VILNIAUS UNIVERSITETAS

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

Magistro darbas

Atvaizdžiai dvimačių kopulų aibėje ir jų savybės

Mappings in the set of two-dimensional copulas and their properties

Gediminas Bagdonas

VILNIUS 2016

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
MATEMATINĖS ANALIZĖS KATEDRA

Darbo vadovas doc. dr. Martynas Manstavičius

Darbo recenzentas lekt. Julius Damarackas

Darbas apgintas 2016 m. sausio 14 d.

Darbas įvertintas ______________

Registravimo NR. ______________

2016-01-04 ____________________

Atvaizdžiai dvimačių kopulų aibėje ir jų savybės

Santrauka

Šiame darbe mes įvedame vieną, gan bendrą, transformaciją kopulų aibėje, kuri sujungia kelias, jau nagrinėtas, transformacijas bei kopulų šeimas. Tada randame pakankamas sąlygas, kad šios transformacijos rezultatas būtų arba kvazikopula, arba kopula. Taip pat ištiriame pagrindines šios transformacijos savybes bei pasiūlome kelis galimus šios transformacijos apibendrinimus.

Raktiniai žodžiai: kopula, transformacija, kvazikopula

Mappings in the set of two-dimensional copulas and their properties

Abstract

In this paper we introduce one transformation, which is quite abstract, but unites several already known transformations and families of copulas. We also define the constraints under which the result of transformation is either copula or quasi-copula. Furthermore, we provide some key properties of this transformation and explore some ways in which it can be generalized.

Keywords: copula, transformation, quasi-copula

Turinys

1 Įžanga

Kopulos, ypač dvimatės, pastaraisiais metais susilaukia vis daugiau dėmesio literatūroje ir praktikoje, didžiąja dalimi dėl jų plataus taikymo. Kopulos populiarios sprendžiant daugiamates statistines problemas, nes jos leidžia paprastai modeliuoti atsitiktinių vektorių skirstinius, atskiriant marginaliuosius skirstinius ir kopulą. Praktikoje kopulos dažnai taikomos finansų matematikoje, modeliuojant finansinių aktyvų priklausomybinę struktūrą. Yra žinoma nemažai parametrinių kopulų šeimų, kur parametras dažnai reguliuoja tarpusavio priklausomybės stiprumą.

Pastaruoju metu yra stengiamasi rasti metodus kopulų šeimoms praplėsti arba būdus naujoms kopulų šeimoms konstruoti. Šį tyrimą dažnai motyvuoja lankstesnių stochastinių modelių būtinybė, atsisakant dažnai nerealių prielaidų daugiamačiam skirstiniui. Dažnai pasitaikantis metodas yra kopulų transformacija [2, 8, 7, 9, 6, 18, 15], t. y. atvaizdis iš kopulų šeimos (arba jos poaibio) į ją pačią.

Šiame darbe mes nagrinėjame vieną, gan bendrą, kopulų transformaciją, kuri apibendrina keletą literatūroje jau nagrinėtų bei siūlytų nagrinėjimui transformacijų [7, 9, 15] bei kopulų šeimų [8, 1, 5]. Ši transformacija apima didelę dalį kopulų aibės ir dažnai supaprastina optimalios kopulos paiešką iki vienmatės funkcijos f, atitinkančios tam tikrus reikalavimus, pasirinkimo. Šis atvaizdis taip pat leidžia, pasirenkant tam tikras vienmačių funkcijų šeimas, bet kuriai norimai kopulai papildomai įvesti vieną ar daugiau parametrų.

Iš pradžių, antrajame skyriuje, pateikiame pagrindinius reikalingus apibrėžimus ir žinomus faktus iš kopulų teorijos. Tada trečiajame skyriuje, pirmiausia, pateikiame reikalavimus funkcijai f ir įrodome, kad jų pakanka, jog transformacijos rezultatas būtų kvazikopula. Vėliau suformuluojame reikalavimus reikalingus, kad transformacijos rezultatas būtų kopula bei pateikiame keletą funkcijų, atitinkančių šiuos reikalavimus, pavyzdžių. Ketvirtajame skyriuje išnagrinėjame esmines šios transformacijos savybes, o penktajame skyriuje pateikiame kelis galimus nagrinėjamos transformacijos apibendrinimus. Galiausiai, šeštajame skyriuje, atliekame empirinį tyrimą, iliustruojantį gautos transformacijos taikymą praktikoje.

2 Apibrėžimai ir pastabos

Šiame skyriuje pateikiame pagrindinius apibrėžimus ir žinomus teiginius iš kopulų teorijos, kurie pravers tolesniame darbe.

Dvimate kopula vadinsime dvimatę pasiskirstymo funkciją, kurios marginalieji skirstiniai yra tolygūs intervale $[0, 1]$. Kopulą galima apibrėžti ir analiziškai.

2.1 Apibrėžimas. Dvimatę funkciją $C : [0,1]^2 \to [0,1]$ vadinsime (dvimate) kopula, jei ji tenkina

(C1) kraštines sąlygas, t. y. $C(t,0) = C(0,t) = 0$ ir $C(t,1) = C(1,t) = t, \quad \forall t \in I := [0,1]$,

(C2) ir yra 2-nemažėjanti, t. y.

$$V_C([x_1, x_2] \times [y_1, y_2]) := C(x_2, y_2) - C(x_1, y_2) - C(x_2, y_1) + C(x_1, y_1) \geq 0$$

visiems $x_1, x_2, y_1, y_2 \in [0,1]$ tokiems, kad $x_1 \leq x_2$ ir $y_1 \leq y_2$.

Geometriškai (C2) savybę galima interpretuoti taip: kiekvieno stačiakampio iš I^2 aibės $C-$tūris turi būti neneigiamas. Visų kopulų erdvę žymėsime $\mathcal{C}$.

Jei kopula turi antros eilės išvestines, tai (C2) savybė yra ekvivalenti sąlygai, kad

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} C(x,y) \geq 0, \qquad \forall (x,y) \in I^2.$$

Toliau dažnai, supaprastinant žymenis, praleisime kopulos argumentus x ir y (tuo atveju suprasime, kad sąryšiai galioja visiems $(x,y) \in I^2$) bei dalines kopulos išvestines žymėsime

$$D_1 C := \frac{\partial}{\partial x} C(x,y), \quad D_2 C := \frac{\partial}{\partial y} C(x,y), \quad D_{12} C := \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} C(x,y).$$

Pasinaudojus (C2), nesunku įsitikinti, kad kiekviena kopula yra nemažėjanti pagal kiekvieną kintamąjį, t. y. visiems $x_1, x_2, y_1, y_2 \in I$ ir $x_2 \geq x_1, y_2 \geq y_1$ teisinga

$$C(x_2, y_1) \geq C(x_1, y_1) \quad \text{ir} \quad C(x_1, y_2) \geq C(x_1, y_1). \tag{2.1}$$

Kita vertus, galima parodyti (žr. [19] 2.2.4 teoremą), kad kiekviena $C \in \mathcal{C}$ yra 1-Lipschitz tolydi, t. y.

$$|C(x_2, y_2) - C(x_1, y_1)| \leq |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|, \qquad \forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in I. \tag{2.2}$$

Kopulų svarba išryškėja pritaikius *Sklar* teoremą (žr. [19] 2.3.3 teoremą), kuri leidžia bet kurią dvimatę pasiskirstymo funkciją išreikšti per kopulą ir marginaliuosius skirstinius.

Yra žinoma, kad bet kuri kopula C tenkina, vadinamus *Frechet–Hoeffding* rėžius, kuriuos žymėsime M ir W (žr. [19] 2.2.3 teoremą), t. y.

$$W(x,y) := \max(x + y + 1, 0) \leq C(x,y) \leq \min(x,y) =: M(x,y), \quad \forall (x,y) \in [0,1]^2.$$

Galima įsitikinti, kad M ir W taip pat yra kopulos. Toliau Π žymėsime nepriklausomumo kopulą, t. y. $\Pi(x,y) = xy$ visiems $(x,y) \in [0,1]^2$.

2.2 Apibrėžimas. Tarkime, C yra bet kokia kopula. Tada

1. $\overline{C}(x,y) := 1 - x - y + C(x,y)$, $(x,y) \in [0,1]^2$ vadinsime kopulos C išgyvenamumo funkcija,

2. $C^*(x,y) := x + y - C(x,y)$, $(x,y) \in [0,1]^2$ vadinsime kopulos C dualia funkcija.

Nesunku įsitikinti, kad nei kopulos išgyvenamumo funkcija, nei duali funkcija nėra kopulos.

2.3 Apibrėžimas. Tarkime, B yra bet koks vienetinio kvadrato I^2 poaibis, kuris gali būti užrašomas tokiu pavidalu

$$B = \{(F(t), G(t)) : 0 \leq t \leq 1\}$$

tolydžioms pasiskirstymo funkcijoms F ir G tokioms, kad $F(0) = G(0) = 0$ ir $F(1) = G(1) = 1$. Tarkime, funkcija $Q : [0,1]^2 \to [0,1]$, yra tokia, kad kiekvienai aibei B egzistuoja kopula $C_B \in \mathcal{C}$, kuri sutampa su Q aibėje B, t. y.

$$Q(x,y) = C_B(x,y), \qquad (x,y) \in B.$$

Tokią funkciją Q vadinsime *kvazikopula.*

Iš kvazikopulos apibrėžimo akivaizdu, kad kvazikopulų aibė yra platesnė nei kopulų, t. y. jei C yra kopula, tai ji yra ir kvazikopula. Kvazikopulas, kurios nėra kopulos, vadinsime tikrinėmis kvazikopulomis.

2.1 Teorema. Funkcija Q yra kvazikopula tada ir tik tada, kai ji tenkina šias sąlygas:

(Q1) $Q(t,0) = Q(0,t) = 0$ ir $Q(t,1) = Q(1,t) = t, \quad \forall t \in I := [0,1]$,

(Q2) yra nemažėjanti pagal kiekvieną kintamąjį, t. y. galioja (2.1) nelygybė,

(Q3) yra 1-Lipschitz tolydi, t. y. tenkinama (2.2) nelygybė.

Įrodymas. Teoremos įrodymą galima rasti Genest ir bendraautorių darbe (žr. [11] 2 teiginį). $\square$

(Q2) ir (Q3) sąlygos kartu yra ekvivalentu reikalavimui, kad kvazikopula Q tenkintų (C2) savybę tik tada, kai bent vienas iš kintamųjų x_1, x_2, y_1, y_2 yra lygus 0 arba 1. Geometriškai tai reiškia, kad tik tie stačiakampiai aibėje I^2, kurių krašto dalis yra I^2 krašto poaibis, privalo turėti neneigiamą $Q-$tūrį.

