VILNIAUS UNIVERSITETAS

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

Magistro darbas

Nepriklausomų nuosaikiai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių sumų maksimumas

Maxima of Sums of Independent Random Variables with Dominatedly Varying Distribution

Gediminas Breivė

VILNIUS 2016

Matematinės analizės katedra

Darbo vadovas profesorius Jonas Šiaulys

Darbo recenzentas lekt. Emilija Bernackaitė

Darbas apgintas 2016 m. sausio 14 d.

Darbas įvertintas ______________

Registravimo NR. ______________

2016-01-04 ____________________

Turinys

Santrauka/Abstract **2**

Įvadas **3**

1 Poterio pavidalo įvertis pasiskirstymo funkcijų šeimai **7**

2 Kesten pavidalo įvertis pasiskirstymo funkcijų šeimai **11**

3 Pagrindinės teoremos įrodymas **13**

4 Teorema esant baigtiniam laikui **22**

5 Išvados **24**

Literatūra **25**

A Priedai **26**

A.1 Priedas 26

A.2 Priedas 27

A.3 Priedas 28

A.4 Priedas 29

A.5 Priedas 30

A.6 Priedas 31

A.7 Priedas 32

Santrauka/Abstract

Nepriklausomų nuosaikiai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių sumų maksimumas

Santrauka

Tegul $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ - seka nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių, o $S_n = \xi_1 + +\xi_2 + \dots + \xi_n$. Taip pat, tegul ξ_i - nuosaikiai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai su neigiamu baigtiniu vidurkiu $\mathbf{E}\xi_i = -a < 0$. Šiame darbe nagrinėjamas asimptotinis tikimybės $\mathrm{P}\left(\max\{S_1, S_2, \dots, S_n\} > x\right)$ elgesys tolygiai pagal $n \geq 1$, kai $x \to \infty$. Taip pat, nagrinėjamas atvejis, kai $n \leq M$ bet kokiam fiksuotam $M = 1, 2, \dots$. Pirmuoju atveju parodoma, kad egzistuoja tikimybės įvertis iš viršaus. Antruoju atveju pateikiamas įvertis iš viršaus.

Raktiniai žodžiai : atsitiktinių dydžių sumų maksimumas, nuosaikus pasiskirstymas, Poterio tipo įvertis, Kesten tipo įvertis.

Maxima of Sums of Independent Random Variables with Dominatedly Varying Distribution

Abstract

Let $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ be a sequence of independent identically distributed random variables and $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$. Also, let ξ_i be dominatedly varying random variables with finite negative mean value $\mathbf{E}\xi_i = -a < 0$. In this paper, we study the asymptotic behavior for the probability $\mathrm{P}\left(\max\{S_1, S_2, \dots, S_n\} > x\right)$ uniformly with respect to $n \geq 1$ as $x \to \infty$. Also, we consider the case when $n \leq M$ for any fixed $M = 1, 2, \dots$. In the first case it is shown that a finite upper bound does exist. In the second case an upper bound for the probability is found.

Key words : Maxima of sums of random variables, dominated variation, Potter bound, Kesten bound.

Įvadas

Tegul $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ - seka nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių su pasiskirstymo funkcija $F(x)$. Tegul $S_0 = 0, S_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$ ir $M_n = \max\{S_k, 0 \leq k \leq n\}$. Tarkime, kad $\mathbf{E}\xi$ egzistuoja ir $\mathbf{E}\xi < 0$. Pažymėkime $a = |\mathbf{E}\xi|$. Šio darbo tikslas yra įvertinti iš viršaus tikimybės $\mathrm{P}(M_n > x)$ elgesį, kai $x \to \infty$, o ξ yra nuosaikiai pasiskirstęs atsitiktinis dydis. Darbe bus nagrinėjamas tikimybės $\mathrm{P}(M_n > x)$ elgesys tolygiai pagal $n \geq 1$. Taip pat, bus nagrinėjamas atvejis, kai $n \leq M$ bet kokiam fiksuotam $M = 1, 2, \ldots$. Šis atvejis interpretuotinas kaip bankroto tikimybės vertinimas baigtiniame laike.

1.1. Apibrėžimas

Atsitiktinio dydžio ξ skirstinys vadinamas sunkiauodegiu, jei $\mathbf{E}e^{\delta\xi} = \infty$ visiems $\delta > 0$.

1.2. Apibrėžimas

Pasiskirstymo funkcija F vadinama ilgauodege (priklausančia klasei $\mathcal{L}$), jei kiekvienam fiksuotam $t > 0$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(x+t)}{\overline{F}(x)} = 1.$$

1.3. Apibrėžimas

Sakoma, kad atsitiktinis dydis ξ yra nuosaikiai pasiskirstęs (jo pasiskirstymo funkcija priklauso klasei $\mathcal{D}$), jei kiekvienam fiksuotamam $t \in (0,1)$

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(xt)}{\overline{F}(x)} < \infty.$$

1.4. Apibrėžimas

Pasiskirstymo funkcijų sekos $F_1, F_2, \ldots$ viršutiniu Matuszewska indeksu J_F^+ vadinsime

$$J_F^+ = -\lim_{y\to\infty} \frac{1}{\log y} \log\left(\liminf_{x\to\infty} \inf_{m\geq 1} \frac{\overline{F_m}(xy)}{\overline{F_m}(x)}\right).$$

Nesunkiai galima gauti, kad

$$J_F^+ = \lim_{y\to\infty} \frac{1}{\log y} \log\left(\limsup_{x\to\infty} \sup_{m\geq 1} \frac{\overline{F_m}\left(x\frac{1}{y}\right)}{\overline{F_m}(x)}\right).$$

Kad J_F^+ apibrėžimas korektiškas klasėje $\mathcal{D}$, yra parodoma priede A.2. Be to, priede A.4 remiantis Hille ir Phillips teorema parodyta, kad J_F^+ galima užrašyti tokia išraiška:

$$J_F^+ = \inf_{y>1} \left\{ -\frac{1}{\log y} \log \left(\liminf_{x\to\infty} \inf_{m\geq 1} \frac{\overline{F_m}(xy)}{\overline{F_m}(x)} \right) \right\}$$

arba

$$J_F^+ = \inf_{y>1} \left\{ \frac{1}{\log y} \log \left(\limsup_{x\to\infty} \sup_{m\geq 1} \frac{\overline{F_m}\left(x\frac{1}{y}\right)}{\overline{F_m}(x)} \right) \right\}.$$

1.5. Apibrėžimas

Atsitiktinis dydis ξ vadinamas subeksponentiniu (jo pasiskirstymo funkcija F priklauso klasei $\mathcal{S}$), jei

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F_+ * F_+}(x)}{\overline{F_+}(x)} = 2,$$

čia $F_+(x) = F(x)\,\mathbb{1}_{\{x\geq 0\}}$, o $F_+ * F_+$ žymi pasiskirstymo funkcijos F_+ sąsūką su pačia savimi.

1.6. Apibrėžimas

Pasiskirstymo funkcija F vadinama stipriai subeksponentine (priklauso klasei $\mathcal{S}^*$), jei $\int_0^\infty \overline{F}(y)\,dy < \infty$ ir

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^x \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} \overline{F}(y)\ dy = 2\int_0^\infty \overline{F}(y)\ dy.$$

Žinoma, kad $\mathcal{L}\cap\mathcal{D}\subset\mathcal{S}\subset\mathcal{L}$ (žr. [7]) ir pasiskirstymo funkcijoms F, kurioms $\int_0^\infty \overline{F}(y)\ dy < \infty$, teisinga $\mathcal{L}\cap\mathcal{D}\subset\mathcal{S}^*\subset\mathcal{S}$ (žr. [8]). Taip pat, yra žinoma, kad $\mathcal{S}^*\cap\mathcal{D}\neq\varnothing$.

