} * F_{\xi_2} * \ldots * F_{\xi_{N+1}}}(x)} \\
&\leq \max\left\{ \sup_{y \geq \frac{Nx}{N+1} + \frac{1}{N+1}} \frac{\overline{H}(y-1)}{\overline{H}(y)}, \sup_{y \geq x - \frac{xN}{N+1} - \frac{1}{N+1} + 1} \frac{\overline{F_{\xi_{N+1}}}(y-1)}{\overline{F_{\xi_{N+1}}}(y)} \right\} \\
&\leq \max\left\{ \sup_{y \geq \frac{Nx}{N+1} + \frac{1}{N+1}} \frac{\overline{H}(y-1)}{\overline{H}(y)}, \sup_{y \geq \frac{x}{N+1} + \frac{N}{N+1}} \frac{\overline{F_{\xi_{N+1}}}(y-1)}{\overline{F_{\xi_{N+1}}}(y)} \right\} \\
&\leq \max\left\{ \sup_{y \geq N(d_3-1)+1} \frac{\overline{H}(y-1)}{\overline{H}(y)}, \sup_{y \geq d_3} \frac{\overline{F_{\xi_{N+1}}}(y-1)}{\overline{F_{\xi_{N+1}}}(y)} \right\} \\
&\leq \max\left\{ \sup_{y \geq N(d_3-1)+1} \frac{\overline{H}(y-1)}{\overline{H}(y)}, \sup_{y \geq d_3} \frac{\overline{F_{\xi_{N+1}}}(y-1)}{\overline{F_{\xi_{N+1}}}(y)} \right\} \leq 1 + \epsilon
\end{aligned}
$$

Dėl lemos sąlygų tiek pirmasis, tiek antrasis nariai tenkina sąryšį. □

Xu, Foss ir Wang 2015 m. išleido straipsnį "Convolution and Convolution-Root Properties of Long-Tailed Distributions"[3], kuriame taip pat nagrinėja ilgauodegių skirstinių sąsukas klasėje $\mathscr{L}$. 2.1. Teoremoje (2) punkte, jie įrodė, tokį teiginį:

**5 Lema.** *Tarkime $\eta$ yra nepriklausomas skaičiuojantis atsitiktinis dydis su baigtine atrama $\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\eta = k) = 1$ ir $\mathbb{P}(\eta = n) > 0$, kažkuriam $n \geq 1$. Tuomet, $F_{S_\eta} \in \mathscr{L} \Longleftrightarrow F_{S_n} \in \mathscr{L}$*

Remiantis 4 ir 5 lemomis, galiausiai galime suformuluoti pagrindinę šio skyrelio teoremą:

**6 Teorema.** *Tarkime, kad $\{\xi_1, \xi_2 \ldots\}$ yra nepriklausomi, neneigiami, tačiau nebūtinai vienodai pasiskirstę a.d., kurių pasiskirstymo f-jos yra atitinkamai $\{F_{\xi_1}, F_{\xi_2} \ldots\}$, o $\mathbb{P}(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_\kappa \leq x) = \mathbb{P}(S_\kappa \leq x) \in \mathscr{L}$ kažkokiam $\kappa \in supp(\eta) \setminus \{0\}$. Taip pat tarkime, kad nulyje neišsigimęs a.d. $\eta$ nepriklausomas nuo $\{\xi_1, \xi_2, \ldots\}$ su pasiskirstymo f-ja $F_\eta$. Sakykime, be to, tenkinamos tokios sąlygos:*

1. $\sup_{k \geq \kappa} \sup_{x} \left( \overline{F_{\xi_k}}(x-1) - \overline{F_{\xi_k}}(x) \right) < 1$
2. $\lim_{x \to \infty} \sup_{k \geq \kappa} \sup \frac{\overline{F_{\xi_k}}(x-1)}{\overline{F_{\xi_k}}(x)} = 1$
3. $\overline{F_\eta}(\delta x) = o\left(\sqrt{x}\overline{F_{S_\kappa}}(x)\right)$, $\forall \delta \in (0,1)$, *kai* $x \to \infty$

*Tada atsitiktinės sumos pasiskirstymo funkcija $\mathbb{P}(\xi_1 + \xi_2 \ldots + \xi_\eta \leq x) = \mathbb{P}(S_\eta \leq x) \in \mathscr{L}$*

*Įrodymas.* Norėdami parodyti, kad $\mathbb{P}(S_\eta \leq x) = F_{S_\eta}(x) \in \mathscr{L}$ pagal $\mathscr{L}$ klasės apibrėžimą turime parodyti, kad $\forall \epsilon > 0$ ir pakankamai dideliems $x$.

$$\frac{\mathbb{P}(S_\eta > x - 1)}{\mathbb{P}(S_\eta > x)} \leq 1 + \epsilon,$$

Pradėkime nuo $\mathbb{P}(S_\eta > x - 1)$, pakankamai dideliems $x, x \geq K$, o $K$ parenkamas konkretus, tenkinantis sąlygą: $\sup_{x\geq K} \frac{\overline{F_{S_\kappa}}(x-1)}{\overline{F_{S_\kappa}}(x)} \leq 1+\epsilon$, turime:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_\eta > x-1) &= \mathbb{P}\left(S_\eta > x-1, \eta \leq \frac{x-1}{K-1}\right) + \mathbb{P}\left(S_\eta > x-1, \eta > \frac{x-1}{K-1}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(S_\eta > x-1, \eta \leq \frac{x-1}{K-1}\right) + \mathbb{P}\left(S_\eta > x-1, \eta > \frac{x-1}{K-1}\right) \\
&+ \mathbb{P}\left(S_\eta > x, \eta > \frac{x-1}{K-1}\right) - \mathbb{P}\left(S_\eta > x, \eta > \frac{x-1}{K-1}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(S_\eta > x-1, \eta \leq \frac{x-1}{K-1}\right) + \mathbb{P}\left(x-1 < S_\eta \leq x, \eta > \frac{x-1}{K-1}\right) + \mathbb{P}\left(S_\eta > x, \eta > \frac{x-1}{K-1}\right) \\
&= \left(\sum_{n\leq\kappa} + \sum_{\kappa<n\leq\frac{x-1}{K-1}}\right)\mathbb{P}(S_n > x-1)\mathbb{P}(\eta=n) + \sum_{n>\frac{x-1}{K-1}}\mathbb{P}(x-1<S_n\leq x)\mathbb{P}(\eta=n) \\
&+ \mathbb{P}\left(S_\eta > x, \eta > \frac{x-1}{K-1}\right) \\
&= \mathbb{P}(S_\eta > x-1, \eta \leq \kappa) + \sum_{\kappa<n\leq\frac{x-1}{K-1}}\mathbb{P}(S_n > x-1)\mathbb{P}(\eta=n) \\
&+ \sum_{n>\frac{x-1}{K-1}}\mathbb{P}(x-1<S_n\leq x)\mathbb{P}(\eta=n) + \mathbb{P}\left(S_\eta > x, \eta > \frac{x-1}{K-1}\right)
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

- Dėl 5 lemos pirmas dėmuo $\mathbb{P}(S_\eta > x-1, \eta \leq \kappa) \leq (1+\epsilon)\mathbb{P}(S_\eta > x, \eta \leq \kappa)$;

- Kadangi antrajame dėmenyje $x$ pakankamai dideli, $x \geq K$, pritaikius 4 lemą gauname, kad

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\kappa<n\leq\frac{x-1}{K-1}}\mathbb{P}(S_n > x-1)\mathbb{P}(\eta=n) \leq (1+\epsilon)\sum_{\kappa<n\leq\frac{x-1}{K-1}}\mathbb{P}(S_n > x)\mathbb{P}(\eta=n) \\
&= (1+\epsilon)\mathbb{P}\left(S_\eta > x, \kappa < \eta \leq \frac{x-1}{K-1}\right)
\end{aligned}
$$