2.4 Apibrėžimas. Tarkime, X ir Y yra atsitiktiniai dydžiai ir $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Tada sakome, kad (X,Y) yra radialiai simetrinė apie tašką (a,b) jei vektorių $(X-a, Y-b)$ ir $(a-X, b-Y)$ pasiskirstymo funkcijos sutampa.

Yra žinoma (žr. [19] 2.7.3. teoremą), kad (X,Y) yra radialiai simetrinė tada ir tik tada, kai (X,Y) atitinkanti kopula tenkina

$$C(x,y) = x + y - 1 + C(1-x, 1-y) =: \widehat{C}(x,y), \qquad (x,y) \in I^2.$$

Taip pat sakysime, kad $C \in \mathcal{C}$ yra simetrinė, jei $C(x,y) = C(y,x)$, $(x,y) \in I^2$.

Toliau apibrėšime kelis populiarius priklausomybės matus, kuriuos naudosime šiame darbe.

2.5 Apibrėžimas. Tarkime, (X,Y) yra atsitiktinis vektorius su dvimate pasiskirstymo funkcija H. Taip pat tarkime, kad (X_1,Y_1) ir (X_2,Y_2) yra dvi nepriklausomos vienodai pasiskirsčiusios atsitiktinio vektoriaus (X,Y) kopijos. Tada Kendall tau vadinsime tikimybių skirtumą

$$\tau(X,Y) = \mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - \mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0].$$

Tarkime, vektoriaus (X,Y) kopula yra C. Tada yra žinoma (žr. [19] 5.1.3. teoremą), kad Kendall tau bus

$$\tau(X,Y) = \tau(C) = 4 \iint_{I^2} C(u,v)dC(u,v) - 1.$$

2.6 Apibrėžimas. Tarkime, (X,Y) yra atsitiktinis vektorius su dvimate pasiskirstymo funkcija H. Taip pat tarkime, kad (X_1,Y_1), (X_2,Y_2) ir (X_3,Y_3) yra trys nepriklausomos vienodai pasiskirsčiusios atsitiktinio vektoriaus (X,Y) kopijos. Tada Spearman rho vadinsime tikimybių skirtumą

$$\rho(X,Y) = 3\left(\mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0] - \mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) < 0]\right).$$

Tarkime, vektoriaus (X,Y) kopula yra C. Tada yra žinoma (žr. [19] 5.1.6. teoremą), kad Spearman rho bus

$$\rho(X,Y) = \rho(C) = 12 \iint_{I^2} C(u,v)dudv - 3.$$

2.7 Apibrėžimas. Tarkime, X ir Y yra du atsitiktiniai tolydūs dydžiai su pasiskirstymo funkcijomis atitinkamai F ir G. Tada *dešinės uodegos priklausomybės koeficientu* λ^U, vadinsime ribą (jei ji egzistuoja)

$$\lambda^U = \lim_{t \uparrow 1} \mathbb{P}(Y > G^{(-1)}(t) | X > F^{(-1)}(t)).$$

Panašiai, *kairės uodegos priklausomybės koeficientu* λ^L, vadinsime ribą (jei ji egzistuoja)

$$\lambda^L = \lim_{t\downarrow 0} \mathbb{P}(Y \leq G^{(-1)}(t) | X \leq F^{(-1)}(t)).$$

Galima parodyti (žr. [19] 5.4.2 teoremą), kad, jei X ir Y turi bendrą kopulą C, tai ekvivalenčiai

$$\lambda^U = 2 - \lim_{t\uparrow 1} \frac{1-\delta_C(t)}{1-t} = 2 - \lim_{t\uparrow 1} \delta_C'(t),$$
$$\lambda^L = \lim_{t\downarrow 0} \frac{\delta_C(t)}{t} = \lim_{t\downarrow 0} \delta_C'(t).$$

Čia $\delta_C(t)$ žymi kopulos C įstrižąjį pjūvį t. y. $\delta_C(t) := C(t,t)$.

2.8 Apibrėžimas. Tarkime, X ir Y yra du atsitiktiniai dydžiai. Sakysime, kad

- Y turi X atžvilgiu didėjančią kairę uodegą (žymėsime LTI(Y|X)), jei $\mathbb{P}(Y \leq y | X \leq x)$ yra nemažėjanti funkcija pagal x visiems y,
- Y turi X atžvilgiu mažėjančią dešinę uodegą (žymėsime RTD(Y|X)), jei $\mathbb{P}(Y > y | X > x)$ yra nedidėjanti funkcija pagal x visiems y.

Analogiškai galima apibrėžti LTI(X|Y) ir RTD(Y|X).

2.2 Teorema. Tarkime, X ir Y yra tolydūs atsitiktiniai dydžiai su kopula C. Tada

- LTI(Y|X) tada ir tik tada, kai bet kuriam $y \in I$, $x \mapsto \frac{C(x,y)}{x}$ yra nemažėjanti,
- RTD(Y|X) tada ir tik tada, kai bet kuriam $y \in I$, $x \mapsto \frac{\overline{C}(x,y)}{1-x}$ yra nedidėjanti arba analogiškai $x \mapsto \frac{y-C(x,y)}{1-x}$ yra nemažėjanti.

Įrodymas. Žr. [19] 5.2.5. teoremą. $\square$

2.3 Išvada. Tarkime, X ir Y yra tolydūs atsitiktiniai dydžiai su kopula C. Tada

- LTI(Y|X) tada ir tik tada, kai bet kuriam $y \in I$ ir beveik visiems x

$$\frac{\partial C(x,y)}{\partial x} \geq \frac{C(x,y)}{x},$$

- RTD(Y|X) tada ir tik tada, kai bet kuriam $y \in I$ ir beveik visiems x

$$\frac{\partial C(x,y)}{\partial x} \leq \frac{y - C(x,y)}{1-x}.$$

Įrodymas. Žr. [19] 5.2.6. išvadą. $\square$

Toliau aibę kopulų C, kurios yra LTI(Y|X), LTI(X|Y), RTD(Y|X) ir RTD(X|Y) žymėsime $\mathcal{C}^-$. Tam, kad $C \in \mathcal{C}^-$ būtina, kad $C \leq \Pi$ (žr. [19] 5.2.4. teoremą), tačiau to nepakanka (žr. [19] 5.30. uždavinį).

3 Pagrindiniai rezultatai

Šiame skyrelyje nagrinėsime atvaizdį

$$H_f(C)(x,y) := C(x,y)f(\overline{C}(x,y)). \tag{3.1}$$

Tokį atvaizdžio pasirinkimą lėmė literatūroje nagrinėtos transformacijos [7, 9] ir kopulų šeimos [8, 1, 5, 17]. Kaip parodysime, šias transformacijas ir kopulų šeimas galime išreikšti H_f transformacijoje parinkus atitinkamą funkciją f arba fiksavus tam tikrą kopulą C.

Nagrinėsime tokius apribojimus funkcijai f:

(H1) f yra dukart diferencijuojama intervale $[0,1]$,

(H2) $f(0) = 1$,

(H3) f yra nedidėjanti intervale $[0,1]$, t. y. $f'(x) \leq 0$,

(H4) $x \mapsto \frac{f(x)}{1-x}$ yra nemažėjanti intervale $[0,1)$,

(H5) f yra iškila intervale $[0,1]$, t. y. $f''(x) \geq 0$.

Toliau šiame skyrelyje parodysime, kurių iš šių sąlygų pakanka, kad $H_f(C)$ būtų arba kvazikopula, arba kopula, bet pirmiau įrodykime kelias pagalbines lemas, kurios pravers tolesnių teoremų įrodymuose.

3.1 Lema. Tarkime, f tenkina (H3) ir (H4). Tada

$$0 \leq f(tx) - f(x) \leq (1-t)\frac{x}{1-x}f(x), \qquad t \in [0,1], \quad x \in [0,1].$$

Įrodymas. Apatinis rėžis išplaukia iš funkcijos nedidėjimo. Norėdami įrodyti viršutinį, pastebėkime, kad dėl (H4) sąlygos

$$\frac{f(tx)}{1-tx} \leq \frac{f(x)}{1-x}, \qquad t \in [0,1].$$

Padauginus abi puses iš $1 - tx$ ir atėmus $f(x)$ gauname

$$f(tx) - f(x) \leq \frac{1 - tx}{1 - x} f(x) - f(x) = (1 - t)\frac{x}{1 - x} f(x).$$

□

3.2 Lema. Tarkime, f tenkina (H2), (H3) ir (H4). Tada funkcijos reikšmių sritis yra trikampyje

$$1 - x \leq f(x) \leq 1, \qquad x \in [0, 1].$$

Įrodymas. Kadangi funkcija f yra nedidėjanti intervale $[0, 1]$, tai $1 = f(0) \geq f(x)$, visiems $x \in [0, 1]$. Kita vertus, kadangi $x \mapsto \frac{f(x)}{1-x}$ yra nemažėjanti, tai $\frac{f(x)}{1-x} \geq \frac{f(0)}{1} = 1$ ir todėl $f(x) \geq 1 - x$. □

3.3 Lema. Tarkime, f tenkina (H1)–(H5). Tada galioja

$$-1 \leq f'(x) \leq 0.$$

Įrodymas. Viršutinis rėžis išplaukia iš funkcijos nedidėjimo. Kadangi funkcija yra iškila, tai $t \mapsto f'(t)$ yra nedidėjanti, ir užtenka parodyti, kad $-1 \leq f'(0)$. Bet taip ir yra, nes pasinaudojus 3.2 lema,

$$-h = 1 - h - 1 \leq f(h) - f(0).$$

Padalinę abi puses iš h ir perėję prie ribos, kai $h \downarrow 0$, gauname, kad $-1 \leq f'(0)$. □

3.4 Lema. Tarkime, f tenkina (H1)–(H5). Tada visiems $x_1, x_2 \in I$ tokiems, kad $x_2 > x_1$ galioja

$$f(x_1) - f(x_2) \leq x_2 - x_1.$$

Įrodymas. Gerai žinoma, kad diferencijuojama funkcija yra iškila intervale tada ir tik tada, jei ji yra virš kiekvienos jos liestinės tame intervale, t. y.

$$f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1), \qquad \forall x_1, x_2 \in I.$$

Pertvarkę reiškinį ir panaudoję 3.3 lemą gauname

$$f(x_1) - f(x_2) \leq -f'(x_1)(x_2 - x_1) \leq x_2 - x_1, \qquad x_2 \geq x_1.$$

□

3.5 Teorema. Atvaizdžio H_f rezultatas $H_f(C)$, $C \in \mathcal{C}$ tenkina kraštines sąlygas, yra nemažėjantis pagal kiekvieną koordinatę ir yra 1-Lipschitz tolydus, t. y. $H_f(C)$ yra kvazikopula su bet kuria $C \in \mathcal{C}$, jei f tenkina (H1)–(H4).