Darbe naudojamas žymėjimas

$$L_F = \lim_{y\downarrow 1} \liminf_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)}.$$

Akivaizdu, kad $0 \leq L_F \leq 1$ bet kokiai pasiskirstymo fiunkcijai F. Be to, galima parodyti, kad

$$L_F^{-1} = \lim_{y\uparrow 1} \limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)}.$$

Jei $f(x)$ ir $g(x)$ yra dvi teigiamos funkcijos, žymėsime

$$f(x) \lesssim g(x), \text{ jei } \limsup_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \leq 1 \text{ ir}$$
$$f(x) \gtrsim g(x), \text{ jei } \liminf_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \geq 1.$$

Darbe [1] yra parodyta, kad, kai ξ yra nuosaikiai pasiskirstęs atsitiktinis dydis, teisinga nelygybė

$$\liminf_{x\to\infty} \inf_{n\geq 1} \frac{\mathrm{P}\left(\max\{S_0, S_1, \ldots, S_n\} > x\right)}{\frac{1}{a}\int_x^{x+na} \overline{F}\left(y\right)\, dy} \geq L_F.$$

Taip pat, gaunama, kad kai papildomai tenkinama sąlyga

$$\limsup_{x\to\infty} \sup_{n\geq 1} \frac{\int_x^{x+na} \overline{F}\left(y-1\right)\, dy}{\int_x^{x+na} \overline{F}\left(y\right)\, dy} \leq 1, \tag{1}$$

yra teisinga nelygybė

$$\limsup_{x\to\infty} \sup_{n\geq 1} \frac{\mathrm{P}\left(\max\{S_0, S_1, \ldots, S_n\} > x\right)}{\frac{1}{a}\int_x^{x+na} \overline{F}\left(y\right)\, dy} \leq L_F^{-1}.$$

Tačiau nėra žinoma, ar galima rasti baigtinį įvertį iš viršaus atsisakius papildomos sąlygos. Šio darbo tikslas yra įvertinti iš viršaus tikimybės $\mathrm{P}\left(M_n > x\right)$ elgesį, kai $x \to \infty$, atsisakius prielaidos (1). Gaunamas rezultatas, kad toks baigtinis įvertis egzistuoja.

Remiantis 1-ame ir 2-ame skyriuose pateiktomis lemomis, 3-ame skyriuje įrodoma pagrindinė teorema. Taip pat, 4-ame skyriuje pateikiamas tikslesnis vertinimas baigtinio laiko atveju, t.y. kai $n = 1, 2, \ldots, M$. Pagrindinę darbo teoremą suformuluojame čia.

Teorema 1. *Sakykime,* $\mathbf{E}\xi = -a < 0$, $F \in \mathcal{D}$. *Tada* $\exists\, c > 0:$

$$P\left(\max\{S_0, S_1, \ldots, S_n\} > x\right) \lesssim c\frac{1}{a}\int_x^{x+na} \overline{F}\left(y\right)\, dy$$

tolygiai pagal $n \geq 1$, *kai* $x \to \infty$, *t.y.*

$$\limsup_{x\to\infty}\sup_{n\geq 1}\frac{P\left(\max\{S_0, S_1, \ldots, S_n\} > x\right)}{\frac{1}{a}\int_x^{x+na}\overline{F}\left(y\right)\, dy} \leq c.$$

Čia, įprastai

$$\begin{aligned}
&S_0 = 0,\\
&S_1 = \xi_1,\\
&S_2 = \xi_1 + \xi_2,\\
&\ldots\\
&S_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n,
\end{aligned}$$

o $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *yra nepriklausomos a.d.* ξ *kopijos.*

1. Poterio pavidalo įvertis pasiskirstymo funkcijų šeimai

1 lema. *Sakykime pasiskirstymo funkcijų seka $F_1, F_2, \ldots$ tenkina sąlygą*

$$\limsup_{x\to\infty} \sup_{m\geq 1} \frac{\overline{F_m}\left(\frac{x}{2}\right)}{\overline{F_m}\left(x\right)} < \infty. \tag{2}$$

Tada bet kuriam $p > J_F^+$ egzistuoja konstantos c_1 ir c_2 kurioms teisingas įvertis

$$\sup_{m\geq 1} \frac{\overline{F_m}\left(u\right)}{\overline{F_m}\left(v\right)} \leq c_1 \left(\frac{v}{u}\right)^p, \, kai \, v \geq u \geq c_2.$$

$\triangleright$

Pažymime

$$\Psi(y) := \limsup_{x\to\infty} \sup_{m\geq 1} \frac{\overline{F_m}\left(yx\right)}{\overline{F_m}\left(x\right)}.$$

Iš sąlygos (2) ir Ψ apibrėžimo turime:

$$\Psi\left(\frac{1}{2}\right) < \infty,$$

$$\Psi\left(y_1 y_2\right) \leq \Psi\left(y_1\right)\Psi\left(y_2\right), \, y_1, y_2 > 0,$$

$$\Psi\left(1\right) = 1,$$

$$\Psi\left(y\right) \leq 1, \, y \geq 1,$$

$$\Psi\left(y\right) \downarrow, \, y \uparrow.$$

Iš šių savybių išplaukia, kad $\Psi\left(y\right) < \infty, \forall y > 0$.

Antra vertus, iš J_F^+ apibrėžimo išplaukia, kad

$$
\begin{aligned}
J_F^+ &= -\lim_{y\to\infty} \frac{1}{\log y} \log \left(\liminf_{x\to\infty} \inf_{m\geq 1} \frac{\overline{F_m}(xy)}{\overline{F_m}(x)} \right) \\
&= -\lim_{y\to\infty} \frac{1}{\log y} \log \left(\frac{1}{\limsup_{x\to\infty} \frac{1}{\inf_{m\geq 1} \frac{\overline{F_m}(xy)}{\overline{F_m}(x)}}} \right) \\
&= -\lim_{y\to\infty} \frac{1}{\log y} \log \left(\frac{1}{\limsup_{x\to\infty} \sup_{m\geq 1} \frac{\overline{F_m}(x)}{\overline{F_m}(xy)}} \right) \\
&= -\lim_{y\to\infty} \frac{1}{\log y} \log \left(\frac{1}{\limsup_{x\to\infty} \sup_{m\geq 1} \frac{\overline{F_m}\left(x\frac{1}{y}\right)}{\overline{F_m}(x)}} \right) \\
&= \lim_{y\to\infty} \frac{1}{\log y} \log \left(\limsup_{x\to\infty} \sup_{m\geq 1} \frac{\overline{F_m}\left(x\frac{1}{y}\right)}{\overline{F_m}(x)} \right) \\
&= \lim_{z\downarrow 0} \frac{1}{\log \frac{1}{z}} \log \left(\limsup_{x\to\infty} \sup_{m\geq 1} \frac{\overline{F_m}(xz)}{\overline{F_m}(x)} \right) \\
&= \lim_{y\downarrow 0} \left(-\frac{1}{\log y} \right) \log \Psi(y) \\
&= \lim_{y\downarrow 0} \left(-\frac{\log \Psi(y)}{\log y} \right).
\end{aligned}
$$

Tegul $p > J_F^+$. Toks baigtinis p egzistuoja. Iš tiesų, turime J_F^+ išraišką (žr. priedą A.4):

$$
J_F^+ = \inf_{y>1} \left\{ \frac{1}{\log y} \log \left(\limsup_{x\to\infty} \sup_{m\geq 1} \frac{\overline{F_m}\left(x\frac{1}{y}\right)}{\overline{F_m}(x)} \right) \right\}.
$$

Tarkime priešingai, kad $J_F^+ = \infty$. Bet tada

$$
\limsup_{x\to\infty} \sup_{m\geq 1} \frac{\overline{F_m}\left(x\frac{1}{y}\right)}{\overline{F_m}(x)} = \infty, \quad \forall y > 1
$$

t.y. gauname prieštarą sąlygai (2).

Taigi, imkime $p > J_F^+$. Tada

$$
\begin{aligned}
\lim_{y\downarrow 0} \left(-\frac{\log \Psi(y)}{\log y} \right) &< p, \\
\lim_{y\downarrow 0} \left(\frac{\log \Psi(y)}{\log y} \right) &> -p.
\end{aligned}
$$

Todėl egzistuoja $0 < y^* < 1$, kuriam

$$
\frac{\log \Psi(y^*)}{\log y^*} > -p.
$$

Iš čia

$$\log \Psi(y^*) < -p \log y^*,$$

$$\Psi(y^*) < \left(\frac{1}{y^*}\right)^p.$$

Arba

$$\lim_{x \to \infty} \sup \sup_{m \geq 1} \frac{\overline{F_m}(xy^*)}{\overline{F_m}(x)} < \left(\frac{1}{y^*}\right)^p.$$

Galima parinkti tokį x^*, kad

$$\sup_{m \geq 1} \frac{\overline{F_m}(uy^*)}{\overline{F_m}(u)} \leq \left(\frac{1}{y^*}\right)^p$$

visiem $u \geq x^*$.