- Trečiajame dėmenyje tikimybė $\sup_x \mathbb{P}(x-1 < S_n \leq x)$ žinoma kaip koncentracijos funkcija. Šiai funkcijai pritaikysime Kolmogorov Rogozin nelygybę (2.15 Teorema, (55) nelygybė knygoje [10]):

$$
\sup_x \mathbb{P}(x-1<S_n\leq x) \leq \frac{A}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (1-\sup_x \mathbb{P}(x-1<\xi_i\leq x))}}
$$

konstanta $A > 0$. Tuomet dėl pirmos teoremos sąlygos:

$$
\sup_{k\geq\kappa}\sup_x\left(\overline{F_{\xi_k}}(x-1) - \overline{F_{\xi_k}}(x)\right) \leq 1-\Delta,
$$

kažkokiam $0 < \Delta < 1$. Todėl

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}\left(1-\sup_x \mathbb{P}(x-1<\xi_k\le x)\right)\\
&=\sum_{k=1}^{n}\Big(1-\sup_x\left(\overline{F_{\xi_k}}(x-1)-\overline{F_{\xi_k}}(x)\right)\Big)\\
&\ge \sum_{k=\kappa}^{n}\Big(1-\sup_{k\ge\kappa}\sup_x\left(\overline{F_{\xi_k}}(x-1)-\overline{F_{\xi_k}}(x)\right)\Big)\\
&\ge \sum_{k=\kappa}^{n}\Delta=(n-\kappa)\,\Delta=n\left(1-\frac{\kappa}{n}\right)\Delta\ge\frac{n}{2}\Delta
\end{aligned}$$

Todėl, pratęsiant (3.12) nelygybę, gauname:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_\eta>x-1)&\le(1+\epsilon)\mathbb{P}(S_\eta>x,\eta\le\kappa)+(1+\epsilon)\mathbb{P}\left(S_\eta>x,\kappa<\eta\le\frac{x-1}{K-1}\right)\\
&+\sum_{n>\frac{x-1}{K-1}}\frac{A\mathbb{P}(\eta=n)}{\sqrt{\frac{n}{2}\Delta}}+\mathbb{P}\left(S_\eta>x,\eta>\frac{x-1}{K-1}\right)\\
&\le(1+\epsilon)\mathbb{P}(S_\eta>x)+A\sqrt{\frac{2}{\Delta}}\sqrt{\frac{K-1}{x-1}}\mathbb{P}\left(\eta>\frac{x-1}{K-1}\right)
\end{aligned}\tag{3.13}$$

Narį $\mathbb{P}(S_\eta>x)$ galime įvertinti šitaip:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_\eta>x)&=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(\eta=n)\mathbb{P}(S_n>x)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(\eta=n)\mathbb{P}(\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n>x)\\
&\ge\mathbb{P}(\eta=\kappa)\mathbb{P}(S_\kappa>x)=\overline{F_{S_\kappa}}(x)\mathbb{P}(\eta=\kappa)
\end{aligned}\tag{3.14}$$

Apjungus (3.13) ir (3.14) nelygybes, galiausiai gauname, kad

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbb{P}(S_\eta>x-1)}{\mathbb{P}(S_\eta>x)}&\le1+\epsilon+\frac{A\sqrt{\frac{2}{\Delta}}\sqrt{K-1}\overline{F_\eta}(\frac{x-1}{K-1})}{\sqrt{x-1}\overline{F_{S_\kappa}}(x)\mathbb{P}(\eta=\kappa)}\\
&=1+\epsilon+\frac{A\sqrt{\frac{2}{\Delta}}\sqrt{K-1}\overline{F_\eta}(\frac{x-1}{K-1})}{\sqrt{x-1}\overline{F_{S_\kappa}}(x)\mathbb{P}(\eta=\kappa)}\frac{\overline{F_{S_\kappa}}(x-1)}{\overline{F_{S_\kappa}}(x-1)}\\
&=1+\epsilon+\frac{\overline{F_\eta}(\frac{x-1}{K-1})}{\sqrt{x-1}\overline{F_{S_\kappa}}(x-1)}\frac{A\sqrt{\frac{2}{\Delta}}\sqrt{K-1}}{\mathbb{P}(\eta=\kappa)}\frac{\overline{F_{S_\kappa}}(x-1)}{\overline{F_{S_\kappa}}(x)}
\end{aligned}\tag{3.15}$$

Iš sąlygos žinome, kad $F_{S_\kappa}\in\mathscr{L}$, todėl dėl trečios teoremos sąlygos gauname, kad paskutinis gautos išraiškos narys artėja į 0. □

## 3.3 Priklausymas klasei $\mathscr{L}\cap\mathscr{D}$

Ankstesniuose dviejuose skyriuose nagrinėjome kokioms sąlygoms esant atsitiktinė atsitiktinių dydžių sumos pasiskirstymo funkcija $F_{S_\eta}$ priklauso klasėms $\mathscr{L}$ ir $\mathscr{D}$. Šiame skyriuje apjungsime gautus rezultatus.

**7 Teorema.** *Tarkime, kad a.d. $\{\xi_1,\xi_2\ldots\}$ yra nepriklausomi, neneigiami, tačiau nebūtinai vienodai pasiskirstę su pasiskirstymo f-jomis $\{F_{\xi_1},F_{\xi_2}\ldots\}$. Taip pat tarkime, kad nulyje neišsigimęs, sveikareikšmis a.d. $\eta$ nepriklausomas nuo $\{\xi_1,\xi_2,\ldots\}$ su pasiskirstymo f-ja $F_\eta$. Tuomet $F_{S_\eta}\in\mathscr{L}\cap\mathscr{D}$, jei yra tenkinamos šios sąlygos:*

*(a)* $F_{S_{\kappa_1}} \in \mathscr{L}$*, kažkuriam* $\kappa_1 \in$ *supp*$(\eta) \setminus \{0\}$

*(b)* $F_{\xi_{\kappa_2}} \in \mathscr{D}$ *kažkuriam* $\kappa_2 \in$ *supp*$(\eta) \setminus \{0\}$

*(c)* $\sup\limits_{k \geq \kappa_1} \sup\limits_{x} \left( \overline{F_{\xi_k}}(x-1) - \overline{F_{\xi_k}}(x) \right) < 1$

*(d)* $\limsup\limits_{x \to \infty} \sup\limits_{n \geq \kappa_2} \frac{1}{n\overline{F_{\xi_{\kappa_2}}}(x)} \sum_{i=1}^{n} \overline{F_{\xi_i}}(x) < \infty$

*(e)* $\mathbb{E}\eta^{p+1} < \infty$ *kažkokiam* $p > J^{+}_{F_{\xi_{\kappa_2}}}$.

*(f)* $\limsup\limits_{x \to \infty} \sup\limits_{k \geq \kappa_1} \frac{\overline{F_{\xi_k}}(x-1)}{\overline{F_{\xi_k}}(x)} = 1$

*(g)* $\overline{F_{\eta}}(\delta x) = o\left(\sqrt{x}\overline{F_{S_{\kappa_1}}}(x)\right)$, $\forall \delta \in (0,1)$*, kai* $x \to \infty$

*Įrodymas.*
Įrodymas išplaukia tiesiogiai iš 6 ir 3 teoremų . Dėl $a), c), f)$ ir $g)$ punktų pagal 6 teoremą $F_{S_\eta} \in \mathscr{L}$. Dėl $b), d)$ ir $e)$ punktų pagal 3 teoremą $F_{S_\eta} \in \mathscr{D}$. Todėl, jei yra tenkinamos $a - g$ sąlygos, $F_{S_\eta} \in \mathscr{L} \cap \mathscr{D}$. $\square$

## 3.4 Bankroto tikimybės asimptotika

Foss, Korshunov ir Zachary knygoje "Introduction to Heavy Tailed and Subexponential Distributions" nagrinėja įvairias ilgauodegių skirstinių poklases, jų sąsukas bei kitas savybes. Viename iš skyrių autoriai nagrinėja atsitiktinio klaidžiojimo $Z$ uodegos maksimumo tikimybės baigtiniame laiko intervale aproksimaciją. Žemiau pateikiame jų gautus rezultatus (žr. [14] šaltinyje 5.3 Teoremą, 102-103 psl.):

**8 Lema.** *Tarkime $\{Z_1, Z_2, \ldots\}$ yra nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių seka su pasiskirstymo funkcija $F_Z(x) \in \mathscr{S}^*$ ir baigtiniu vidurkiu $\mathbb{E}Z = -\mu < 0$. Tuomet*

$$\mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq n} \sum_{i=1}^{k} Z_i > x\right) \sim \frac{1}{\mu}\int_x^{x+\mu n} \overline{F_Z}(y)dy,$$