Įrodymas. Imkime bet kokią $C \in \mathcal{C}$. Pasinaudoję (H2), gauname

$$\begin{aligned}
H_f(C)(1,y) &= C(1,y)f(\overline{C}(1,y)) = yf(1-1-y+y) = yf(0) = y,\\
H_f(C)(0,y) &= C(0,y)f(\overline{C}(0,y)) = 0.
\end{aligned}$$

Analogiškai

$$H_f(C)(x,1) = x, \qquad H_f(C)(x,0) = 0,$$

t. y. $H_f(C)$ tenkina kraštines sąlygas.

Norėdami parodyti, kad H_f yra 1-Lipschitz tolydi, pirmiausia pastebėkime, kad, pasinaudoję 3.1 lema bei tuo, kad $\overline{C}(x+h,y) \le \overline{C}(x,y)$, gauname

$$\begin{aligned}
0 &\le f(\overline{C}(x+h,y)) - f(\overline{C}(x,y)) = f\left(\frac{\overline{C}(x+h,y)}{\overline{C}(x,y)}\overline{C}(x,y)\right) - f(\overline{C}(x,y))\\
&\le \left(1 - \frac{\overline{C}(x+h,y)}{\overline{C}(x,y)}\right)\frac{\overline{C}(x,y)}{1-\overline{C}(x,y)}f(\overline{C}(x,y)) = \frac{\overline{C}(x,y)-\overline{C}(x+h,y)}{1-\overline{C}(x,y)}f(\overline{C}(x,y)) \qquad (3.2)\\
&= \frac{h-(C(x+h,y)-C(x,y))}{1-\overline{C}(x,y)}f(\overline{C}(x,y)).
\end{aligned}$$

Toliau nagrinėkime skirtumą

$$\begin{aligned}
0 &\le H_f(C)(x+h,y) - H_f(C)(x,y) = C(x+h,y)f(\overline{C}(x+h,y)) - C(x,y)f(\overline{C}(x,y))\\
&= C(x,y)(f(\overline{C}(x+h,y)) - f(\overline{C}(x,y))) + (C(x+h,y)-C(x,y))f(\overline{C}(x+h,y))\\
&\le C(x,y)\frac{h-(C(x+h,y)-C(x,y))}{1-\overline{C}(x,y)}f(\overline{C}(x,y)) + (C(x+h,y)-C(x,y))f(\overline{C}(x+h,y))\\
&\le h-(C(x+h,y)-C(x,y)) + (C(x+h,y)-C(x,y)) = h,
\end{aligned}$$

nes pagal 3.2 lemą f aprėžta iš viršaus vienetu, o $C(x,y) \le 1-\overline{C}(x,y) = C^*(x,y)$.

Skirtumas $H_f(C)(x,y+h) - H_f(C)(x,y)$ įvertinamas analogiškai. Taigi, remiantis 2.1 teorema, $H_f(C)$ yra kvazikopula. □

Atkreipkime dėmesį, kad (H5) nebuvo būtina, kad $H_f(C)$ būtų kvazikopula. Deja, ši sąlyga yra reikalinga ieškant kada $H_f(C)$ išlieka kopulų aibėje. Taip pat pastebėkime, kad pridėjus (H5) sąlygą, (H2) ir (H4) sąlygas galima perrašyti kaip $1-x \le f(x) \le 1$, kai $x \in [0,1]$, t. y. kaip 3.2 lemos tvirtinimą.

3.6 Teorema. Transformacijos rezultatas $H_f(C)$ yra kopula, jei generatorius f tenkina (H1)–(H5) sąlygas.

Įrodymas. Tarkime, $C \in \mathcal{C}$ yra tolydi su tolydžiomis mišriomis išvestinėmis. Tada pirma $H_f(C)$ išvestinė pagal pirmą kintamąjį bus

$$D_1 H_f(C) = D_1 C \cdot f(\overline{C}) + C \cdot f'(\overline{C})\,(D_1 C - 1)$$

ir todėl antra mišri $H_f(C)$ išvestinė bus

$$\begin{aligned} D_{12} H_f(C) &= D_{12} C \cdot f(\overline{C}) + D_1 C \cdot f'(\overline{C})\,(D_2 C - 1) + D_2 C \cdot f'(\overline{C})\,(D_1 C - 1) \\ &\quad + C \cdot \big(f''(\overline{C})\,(D_1 C - 1)\,(D_2 C - 1) + f'(\overline{C}) D_{12} C\big) \\ &= D_1 C \cdot f'(\overline{C})\,(D_2 C - 1) + D_2 C \cdot f'(\overline{C})\,(D_1 C - 1) \\ &\quad + C \cdot f''(\overline{C})\,(D_1 C - 1)\,(D_2 C - 1) + D_{12} C \cdot \big(f(\overline{C}) + C \cdot f'(\overline{C})\big)\,. \end{aligned}$$

Pasinaudoję 3.2 ir 3.3 lemomis, gauname

$$f(\overline{C}) + C \cdot f'(\overline{C}) \geq 1 - \overline{C} - C = 1 - 1 + x + y - 2C = (x - C) + (y - C) \geq 0.$$

Pasinaudoję šiuo rezultatu ir prisiminę, kad $0 \leq D_1 C \leq 1$ bei $D_{12} C \geq 0$, gauname

$$D_{12} H_f(C)(x, y) \geq 0, \qquad \forall (x, y) \in I^2.$$

Taigi, $H_f(C)$ yra kopula, jei C turi tolydžią mišrią išvestinę. Pasinaudoję tuo, kad kopulų su tolydžia mišria išvestine aibė yra L^∞ normos prasme tiršta aibėje $\mathcal{C}$ (pakanka nagrinėti Bernstein kopulų aibę, žr. [16]), gauname, kad $H_f(C)$ yra kopula su bet kuria $C \in \mathcal{C}$. $\square$

3.1 Pavyzdys. Nors iš pirmo žvilgsnio atrodo, kad apribojimai funkcijai f yra gan griežti, transformacija H_f yra pakankamai lanksti ir apima dalį literatūroje jau nagrinėtų bei siūlytų atvejų. Pavyzdžiui, nagrinėkime generatorių

$$\kappa_\lambda(x) = \frac{1}{1 + \lambda x}, \qquad \lambda \in [0, 1].$$

Jis yra tolydus, dukart diferencijuojamas ir $f(0) = 1$, t. y. κ_λ tenkina (H1) ir (H2) sąlygas. Jo išvestinė yra

$$\frac{\partial}{\partial x} \kappa_\lambda(x) = -\frac{\lambda}{(1 + \lambda x)^2} \leq 0,$$

t. y. generatorius yra nedidėjantis (galioja (H3) sąlyga). Taip pat nesunku parodyti, jog galioja ir (H4) sąlyga, nes

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\kappa_\lambda(x)}{1-x}\right) = -\frac{\lambda}{(1+\lambda x)^2}\frac{1}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2}\frac{1}{1+\lambda x} = \frac{-\lambda(1-x)+(1+\lambda x)}{(1+\lambda x)^2(1-x)^2}$$
$$= \frac{1-\lambda+2\lambda x}{(1+\lambda x)^2(1-x)^2} \geq 0.$$

Generatorius tenkina (H5) sąlygą, nes antra išvestinė yra

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\kappa_\lambda(x) = \frac{2\lambda^2}{(1+\lambda x)^3} \geq 0.$$

Taigi generatorius κ_λ tenkina šiame skyriuje iškeltas sąlygas. Šį generatorių atitinkanti transformacija bus

$$H_{\kappa_\lambda}(C)(x,y) = \frac{C(x,y)}{1+\lambda\overline{C}(x,y)}, \qquad \lambda \in [0,1].$$

Ši transformacija pasiūlyta [7] ir nagrinėta [9] straipsnyje.

3.2 Pavyzdys. Dabar imkime generatorių

$$\delta_\alpha(x) = 1-\alpha x, \qquad \alpha \in [0,1].$$

Vėlgi, jis tenkina (H1) ir (H2). Šio generatoriaus išvestinė yra

$$\frac{\partial}{\partial x}\delta_\alpha(x) = -\alpha \leq 0$$

ir todėl generatorius tenkina (H3). Kadangi

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\delta_\alpha(x)}{1-x}\right) = \frac{-\alpha(1-x)+1-\alpha x}{(1-x)^2} = \frac{1-\alpha}{(1-x)^2} \geq 0,$$

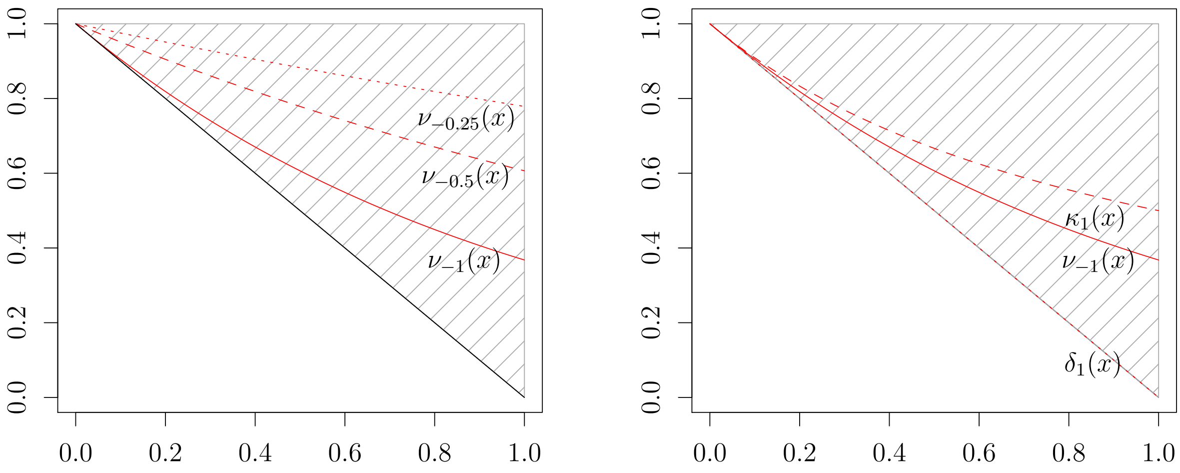
tai galioja (H4) sąlyga. (H5) taip pat galioja, nes

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\delta_\alpha(x) = 0.$$

Taigi generatorius δ_α tenkina šiame skyriuje iškeltas sąlygas. Šį generatorių atitinkanti transformacija bus

$$H_{\delta_\alpha}(C)(x,y) = C(x,y)(1-\alpha\overline{C}(x,y)), \qquad \alpha \in [0,1].$$

Ši transformacija nagrinėta [7] straipsnyje. Kraštinių generatorių atvejų κ_1 ir δ_1 palyginimą galima pamatyti 1(b) pav.