Tegul dabar $v \geq u \geq x^*$ ir

$$\left(\frac{1}{y^*}\right)^r \leq \frac{v}{u} < \left(\frac{1}{y^*}\right)^{r+1}$$

kažkokiam $r \geq 0$.

Tada turime

$$\frac{u}{(y^*)^r} \leq v < \frac{u}{(y^*)^{r+1}},$$

$$(y^*)^{r+1} < \frac{u}{v} \leq (y^*)^r,$$

tai yra

$$v(y^*)^r \geq u,$$

$$v(y^*)^{r+1} < u.$$

Vadinasi,

$$\begin{aligned}
\sup_{m \geq 1} \frac{\overline{F_m}(u)}{\overline{F_m}(v)} &= \sup_{m \geq 1} \frac{\overline{F_m}(vy^*)}{\overline{F_m}(v)} \frac{\overline{F_m}\left(v(y^*)^2\right)}{\overline{F_m}(vy^*)} \cdots \frac{\overline{F_m}(v(y^*)^r)}{\overline{F_m}\left(v(y^*)^{r-1}\right)} \frac{\overline{F_m}(u)}{\overline{F_m}(v(y^*)^r)} \\
&\leq \sup_{m \geq 1} \frac{\overline{F_m}(vy^*)}{\overline{F_m}(v)} \sup_{m \geq 1} \frac{\overline{F_m}\left(v(y^*)^2\right)}{\overline{F_m}(vy^*)} \cdots \sup_{m \geq 1} \frac{\overline{F_m}(v(y^*)^r)}{\overline{F_m}\left(v(y^*)^{r-1}\right)} \sup_{m \geq 1} \frac{\overline{F_m}(u)}{\overline{F_m}(v(y^*)^r)} \\
&\leq \left(\frac{1}{y^*}\right)^{pr} \sup_{m \geq 1} \frac{\overline{F_m}(v(y^*)^r y^*)}{\overline{F_m}(v(y^*)^r)} \\
&\leq \left(\frac{1}{y^*}\right)^{pr} \left(\frac{1}{y^*}\right)^p.
\end{aligned}$$

Kadangi $\left(\frac{1}{y^*}\right)^r \leq \frac{v}{u}$, tai iš gautos nelygybės išplaukia, kad

$$\sup_{m \geq 1} \frac{\overline{F_m}(u)}{\overline{F_m}(v)} \leq \left(\frac{v}{u}\right)^p \left(\frac{1}{y^*}\right)^p,$$

jeigu $v \geq u \geq x^*$.

$\triangleleft$

2. Kesten pavidalo įvertis pasiskirstymo funkcijų šeimai

2 lema. *Sakykime, pasiskirstymo funkcijų seka $F_1, F_2, \dots$ tenkina*

$$\limsup_{x\to\infty} \sup_{m\geq 1} \frac{\overline{F_m}\left(\frac{x}{2}\right)}{\overline{F_m}\left(x\right)} < \infty.$$

Tada bet kuriam $p > J_F^+$ egzistuoja konstantos $c_1 > 0$ ir $c_2 > 0$, kurioms

$$\sup_{i\geq 1} \frac{\overline{F_i^{*m}}\left(x\right)}{\overline{F_i}\left(x\right)} \leq c_1 m^{p+1},$$

visiems $x \geq c_2 m$ ir visiems $m \geq 1$.

$\triangleright$

Sakykime, $x \geq 0$. Pažymėkime ξ_i a.d. su pasiskirstymo funkcija F_i. Tegul, be to, $\xi_i^{(1)}, \xi_i^{(2)}, \dots, \xi_i^{(m)}$ yra nepriklausomos a.d. ξ_i kopijos. Tada bet kuriam $x \geq 0$

$$\begin{aligned}
\overline{F_i^{*m}}\left(x\right) &= P\left(\xi_1^{(1)} + \xi_1^{(2)} + \dots + \xi_1^{(m)} > x\right) \\
&\leq P\left(\exists j \in \{1, 2, \dots, m\} : \xi_i^{(j)} > \frac{x}{m}\right) \\
&= P\left(\bigcup_{j=1}^{m} \{\xi_i^{(j)} > \frac{x}{m}\}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \overline{F_i}\left(\frac{x}{m}\right) \\
&= m\overline{F_i}\left(\frac{x}{m}\right).
\end{aligned}$$

Todėl

$$\sup_{i\geq 1} \frac{\overline{F_i^{*m}}\left(x\right)}{\overline{F_i}\left(x\right)} \leq m \sup_{i\geq 1} \frac{\overline{F_i}\left(\frac{x}{m}\right)}{\overline{F_i}\left(x\right)}. \tag{3}$$

Pagal **1 lemą** iš 1-o skyriaus gauname, kad konstantoms $c_1 > 0$ ir $c_2 > 0$

$$\sup_{i\geq 1} \frac{\overline{F_i}\left(\frac{x}{m}\right)}{\overline{F_i}\left(x\right)} \leq c_1 \left(\frac{x}{\frac{x}{m}}\right)^p = c_1 m^p,$$

jeigu $x \geq \frac{x}{m} \geq c_2$.

Įstatę į (3) turime, kad

$$\sup_{i\geq 1}\frac{\overline{F_i^{*m}}\,(x)}{\overline{F_i}\,(x)}\leq c_1 m^{p+1}$$

jeigu $x \geq c_2 m$.

$\triangleleft$

3. Pagrindinės teoremos įrodymas

Šiame skyriuje pateikiamas **teoremos 1** įrodymas.

$\triangleright$

Kartojant įrodymo pradžią iš [1], imkime $A > a$ ir δ, $\varepsilon \in \big(0, \min\{\frac{1}{2}, \frac{a}{2}\}\big)$ bei apibrėžkime apibendrintą atsitiktinį dydį

$$\tau = \tau\left(\varepsilon, A\right) = \begin{cases} \min\{j \geq 1 : S_j > A - j\left(a - \varepsilon\right)\}, \\ \infty, \text{ jei } S_j \leq A - j\left(a - \varepsilon\right) \text{visiems j.} \end{cases}$$

Pažymime

$$\gamma = \gamma\left(\varepsilon, A\right) = \mathrm{P}\left(\tau > \infty\right).$$

Bet kuriam $K \in \mathbb{N}$ turime

$$\begin{aligned} \gamma &= \mathrm{P}\left(\tau > \infty\right) = \mathrm{P}\left(\exists j:\ S_j > A - j\left(a - \varepsilon\right)\right) \\ &= \mathrm{P}\left(\left(\bigcup_{j=1}^{K}\left\{\frac{S_j}{j} + a > \frac{A}{j} + \varepsilon\right\}\right) \bigcup \left(\bigcup_{j=K+1}^{\infty}\left\{\frac{S_j}{j} + a > \frac{A}{j} + \varepsilon\right\}\right)\right) \\ &\leq \sum_{j=1}^{K} \mathrm{P}\left(\frac{S_j}{j} + a > \frac{A}{K}\right) + \mathrm{P}\left(\sup_{j \geq K+1}\left|\frac{S_j}{j} + a\right| > \varepsilon\right). \end{aligned}$$

Iš stipriojo didžiųjų skaičių dėsnio išplaukia, kad bet kuriam fiksuotam ε

$$\lim_{A \to \infty} \gamma\left(\varepsilon, A\right) = 0.$$

Vertinkime tikimybes $\mathrm{P}\left(S_{\tau \wedge n} > x\right)$.