*kai $x \to \infty$ tolygiai, kai $n \geq 1$*

Kadangi lema galioja, kai $F_Z(x) \in \mathscr{S}^*$, o $\mathscr{S}^* \subset \mathscr{L}$ (žr. (3.2) sąryšį trečiame skyrelyje). Pagal $\mathscr{L}$ klasės savybę $F_Z(y-c) \sim F_Z(y)$ t.y. paslinkus a.d. $Z$ per $c$, skirstinio asimptotiškai nepakeisime, todėl 8 lemą galime performuluoti šitaip:

**9 Lema.** *Tarkime $\{Z_1, Z_2, \ldots\}$ yra nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių seka su pasiskirstymo funkcija $F_Z(x) \in \mathscr{S}^*$ ir baigtiniu vidurkiu $\mathbb{E}Z - c = -\mu < 0$. Tuomet*

$$\mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq n} \sum_{i=1}^{k}(Z_i - c) > u\right) \sim \frac{1}{\mu}\int_u^{u+\mu n} \overline{F}_Z(x)dx,$$

*kai $u \to \infty$ tolygiai, kai $n \geq 1$*

O tai yra ne kas kita kaip diskretaus laiko rizikos atstatymo (žr. įvade (1.1) lygybę) modelio baigtinio laiko bankroto tikimybės $\psi(u,T)$ (žr. įvade (1.7) lygybę) asimptotinė formulė:

$$\psi(u,T) = \mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq T} \sum_{j=1}^{k}(Z_j - c) \geq u\right) \sim \frac{1}{\mu}\int_u^{u+\mu n} \overline{F}_Z(x)dx,$$

Panašiai samprotaujant šią asimptotinę formulę galima pritaikyti ir sudėtinio nehomogeninio diskretaus laiko rizikos atstatymo modelio $\hat{\psi}(u,T)$ bankroto tikimybei (žr. įvade (1.8) lygybę). Atsiktiktinę žalą $Z$ pakeitus atsiktine suma $\sum_{i=1}^{\eta}\xi_i$, esant baigtiniams skirstinių vidurkiams pritaikius žinomą klasių sąryšį $\mathscr{L} \cap \mathscr{D} \subset \mathscr{S}^*$, gauname tokį rezultatą:

**10 Lema.** *Jei $F_{S_\eta} \in \mathscr{L} \cap \mathscr{D}$, kur $S_\eta = \sum_{i=1}^{\eta}\xi_i$ ir $c - \mathbb{E}S_\eta = \mu > 0$, tai*

$$\hat{\psi}(u,T) \sim \frac{1}{\mu}\int_u^{u+\mu T} \overline{F_{S_\eta}}(x)dx \tag{3.16}$$

*kai $u \to \infty$ tolygiai $T \in \mathbb{N}$.*

Apibendrinant aukščiau paminėtas lemas, galime formuluoti tokią teoremą:

**11 Teorema.** *Tarkime sudėtinis nehomogeninis diskretaus laiko rizikos atstatymo modelis, aprašytas* (1.6) *lygybėje tenkina visas 7 teoremoje išvardintas sąlygas. Tuomet, jei yra tenkinama grynojo pelno sąlyga $c - \mathbb{E}S_\eta = \mu > 0$, baigtinio laiko bankroto tikimybė $\hat{\psi}(u,T)$ tenkina* (3.16) *sąryšį.*

*Įrodymas.* Teoremos įrodymas tiesiogiai išplaukia iš aukščiau suformuluotos 10 lemos. □

### 3.4.1 Bankroto tikimybės asimptotika, kai $\eta$ turi baigtinę atramą, o $F_{\xi_i} \in \mathscr{L} \cap \mathscr{D}$, $i = 1, 2, \ldots$

Pabandykime šiek tiek supaprastinti gautą asimptotinę išraišką nagrinėjant kiek konkretesnį atvejį.

**12 Teorema.** *Tarkime, kad $\eta$ neneigiamas, sveikareikšmis, nulyje neišsigimęs, turintis baigtinę atramą $\mathbb{P}(\eta \in \{0, 1, 2, \ldots, M\}) = 1$ a.d., o $F_{\xi_i} \in \mathscr{L} \cap \mathscr{D}$, $\forall i \in \mathbb{N}$.*
*Be to, $\limsup\limits_{x\to\infty} \frac{\overline{F_{\xi_i}}(x)}{\overline{F_{\xi_\kappa}}(x)} < \infty$, $\forall i \in 1, 2, \ldots, M$ ir kažkuriam $\kappa \in supp(\eta) \setminus \{0\}$ $(*)$. Taip pat yra tenkinama grynojo pelno sąlyga $c - \mathbb{E}S_\eta = \mu > 0$. Tuomet $\hat{\psi}(u, T)$ gali būti išreikšta šitokiu pavidalu:*

$$\hat{\psi}(u, T) \sim \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^{M} \overline{F_\eta}(i-1) \int_u^{u+\mu T} \overline{F_{\xi_i}}(x) dx,$$

*kai $u \to \infty$ tolygiai $T \in \mathbb{N}$. Čia $\mathbb{E}S_\eta = \sum_{k=1}^{M} \mathbb{E}\xi_k \overline{F_\eta}(k-1)$*

*Įrodymas.* Norėdami, taikyti 11 teoremoje gautą $\hat{\psi}(u, T)$ asimptotinę išraišką, pirmiausia turime įsitikinti, kad visos teoremoje išvardintos sąlygos yra tenkinamos. Tam prireiks vienos pagalbinės lemos, kurią kaip 2.1 teoremą [4] straipsnyje suformulavo Tang ir Cai:

**13 Lema.** *Jeigu $F_1 \in \mathscr{L} \cap \mathscr{D}$ ir $F_2 \in \mathscr{L} \cap \mathscr{D}$, tuomet $F_1 * F_2 \in \mathscr{L} \cap \mathscr{D}$ ir*

$$\overline{F_1 * F_2}(x) \sim \overline{F_1}(x) + \overline{F_2}(x)$$

Tarkime turime a.d. seką $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\kappa, \ldots, \xi_M, \xi_\kappa, \xi_\kappa, \ldots\}$. Sunumeruokime ją atitikamai $\{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_\kappa, \ldots, \eta_M, \eta_{M+1}, \eta_{M+2}, \ldots\}$. Tikrindami sąlygas laikykime, kad $\kappa_1 = M, \kappa_2 = \kappa$

(a) $F_{S_{\kappa_1}} \in \mathscr{L}$, kažkuriam $\kappa_1 \in \text{supp}(\eta) \setminus \{0\}$

Kadangi pagal 12 teoremos sąlygą visų a.d. $\xi_i$, $i = 1, 2, \ldots$ pasiskirstymo funkcijos priklauso klasei $\mathscr{L} \cap \mathscr{D}$, remiantis 13 lema, gauname, kad ir $F_{S_M} \in \mathscr{L} \cap \mathscr{D}$, taigi ir klasei $\mathscr{L}$

(b) $F_{\xi_{\kappa_2}} \in \mathscr{D}$ kažkuriam $\kappa_2 \in \text{supp}(\eta) \setminus \{0\}$

Ši sąlyga taip pat tenkinama, nes visų a.d. $\xi_i$, $i = 1, 2, \ldots$ pasiskirstymo funkcijos priklauso klasei $\mathscr{L} \cap \mathscr{D}$, vadinasi ir klasei $\mathscr{D}$

(c) $\sup_{k\geq\kappa_1} \sup_x \left(\overline{F_{\xi_k}}(x-1) - \overline{F_{\xi_k}}(x)\right) < 1$