(a) Funkcija $\nu(\cdot)$ su skirtingais parametrais (b) Funkcijos $\kappa_1(x)$, $\nu_{-1}(x)$ ir $\delta_1(x)$

1 pav.: $f(\cdot)$ reikšmių sritis, su kuria H_f yra transformacija ir įvairūs $f(\cdot)$ pavyzdžiai

3.3 Pavyzdys. Imkime H transformacijos generatorių

$$\nu_\delta(x) = \exp(\delta x), \qquad \delta \in [-1, 0].$$

Jis tenkina (H1) ir (H2) sąlygas. (H3) taip pat tenkinama, nes

$$\frac{\partial}{\partial x}\nu_\delta(x) = \delta \exp(\delta x) \leq 0.$$

Nagrinėkime (H4) savybę. Ji galioja, nes

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\nu_\delta(x)}{1-x}\right) = \frac{\delta \exp(\delta x)(1-x) + \exp(\delta x)}{1-x} \geq \frac{(1+\delta)\exp(\delta x)}{1-x} \geq 0.$$

Antra generatoriaus ν_δ išvestinė bus

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\nu_\delta(x) = \delta^2 \exp(\delta x) \geq 0$$

ir todėl galioja (H5) sąlyga.

Taigi generatorius ν_δ tenkina reikalingas sąlygas. Jį atitinkanti tansformacija bus

$$N_\delta(C)(x,y) := H_{\nu_\delta}(C)(x,y) = C(x,y)\exp(\delta\overline{C}(x,y)), \qquad \delta \in [-1,0].$$

Šis atvaizdis buvo pasiūlytas [7] straipsnyje, tačiau nebuvo surasta, kada transformacijos rezultatas yra kopula. Į šią transformaciją taip pat galima žiūrėti kaip į Cuadras [5] nagrinėtos kopulų šeimos apibendrinimą, nes, įstatę nepriklausomumo kopulą, gauname

$$N_\delta(\Pi)(x,y) := xy\exp(\delta(1-x)(1-y)), \qquad \delta \in [-1,0].$$

Būtent tokio pavidalo kopulų šeimą nagrinėjo Cuadras [5]. Jis parodė, kad ši kopulų šeima iš tiesų yra kopula su parametru $\delta \in [-1,1]$ (t. y. su platesne δ sritimi, nei leidžia sukonstruoti mūsų transformacija). 5.3 skyrelyje nagrinėsime, kokioms sąlygoms galiojant, galima praplėsti H_f transformacijos generatoriaus f sritį, kad transformacija H_f visiškai apimtų Cuadras [5] kopulų šeimą.

Funkcijos ν_δ grafikas su skirtingomis δ reikšmėmis pavaizduotas 1(a) pav.

3.4 Pavyzdys. Imkime tokio pavidalo funkciją

$$f_0(x;a) = ax^2 - (a+1)x + 1, \qquad a \in (0,1].$$

Ji yra tolydi, nedidėjanti ir iškila, tačiau $f(x) < 1-x$, visiems $x \in I$, t. y. ji netenkina 3.2 lemoje minimos savybės.

Parodysime, kad bendru atveju $H_{f_0}(C)$ nebus kopula. Nagrinėkime kopulos M H_{f_0}-transformaciją

$$\begin{aligned}
H_{f_0}(M)(x,y) &= M(x,y)(a\overline{M}^2(x,y) - (a+1)\overline{M}(x,y) + 1) \\
&= \min(x,y)(a(1-\max(x,y))^2 - (a+1)(1-\max(x,y)) + 1) \\
&= \min(x,y)(-2a\max(x,y) + a(\max(x,y))^2 + a\max(x,y) + \max(x,y)) \\
&= \min(x,y)\max(x,y)(a\max(x,y) - a + 1) = xy(a\max(x,y) - a + 1).
\end{aligned}$$

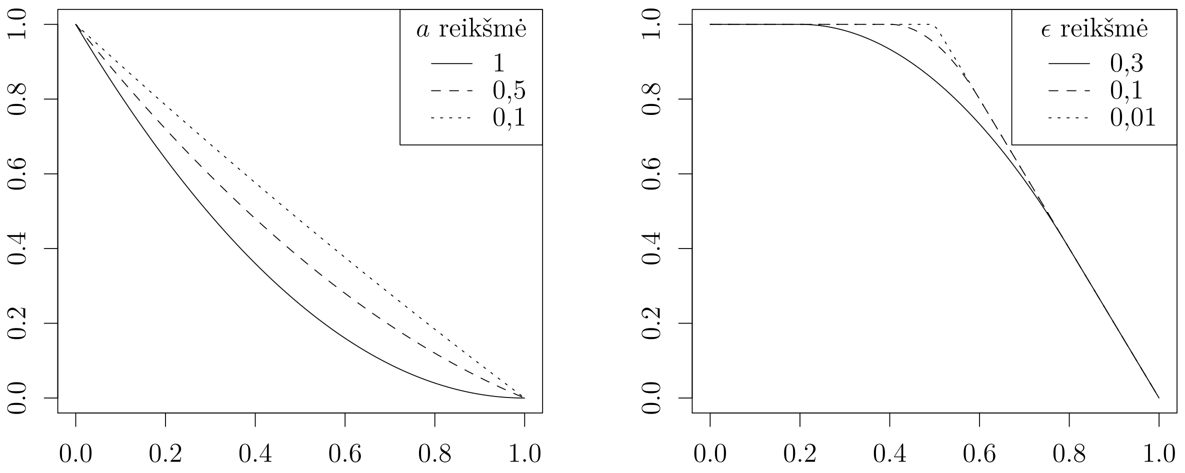
Patikrinkime 2-nemažėjimo savybę (C2), kai $y_i = x_i$, $i = 1,2$, t. y.

$$\begin{aligned}
V &:= V_{H_{f_0}(M)}([x_1,x_2]\times[x_1,x_2]) = x_2^2(ax_2 - a + 1) - 2x_2x_1(ax_2 - a + 1) + x_1^2(ax_1 - a + 1) \\
&= (x_2^2 - 2x_2x_1 + x_1^2)(ax_2 - a + 1) - a(x_2 - x_1)x_1^2 \\
&= (x_2 - x_1)((ax_2 - a + 1)(x_2 - x_1) - ax_1^2).
\end{aligned}$$

Imkime $\epsilon \in (0, 1 - x_1)$ ir $x_2 = x_1 + \epsilon$. Tada

$$V = \epsilon[(a(x_1 + \epsilon - 1) + 1)\epsilon - ax_1^2] < \epsilon[\epsilon - ax_1^2].$$

Gauname, kad kiekvienam $a \in (0, 1]$ ir kiekvienam $x_1 \in (0, 1]$ galime parinkti ϵ, taip, kad $V < 0$, t. y. $H_{f_0}(M)$ nėra kopula.



(a) Funkcija $f_0(x; a)$ (b) Funkcija $f_1(x; 0.5, \epsilon)$

2 pav.: Funkcijos f_0 ir f_1

3.5 Pavyzdys. Tarkime, $a \in (0, 1)$ ir ϵ yra toks, kad $0 < \epsilon < \min(a, 1 - a)$. Imkime tokią funkciją

$$f_1(x; a, \epsilon) = \begin{cases} 1, & \text{jei } x \leq a - \epsilon, \\ 1 - \frac{(x-a+\epsilon)^2}{4\epsilon(1-a)}, & \text{jei } x \in (a - \epsilon, a + \epsilon), \\ 1 - \frac{x-a}{1-a}, & \text{jei } x \geq a + \epsilon. \end{cases}$$

Ši funkcija yra tolydi, diferencijuojama ir nedidėjanti. Taip pat ji tenkina (H4) savybę bei $f_1(0; a, \epsilon) = 1$. Tačiau funkcija f_1 nėra iškila, t. y. ji netenkina (H5) savybės. Funkcijos grafiką su $a = 0.5$ ir skirtingomis ϵ reikšmėmis galima pamatyti 2(b) pav. Imkime nepriklausomumo kopulos H_{f_1}-transformaciją su $a = 0.5$ ir $\epsilon = 0.01$. Taip pat nagrinėkime tokį I^2 poaibį

$$B = [0, 30; 0.36] \times [0, 23; 0, 28].$$

Tada elementariais skaičiavimais (R kodas pateiktas priede) gauname, kad

$$V_{H_{f_1}(\Pi)}(B) \approx -0,001526342,$$

t. y. $V_{H_{f_1}(\Pi)}(B)$ yra neigiamas, o tai reiškia, kad $H_{f_1}(\Pi)$ nėra kopula.

4 Esminės H_f transformacijos savybės

Šiame skyrelyje panagrinėsime transformacijos H_f savybes. Rasime kurios kopulos yra H_f invariantinės, patikrinsime ar išlaikomas konkordancijos tvarkos sąryšis bei rasime priklausomybės matų įverčius. Taip pat nagrinėsime transformacijos iteraciją ir atsakysime į klausimą ar minėta transformacija išlaiko simetriškumą.

4.1 Teiginys. Tarkime, f tenkina (H1)–(H5) sąlygas ir nėra tapatingai lygi vienetui. Tada kopula W yra vienintelė transformacijos H_f atžvilgiu invariantinė kopula, t. y.

$$H_f(C) = C \iff C = W.$$

Įrodymas. Tarkime f nėra tapatingai lygi vienetui. Kad su visais $(x, y) \in I^2$ galiotų lygybė

$$H_f(C)(x, y) = C(x, y)f(\overline{C}(x, y)) = C(x, y),$$

reikia, kad $f(\overline{C}(x, y)) = 1$ su visais (x, y), ten kur kopula $C(x, y) \neq 0$. Iš (H2), (H3) ir (H5), gauname, kad yra tik vienas taškas $x = 0$ kuriame f lygi 1. Tada

$$\overline{C}(x, y) = 1 - x - y + C(x, y) = 0,$$
$$C(x, y) = x + y - 1.$$

Iš sąlygų kopulai ir *Frechet–Hoeffding* rėžių gauname, kad vienintelė kopula tenkinanti šią sąlygą yra W. □

4.2 Teiginys. Transformacija H_f išlaiko konkordancijos tvarkos sąryšį tarp kopulų, t. y., jei $C_1 \geq C_2$, tai $H_f(C_1) \geq H_f(C_2)$.