Bet kuriam $n \geq 1$ turime:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(S_{\tau\wedge n>x}\right) &= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}\left(\tau\wedge n=k,\, S_k>x\right) \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}\left(S_{k-1}\leq A-(k-1)(a-\varepsilon),\, S_k>x\right) \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \overline{F}\left(x-A+(k-1)(a-\varepsilon)\right) \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a-\varepsilon}\int_{x+(k-1)(a-\varepsilon)}^{x+k(a-\varepsilon)} \overline{F}\left(y-A-(a-\varepsilon)\right)\,dy \\
&= \frac{1}{a-\varepsilon}\int_{x}^{x+n(a-\varepsilon)} \overline{F}\left(y-A-(a-\varepsilon)\right)\,dy \\
&\leq \sup_{y\geq x}\frac{\overline{F}\left(y-A-(a-\varepsilon)\right)}{\overline{F}(y)}\frac{1}{a-\varepsilon}\int_{x}^{x+na}\overline{F}(y)\,dy.
\end{aligned}$$

Pritaikę L_F^{-1} apibrėžimą, galime gauti, kad

$$\limsup_{x\to\infty}\sup_{n\geq 1}\frac{\mathrm{P}\left(S_{\tau\wedge n}>x\right)}{\frac{1}{a-\varepsilon}\int_x^{x+na}\overline{F}(y)\,dy}\leq L_F^{-1}.$$

Tai reiškia, kad pakankamai dideliems $x\,(x\geq x_0)$

$$\mathrm{P}\left(S_{\tau\wedge n}>x\right)\leq L_F^{-1}\frac{1+\varepsilon}{a-\varepsilon}\int_x^{x+na}\overline{F}(y)\,dy,\quad \forall n=1,2,\ldots \tag{4}$$

Apibrėžkime daugiau atstatymo momentų. Tegul $\tau_1=\tau$, o visiems $k\geq 2$

$$\tau_k=\tau_k(\varepsilon,A)=\begin{cases}\tau_{k-1}+\min\{j\geq 1: S_{\tau_{k-1}+j}-S_{\tau_{k-1}}>A-j(a-\varepsilon)\},\ \text{jeigu } \tau_{k-1}<\infty,\\ \infty,\ \text{jeigu } \tau_{k-1}=\infty \text{ arba } S_{\tau_{k-1}+j}-S_{\tau_{k-1}}\leq A-j(a-\varepsilon)\,\text{visiems j.}\end{cases}$$

Jeigu $\tau_k<\infty$, tai pagal A.3 priedo lemą vektoriai

$$\left(\tau_1,S_{\tau_1}\right),\left(\tau_2-\tau_1,S_{\tau_2}-S_{\tau_1}\right),\ldots,\left(\tau_k-\tau_{k-1},S_{\tau_k}-S_{\tau_{k-1}}\right) \tag{5}$$

yra nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę.

Sakykime, $\varphi_{n,1},\varphi_{n,2},\ldots$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai, kuriems

$$\mathrm{P}\left(\varphi_{n,1}>x\right)=\mathrm{P}\left(S_{\tau_1\wedge n}>x|\tau_1<\infty\right).$$

Pagal (4) turime, kad

$$\mathrm{P}\left(\varphi_{n,1} > x\right) = \frac{\mathrm{P}\left(S_{\tau_1 \wedge n} > x,\, \tau_1 < \infty\right)}{\mathrm{P}\left(\tau_1 < \infty\right)} \leq \frac{\mathrm{P}\left(S_{\tau_1 \wedge n} > x\right)}{\gamma} \leq \frac{1+\varepsilon}{\gamma L_F\left(a-\varepsilon\right)} \int_x^{x+na} \overline{F}\left(y\right) dy, \qquad (6)$$

visiems $x \geq x_0$ ir visiems $n = 1, 2, \ldots$

Apibrėžkime funkcijų aibę $G_n(x)$ lygybėmis

$$\overline{G_n}\left(x\right) = \begin{cases} 1 & \text{, jeigu } x < x_0 + 1, \\ \min\{1, \frac{1+\varepsilon}{\gamma L_F(a-\varepsilon)} \int_x^{x+na} \overline{F}\left(y\right)\, dy\} & \text{, jeigu } x > x_0 + 1. \end{cases} \qquad (7)$$

Kadangi $\int_0^\infty \overline{F}(y)\, dy < \infty$, tai $G_n(x)$ yra pasiskirstymo funkcijos. Be to, iš (6) turime, kad

$$\mathrm{P}\left(\varphi_{n,1} > x\right) \leq \overline{G_n}\left(x\right) \qquad (8)$$

visiems $x \in \mathbb{R}$ ir visiems $n = 1, 2, \ldots.$

Pažymėkime

$$M_n = \max\{S_n, S_1, \ldots, S_n\}.$$

Tegul x pakankamai didelis ($x > A$). Jeigu $M_n > x$, tai egzistuoja $\tau_k \leq n$ ir $j \in [\tau_k, \tau_{k+1})$ tokie, kad $S_j > x$. Iš tiesų, priešingu atveju gautume, kad nėra tokio $\tau_k \leq n$. Vadinasi, visi $\tau_k > n$. Taigi ir $\tau_1 \geq n+1$. Pagal apibrėžimą tokiu atveju $S_j \leq A - j\left(a-\varepsilon\right)$ visiems $j = 1, 2, \ldots, n$, tai yra

$$S_1 \leq A - \left(a-\varepsilon\right) < x,$$

$$S_2 \leq A - 2\left(a-\varepsilon\right) < x,$$

$$\ldots$$

$$S_n \leq A - n\left(a-\varepsilon\right) < x.$$

Gavome prieštaravimą tam, kad $M_n > x$. Taigi, turime

$$\mathrm{P}\left(M_n > x\right) \leq \mathrm{P}\left(\, \exists \tau_k \leq n \text{ ir } j \in [\tau_k, \tau_{k+1}) : S_j > x\right). \qquad (9)$$

Tolimesniam vertinimui pastebėkime, kad

$$\{S_j > x \text{ kažkokiam } j \in [\tau_k, \tau_{k+1})\} \subset \{S_{\tau_k} > x - A + a - \varepsilon\}. \qquad (10)$$

Iš tiesų, tarę priešingai, $S_{\tau_k} \leq x - A + a - \varepsilon < x$, gauname, kad $j \in (\tau_k, \tau_{k+1})$ ir

$$S_j - S_{\tau_k} > x - (x - A + a - \varepsilon) = A - (a - \varepsilon)\,.$$

Antra vertus, pagal sekos $\{\tau_k\}$ apibrėžimą turi būti

$$S_j - S_{\tau_k} \leq A - (j - \tau_k)\,(a - \varepsilon) \leq A - (a - \varepsilon)$$

visiems $j \in (\tau_k, \tau_{k+1})$.

Gautas prieštaravimas rodo, kad įdėjimas (10) yra teisingas. Taigi, iš (9) ir (10) turime, kad pakankamai dideliems $x\,(x > A)$

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\,(M_n > x) &\leq \mathrm{P}\,(\,\exists\,\tau_k \leq n : S_{\tau_k} > x - A + a - \varepsilon) \\
&= \mathrm{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n}\{S_{\tau_k} > x - A + a - \varepsilon,\, \tau_k \leq n\}\right) \\
&= \mathrm{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n}\{S_{\tau_k \wedge n} > x - A + a - \varepsilon,\, \tau_k \leq n\}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\,(S_{\tau_k \wedge n} > x - A + a - \varepsilon,\, \tau_k \leq n) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\,(S_{\tau_k \wedge n} > x - A + a - \varepsilon,\, \tau_k \leq \infty)
\end{aligned}$$

Pagal (5) ir atsitiktinių dydžių $\varphi_{n,1}, \varphi_{n,2}, \ldots$ apibrėžimą turime, kad bet kuriam $z \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{P}\,(S_{\tau_1 \wedge n} > z,\, \tau_1 < \infty) = \mathrm{P}\,(S_{\tau_1 \wedge n} > z|\, \tau_1 < \infty)\,\mathrm{P}\,(\tau_1 < \infty) = \gamma \mathrm{P}\,(\varphi_{n,1} > z)\,,$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}\,(S_{\tau_2 \wedge n} > z,\, \tau_2 < \infty) \\
&\quad = \mathrm{P}\,(S_{\tau_2 \wedge n} - S_{\tau_1 \wedge n} + S_{\tau_1 \wedge n} > z|\tau_2 < \infty)\,\mathrm{P}\,(\,\tau_2 < \infty) \\
&\quad = \mathrm{P}\,(\tau_2 - \tau_1 + \tau_1 < \infty)\int_{\mathbb{R}} \mathrm{P}\,(S_{\tau_2 \wedge n} - S_{\tau_1 \wedge n} > z - y|\tau_2 < \infty)\;d\mathrm{P}\,(S_{\tau_1 \wedge n} \leq y|\tau_2 < \infty) \\
&\quad = \mathrm{P}\,(\tau_2 - \tau_1 < \infty,\, \tau_1 < \infty)\int_{\mathbb{R}} \mathrm{P}\,(S_{\tau_1 \wedge n} > z - y|\tau_1 < \infty)\;d\frac{\mathrm{P}\,(S_{\tau_1 \wedge n} \leq y,\, \tau_2 - \tau_1 < \infty)}{\mathrm{P}\,(\tau_2 - \tau_1 < \infty)} \\
&\quad = \mathrm{P}\,(\tau_2 - \tau_1 < \infty)\,\mathrm{P}\,(\tau_1 < \infty)\int_{\mathbb{R}} \mathrm{P}\,(\varphi_{n,1} > z - y)\;d\frac{\mathrm{P}\,(S_{\tau_1 \wedge n} \leq y,\, \tau_1 < \infty)\,\mathrm{P}\,(\tau_2 - \tau_1 < \infty)}{\mathrm{P}\,(\tau_1 < \infty)\,\mathrm{P}\,(\tau_2 - \tau_1 < \infty)} \\
&\quad = \gamma^2 \int_{\mathbb{R}} \mathrm{P}\,(\varphi_{n,1} > z - y)\;d\mathrm{P}\,(S_{\tau_1 \wedge n} \leq y,\, \tau_1 < \infty) \\
&\quad = \gamma^2 \int_{\mathbb{R}} \mathrm{P}\,(\varphi_{n,1} > z - y)\;d\mathrm{P}\,(\varphi_{n,1} \leq y) \\
&\quad = \gamma^2 \mathrm{P}\,(\varphi_{n,1} + \varphi_{n,2} > z)\,.
\end{aligned}$$