Nemažindami bendrumo galime nagrinėti

$$\sup_{k\geq M+1} \sup_x \left(\overline{F_{\eta_k}}(x-1) - \overline{F_{\eta_k}}(x)\right) = \sup_{k\geq M+1} \sup_x \left(\overline{F_{\xi_\kappa}}(x-1) - \overline{F_{\xi_\kappa}}(x)\right) = \sup_x \left(\overline{F_{\xi_\kappa}}(x-1) - \overline{F_{\xi_\kappa}}(x)\right)$$
$$\leq \max\left\{\sup_{x\leq 0} \left(\overline{F_{\xi_\kappa}}(x-1) - \overline{F_{\xi_\kappa}}(x)\right), \sup_{0<x\leq K} \left(\overline{F_{\xi_\kappa}}(x-1) - \overline{F_{\xi_\kappa}}(x)\right), \sup_{x>K} \left(\overline{F_{\xi_\kappa}}(x-1) - \overline{F_{\xi_\kappa}}(x)\right)\right\}$$

Išnagrinėkime šiuos narius atskirai:

- $\sup_{x\leq 0} \left(\overline{F_{\xi_\kappa}}(x-1) - \overline{F_{\xi_\kappa}}(x)\right) = 0$
- $\sup_{0<x\leq K} \left(\overline{F_{\xi_\kappa}}(x-1) - \overline{F_{\xi_\kappa}}(x)\right) \leq \sup_{0<x\leq K} \left(1 - \overline{F_{\xi_\kappa}}(x)\right) \leq 1 - \overline{F_{\xi_\kappa}}(K)$
- $\sup_{x>K} \left(\overline{F_{\xi_\kappa}}(x-1) - \overline{F_{\xi_\kappa}}(x)\right) = \sup_{x>K} \overline{F_{\xi_\kappa}}(x) \left(\frac{\overline{F_{\xi_\kappa}}(x-1)}{\overline{F_{\xi_\kappa}}(x)} - 1\right) \leq \frac{1}{2}$, kai K didelis

Taigi, kai K yra didelis, gauname:

$$\sup_{k\geq M+1}\sup_x\left(\overline{F_{\xi_\kappa}}(x-1)-\overline{F_{\xi_\kappa}}(x)\right)\leq \max\left\{0,1-\overline{F_{\xi_\kappa}}(K),\frac{1}{2}\right\}=\max\left\{1-\overline{F_{\xi_\kappa}}(K),\frac{1}{2}\right\}<1$$

nes dėl $F_{\xi_\kappa}$ priklausymo klasei $\mathscr{L}\cap\mathscr{D}$ t.y. begalinės atramos turėjimo, gauname, kad $\overline{F_{\xi_\kappa}}(K)>0,\forall K$

(d) $\limsup\limits_{x\to\infty}\sup_{n\geq\kappa_2}\frac{1}{n\overline{F_{\xi_{\kappa_2}}}(x)}\sum_{i=1}^{n}\overline{F_{\xi_i}}(x)<\infty$

Tegul teoremos ($*$) sąlyga yra patenkinta, tuomet

$$\begin{aligned}
&\limsup_{x\to\infty}\sup_{n\geq\kappa}\frac{1}{n\overline{F_{\eta_\kappa}}(x)}\sum_{i=1}^{n}\overline{F_{\eta_i}}(x)\\
&\leq\limsup_{x\to\infty}\max_{\kappa\leq n\leq M}\frac{1}{n\overline{F_{\eta_\kappa}}(x)}\sum_{i=1}^{n}\overline{F_{\eta_i}}(x)+\limsup_{x\to\infty}\sup_{n>M}\frac{1}{n\overline{F_{\eta_\kappa}}(x)}\sum_{i=1}^{n}\overline{F_{\eta_i}}(x)\\
&\leq\limsup_{x\to\infty}\max_{\kappa\leq n\leq M}\frac{1}{\kappa\overline{F_{\xi_\kappa}}(x)}\sum_{i=1}^{M}\overline{F_{\xi_i}}(x)+\limsup_{x\to\infty}\sup_{n>M}\frac{1}{n\overline{F_{\xi_\kappa}}(x)}\left(\sum_{i=1}^{M}\overline{F_{\xi_i}}(x)+\sum_{i=M+1}^{n}\overline{F_{\xi_\kappa}}(x)\right)\\
&\leq\frac{1}{\kappa}\limsup_{x\to\infty}\frac{\overline{F_{\xi_1}}+\overline{F_{\xi_2}}+\ldots+\overline{F_{\xi_M}}}{\overline{F_{\xi_\kappa}}}+\frac{1}{M}\limsup_{x\to\infty}\frac{\overline{F_{\xi_1}}+\overline{F_{\xi_2}}+\ldots+\overline{F_{\xi_M}}}{\overline{F_{\xi_\kappa}}}+\limsup_{x\to\infty}\sup_{n>M}\frac{n-M}{n}\frac{\overline{F_{\xi_\kappa}}}{\overline{F_{\xi_\kappa}}}
\end{aligned}$$

Dėl ($*$) sąlygos pirmasis ir antrasis dėmuo yra baigtiniai. Kadangi $n>M$, trečiasis narys neviršys 1. Taigi, gauname, kad ši sąlyga yra tenkinama.

(e) $\mathbb{E}\eta^{p+1}<\infty$ kažkokiam $p>J^+_{F_{\xi_{\kappa_2}}}$.

Kadangi $F_{\xi_\kappa}\in\mathscr{D}$, tai $J^+_{F_{\xi_\kappa}}<\infty$. A.d. $\eta$ turi baigtinę atramą, o baigtinio dydžio baigtinis momentas - taip pat baigtinis. Taigi, ši sąlyga yra tenkinama.

(f) $\limsup\limits_{x\to\infty}\sup\limits_{k\geq\kappa_1}\frac{\overline{F_{\xi_k}}(x-1)}{\overline{F_{\xi_k}}(x)}=1$

Laikykime $\kappa_1=M$.

$$\limsup_{x\to\infty}\sup_{k\geq M}\frac{\overline{F_{\eta_k}}(x-1)}{\overline{F_{\eta_k}}(x)}=\limsup_{x\to\infty}\sup_{k\geq M}\left\{\frac{\overline{F_{\xi_M}}(x-1)}{\overline{F_{\xi_M}}(x)};\frac{\overline{F_{\xi_\kappa}}(x-1)}{\overline{F_{\xi_\kappa}}(x)}\right\}=1$$

Iš esmės nėra svarbu, kuris narys didesnis, nes pagal teoremos sąlygą visų a.d. $\xi$ pasiskirstymo funkcijos priklauso klasei $\mathscr{L}\cap\mathscr{D}$.

(g) $\overline{F_\eta}(\delta x)=o\left(\sqrt{x}\overline{F_{S_{\kappa_1}}}(x)\right)$, $\forall\delta\in(0,1)$, kai $x\to\infty$

$\kappa_1=M$ yra baigtinis, todėl gauname, kai $x$ didelis - $\overline{F_\eta}(x)=0$.

Gavome, kad galiojant suformuluotoms 12 teoremos sąlygoms, galime taikyti 11 teoremą ir joje gautą $\hat{\psi}(u,T)$ asimptotinę (3.16) išraišką. Tolimesniame teoremos įrodyme pateiksime kaip gaunami $\mathbb{P}(S_\eta > x)$ ir $\mathbb{E}S_\eta$ nariai.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_\eta > x) &= \sum_{n=1}^{\eta} \mathbb{P}(\eta = n)\mathbb{P}(S_n > x) \\
&= \mathbb{P}(\eta = 1)\mathbb{P}(S_1 > x) + \mathbb{P}(\eta = 2)\mathbb{P}(S_2 > x) + \mathbb{P}(\eta = 3)\mathbb{P}(S_3 > x) + \ldots + \mathbb{P}(\eta = M)\mathbb{P}(S_M > x) \\
&= \mathbb{P}(\eta = 1)\mathbb{P}(\xi_1 > x) + \mathbb{P}(\eta = 2)\mathbb{P}(\xi_1 + \xi_2 > x) + \mathbb{P}(\eta = 3)\mathbb{P}(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 > x) \\
&+ \ldots + \mathbb{P}(\eta = M)\mathbb{P}(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \ldots + \xi_M > x) \\
&= \mathbb{P}(\eta = 1)\overline{F_{\xi_1}}(x) + \mathbb{P}(\eta = 2)\overline{F_{\xi_1} * F_{\xi_2}}(x) + \mathbb{P}(\eta = 3)\overline{F_{\xi_1} * F_{\xi_2} * F_{\xi_3}}(x) \\
&+ \ldots + \mathbb{P}(\eta = M)\overline{F_{\xi_1} * F_{\xi_2} * F_{\xi_3} * \ldots * F_{\xi_M}}(x)
\end{aligned} \tag{3.17}
$$