Įrodymas. Tarkime, $C_1 \geq C_2$ su visais $(x, y) \in I^2$. Tada $\overline{C_1} \geq \overline{C_2}$ ir

$$f(\overline{C_1}) \leq f(\overline{C_2}).$$

Pasinaudoję 3.4 lema gauname, kad

$$f(\overline{C_2}) - f(\overline{C_1}) \leq \overline{C}_1 - \overline{C}_2 = C_1 - C_2.$$

Galiausiai nagrinėjame skirtumą

$$\begin{aligned} H_f(C_1) - H_f(C_2) &= C_1 \cdot f(\overline{C}_1) - C_2 \cdot f(\overline{C}_2) \\ &= f(\overline{C_1})(C_1 - C_2) - (f(\overline{C_2}) - f(\overline{C_1}))C_2 \\ &\geq f(\overline{C}_1)(C_1 - C_2) - (C_1 - C_2)C_2 = (C_1 - C_2)(f(\overline{C}_1) - C_2). \end{aligned}$$

Belieka parodyti, kad $f(\overline{C}_1) - C_2 \geq 0$. Bet taip ir yra, nes

$$\begin{aligned} f(\overline{C_1}(x,y)) &\geq 1 - \overline{C_1}(x,y) = x + y - C_1(x,y) \geq x + y - \min(x,y) \\ &= \max(x,y) \geq C_1(x,y) \geq C_2(x,y). \end{aligned}$$

Taigi $H_f(C_1) \geq H_f(C_2)$. □

Kadangi parodėme, kad transformacija išlaiko konkordancijos tvarkos sąryšį, tai įdomūs ir naujos kopulos $H_f(C)$ rėžiai. Parodėme, kad W yra invariantinė transformacijos atžvilgiu, taigi belieka surasti viršutinį rėžį, kurį gausime į transformaciją įstatę M, t. y.

$$W(x,y) \leq H_f(C)(x,y) \leq \min(x,y) f(1 - \max(x,y)), \qquad (x,y) \in I^2, \quad C \in \mathcal{C}.$$

Tai rodo, kad transformacija su generatoriumi, kuris nėra tapatingai lygus vienetui, negali modeliuoti tobulos teigiamos priklausomybės. Kitas faktas, kuris išplaukia iš transformacijos rezultato rėžių, suformuotas ateinančiame teiginyje.

4.3 Teiginys. Tarkime, f tenkina (H1)–(H5) sąlygas ir C yra bet kokia kopula. Tada galioja šios nelygybės

$$\begin{aligned} -1 &\leq \tau(H_f(C)) \leq 4\int_0^1 (1-x) f^2(x) dx - 1, \\ -1 &\leq \rho(H_f(C)) \leq 12\int_0^1 (1-x)^2 f(x) dx - 3. \end{aligned}$$

Įrodymas. Kadangi transformacija išlaiko konkordancijos tvarkos sąryšį ir yra aprėžta iš apačios kopula W, gauname apatinius Kandall tau ir Spearman rho rėžius. Belieka suskaičiuoti viršutinius. Pastebėkime, kad

$$H_f(M) = \min(x,y) f(1 - \max(x,y)) := \min(x,y) g(\max(x,y))$$

yra tokio pavidalo, kuris nagrinėtas Durante [8]. Taip pat pastebėkime, kad $g(\cdot)$ tenkina reikalingas sąlygas (žr. [8] 1 teoremą). Iš tikrųjų,

- iš (H2) gauname, kad $g(1) = f(1-1) = 1$,
- iš (H3) gauname, kad $g(t) = f(1-t)$ yra nemažėjanti intervale I,
- iš (H4) gauname, kad $t \mapsto g(t)/t$ yra nedidėjanti intervale $(0,1]$.

Taigi $H_f(M)$ priklauso kopulų šeimai nagrinėtai Durante [8]. Galime teigti, kad $H_f(C)$ yra tam tikras šios kopulų šeimos apibendrinimas. Yra parodyta (žr. [8] 4 teoremą), kad jei C' priklauso šiai kopulų šeimai, tai

$$\tau(C') = 4\int_0^1 xg^2(x)dx - 1, \qquad \rho(C') = 12\int_0^1 x^2 g(x)dx - 3.$$

Belieka integraluose įstatyti $g(x) = f(1-x)$ ir atlikti kintamųjų keitimą ir gausime teiginio tvirtinimą. $\square$

Pastebėkime, kad transformacija H_f pakeičia kopulos kairės uodegos priklausomybės bei dešinės uodegos priklausomybės koeficientus (ten kur jie egzistuoja). Tikslesnes koeficientų reikšmes nusako kitas teiginys.

4.4 Teiginys. Tarkime, f tenkina (H1)–(H5) sąlygas, o $C \in \mathcal{C}$. Tada kopulos $H_f(C)$ dešinės uodegos priklausomybės ir kairės uodegos priklausomybės koeficientai yra

$$\lambda^U_{H_f(C)} = (1+f'(0))\lambda^U_C, \qquad \lambda^L_{H_f(C)} = f(1)\lambda^L_C.$$

Įrodymas. Pastebėkime, kad $H_f(C)$ įstrižasis pjūvis yra

$$\delta_{H_f(C)}(t) = \delta_C(t) f(1-2t+\delta_C(t))$$

ir jo išvestinė

$$\delta'_{H_f(C)}(t) = \delta'_C(t) f(1-2t+\delta_C(t)) - \delta_C(t) f'(1-2t+\delta_C(t))(2-\delta'_C(t)).$$

Tada

$$\begin{aligned}\lambda^U_{H_f(C)} &= 2 - \lim_{t\uparrow 1}\delta'_{H_f(C)}(t) = 2 - f(0)\lim_{t\uparrow 1}\delta'_C(t) + \delta_C(1)f'(0)(2-\lim_{t\uparrow 1}\delta'_C(t)) \\ &= (2-\lim_{t\uparrow 1}\delta'_C(t))(1+f'(0)) = \lambda^U_C(1+f'(0))\end{aligned}$$

ir

$$\lambda^L_{H_f(C)} = \lim_{t\downarrow 0} \delta'_{H_f(C)}(t) = f(1)\lim_{t\downarrow 0} \delta'_C(t) - \delta_C(0)f'(1)(2 - \lim_{t\downarrow 0} \delta'_C(t)) = f(1)\lambda^L_C.$$

$\square$

4.5 Pastaba. Iš 3.2 lemos žinome, kad $0 \leq f(1) \leq 1$, o dėl $(H3)$ sąlygos $f'(0) \leq 0$. Taigi transformacija H_f nepadidina nei kairės uodegos priklausomybės nei dešinės uodegos priklausomybės koeficientų, t. y.

$$\lambda^U_{H_f(C)} \leq \lambda^U_C, \quad \lambda^L_{H_f(C)} \leq \lambda^L_C,$$

ten kur jie egzistuoja.

Transformacija H_f apibrėžia atvaizdį $H_f : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, kitaip sakant atvaizdį aibėje $\mathcal{C}$. Todėl gali būti įdomu pažiūrėti, kas vyksta, jei iteruojame transformaciją. Įdomu tai, kad ši iteracija konverguoja į fiksuotą tašką kuris yra W. Žinoma, jei $\tilde{f}(x) = 1, \quad \forall x \in [0,1]$ ši savybė negalioja, bet šis atvejis trivialus, nes $H_{\tilde{f}}(C) = C$.

Toliau naudosime tokius žymenis:

$$H^n_f := H^{n-1}_f \circ H_f, \quad n \geq 2.$$

4.6 Teiginys. Tarkime, f tenkina (H1)–(H5) sąlygas ir nėra tapatingai lygi vienetui. Tada kiekvienai $C \in \mathcal{C}$ teisinga

$$\lim_{n\to\infty} ||H^n_f(C) - W||_\infty = 0. \tag{4.1}$$

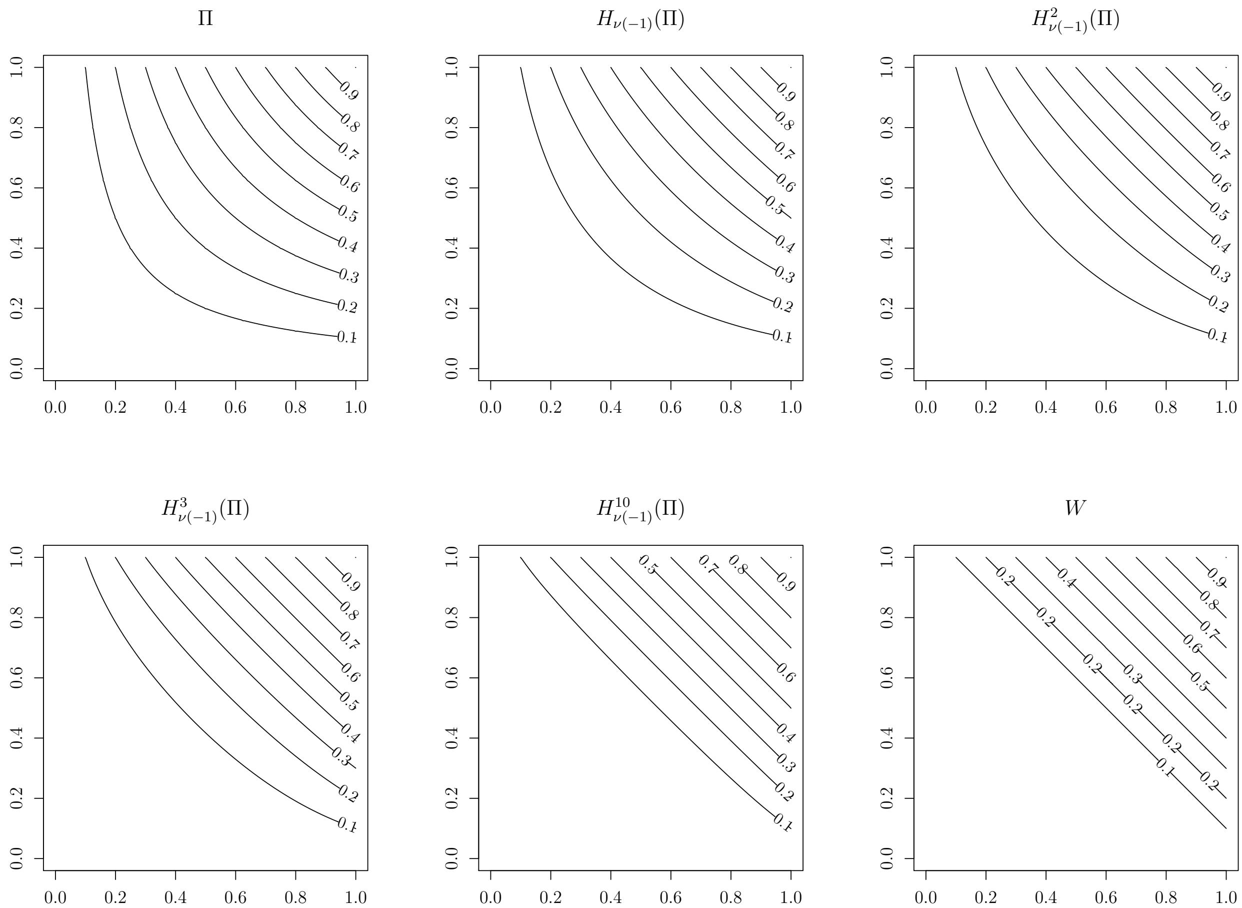
Čia $||\cdot||_\infty$ žymi normą L_∞ erdvėje.