Tęsdami toliau gautume, kad bet kuriam $k = 1, 2, \ldots$

$$\mathrm{P}\left(S_{\tau_k \wedge n} > z,\, \tau_k < \infty\right) = \gamma^k \mathrm{P}\left(\varphi_{n,1} + \varphi_{n,2} + \cdots + \varphi_{n,k} > z\right).$$

Vadinasi,

$$\mathrm{P}\left(M_n > x\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \gamma^k \mathrm{P}\left(\varphi_{n,1} + \varphi_{n,2} + \cdots + \varphi_{n,k} > x - A + a - \varepsilon\right). \tag{11}$$

Tegul $\Psi_{n,1}, \Psi_{n,2}, \ldots$ yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, kurie nepriklauso nuo $\varphi_{n,1}, \varphi_{n,2}, \ldots$ ir kurie yra vienodai pasiskirstę pagal pasiskirstymo funkciją $G_n(x)$.

Pagal (8) turime

$$\mathrm{P}\left(\varphi_{n,1} > z\right) \leq \overline{G_n}\left(z\right), \ \ z \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(\varphi_{n,1} + \varphi_{n,2} > z\right) &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{P}\left(\varphi_{n,1} > z - y\right) \, d\mathrm{P}\left(\varphi_{n,2} \leq y\right) \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \mathrm{P}\left(\Psi_{n,1} > z - y\right) \, d\mathrm{P}\left(\varphi_{n,2} \leq y\right) \\
&= \mathrm{P}\left(\Psi_{n,1} + \varphi_{n,2} > z\right) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{P}\left(\varphi_{n,2} > z - y\right) \, d\mathrm{P}\left(\Psi_{n,1} \leq y\right) \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \mathrm{P}\left(\Psi_{n,2} > z - y\right) \, d\mathrm{P}\left(\Psi_{n,1} \leq y\right) \\
&= \mathrm{P}\left(\Psi_{n,1} + \Psi_{n,2} > z\right) \\
&= \overline{G_n^{*2}}\left(z\right), \ \ z \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Tęsdami gautume, kad bet kuriam $z \in \mathbb{R}$ ir bet kuriam $k = 1, 2, \ldots$

$$\mathrm{P}\left(\varphi_{n,1} + \varphi_{n,2} + \cdots + \varphi_{n,k} > z\right) \leq \overline{G_n^{*k}}\left(z\right).$$

Vadinasi, pagal (11) turime, kad

$$\mathrm{P}\left(M_n > x\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \gamma^k \overline{G_n^{*k}}\left(x - A + a - \varepsilon\right).$$

Taigi, turime

$$
\begin{aligned}
&\limsup_{x\to\infty}\sup_{n\geq1}\frac{P\left(\max\{S_0,\ldots,S_n\}>x\right)}{\frac{1}{a}\int_x^{x+na}\overline{F}\left(y\right)\,dy}\\
\leq&\limsup_{x\to\infty}\sup_{n\geq1}\frac{P\left(M_n>x\right)}{\overline{G_n}\left(x-A+a-\varepsilon\right)}\limsup_{x\to\infty}\sup_{n\geq1}\frac{\overline{G_n}\left(x-A+a-\varepsilon\right)}{\frac{1}{a}\int_x^{x+na}\overline{F}\left(y\right)\,dy}\\
\leq&\limsup_{x\to\infty}\sup_{n\geq1}\frac{\sum_{k=1}^{\infty}\gamma^k\overline{G_n^{*k}}\left(x-A+a-\varepsilon\right)}{\overline{G_n}\left(x-A+a-\varepsilon\right)}\limsup_{x\to\infty}\sup_{n\geq1}\frac{\overline{G_n}\left(x-A+a-\varepsilon\right)}{\frac{1}{a}\int_x^{x+na}\overline{F}\left(y\right)\,dy}\\
=&\limsup_{x\to\infty}\sup_{n\geq1}\frac{\sum_{k=1}^{\infty}\gamma^k\overline{G_n^{*k}}\left(x\right)}{\overline{G_n}\left(x\right)}\limsup_{x\to\infty}\sup_{n\geq1}\frac{\overline{G_n}\left(x-A+a-\varepsilon\right)}{\frac{1}{a}\int_x^{x+na}\overline{F}\left(y\right)\,dy}.
\end{aligned}
$$

Kadangi

$$
\begin{aligned}
&\limsup_{x\to\infty}\sup_{n\geq1}\frac{\overline{G_n}\left(x-A+a-\varepsilon\right)}{\frac{1}{a}\int_x^{x+na}\overline{F}\left(y\right)\,dy}\\
=&\limsup_{x\to\infty}\sup_{n\geq1}\frac{\left(1+\varepsilon\right)a}{\gamma L_F\left(a-\varepsilon\right)}\frac{\int_{x-A+a-\varepsilon}^{x-A+a-\varepsilon+na}\overline{F}\left(y\right)\,dy}{\int_x^{x+na}\overline{F}\left(y\right)\,dy}\\
=&\frac{\left(1+\varepsilon\right)a}{\gamma L_F\left(a-\varepsilon\right)}\limsup_{x\to\infty}\sup_{n\geq1}\frac{\int_x^{x+na}\overline{F}\left(y-A+a-\varepsilon\right)\,dy}{\int_x^{x+na}\overline{F}\left(y\right)\,dy}\\
\leq&\frac{\left(1+\varepsilon\right)a}{\gamma L_F\left(a-\varepsilon\right)}\limsup_{x\to\infty}\sup_{n\geq1}\frac{\sup_{y\geq x}\frac{\overline{F}(y-A+a-\varepsilon)}{\overline{F}(y)}\int_x^{x+na}\overline{F}\left(y\right)\,dy}{\int_x^{x+na}\overline{F}\left(y\right)\,dy}\\
\leq&\frac{\left(1+\varepsilon\right)a}{\gamma L_F\left(a-\varepsilon\right)}\lim_{\delta\uparrow1}\limsup_{x\to\infty}\frac{\overline{F}\left(y\delta\right)}{\overline{F}\left(y\right)}\\
=&\frac{\left(1+\varepsilon\right)a}{\gamma L_F^2\left(a-\varepsilon\right)},
\end{aligned}
$$

tai lieka įvertinti dydį

$$
\limsup_{x\to\infty}\sup_{n\geq1}\frac{\sum_{k=1}^{\infty}\gamma^k\overline{G_n^{*k}}\left(x\right)}{\overline{G_n}\left(x\right)}.
$$