Kadangi $\forall F_{\xi_i} \in \mathscr{L} \cap \mathscr{D}$ pritaikius 13 lemą, pratęsiant (3.17) lygybę gauname:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_\eta > x) &\sim \mathbb{P}(\eta = 1)\overline{F_{\xi_1}}(x) + \mathbb{P}(\eta = 2)\Big(\overline{F_{\xi_1}}(x) + \overline{F_{\xi_2}}(x)\Big) + \mathbb{P}(\eta = 3)\Big(\overline{F_{\xi_1}}(x) + \overline{F_{\xi_2}}(x) + \overline{F_{\xi_3}}(x)\Big) \\
&+ \ldots + \mathbb{P}(\eta = M)\Big(\overline{F_{\xi_1}}(x) + \overline{F_{\xi_2}}(x) + \overline{F_{\xi_3}}(x) + \ldots + \overline{F_{\xi_M}}(x)\Big) \\
&= \overline{F_{\xi_1}}(x)\Big(\mathbb{P}(\eta = 1) + \mathbb{P}(\eta = 2) + \mathbb{P}(\eta = 3) + \ldots + \mathbb{P}(\eta = M)\Big) \\
&+ \overline{F_{\xi_2}}(x)\Big(\mathbb{P}(\eta = 2) + \mathbb{P}(\eta = 3) + \ldots + \mathbb{P}(\eta = M)\Big) \\
&+ \overline{F_{\xi_3}}(x)\Big(\mathbb{P}(\eta = 3) + \ldots + \mathbb{P}(\eta = M)\Big) + \ldots + \overline{F_{\xi_M}}(x)\mathbb{P}(\eta = M) \\
&= \overline{F_{\xi_1}}(x) + \mathbb{P}(\eta > 1)\overline{F_{\xi_2}}(x) + \mathbb{P}(\eta > 2)\overline{F_{\xi_3}}(x) + \ldots + \mathbb{P}(\eta > M - 1)\overline{F_{\xi_M}}(x) \\
&= \overline{F_{\xi_1}}(x) + \overline{F_\eta}(1)\overline{F_{\xi_2}}(x) + \overline{F_\eta}(2)\overline{F_{\xi_3}}(x) + \ldots + \overline{F_\eta}(M - 1)\overline{F_{\xi_M}}(x) \\
&= \sum_{i=1}^{M} \overline{F_\eta}(i - 1)\overline{F_{\xi_i}}(x)
\end{aligned}
$$

Labai panašiai gaunama ir vidurkio išraiška:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}S_\eta &= \mathbb{E}(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \ldots + \xi_M) \\
&= \mathbb{P}(\eta = 1)\mathbb{E}\xi_1 + \mathbb{P}(\eta = 2)\mathbb{E}(\xi_1 + \xi_2) + \mathbb{P}(\eta = 3)\mathbb{E}(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) \\
&+ \ldots + \mathbb{P}(\eta = M)\mathbb{E}(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \ldots + \xi_M) \\
&= \mathbb{P}(\eta = 1)\mathbb{E}\xi_1 + \mathbb{P}(\eta = 2)(\mathbb{E}\xi_1 + \mathbb{E}\xi_2) + \mathbb{P}(\eta = 3)(\mathbb{E}\xi_1 + \mathbb{E}\xi_2 + \mathbb{E}\xi_3) \\
&+ \ldots + \mathbb{P}(\eta = M)(\mathbb{E}\xi_1 + \mathbb{E}\xi_2 + \mathbb{E}\xi_3 + \ldots + \mathbb{E}\xi_M) \\
&= \mathbb{E}\xi_1\Big(\mathbb{P}(\eta = 1) + \mathbb{P}(\eta = 2) + \mathbb{P}(\eta = 3) + \ldots + \mathbb{P}(\eta = M)\Big) \\
&+ \mathbb{E}\xi_2\Big(\mathbb{P}(\eta = 2) + \mathbb{P}(\eta = 3) + \ldots + \mathbb{P}(\eta = M)\Big) \\
&+ \mathbb{E}\xi_3\Big(\mathbb{P}(\eta = 3) + \ldots + \mathbb{P}(\eta = M)\Big) + \ldots + \mathbb{E}\xi_M\mathbb{P}(\eta = M) \\
&= \sum_{k=1}^{M} \mathbb{E}\xi_k\mathbb{P}(\eta \geq k) \\
&= \sum_{k=1}^{M} \mathbb{E}\xi_k\mathbb{P}(\eta > k - 1) \\
&= \sum_{k=1}^{M} \mathbb{E}\xi_k\overline{F_\eta}(k - 1)
\end{aligned} \tag{3.18}
$$

Taigi, sustačius gautas išraiškas į (3.16) $\hat{\psi}(u, T)$ išraišką bei pasinaudojus tuo, kad turime baigtinę sumą, gauname reikiamą rezultatą. □

# 4 Pavyzdžiai

**1 Pavyzdys.** *Tarkime turime tokį sudėtinį nehomogonenį diskretaus laiko rizikos atstatymo modelį, kuriame žalų seką* $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ *nusako skirtingų parametrų Pareto skirstiniai:*

$$\overline{F_{\xi_1}}(x) = \left(\frac{1}{1+x}\right)^2, \quad x \geq 0;$$
$$\overline{F_{\xi_2}}(x) = \left(\frac{2}{2+x}\right)^2, \quad x \geq 0;$$
$$\overline{F_{\xi_3}}(x) = \left(\frac{3}{3+x}\right)^2, \quad x \geq 0.$$

*Taip pat tarkime, kad žalų skaičių nusakantis a.d.* $\eta$ *yra baigtinis ir*

$$\mathbb{P}(\eta = 1) = \mathbb{P}(\eta = 2) = \mathbb{P}(\eta = 3) = \frac{1}{3}$$

*Rasime tokio sudėtinio rizikos atstatymo modelio bankroto tikimybės* $\hat{\psi}(u, T)$ *asimptotinę išraišką.*

Pirmiausia turime patikrinti ar toks modelis tenkina 12 teoremoje suformuluotas sąlygas.

(a) Ar $F_{\xi_i} \in \mathscr{L} \cap \mathscr{D}, \forall i \in \mathbb{N}$?

Yra žinoma (žr. 1.4.22 pvz. [7] šaltinis) ir galima nesunkiai parodyti, kad visi Pareto skirstiniai priklauso klasei $\mathscr{R}$. Norėdami tai patikrinti, taikysime $\mathscr{R}$ klasės apibrėžimą (žr. 3 apib. 2-ame skyrelyje)

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{(\frac{k}{k+yx})^\alpha}{(\frac{k}{k+x})^\alpha} = \limsup_{x\to\infty} \left(\frac{k+x}{k+yx}\right)^\alpha = \limsup_{x\to\infty} \left(\frac{\frac{k}{x}+1}{\frac{k}{x}+y}\right)^\alpha = y^{-\alpha},$$

$y, \alpha, k > 0$.

Iš (3.2) sąryšio 3-jame skyrelyje žinome, kad $\mathscr{R} \subset \mathscr{L} \cap \mathscr{D}$, todėl ši sąlyga yra tenkinama.