Įrodymas. Pirmiausia pastebėkime, kad

$$H^k_f(C)(x,y) = H^{k-1}_f(C)(x,y) f(\overline{H}^{k-1}_f(C)(x,y)) \leq H^{k-1}_f(C)(x,y)$$

ir dėl (H3) bei kopulos išgyvenamumo funkcijos savybių

$$f(\overline{H}^k_f(C)(x,y)) \geq f(\overline{H}^{k-1}_f(C)(x,y)).$$



3 pav.: Transformacijos H_f^k konvergavimas

Tada

$$\begin{aligned}
0 &\le H_f^k(C)(x,y) - W(x,y) = H_f^{k-1}(C)(x,y) f(\overline{H}_f^{k-1}(C)(x,y)) - W(x,y) \\
&\le f(\overline{H}_f^{k-1}(C)(x,y))(H_f^{k-1}(C)(x,y) - W(x,y)) \\
&\le f(\overline{H}_f^{k-1}(C)(x,y)) f(\overline{H}_f^{k-2}(C)(x,y))(H_f^{k-2}(C)(x,y) - W(x,y)) \\
&\le f^2(\overline{H}_f^{k-1}(C)(x,y))(H_f^{k-2}(C)(x,y) - W(x,y)) \le \dots \\
&\le f^k(\overline{H}_f^{k-1}(C)(x,y))(C(x,y) - W(x,y)) := A_k.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Pirmiausia pastebėkime, kad $f(\overline{H}_f^{k-1}(C)(0,y)) = f(\overline{H}_f^{k-1}(C)(x,0)) = 1$, bet tada dėl kraštinių sąlygų turime, kad aukščiau nagrinėtas skirtumas lygus nuliui. Todėl galime apsiriboti atveju $(x,y) \in (0,1]^2$.

Taip pat pastebėkime, kad $f(\overline{H}_f^{k-1}(C)(x,y)) = 1$ tada ir tik tada, kai $\overline{H}_f^{k-1}(C)(x,y) = 0$, o tai galioja tik tiems (x,y), su kuriais $H_f^{k-1}(C)(x,y)$ ir $W(x,y)$ sutampa. Bet tuomet aukščiau nagrinėtas skirtumas taip pat yra lygus 0.

Dabar tarkime, kad $f(\overline{H}_f^{k-1}(x,y)) < 1$. Tada perėję prie ribos (4.2) nelygybėje, gauname, kad

$$\lim_{n\to\infty}(H_f^k(C)(x,y) - W(x,y)) = 0, \quad \forall (x,y).$$

Pastebėkime, kad $\{A_n\}$ yra monotoniškai mažėjanti tolydžių funkcijų seka kompaktiškoje aibėje I^2, kurios pataškiui ribinė funkcija taip pat yra tolydi. Pasinaudoję Dini teorema (žr. [20] 7.13. teoremą), galime praplėsti pataškinį konvergavimą iki tolygaus, t. y.

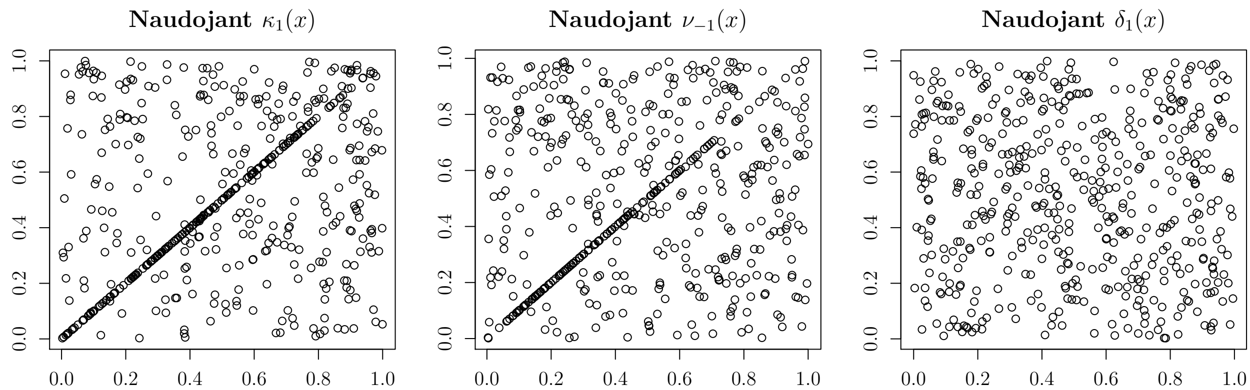
$$\lim_{n\to\infty} ||H_f^n(C) - W||_\infty = 0.$$

□

Atkreipkime dėmesį į tai, kad, jei f nėra tapatingai lygi vienetui ir $C \neq W$, tai, pasinaudoję (4.2) nelygybe, galime gauti

$$||H_f(C) - W||_\infty < ||C - W||_\infty,$$

t. y. $H_f(C)$ yra arčiau W kopulos L_∞ metrikos prasme, nei C. Transformacijos intensyvumas priklauso nuo f formos. Pavyzdžiui, palyginkite 4 pav. pavaizduotus transformacijų rezultatus.



4 pav.: Sumodeliuotos $H_f(M)$ realizacijos su skirtingais generatoriais f

Po transformacijos gauta kopula $H_f(C)$ yra unikali šios transformacijos atžvilgiu, t. y. H_f kiekvieną kopulą C atvaizduoja į unikalią kopulą $H_f(C)$. Tai įrodo kitas teiginys.

4.7 Teiginys. Tarkime, $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ yra tokios, kad $H_f(C_1) = H_f(C_2)$. Tada $C_1 = C_2$.

Įrodymas. Tarkime, $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ yra tokios, kad $H_f(C_1) = H_f(C_2)$, ir tarkime, kad f nėra tapatingai lygi 1 (atvejis, kai f tapatingai lygi 1, yra trivialus). Tada

$$C_1(x,y)f(\overline{C_1}(x,y)) = C_2(x,y)f(\overline{C_2}(x,y)),$$

arba ekvivalenčiai,

$$\begin{aligned} 0 &= C_1(x,y)f(\overline{C_1}(x,y)) - C_2(x,y)f(\overline{C_2}(x,y)) \\ &= C_1(x,y)(f(\overline{C_1}(x,y)) - f(\overline{C_2}(x,y))) + (C_1(x,y) - C_2(x,y))f(\overline{C_2}(x,y)) =: B(x,y). \end{aligned}$$

Tarkime, kad egzistuoja taškas $(x_0, y_0) \in [0,1]^2$ toks, kad $C_1(x_0,y_0) > C_2(x_0,y_0)$. Tada $\overline{C_1}(x_0,y_0) > \overline{C_2}(x_0,y_0)$ ir dėl (H3) bei 3.4 lemos

$$0 \le f(\overline{C_2}(x_0,y_0)) - f(\overline{C_1}(x_0,y_0)) \le C_1(x_0,y_0) - C_2(x_0,y_0).$$

Kadangi

$$f(\overline{C_2}(x_0,y_0)) \ge x_0 + y_0 - C_2(x_0,y_0) \ge \max(x_0,y_0) \ge C_1(x_0,y_0)$$

ir $C_1(x_0,y_0) > C_2(x_0,y_0)$, tai

$$\begin{aligned} B(x_0,y_0) &= C_1(x_0,y_0)(f(\overline{C_1}(x_0,y_0)) - f(\overline{C_2}(x_0,y_0))) + (C_1(x_0,y_0) - C_2(x_0,y_0))f(\overline{C_2}(x_0,y_0)) \\ &\ge (C_1(x_0,y_0) - C_2(x_0,y_0))(f(\overline{C_2}(x_0,y_0)) - C_1(x_0,y_0)) > 0. \end{aligned}$$

Gavome prieštarą, kuri įrodo aukščiau suformuotą teiginį. □

Toliau nagrinėsime kopulos simetriškumo savybes. Pirmiausia, pastebėkime, kad jei kopula C yra simetrinė, tai ir $H_f(C)$ yra simetrinė. Kitas teiginys nurodo sąlygas, kurioms esant transformacija išlaiko ir radialinį simetriškumą.

4.8 Teiginys. Tarkime, $C \in \mathcal{C}$ ir C yra radialiai simetrinė, t. y. $C = \widehat{C}$. Tada $H_f(C)$ yra radialiai simetrinė tada ir tik tada, kai $f(x) = 1 - \alpha x$, $\alpha \in [0,1]$.

Įrodymas. Pakankamumas įrodytas [7] 3.9 teoremoje, todėl belieka įrodyti būtinumą.