Pakankamai dideliam x $(x > x_0 + 1)$ turime

$$\begin{aligned}
\sup_{n\geq 1}\frac{\overline{G_n}\left(\frac{x}{2}\right)}{\overline{G_n}(x)} &= \sup_{n\geq 1}\frac{\int_{\frac{x}{2}}^{\frac{x}{2}+na}\overline{F}(y)\,dy}{\int_x^{x+na}\overline{F}(y)\,dy}\\
&= \sup_{n\geq 1}\frac{\int_x^{x+2na}\overline{F}\left(\frac{z}{2}\right)\,d\left(\frac{z}{2}\right)}{\int_x^{x+na}\overline{F}(y)\,dy}\\
&= \frac{1}{2}\sup_{n\geq 1}\frac{\int_x^{x+na}\overline{F}\left(\frac{z}{2}\right)\,dz+\int_{x+na}^{x+2na}\left(\frac{z}{2}\right)\,dz}{\int_x^{x+na}\overline{F}(y)\,dy}\\
&\leq \frac{1}{2}\sup_{n\geq 1}\frac{2\int_x^{x+na}\overline{F}\left(\frac{z}{2}\right)\,dz}{\int_x^{x+na}\overline{F}(y)\,dy}\\
&\leq \sup_{n\geq 1}\frac{\sup_{y\geq x}\frac{\overline{F}\left(\frac{y}{2}\right)}{\overline{F}(y)}\int_x^{x+na}\overline{F}(y)\,dy}{\int_x^{x+na}\overline{F}(y)\,dy}\\
&= \sup_{y\geq x}\frac{\overline{F}\left(\frac{y}{2}\right)}{\overline{F}(y)} < \infty,
\end{aligned}$$

todėl

$$\limsup_{x\to\infty}\sup_{n\geq 1}\frac{\overline{G_n}\left(\frac{x}{2}\right)}{\overline{G_n}(x)} < \infty,$$

t.y. funkcijų seka G_n tenkina **2 lemos** sąlygą. Pagal šią lemą turime, kad bet kuriam $p > J_G^+$, $\exists\, c_3 > 0$ ir $c_4 > 0$, kad

$$\sup_{n\geq 1}\frac{\overline{G_n^{*k}}(x)}{\overline{G_n}(x)} \leq c_3 k^{p+1},$$

visiems $x \geq c_4 k$ ir visiems $k \geq 1$. Čia

$$J_G^+ = -\lim_{y\to\infty}\frac{1}{\log y}\log\left(\liminf_{x\to\infty}\inf_{m\geq 1}\frac{\overline{G_m}(xy)}{\overline{G_m}(x)}\right).$$

Turime

$$\limsup_{x\to\infty}\sup_{n\geq 1}\frac{\sum_{k=1}^{\infty}\gamma^k\overline{G_n^{*k}}(x)}{\overline{G_n}(x)} \leq \limsup_{x\to\infty}\sup_{n\geq 1}\frac{\sum_{k=1}^{\left[\frac{x}{c_4}\right]}\gamma^k\overline{G_n^{*k}}(x)}{\overline{G_n}(x)} + \limsup_{x\to\infty}\sup_{n\geq 1}\frac{\sum_{k=\left[\frac{x}{c_4}\right]+1}^{\infty}\gamma^k\overline{G_n^{*k}}(x)}{\overline{G_n}(x)}.$$

Pritaikome **2 lemą** pirmajai ribai. Imame kokį nors $p^* > \max\{1, J_G^+\}$. Tada turime

$$\begin{aligned}
&\limsup_{x\to\infty}\sup_{n\geq 1}\frac{\sum_{k=1}^{\left[\frac{x}{c_4}\right]}\gamma^k\overline{G_n^{*k}}(x)}{\overline{G_n}(x)}\\
&\leq \limsup_{x\to\infty}\sum_{k=1}^{\left[\frac{x}{c_4}\right]}\gamma^k\sup_{n\geq 1}\frac{\overline{G_n^{*k}}(x)}{\overline{G_n}(x)}\\
&\leq c_3\limsup_{x\to\infty}\sum_{k=1}^{\left[\frac{x}{c_4}\right]}\gamma^k k^{p^*+1}\\
&= c_3\sum_{k=1}^{\infty}\gamma^k k^{p^*+1}\\
&= c_3\gamma\sum_{k=0}^{\infty}\gamma^k (k+1)^{p^*+1}.
\end{aligned}$$

Vertiname antrąją ribą. Kai $x > x_0 + 1$, turime

$$\begin{aligned}
&\limsup_{x\to\infty}\sup_{n\geq 1}\frac{\sum_{k=\left[\frac{x}{c_4}\right]+1}^{\infty}\gamma^k\overline{G_n^{*k}}(x)}{\overline{G_n}(x)}\\
&\leq \limsup_{x\to\infty}\sup_{n\geq 1}\frac{\sum_{k=\left[\frac{x}{c_4}\right]+1}^{\infty}\gamma^k}{\overline{G_n}(x)}\\
&= \limsup_{x\to\infty}\sup_{n\geq 1}\frac{\gamma^{\left[\frac{x}{c_4}\right]+1}}{1-\gamma}\frac{\gamma L_F(a-\varepsilon)}{(1+\varepsilon)\int_x^{x+na}\overline{F}(y)\,dy}\\
&= \frac{\gamma L_f(a-\varepsilon)}{(1-\gamma)(1+\varepsilon)}\limsup_{x\to\infty}\frac{\gamma^{\left[\frac{x}{c_4}\right]+1}}{\int_x^{x+a}\overline{F}(y)\,dy}\\
&\leq \frac{\gamma L_f(a-\varepsilon)}{(1-\gamma)(1+\varepsilon)}\limsup_{x\to\infty}\frac{\gamma^{\left[\frac{x}{c_4}\right]+1}}{a\overline{F}(x+a)} = 0
\end{aligned}$$

čia paskutinė lygybė išplaukia iš fakto, kad nuosaikiai pasiskirstęs skirstinys yra sunkiauodegis.

Taigi, gavome, jog $\exists\, c_3 > 0$:

$$\limsup_{x\to\infty}\sup_{n\geq 1}\frac{\sum_{k=1}^{\infty}\gamma^k\overline{G_n^{*k}}(x)}{\overline{G_n}(x)} \leq c_3\gamma\sum_{k=0}^{\infty}\gamma^k(k+1)^{p^*+1}$$

Galiausiai turime

$$\limsup_{x\to\infty}\sup_{n\geq 1}\frac{P(\max\{S_0,\ldots,S_n\}>x)}{\frac{1}{a}\int_x^{x+na}\overline{F}(y)\,dy} \leq c_3\sum_{k=0}^{\infty}\gamma^k(k+1)^{p^*+1}\frac{(1+\varepsilon)a}{L_F^2(a-\varepsilon)}$$

Žinome, kad $\sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k (k+1)^{p^*+1}$ konverguoja, jei $\gamma < \frac{1}{2}$. Todėl, perėję prie ribos, kai $A \to \infty$ (tada $\gamma \to 0$), o po to, kai $\varepsilon \to 0$, gauname

$$\limsup_{x\to\infty} \sup_{n\geq 1} \frac{P\left(\max\{S_0, \ldots, S_n\} > x\right)}{\frac{1}{a}\int_x^{x+na} \overline{F}\left(y\right)\, dy} \leq c_3 L_F^{-2}$$

$\triangleleft$

4. Teorema esant baigtiniam laikui

Teorema 2. *Sakykime,* $\mathbf{E}\xi = -a < 0$, $F \in \mathcal{D}$. *Tada* $\forall M = 1, 2, \ldots$

$$\limsup_{x\to\infty} \max_{1\le n\le M} \frac{P\left(\max\{S_0, S_1, \ldots, S_n\} > x\right)}{\frac{1}{a}\int_x^{x+na} \overline{F}(y)\ dy} \le L_F^{-2}.$$

Čia, įprastai

$$S_0 = 0,$$
$$S_1 = \xi_1,$$
$$S_2 = \xi_1 + \xi_2,$$
$$\ldots$$
$$S_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n,$$

o $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *yra nepriklausomos a.d.* ξ *kopijos.*

$\triangleright$

Pažymėkime

$$S_1^+ = \xi_1^+,$$
$$S_2^+ = \xi_1^+ + \xi_2^+,$$
$$\ldots$$
$$S_n^+ = \xi_1^+ + \xi_2^+ + \cdots + \xi_n^+,$$

kur $\xi_i^+ = \max\{0, \xi_i\}$.