(b) $\limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{F_{\xi_i}}(x)}{\overline{F_{\xi_\kappa}}(x)} < \infty$, $\forall i \in 1, 2, \ldots, M$ ir kažkuriam $\kappa \in supp(\eta) \backslash \{0\}$

Pasirinkime $\kappa = 3$, tuomet

- $\limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{F_{\xi_1}}(x)}{\overline{F_{\xi_3}}(x)} = \limsup_{x\to\infty} \frac{(\frac{1}{1+x})^2}{(\frac{3}{3+x})^2} = \limsup_{x\to\infty} \left(\frac{3+x}{3(1+x)}\right)^2 = \frac{1}{9} < \infty$
- $\limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{F_{\xi_2}}(x)}{\overline{F_{\xi_3}}(x)} = \limsup_{x\to\infty} \frac{(\frac{2}{2+x})^2}{(\frac{3}{3+x})^2} = \limsup_{x\to\infty} \left(\frac{2(3+x)}{3(2+x)}\right)^2 = \frac{4}{9} < \infty$
- $\limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{F_{\xi_3}}(x)}{\overline{F_{\xi_3}}(x)} = \limsup_{x\to\infty} \frac{(\frac{3}{3+x})^2}{(\frac{3}{3+x})^2} = 1 < \infty$

Kadangi visos išvardintos sąlygos yra tenkinamos, jei yra tenkinama grynojo pelno sąlyga $\mu = c - \mathbb{E}S_\eta > 0$, šiam sudėtiniam rizikos atstatymo modeliui galime taikyti 12 teoremoje gautą asimptotinę formulę:

$$\hat{\psi}(u, T) \sim \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^{M} \overline{F_\eta}(i-1) \int_u^{u+\mu T} \overline{F_{\xi_i}}(x) dx,$$

kai $u \to \infty$ tolygiai $T \in \mathbb{N}$.

$$\mathbb{E}\xi_1 = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1+x}\right)^2 dx = 1$$
$$\mathbb{E}\xi_2 = \int_0^\infty \left(\frac{2}{2+x}\right)^2 dx = 2$$
$$\mathbb{E}\xi_3 = \int_0^\infty \left(\frac{3}{3+x}\right)^2 dx = 3$$

$$\mathbb{E}S_\eta = \sum_{i=1}^{3} \mathbb{E}\xi_i \overline{F_\eta}(i-1) = 1*1 + 2*\frac{2}{3} + 3*\frac{1}{3} = 3\frac{1}{3}$$

Tuomet, kai $c > 3\frac{1}{3}$:

$$\begin{aligned}
\hat{\psi}(u,T) &\sim \frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{3}\overline{F_\eta}(i-1)\int_u^{u+\mu T}\overline{F_{\xi_i}}(x)dx \\
&= \frac{1}{\mu}\left(\int_u^{u+\mu T}\left(\frac{1}{1+x}\right)^2 dx + \frac{2}{3}\int_u^{u+\mu T}\left(\frac{2}{2+x}\right)^2 dx + \frac{1}{3}\int_u^{u+\mu T}\left(\frac{3}{3+x}\right)^2 dx\right) \\
&= -\frac{1}{\mu}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{8}{3(2+x)} + \frac{3}{3+x}\right)\Bigg|_u^{u+\mu T} \\
&= \frac{\mu T}{\mu}\left(\frac{1}{(1+u+\mu T)(1+u)} + \frac{8}{3(2+u+\mu T)(2+u)} + \frac{1}{3(3+u+\mu T)(3+u)}\right) \\
&= T\left(\frac{1}{(1+u+\mu T)(1+u)} + \frac{8}{3(2+u+\mu T)(2+u)} + \frac{1}{3(3+u+\mu T)(3+u)}\right)
\end{aligned}$$

tolygiai $T \in \mathbb{N}$, kai $u \to \infty$

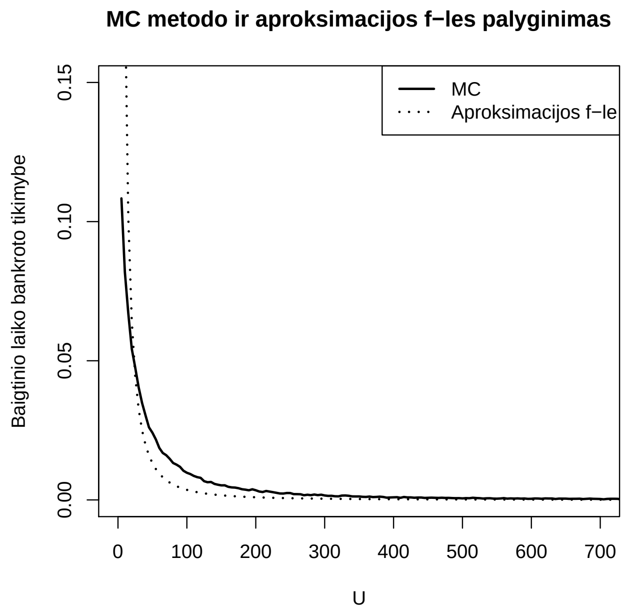
Naudojant statistinę programą **R** palyginsime gautąją aproksimacijos formulę su Monte Karlo simuliacijų metodu gautais rezultatais:

| **U** | **50** | **100** | **200** | **300** | **400** | **500** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **MC** | 0,02415 | 0,009760 | 0,00347 | 0,0016 | 0,00093 | 0,00055 |
| **Aproksimacija** | 0,013119554 | 0,003620565 | 0,0009505402 | 0,0004295779 | 0,0002436825 | 0,0001567513 |

| **U** | **1000** | **2000** | **3000** | **...** | **10000** |
|---|---|---|---|---|---|
| **MC** | $0,17*10^{-5}$ | $0,01*10^{-6}$ | 0 | ... | 0 |
| **Aproksimacija** | $3,959032*10^{-5}$ | $9.948563*10^{-6}$ | $4.429181*10^{-6}$ | ... | $3,99587*10^{-7}$ |

1 lentelė: MC simuliacijų metodo ir aproksimacijos formulės rezultatai. $T = 10$, $c = 4$, MC simuliacijų sk. $=10^5$

Kaip ir tikėtasi, galime pastebėti, kad esant nedidelėms parametro $U$ reikšmėms, aproksimacijos formulė neduoda pakankamai tikslių rezultatų, tačiau jam didėjant, abiem metodais gaunamos tikimybių reikšmės panašėja. Iš 1 lentelės matome, kad parametrui $U$ esant pakankamai dideliam, naudodami Monte Karlo metodą gauname bankroto tikimybę lygią nuliui, tuo tarpu naudojant išvestąją aproksimacijos formulę - ne. Grafiškai rezultatai atrodytų šitaip:




1 pav.: $c = 4$, $T = 10$, MC simuliacijų sk.$=10^5$

**R** programos kodas, kuriuo gauti 1 paveikslėlis bei 1 lentelė, pateikiamas **A**.1 priede.

**2 Pavyzdys.** *Panagrinėkime kitą pavyzdį, pridėdami kitokio tipo žalų. Tarkime turime tokį sudėtinį nehomogonenį diskretaus laiko rizikos atstatymo modelį, kuriame žalų seką* $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6\}$ *nusako skirtingų parametrų Burr ir Pareto skirstiniai:*

$$\overline{F_{\xi_1}}(x) = \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^2, \quad x \geq 0;$$

$$\overline{F_{\xi_2}}(x) = \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^2, \quad x \geq 0;$$

$$\overline{F_{\xi_3}}(x) = \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^2, \quad x \geq 0;$$

$$\overline{F_{\xi_4}}(x) = \left(\frac{1}{1+x}\right)^2, \quad x \geq 0;$$

$$\overline{F_{\xi_5}}(x) = \left(\frac{2}{2+x}\right)^2, \quad x \geq 0;$$

$$\overline{F_{\xi_6}}(x) = \left(\frac{3}{3+x}\right)^2, \quad x \geq 0;$$

*Taip pat tarkime, kad žalų skaičių nusakantis a.d.* $\eta$ *yra baigtinis ir*

$$\mathbb{P}(\eta = 1) = \mathbb{P}(\eta = 2) = \mathbb{P}(\eta = 3) = \mathbb{P}(\eta = 4) = \mathbb{P}(\eta = 5) = \mathbb{P}(\eta = 6) = \frac{1}{6}$$

Vėlgi pradėsime nuo sąlygų tikrinimo.

(a) Iš pirmojo pavyzdžio žinome, kad $F_{\xi_i}$, $i = 4, 5, 6$ priklauso klasei $\mathscr{L} \cap \mathscr{D}$. Taip pat yra žinoma ir galima nesunkiai parodyti, kad pirmi trys nariai, pasiskirstę pagal Burr skirstinį, priklauso klasei $\mathscr{R}$ (žr. 3 apibrėžimą):

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{1+(yx)^2}\right)^2}{\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^2} = \limsup_{x\to\infty} \left(\frac{1+x^2}{1+(yx)^2}\right)^2 = \frac{1}{y^4}$$

Iš (3.2) sąryšio 3-jame skyrelyje žinome, kad $\mathscr{R} \subset \mathscr{L} \cap \mathscr{D}$, todėl pirmoji sąlyga yra tenkinama.