Būtinumas. Imkime $C \in \mathcal{C}$ tokią, kad $\widehat{C} = C$. Tada $H_f(C)$ bus radialiai simetrinė, jei

$$
\begin{aligned}
0 &= \widehat{H_f(C)}(x,y) - H_f(C)(x,y) = x + y - 1 + H_f(C)(1-x,1-y) - H_f(C)(x,y) \\
&= x + y - 1 + C(1-x,1-y)f(1-(1-x)-(1-y)+C(1-x,1-y)) - C(x,y)f(\overline{C}(x,y)) \\
&= x + y - 1 + \overline{\widehat{C}}(x,y)f(\widehat{C}(x,y)) - C(x,y)f(\overline{C}(x,y)) \\
&= x + y - 1 + \overline{C}(x,y)f(C(x,y)) - C(x,y)f(\overline{C}(x,y)) \\
&= x + y - 1 + [\overline{C}(x,y) - C(x,y)]f(C(x,y)) + C(x,y)[f(C(x,y)) - f(\overline{C}(x,y))] \\
&= (1-x-y)(f(C(x,y)) - 1) + C(x,y)[f(C(x,y)) - f(\overline{C}(x,y))].
\end{aligned}
$$

Tarkime, $1 - x - y > 0$, ir padalinkime abi puses iš $1 - x - y$. Tuomet

$$
0 = f(C(x,y)) - 1 - C(x,y)\frac{f(C(x,y) + 1 - x - y) - f(C(x,y))}{1 - x - y}.
$$

Perėję prie ribos, kai $1 - x - y \downarrow 0$, ir pažymėję $t = C(x, 1-x)$, gauname diferencialinę lygtį

$$
0 = f(t) - 1 - tf'(t),
$$

kurios sprendinys yra $f(t) = 1 - at$, čia $a \in [0,1]$ dėl 3.2 lemos. Taigi, gavome, kad $f(t)$ privalo būti tokio pavidalo, kad $H_f(C)$ taip pat būtų radialiai simetrinė. $\square$

5 Transformacijos H_f apibendrinimai

Šiame skyrelyje pasiūlysime kelis galimus aukščiau įvestos transformacijos H_f apibendrinimus. Pirmiausia, pamėginsime transformaciją pertvarkyti taip, kad jai invariantinis taškas būtų viršutinis *Frechet–Hoeffding* rėžis M, vietoje apatinio rėžio W. Antrajame poskyryje pasiūlysime atvaizdį $R_f : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, kuris yra glaudžiai susijęs su H_f, o trečiajame poskyryje mėginsime praplėsti transformacijos H_f generatoriaus f sritį kai kurioms kopuloms.

5.1 Transformacijos H_f posūkis

Praeitame skyriuje parodėme, kad atvaizdis H_f priartina kopulą prie apatinio *Frechet–Hoeffding* rėžio W. Būtų įdomu rasti panašų atvaizdį H_f^* kopulų aibėje, kad $H_f^*(C) \geq C$, t. y. H_f^* priartintų kopulą prie viršutinio *Frechet–Hoeffding* rėžio M. Tam pasinaudosime De Baets ir bendraautorių [6] rezultatais.

5.1 Apibrėžimas. Tarkime, $C \in \mathcal{C}$. Tada kopulos $C(x,y)$ posūkiu pagal x koordinatę (arba tiesiog x-posūkiu) vadinsime operatorių

$$\Phi_x(C)(x, y) := y - C(1 - x, y).$$

Analogiškai apibrėšime ir kopulos C y-posūkį $\Phi_y(C)(x, y)$.

Pastebėkime, kad

$$\Phi_x^2(C) := \Phi_x \circ \Phi_x(C) = C, \qquad \forall C \in \mathcal{C}.$$

Be to, De Baets ir bendraautoriai [6] parodė, kad $\Phi_x(C)$ yra kopula, bet kuriai kopulai C. Pasinaudoję šiuo faktu, galime apibrėžti transformaciją kopulų aibėje

$$\begin{aligned} H_f^*(C)(x, y) &:= \Phi_x \circ H_f \circ \Phi_x(C)(x, y) = y - H_f \circ \Phi_x(C)(1 - x, y) \\ &= y - (y - C(x, y))f(1 - (1 - x) - y + y - C(x, y)) \\ &= y - (y - C(x, y))f(x - C(x, y)). \end{aligned}$$

Pastebėkime, kad

$$\Phi_x(W) = M, \quad \Phi_x(M) = W,$$

ir todėl

$$H_f^*(M)(x, y) = \Phi_x \circ H_f \circ \Phi_x(M)(x, y) = \Phi_x \circ H_f(W)(x, y) = \Phi_x(W) = M,$$

t. y. M yra H_f^* invariantinė.

Tačiau norimą atvaizdį galima apibrėžti ir naudojant y-posūkio operatorių, t. y.

$$H_f^{**}(C)(x, y) := \Phi_y \circ H_f \circ \Phi_y C)(x, y) = x - (x - C(x, y))f(y - C(x, y)).$$

Analogiškai galima patikrinti, kad M taip pat yra H_f^{**} invariantinė.

Kaip rodo kita teorema, bendru atveju $H_f^*(C)$ ir $H_f^{**}(C)$ nesutampa.

5.1 Teorema. Tarkime, $C \in \mathcal{C}$. Tada $H_f^*(C) = H_f^{**}(C)$ tada ir tik tada, kai

$$f(x) = \delta_\alpha(x) = 1 - \alpha x, \quad \alpha \in [0, 1].$$

Įrodymas. Įrodysime pakankamumą ir būtinumą:
Pakankamumas. Tarkime, C yra bet kokia kopula. Tada

$$\begin{aligned} H_{\delta_\alpha}^*(C)(x, y) &= y - (y - C(x, y))(1 - \alpha(x - C(x, y))) = C(x, y) + \alpha(x - C(x, y))(y - C(x, y)) \\ &= x - (x - C(x, y))(1 - \alpha(x - C(x, y))) = H_{\delta_\alpha}^{**}(C)(x, y). \end{aligned}$$

Būtinumas. Tarkime, C yra bet kokia kopula. Tada $H^*_{\delta_\alpha}$ ir sutaps $H^{**}_{\delta_\alpha}$, jei

$$\begin{aligned}
0 &= H^*_{\delta_\alpha}(C)(x,y) - H^{**}_{\delta_\alpha}(C)(x,y) = x - (x - C(x,y))f(y - C(x,y)) \\
&- y + (y - C(x,y))f(x - C(x,y)) = x - y + (y - C(x,y))(f(x - C(x,y)) - f(y - C(x,y))) \\
&+ (x-y)f(y - C(x,y)).
\end{aligned}$$

Tarkime, $x > y$ ir padalinkime abi puses iš $x - y$. Tada

$$0 = 1 + (y - C(x,y))\frac{f(x - C(x,y)) - f(y - C(x,y))}{x - y} + f(y - C(x,y)).$$

Pereikime prie ribos kai $x \downarrow y$ ir pažymėkime $t := y - \lim_{x\downarrow y} C(x,y)$. Ši riba egzistuoja kiekvienam y ir kiekvienai kopulai C, nes kiekviena kopula yra 1-Lipschitz tolydi, t. y. tolydi pagal kiekvieną kintamąjį. Gauname diferencialinę lygtį

$$0 = 1 + tf'(t) + f(t),$$

kurios sprendinys yra $f(t) = 1 + ct$. Dėl 3.2 lemos $c \in [-1, 0]$, t. y. gavome, kad $f(t)$ turi būti tokio pavidalo, kuris reikalautas sąlygoje. $\square$

Pastebėkime, kad jeigu C yra simetrinė, tai $H^{**}_f(C)(x,y) = H^*_f(C)(y,x)$ ir todėl bendruoju atveju H^*_f neišlaiko simetriškumo. Ši savybė gali būti naudinga praktikoje, nes leidžia modeliuoti asimetrines priklausomybes.

5.1 Pavyzdys. Imkime generatorių iš 5.1 teoremos su $\alpha = 1$, t. y. $f_2(x) = 1 - x$. Tada

$$\begin{aligned}
H^*_{f_2}(C)(x,y) &= y - (y - C(x,y))(1 - (x - C(x,y))) \\
&= C(x,y)(1 - x + C(x,y)) + y(x - C(x,y)) = xy + C(x,y)\overline{C}(x,y),
\end{aligned}$$

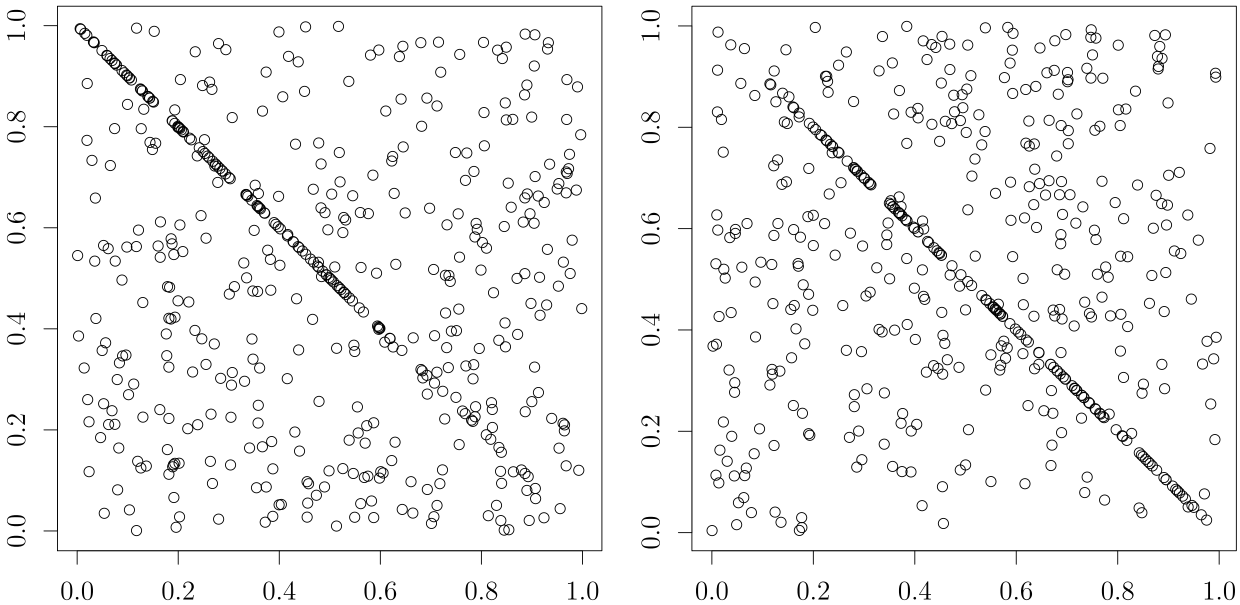
t. y. transformacija C^* nagrinėta Dolati ir Úbeda-Flores [7]. Parametrą α galima įvesti paėmus gautos kopulos ir $\Pi(x,y)$ iškilą kombinaciją, analogiškai kaip minėtame straipsnyje. Kita vertus, paėmus $H^*_{f_2}(C)(x,y)$ ir C tiesinę kombinaciją galime gauti

$$\begin{aligned}
&\lambda H^*_{f_2}(C)(x,y) + (1-\lambda)C(x,y) = \lambda xy + \lambda C(x,y)\overline{C}(x,y) - \lambda C(x,y) + C(x,y) \\
&= C(x,y) + \lambda(x - C(x,y))(y - C(x,y)), \qquad \lambda \in [0,1],
\end{aligned}$$

t. y. transformacija nagrinėta Mesiar ir bendraautorių straipsnyje [15].