Teigiamiems x turime

$$\begin{aligned}
\Delta :=& \limsup_{x\to\infty} \max_{1\le n\le M} \frac{P\left(\max\{S_0, S_1, \ldots, S_n\} > x\right)}{\frac{1}{a}\int_x^{x+na} \overline{F}(y)\ dy} \\
\le& \limsup_{x\to\infty} \max_{1\le n\le M} \frac{P\left(\max\{S_0^+, S_1^+, \ldots, S_n^+\} > x\right)}{\frac{1}{a}\int_x^{x+na} \overline{F}(y)\ dy} \\
=& \limsup_{x\to\infty} \max_{1\le n\le M} \frac{P\left(S_n^+ > x\right)}{\frac{1}{a}\int_x^{x+na} \overline{F}(y)\ dy} \\
=& \max_{1\le n\le M} \limsup_{x\to\infty} \frac{P\left(S_n^+ > x\right)}{\frac{1}{a}\int_x^{x+na} \overline{F}(y)\ dy}
\end{aligned}$$

$$\leq \max_{1 \leq n \leq M} \limsup_{x \to \infty} \frac{P\left(S_n^+ > x\right)}{n\mathrm{P}\left(\xi_1^+ > x\right)} \limsup_{x \to \infty} \frac{n\mathrm{P}\left(\xi_1^+ > x\right)}{\frac{1}{a}\int_x^{x+na} \overline{F}\left(y\right)\, dy}.$$

Tada, pagal **5 lemą** iš A.6 priedo turime

$$\begin{aligned}
\Delta &\leq \max_{1 \leq n \leq M} L_F^{-1} \limsup_{x \to \infty} \frac{n\overline{F}\left(x\right)}{n\overline{F}\left(x + an\right)} \\
&= L_F^{-1} \limsup_{x \to \infty} \frac{\overline{F}\left(x\right)}{\overline{F}\left(x + aM\right)} \\
&= L_F^{-1} \limsup_{x \to \infty} \frac{\overline{F}\left(x\right)}{\overline{F}\left(x\left(1 + \frac{aM}{x}\right)\right)} \\
&= L_F^{-1} L_F^{-1} = L_F^{-2}.
\end{aligned}$$

◁

5. Išvados

Darbe buvo nagrinėti nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai $\xi_1, \xi_2, \ldots$ ($S_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$), kurių vidurkis $\mathbf{E}\xi = -a < 0$ ir kurių pasiskirstymo funkcija $F \in \mathcal{D}$. Parodyta, kad egzistuoja baigtinis asimptotinis tolygus pagal $n \geq 1$ tikimybės $\mathrm{P}\left(\max\{S_1, \ldots, S_n\} > x\right)$ įvertis iš viršaus. Taip pat, baigtinio laiko atveju tikimybei $\mathrm{P}\left(\max\{S_1, \ldots, S_n\} > x\right)$ buvo rastas asimptotinis įvertis iš viršaus. Šis rezultatas padeda vertinti baigtinio laiko bankroto tikimybės asimptotinius įverčius, jei žalos yra nuosaikiai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai.

Literatūra

[1] Rasa Mikalauskaitė-Arminienė, Nepriklausomų nuosaikiai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių sumų maksimumas, *Vilniaus universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas*, 2014.

[2] Foss S., Korshunov D., Zachary S., An introduction to Heavy-Tailed and Subexponential Distributions, Springer, 2011.

[3] Yang Yang, Remigijus Leipus, Jonas Šiaulys, Asymptotics of random sums of negatively dependent random variables in the presence of dominatedly varying tails, *Lithuanian Mathematical Journal, Vol. 52, No. 2, April, 2012*, p. 222-232.

[4] Bingham N., Goldie C., Teugels J., Regular Variation, Cambridge University Press, 1987.

[5] Daley D.J., Omey E., Vesilo R., The tail behaviour of a random sum of subexponential random variables and vectors, **10**:21-39, 2007.

[6] Alsmeyer G., Renewal, Recurence and Regeneration. Springer, 2010, p. 37-38.

[7] Embrechts P., Omey E., A property of long tailed distributions. *Journal Appl. Probab.*, 1984, 21, p. 80-87.

[8] Klüppelberg C., Subexponential distributions and integrated tails. *Journal Appl. Probab.*, 1988, 25, p. 132-141.

A. Priedai

A.1. Priedas

Sąlyga

$$\limsup_{x\to\infty}\sup_{m\geq 1}\frac{\overline{F_m}\left(\frac{x}{2}\right)}{\overline{F_m}\left(x\right)} < \infty.$$

yra ekvivalenti sąlygai

$$\limsup_{x\to\infty}\sup_{m\geq 1}\frac{\overline{F_m}\left(xy\right)}{\overline{F_m}\left(x\right)} < \infty,\ \forall \mathrm{y} \in \left(0,1\right).$$

Tvirtinimas išplaukia iš nelygybės

$$\begin{aligned}
&\limsup_{x\to\infty}\sup_{m\geq 1}\frac{\overline{F_m}\left(xy_1y_2\right)}{\overline{F_m}\left(x\right)}\\
&=\limsup_{x\to\infty}\sup_{m\geq 1}\frac{\overline{F_m}\left(xy_1y_2\right)}{\overline{F_m}\left(xy_1\right)}\frac{\overline{F_m}\left(xy_1\right)}{\overline{F_m}\left(x\right)}\\
&\leq\limsup_{x\to\infty}\sup_{m\geq 1}\frac{\overline{F_m}\left(xy_1y_2\right)}{\overline{F_m}\left(xy_1\right)}\limsup_{x\to\infty}\sup_{m\geq 1}\frac{\overline{F_m}\left(xy_1\right)}{\overline{F_m}\left(x\right)}\\
&=\limsup_{x\to\infty}\sup_{m\geq 1}\frac{\overline{F_m}\left(xy_2\right)}{\overline{F_m}\left(x\right)}\limsup_{x\to\infty}\sup_{m\geq 1}\frac{\overline{F_m}\left(xy_1\right)}{\overline{F_m}\left(x\right)}
\end{aligned}$$

bet kuriem $y_1, y_2 \in (0,1)$.

A.2. Priedas

Pasiskirstymo funkcijų šeimai $F_1, F_2, F_3, \ldots,$ tenkinančiai sąlygą

$$\limsup_{x\to\infty} \sup_{m\geq 1} \frac{\overline{F_m}\left(\frac{x}{2}\right)}{\overline{F_m}(x)} < \infty.$$

J_F^+ apibrėžimas yra korektiškas.

Iš tiesų,

$$\begin{aligned}
&\liminf_{x\to\infty} \inf_{m\geq 1} \frac{\overline{F_m}(xy)}{\overline{F_m}(x)} = \frac{1}{\limsup\limits_{x\to\infty} \frac{1}{\inf\limits_{m\geq 1} \frac{\overline{F_m}(xy)}{\overline{F_m}(x)}}} \\
=&\frac{1}{\limsup\limits_{x\to\infty} \sup_{m\geq 1} \frac{\overline{F_m}(x)}{\overline{F_m}(xy)}} = \frac{1}{\limsup\limits_{x\to\infty} \sup\limits_{m\geq 1} \frac{\overline{F_m}\left(x\frac{1}{y}\right)}{\overline{F_m}(x)}} > 0, \ \forall y > 1.
\end{aligned}$$

A.3. Priedas

3 lema. *Sakykime,* $X_1, X_2, \ldots$ *yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai,* $\eta_l = X_1 + X_2 + \cdots + X_l$, $l = 1, 2, \ldots,$ *o* $B_1 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\not{\vDash}}) \ldots$ *yra Borelio aibių seka. Apibrėžkime:*

$$\tau_1 = \inf\{j \geq 1 : \left(\eta_{\tau_1}, \eta_{\tau_2}, \ldots, \eta_{\tau_j}\right) \in B_j\},$$

$$\tau_r = \tau(\varepsilon, A) = \begin{cases} \tau_{r-1} + \inf\{j \geq 1 : \left(\eta_{\tau_{r-1}+1}, \eta_{\tau_{r-1}+2}, \ldots, \eta_{\tau_{r-1}+j}\right) \in B_j\} & \text{, jeigu } \tau_{r-1} < \infty \\ \infty & \text{, jeigu } \tau_{r-1} = \infty, \end{cases}$$

čia $r \geq 2$, *o pagal susitarimą* $\inf\{\varnothing\} = \infty$.