(b) Pasirinkime $\kappa = 6$, tuomet
$\limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{F_{\xi_i}}(x)}{\overline{F_{\xi_6}}(x)} = \limsup_{x\to\infty} \frac{(\frac{1}{1+x^2})^2}{(\frac{3}{3+x})^2} = \limsup_{x\to\infty} \left(\frac{3+x}{3(1+x^2)}\right)^2 = 0 < \infty, \quad i = 1, 2, 3$

Matome, kad pirmieji trys nariai artėja į 0, o likusius žinojome iš pirmojo pavyzdžio. Taigi, sąlyga yra tenkinama.

Gavome, kad, jei yra tenkinama grynojo pelno sąlyga $c - \mathbb{E}S_\eta > 0$, galime taikyti 12 teoremą. Kadangi $\mathbb{E}\xi_4, \mathbb{E}\xi_5, \mathbb{E}\xi_6$ radome pirmąjame pavyzdyje, liko rasti $\mathbb{E}\xi_1 = \mathbb{E}\xi_2 = \mathbb{E}\xi_3$:

$$\mathbb{E}\xi_i = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}, \quad i = 1, 2, 3$$

Taigi,

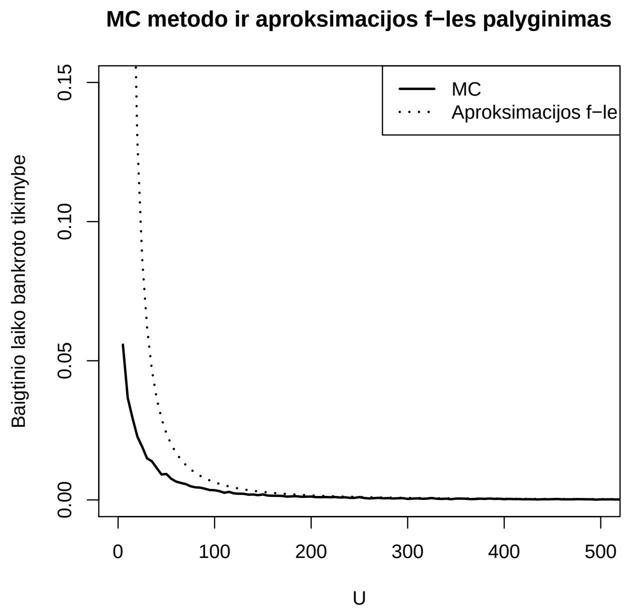
$$\mathbb{E}S_\eta = \sum_{i=1}^{6} \mathbb{E}\xi_i \overline{F_\eta}(i-1) = \frac{\pi}{4}\left(1 + \frac{5}{6} + \frac{4}{6}\right) + 1 * \frac{3}{6} + 2 * \frac{2}{6} + 3 * \frac{1}{6} + = 1\frac{2}{3} + \frac{15\pi}{24}$$

Todėl, jeigu $c > 1\frac{2}{3} + \frac{15\pi}{24}$, tuomet:

$$\begin{aligned}
\hat{\psi}(u,T) &\sim \frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{6} \overline{F_\eta}(i-1) \int_u^{u+\mu T} \overline{F_{\xi_i}}(x)dx \\
&= \frac{1}{\mu}\left(\frac{15}{6}\int_u^{u+\mu T} \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^2 dx + \frac{3}{6}\int_u^{u+\mu T} \left(\frac{1}{1+x}\right)^2 dx\right. \\
&+ \left.\frac{2}{6}\int_u^{u+\mu T} \left(\frac{2}{2+x}\right)^2 dx + \frac{1}{6}\int_u^{u+\mu T} \left(\frac{3}{3+x}\right)^2 dx\right) \\
&= \frac{1}{\mu}\left(\frac{5}{4}\left(\frac{x}{x^2+1} + arctgx\right) - \frac{1}{2(1+x)} - \frac{4}{3(2+x)} - \frac{3}{2(3+x)}\right)\Bigg|_u^{u+\mu T} \\
&= T\left(\frac{5}{4}\Big(\frac{1 - u\mu T - u^2}{\big((u+\mu T)^2+1\big)\big(u^2+1\big)} + arctg(u+\mu T) - arctg(u)\Big)\right. \\
&+ \left.\frac{1}{2(1+u+\mu T)(1+u)} + \frac{4}{3(2+u+\mu T)(2+u)} + \frac{3}{2(3+u+\mu T)(3+u)}\right)
\end{aligned}$$

tolygiai $T \in \mathbb{N}$, kai $u \to \infty$

Palyginkime gautąją aproksimacijos formulę su Monte Karlo metodu gautais rezultatais:




2 pav.: $c = 4$, $T = 10$, simuliacijų sk.$=10^5$

Gauname panašius rezultatus kaip ir pirmajame pavyzdyje. Aproksimacinė formulė geriau veikia esant didelėms parametro $U$ reikšmėms, tuo tarpu mažesnėms - Monte Karlo metodas.

| **U** | **50** | **100** | **200** | **300** | **400** | **500** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **MC** | 0,00933 | 0,00348 | 0,0012 | 0,00036 | 0,00027 | 0,00019 |
| **Aproksimacija** | 0,02394902 | 0,006327033 | 0,01627827 | 0,0004295779 | 0,000412963 | 0,0002650784 |

| **U** | **1000** | **1500** | **2000** | ... | **10000** |
|---|---|---|---|---|---|
| **MC** | $3 * 10^{-5}$ | $1 * 10^{-5}$ | 0 | ... | 0 |
| **Aproksimacija** | $6,666404 * 10^{-5}$ | $2,968735 * 10^{-5}$ | $1,671574 * 10^{-5}$ | ... | $6,702296 * 10^{-7}$ |

2 lentelė: MC simuliacijų metodo ir aproksimacijos formulės rezultatai. $T = 10$, $c = 4$, simuliacijų sk. $=10^5$

**R** programos kodas, kuriuo gauti 2 paveikslėlis bei 2 lentelė, pateikiamas A.2 priede.

# 5 Išvados ir rekomendacijos

Darbe išnagrinėjome atsitiktinės sąsukos uždarumą klasėje $\mathscr{L} \cap \mathscr{D}$, kai atsitiktiniai dydžiai yra nepriklausomi, tačiau nebūtinai vienodai pasiskirstę. Gavome sąlygas, kurias šie dydžiai turėtų tenkinti, kad atsitiktinė žalų suma priklausytų šiai klasei.

Kitoje darbo dalyje sudėtiniam nehomogeniniam diskretaus laiko rizikos atstatymo modeliui pritaikėmė Korshunov lemą (8 lema) ir gavome baigtinio laiko bankroto tikimybės asimptotinę išraišką ((3.16) formulė). Gautą asimptotinę išraišką pritaikėme konkretesniam atvejui, kuomet a.d. $\eta$ turi baigtinę atramą, o $F_{\xi_i}$, $i = 1, 2, \ldots, M$ priklauso klasei $\mathscr{L} \cap \mathscr{D}$ ir gavome pagrindinį šio darbo rezultatą - 12 teoremą. Gautoji teorema nesunkiai pritaikoma konkretiems pavyzdžiams (1 ir 2 pvz.), taigi asimptotinės baigtinio laiko bankroto tikimybės reikšmės apskaičiavimas neužima daug laiko ir yra pritaikomas daugeliui skirtingų skirstinių. Lyginant gautąją išraišką su 1 teoremoje Šiaulio ir Leipaus įrodytąja homogeniniam atvejui galima įžvelgti panašumų, tačiau gautos išraiškos nėra identiškos.

Šiame darbe pasiekėme išsikeltą tikslą ir įrodėmė, kad galima rasti baigtinio laiko bankroto tikimybės asimptotinę formulę sudėtiniam nehomogeninam diskretaus laiko rizikos atstatymo modeliui. Tolimesni tyrinėjimai galėtų būti tęsiami bandant susilpninti sąlygas, reikalingas atsiktinės sąsukos uždarumui klasės $\mathscr{L} \cap \mathscr{D}$ atžvilgiu.

# 6 Literatūra


[1] J. M. P. Albin. A note on the closure of convolution power mixtures (random sums) of exponential distributions. *J. Aust. Math. Soc.*, 84:1–7, 2008.

[2] D. Korshunov D. Denisov, S. Foss. Tail asymptotics for the supremum of random walk when the mean is not finite. *Queueing Syst.*, 46:15–33, 2004.

[3] Y. Wang H. Xu, S. Foss. Convolution and convolution-root properties of long-tailed distributions. *Springer*, 2015.

[4] Q. Tang J. Cai. On max-sum equivalence and convolution closure of heavy tailed distributions and their applications. *Applied Probability Trust*, 41:117–130, 2004.

[5] C. Klüppelberg. Subexponential distributions and integrated tails. *J. Appl.Prob*, 25:132–141, 1988.

[6] D. Korshunov. Large-deviation probabilities for maxima of sums of independent random variables with negative mean and subexponential distribution. *Theory Probab. Appl.*, 46:355–366, 2002.

[7] T. Mikosch. Regular variation, subexponentiality and their applications in probability theory. *University of Groningen*, 1999.

[8] J. Teugels N. Bingham, C. Goldie. *Regular Variation*. Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

[9] T. Mikosch P. Embrechts, C. Klüppelberg. *Modeling Extremal Events for Insurance and Finance*. Springer, 1997.

[10] V.V. Petrov. *Limit Theorems of Probability Theory*. Clarendon Press, Oxford, 1995.

[11] J. Šiaulys R. Leipus. Finite-horizon ruin probability asymptotics in the compound discrete-time risk model. *Lithuanian Mathematical Journal*, 51:207–219, 2011.

[12] J. Šiaulys R. Leipus. Closure of some heavy-tailed distribution classes under rondom convolution. *Lithuanian Mathematical Journal*, 52:249–258, 2012.

[13] J. Šiaulys S. Danilenko. Randomly stopped sums of not identically distributed heavy tailed random variables. *Rankraštis*, 2015.

[14] S. Zachary S. Foss, D. Korshunov. *An Introduction to Heavy Tailed and Subexponential Distributions*. Springer, 2011.

[15] A. N. Shiryaev. *Probability. Second Edition*. Springer, 1995.

# A Priedai

## A.1 1 pavyzdžio kodas

```

library(actuar)

### --Monte-Carlo simuliaciju metodas-- ###

#u-pradine turto reiksme, c-premiju surinkimo greitis,
#no.simulations-kiek kartu atliksime MC simulacijas
#T-laikas, iki kurio skaiciuosime bankroto tikimybe
#zalu_sk-galimas zalu skaicius per laiko 1 laiko vieneta

ruin_time <- function(u, c, no.simulations, T,zalu_sk) {
 trajektorija=matrix(nrow=no.simulations, ncol=T+1)
 for (k in 1:no.simulations){
     U<-matrix(nrow=T, ncol=1)
   U[1]<-u
   zalos<-matrix(nrow=zalu_sk, ncol=1)
   for (g in 1:zalu_sk){
   zalos[g]<-rpareto(1,2,g)}
   for (i in 1:T)
    {
    n=sample(1:zalu_sk,1)
    for (j in 1:n){
   S=0
   S=zalos[j]+S
}
 U[i+1]=U[i]+c-S
}
trajektorija[k,]<-U
 # a<-seq(0,T,1)
 # if (k==1) plot(a,trajektorija[k,],type ="l")
 #           else lines(a,trajektorija[k,])
}
suma=0
for (i in 1:no.simulations){
   for (j in 1:T+1){
      if (trajektorija[i,j]<=0)
      {suma=1+suma
       break}
}
}
suma
prob=suma/nrow(trajektorija)
prob
}

### --Gautoji aproksimacijos formule-- ###
aproksimacija<- function(u, c, T) {
 probability=T*(1/((1+u+(c-10/3)*T)*(1+u))+8/(3*(2+u+(c-10/3)*T)*(2+u))+1/(3*(3+u+(
      c-10/3)*T)*(3+u)))
 probability
}

tikimybes<-matrix(nrow=10000, ncol=2)
i=5
while (i<=10000)
   {tikimybes[i,1]=ruin_time(i,4,10^5,10,3)
   tikimybes[i,2]=aproksimacija(i,4,10)
   i=i+5
}
tikimybes2<-matrix(nrow=2000,ncol=2)
   i=1
   for (i in 1:2000){
   tikimybes2[i,]<-tikimybes2[5*i,]
```

```
}

  a<-seq(5,10000,5)
  plot(a,tikimybes2[,1],main="MC metodo ir aproksimacijos f-les palyginimas",xlab="U", ylab="Baigtinio laiko bankroto tikimybe",type ="l", ylim=c(0,0.15), xlim=c(0,700),lwd=2)
  lines(a,tikimybes2[,2], lty=3,lwd=2)
  legend('topright', lty=c(1,3),lwd=c(2,2), c('MC','Aproksimacijos f-le'))
```

## A.2 2 pavyzdžio kodas

```
library(actuar)
### --Monte-Carlo simuliaciju metodas-- ###

#u-pradine turto reiksme, c-premiju surinkimo greitis,
#no.simulations-kiek kartu atliksime MC simulacijas
#T-laikas, iki kurio skaiciuosime bankroto tikimybe
#zalu_sk-galimas zalu skaicius per laiko 1 laiko vieneta

ruin_time2 <- function(u, c, no.simulations, T,zalu_sk) {
 trajektorija=matrix(nrow=no.simulations, ncol=T+1)
 k=1
 for (k in 1:no.simulations){
  U<-matrix(nrow=T, ncol=1)
  U[1]<-u
   zalos<-matrix(nrow=(zalu_sk-3), ncol=1)
   for (g in 1:(zalu_sk-3)){
   zalos[g]<-rpareto(1,2,g)}
   for (i in 1:T)
    {
   zalos2<-matrix(nrow=zalu_sk,ncol=1)
   l=1
   for (l in 1:zalu_sk){
      if (l<=3) zalos2[l]<-rburr(1,2,2,1)
                 else zalos2[l]<-zalos[l-3]
}
   n=sample(1:zalu_sk,1)
   for (j in 1:n){
   S=0
   S=zalos2[j]+S
}
  U[i+1]=U[i]+c-S
}
trajektorija[k,]<-U
 # a<-seq(0,T,1)
 # if (k==1) plot(a,trajektorija[k,],type ="l")
 # else lines(a,trajektorija[k,])
}
suma=0
i=1
for (i in 1:no.simulations){
j=1
for (j in 1:T+1){
if (trajektorija[i,j]<=0)
{suma=1+suma
break}
}
}
suma
prob=suma/nrow(trajektorija)
prob
}

### --Gautoji aproksimacijos formule-- ###
aproksimacija2<- function(u, c, T) {
```

```
  probability=  T*((5/4)*((1-u*(c-5/3-15*pi/24)*T-u^2)/(((u+(c-5/3-15*pi/24)*T)^2+1)
      *(u^2+1))+
                    atan(u+(c-5/3-15*pi/24)*T)-atan(u))+1/(2*(1+u+(c-5/3-15*pi/24)*T)*
                        (1+u))+4/(3*(2+u+( c-5/3-15*pi/24)*T)*(2+u))
                  +3/(2*(3+u+(c-5/3-15*pi/24)*T)*(3+u)))
  probability
}

tikimybes3<-matrix(nrow=10000, ncol=2)
i=5
while (i<=10000)
{tikimybes3[i,1]=ruin_time2(i,4,10^5,10,6)
tikimybes3[i,2]=aproksimacija2(i,4,10)
i=i+5
}

tikimybes4<-matrix(nrow=2000,ncol=2)
i=1
for (i in 1:2000){
tikimybes4[i,]<-tikimybes3[5*i,]
}

a<-seq(5,1000,5)
  plot(a,tikimybes4[,1],main="MC metodo ir aproksimacijos f-les palyginimas",xlab="
      U", ylab="Baigtinio laiko bankroto tikimybe",type ="l", ylim=c(0,0.15), xlim=
      c(0,500),lwd=2)
  lines(a,tikimybes4[,2],  lty=3,lwd=2)
  legend('topright', lty=c(1,3),lwd=c(2,2), c('MC','Aproksimacijos f-le'))
```