Tada bet kuriam $r \geq 2$ *vektoriai* $(\tau_1, \eta_{\tau_1}), (\tau_2 - \tau_1, \eta_{\tau_2} - \eta_{\tau_1}), \ldots, \left(\tau_r - \tau_{r-1}, \eta_{\tau_r} - \eta_{\tau_{r-1}}\right)$ *yra nepriklausomi, vienodai pasiskirstę su sąlyga* $\tau_r < \infty$, *t.y.*

$$\begin{aligned} & \mathrm{P}\left((\tau_1, \eta_{\tau_1}) \in A_1, (\tau_2 - \tau_1, \eta_{\tau_2} - \eta_{\tau_1}) \in A_2, \ldots, \left(\tau_r - \tau_{r-1}, \eta_{\tau_r} - \eta_{\tau_{r-1}}\right) \in A_r \middle| \tau_r < \infty\right) \\ = & \mathrm{P}\left((\tau_1, \eta_{\tau_1}) \in A_1 | \tau_r < \infty\right) \mathrm{P}\left((\tau_2 - \tau_1, \eta_{\tau_2} - \eta_{\tau_1}) \in A_2 | \tau_r < \infty\right) \cdot \ldots \cdot \\ \cdot & \mathrm{P}\left(\left(\tau_r - \tau_{r-1}, \eta_{\tau_r} - \eta_{\tau_{r-1}}\right) \in A_r \middle| \tau_r < \infty\right) \end{aligned}$$

visoms galimoms Borelio aibėms $A_1, A_2, \ldots, A_r$ *ir:*

$$\begin{aligned} & \mathrm{P}\left(\left(\tau_j - \tau_{j-1}, \eta_{\tau_j} - \eta_{\tau_{j-1}}\right) \in A \middle| \tau_r < \infty\right) \\ = & \mathrm{P}\left(\left(\tau_j - \tau_{j-1}, \eta_{\tau_j} - \eta_{\tau_{j-1}}\right) \in A \middle| \tau_j < \infty\right) \\ = & \mathrm{P}\left((\tau_1, \eta_{\tau_1}) \in A | \tau_1 < \infty\right) \end{aligned}$$

visiems $j = 2, 3, \ldots, r$ *ir visoms galimoms Borelio aibėms.*

Lemos įrodymą galima rasti [6].

A.4. Priedas

Ekvivalenti viršutinio Matuszewska indekso išraiška

4 lema. *Pasiskirstymo funkcijų sekai* $F_1, F_2, \ldots,$ *tenkinančiai sąlygą* $\limsup_{x\to\infty} \sup_{m\geq 1} \frac{\overline{F_m}\left(\frac{x}{2}\right)}{\overline{F_m}(x)} < \infty$, *teisinga lygybė:*

$$\lim_{y\to\infty} \left\{ \frac{1}{\log y} \log \left(\limsup_{x\to\infty} \sup_{m\geq 1} \frac{\overline{F_m}\left(x^{\frac{1}{y}}\right)}{\overline{F_m}(x)} \right) \right\} = \inf_{y>1} \left\{ \frac{1}{\log y} \log \left(\limsup_{x\to\infty} \sup_{m\geq 1} \frac{\overline{F_m}\left(x^{\frac{1}{y}}\right)}{\overline{F_m}(x)} \right) \right\}.$$

$\triangleright$ Tvirtinimo įrodymui pasinaudosime Hille ir Phillips teorema iš A.5 priedo.

Pažymėkime funkciją

$$f(z) = \log \left(\limsup_{x\to\infty} \sup_{m\geq 1} \frac{\overline{F_m}\left(\frac{x}{e^z}\right)}{\overline{F_m}(x)} \right).$$

f yra subadityvi. Iš tiesų,

$$\begin{aligned}
f(z_1+z_2) &= \log \left(\limsup_{x\to\infty} \sup_{m\geq 1} \frac{\overline{F_m}\left(\frac{x}{e^{z_1+z_2}}\right)}{\overline{F_m}(x)} \right) \\
&= \log \left(\limsup_{x\to\infty} \sup_{m\geq 1} \frac{\overline{F_m}\left(\frac{x}{e^{z_1+z_2}}\right)}{\overline{F_m}\left(\frac{x}{e^{z_1}}\right)} \frac{\overline{F_m}\left(\frac{x}{e^{z_1}}\right)}{\overline{F_m}(x)} \right) \\
&\leq \log \left(\limsup_{x\to\infty} \sup_{m\geq 1} \frac{\overline{F_m}\left(\frac{x}{e^{z_1+z_2}}\right)}{\overline{F_m}\left(\frac{x}{e^{z_1}}\right)} \limsup_{x\to\infty} \sup_{m\geq 1} \frac{\overline{F_m}\left(\frac{x}{e^{z_1}}\right)}{\overline{F_m}(x)} \right) \\
&= \log \left(\limsup_{x\to\infty} \sup_{m\geq 1} \frac{\overline{F_m}\left(\frac{x}{e^{z_2}}\right)}{\overline{F_m}(x)} \limsup_{x\to\infty} \sup_{m\geq 1} \frac{\overline{F_m}\left(\frac{x}{e^{z_1}}\right)}{\overline{F_m}(x)} \right) \\
&= f(z_1) + f(z_2).
\end{aligned}$$

Be to, f yra mati, nes visos funkcijos $\overline{F_m}$ yra laiptinės. Todėl pagal Hille ir Phillips teoremą

$$\inf_{z>0} \left\{ \frac{f(z)}{z} \right\} = \lim_{z\to\infty} \left\{ \frac{f(z)}{z} \right\}$$

arba

$$\inf_{y>1} \left\{ \frac{f(\log y)}{y} \right\} = \lim_{y\to\infty} \left\{ \frac{f(\log y)}{y} \right\}$$

,

kas ir yra įrodinėjama lygybė.

$\triangleleft$

A.5. Priedas

Hille ir Phillips teorema

Teorema 3. *Sakykime, $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ yra subadityvi, t.y. $f(x+y) \le f(x) + f(y)$, $\forall x, y > 0$. Jei f yra mati, tai*

$$\lim_{x \to \infty} \left\{ \frac{f(x)}{x} \right\} = \inf_{x > 0} \left\{ \frac{f(x)}{x} \right\}.$$

Teorema pateikta [4] šaltinyje, 123 psl.

A.6. Priedas

5 lema. *Sakykime* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *yra nepriklausomi neneigiami vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai, kurių pasiskirstymo funkcija* $F \in \mathcal{D}$*. Tada bet kuriam fiksuotam* $n \geq 1$

$$\mathrm{P}\left(S_n > x\right) \lesssim L_F^{-1} n \overline{F}\left(x\right).$$

Lemos įrodymą galima rasti [3], 226psl.

A.7. Priedas

Sukonstruosime pasiskirstymo funkcijos F pavyzdį tokį, kad $F \in \mathcal{D}$, $F \notin \mathcal{S}$ ir $\mathbf{E}\xi < 0$. *Peter ir Paul* skirstinys nusakomas pasiskirstymo funkcija:

$$F(x) = \sum_{2^k \leq x} \frac{1}{2^k} = 1 - 2^{-\left[\frac{\log x}{\log 2}\right]}.$$

Tai yra atsitiktinio dydžio X,

$$\mathrm{P}\left(X = 2^k\right) = \frac{1}{2^k}, \ k = 1, 2, \ldots$$

pasiskirstymo funkcija.

Kadangi $\frac{\overline{F}\left(2^k - 1\right)}{\overline{F}\left(2^k\right)} = 2 \neq 1$ visiems $k = 2, 3, \ldots$, tai $F \notin L$, tuo pačiu $F \notin S$.

Tačiau

$$\limsup_{x \to \infty} \frac{\overline{F}\left(\frac{x}{2}\right)}{\overline{F}\left(x\right)} = \limsup_{x \to \infty} 2^{\left[\frac{\log x}{\log 2}\right] - \left[\frac{\log x}{\log 2} - 1\right]} = 2.$$

Taigi, $F \in \mathcal{D}$, bet $\mathbf{E}X = \infty$.

Modifikavę pasiskirstymo funkciją į

$$F(x) = 2 \sum_{2^k \leq x} \frac{1}{3^k} = 1 - 3^{-\left[\frac{\log x}{\log 2}\right]},$$

gauname, kad tai yra atsitiktinio dydžio X,

$$\mathrm{P}\left(X = 2^k\right) = \frac{2}{3^k}, \ k = 1, 2, \ldots$$

pasiskirstymo funkcija.

Kadangi $\frac{\overline{F}\left(2^k - 1\right)}{\overline{F}\left(2^k\right)} = 3 \neq 1$ visiems $k = 2, 3, \ldots$, tai $F \notin \mathcal{L}$, tuo pačiu $F \notin \mathcal{S}$.

Tačiau

$$\limsup_{x \to \infty} \frac{\overline{F}\left(\frac{x}{2}\right)}{\overline{F}\left(x\right)} = \limsup_{x \to \infty} 3^{\left[\frac{\log x}{\log 2}\right] - \left[\frac{\log x}{\log 2} - 1\right]} = 3.$$

Taigi, $F \in \mathcal{D}$.

Be to, mūsų atveju

$$\mathbf{E}X = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k \cdot 2}{3^k} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 4 < \infty.$$

Vadinasi, ieškomasis atsitiktinis dydis bus, pavyzdžiui, $Y = X - 5$,

$$\mathrm{P}\left(Y = 2^k - 5\right) = \frac{2}{3^k}, \ k = 1, 2, \ldots$$