5.2 Pavyzdys. Imkime jau nagrinėtą generatorių $\nu_\delta = \exp(\delta x)$, $\delta \in [0,1]$. Tada

$$H^*_{\nu_\delta}(C)(x,y) = y - (y - C(x,y))\exp(\delta(x - C(x,y))),$$
$$H^{**}_{\nu_\delta}(C)(x,y) = x - (x - C(x,y))\exp(\delta(y - C(x,y))).$$



(a) $H^*_{\nu_\delta}(W)$ (b) $H^{**}_{\nu_\delta}(W)$

5 pav.: Sumodeliuotos $H^*_{\nu_\delta}(W)$ ir $H^{**}_{\nu_\delta}(W)$ realizacijos su $\delta = -1$

Kaip parodėme 5.1 teoremoje, šios transformacijos nesutampa. Tai iliustruojame 5 paveikslu.

5.2 Transformacijos H_f apibendrinimas $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ aibėje

Šiame skyrelyje nagrinėsime atvaizdžius iš $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ į $\mathcal{C}$, t. y. atvaizdžius, kurie dvi kopulas atvaizduoja į vieną. Gerai žinomas tokio atvaizdžio pavyzdys kopulų aibėje yra iškila kombinacija

$$F_\lambda(C_1, C_2) = \lambda C_1 + (1-\lambda)C_2, \qquad C_1, C_2 \in \mathcal{C}, \quad \lambda \in [0,1].$$

Šiame skyrelyje mėginsime apibendrinti praeitame skyrelyje gautą transformaciją H_f, taip kad ji dvi kopulas atvaizduotų į vieną. Pavyzdžiui, nagrinėkime tokią transformaciją:

$$P_f(C_1, C_2)(x,y) := C_1(x,y) f(\overline{C_2}(x,y)). \tag{5.1}$$

5.2 Teiginys. $P_f(C)$ yra kvazikopula su bet kuriomis $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$, jei f tenkina (H1)–(H4) sąlygas.

Įrodymas. Kraštinių sąlygų tikrinimas analogiškas kaip ir H_f atveju. Skirtumas $P_f(C_1,C_2)(x+h,y) - P_f(C_1,C_2)(x,y)$ taip pat įvertinimas panašiai, pasinaudojant 3.1 lema

$$
\begin{aligned}
0 &\le P_f(C_1,C_2)(x+h,y) - P_f(C_1,C_2)(x,y) = C_1(x+h,y)f(\overline{C_2}(x+h,y)) - C_1(x,y)f(\overline{C_2}(x,y)) \\
&= C_1(x,y)(f(\overline{C_2}(x+h,_2 y)) - f(\overline{C_2}(x,y))) + (C_1(x+h,y) - C_1(x,y))f(\overline{C_2}(x+h,y)) \\
&\le C_1(x,y)\frac{h - (C_2(x+h,y) - C(x,y))}{1-\overline{C_2}(x,y)} f(\overline{C_2}(x,y)) + (C_1(x+h,y) - C_1(x,y))f(\overline{C_2}(x+h,y)) \\
&\le h - (C_2(x+h,y) - C_2(x,y)) + C_1(x+h,y) - C_1(x,y) = h,
\end{aligned}
$$

nes pagal 3.2 lemą f aprėžta iš viršaus vienetu, o $C(x,y) \le 1 - \overline{C}(x,y) = C^*(x,y)$.

Taigi, remiantis 2.1 teorema, $P_f(C_1,C_2)$ yra kvazikopula. □

5.3 Pastaba. Pastebėkime, kad, nors $P_f(C_1,C_2)(x,y)$ yra kvazikopula, ji bendruoju atveju nėra kopula. Pavyzdžiui, paėmę $f(x) = \delta_1(x) = 1 - x$, $C_1 = W$, $C_2 = M$, gauname

$$P_{\delta_1}(W,M) = \max(x+y-1,0)(1-(1-\max(x,y))) = \max(x+y-1,0)\max(x,y).$$

Jei $2 > x+y > 1$ ir $\max(x,y) < 1$, tai $P_{\delta_1}(W,M) < W(x,y)$, t. y. $P_{\delta_1}(W,M)$ netenkina apatinio *Frechet–Hoeffding* rėžio ir dėl to negali būti kopula.

Toliau nagrinėkime tokį galimą H_f apibendrinimą:

$$R_f(C_1,C_2) := \frac{1}{2}(P_f(C_1,C_2) + P_f(C_2,C_1)) = \frac{1}{2}(C_1(x,y)f(\overline{C_2}(x,y)) + C_2(x,y)f(\overline{C_1}(x,y))). \tag{5.2}$$

Įdomu, tai, kad R_f, kuri tiesiog yra dviejų tikrinių kvazikopulų $P_f(C_1,C_2)$ ir $P_f(C_2,C_1)$ aritmetinis vidurkis, yra kopula.

5.4 Teorema. $R_f(C_1,C_2)$ yra kvazikopula su bet kuriomis $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$, jei f tenkina (H1)–(H4) sąlygas.

Įrodymas. Imkime $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$. Kadangi $R_f(C_1,C_2)$ yra iškila kvazikopulų transformacija ir kvazikopulų aibė yra uždara iškilos kombinacijos atžvilgiu, gauname teoremos tvirtinimą. □

5.5 Teorema. Jei $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ ir f tenkina (H1)–(H5) sąlygas, tai ir $R_f(C_1,C_2) \in \mathcal{C}$.

Įrodymas. Tarkime, C yra tolydi su tolydžiomis mišriomis išvestinėmis. Raskime antrą mišrią $R_f(C_1, C_2)$ išvestinę:

$$D_{12}R_f(C_1, C_2) = \frac{1}{2}(D_{12}P_f(C_1, C_2) + D_{12}P_f(C_2, C_1)),$$

čia

$$\begin{aligned} D_{12}P_f(C_1, C_2) &= D_1C_1 \cdot f'(\overline{C_2})(D_2C_2 - 1) + D_2C_1 \cdot f'(\overline{C_2})(D_1C_2 - 1) \\ &\quad + C_1 \cdot f''(\overline{C_2})(D_1C_1 - 1)(D_2C_1 - 1) + D_{12}C_1 \cdot f(\overline{C_2}) + D_{12}C_2 \cdot C_1 \cdot f'(\overline{C_2}). \end{aligned}$$

Pastebėkime, kad dėl kopulos ir funkcijos f savybių pirmi trys sumos nariai neneigiami. Todėl

$$D_{12}P_f(C_1, C_2) \geq D_{12}C_1 \cdot f(\overline{C_2}) + D_{12}C_2 \cdot C_1 \cdot f'(\overline{C_2})$$

ir

$$\begin{aligned} D_{12}R_f(C_1, C_2) &\geq \frac{1}{2}(D_{12}C_1 \cdot f(\overline{C_2}) + D_{12}C_2 \cdot C_1 \cdot f'(\overline{C_2}) \\ &\quad + D_{12}C_2 \cdot f(\overline{C_1}) + D_{12}C_1 \cdot C_2 \cdot f'(\overline{C_1})) \\ &= \frac{1}{2}D_{12}C_1 \cdot (f(\overline{C_2}) + C_2 \cdot f'(\overline{C_1})) + \frac{1}{2}D_{12}C_2 \cdot (f(\overline{C_1}) + C_1 \cdot f'(\overline{C_2})). \end{aligned}$$

Tačiau kadangi

$$f(\overline{C_2}) + C_2 \cdot D_1 f(\overline{C_1}) \geq 1 - \overline{C_2} - C_2 = 1 - 1 + x + y - 2C_2 = (x - C_2) + (y - C_2) \geq 0$$

ir analogiškai su antru dėmeniu, gauname, kad $D_{12}R_f(C_1, C_2) \geq 0$. Vėl pasinaudoję tuo pačiu samprotavimu kaip ir 3.6 teoremoje, kad kopulų su tolydžia mišria išvestine aibė yra tiršta $\mathcal{C}$ aibėje, gauname teoremos tvirtinimą. □

5.3 Pavyzdys. Imkime generatorių $\delta_\alpha(x) = 1 - \alpha x$, tada

$$R_f(C_1, C_2) = \frac{1}{2}(C_1 \cdot (1 - \alpha\overline{C_2}) + C_1 \cdot (1 - \alpha\overline{C_2})) =: T_\alpha(C_1, C_2),$$

t. y. kopulų transformacijos nagrinėtos [7] apibendrinimas. Šį apibendrinimą nesunku gauti ir naudojant pozicines statistikas panašiai, kaip minėtame straipsnyje.

5.3 Generatoriaus f srities praplėtimas

Šiame skyrelyje mėginsime praplėsti H_f transformacijos generatoriaus f sritį, apibrėžtą (H1)–(H5) sąlygomis, kopuloms iš $\mathcal{C}^-$. Imtis šio darbo paskatino kelios kopulų šeimos:

Ali–Mikhail–Haq (AMH) [1], *Farlie–Gumbel–Morgenstern* (FGM) [10, 12, 17] ir Cuadras [5] nagrinėta kopulų šeima. Šias šeimas galima perrašyti naudojant transformaciją H_f, kopulą Π, bei atitinkamai parinkus generatorių f. Tačiau tokiu užrašu galima apimti tik dalį minėtų kopulų šeimų parametrų srities. Šiame skyrelyje praplėsime f sritį taip, kad $H_f(\Pi)$ visiškai apimtų minėtas kopulų šeimas.

Taigi nagrinėsime transformaciją H_f kopuloms $C \in \mathcal{C}^-$. Jau žinome, kad $H_f(C)$ yra kopula, kai tenkinamos (H1)–(H5) sąlygos. Pasirodo kai kurioms kopuloms galime praplėsti H_f transformaciją ir didėjančioms funkcijoms f. Toliau naudosime tokias sąlygas dukart diferencijuojamai funkcijai f:

($\overline{H}1$) $f(0) = 1$,

($\overline{H}2$) $f(x) \leq \frac{1}{1-x}$,

($\overline{H}3$) $f(x)$ yra didėjanti ir $0 \leq f'(x) \leq \frac{f(x)}{1-x}$,

($\overline{H}4$) $f''(x) \geq 0$.

Pirmiausia įrodysime vieną pagalbinę lemą ir tada pereisime prie teoremų.

5.6 Lema. Tarkime, $C \in \mathcal{C}^-$. Tada visiems $(x, y) \in I^2$ ir $h \in [0, 1-x]$

$$\begin{aligned} C(x+h, y) - C(x, y) &\leq hC^*(x, y), \\ C(x, y+h) - C(x, y) &\leq hC^*(x, y). \end{aligned}$$

Įrodymas. Tarkime, $h = 1 - x$. Tada

$$\begin{aligned} C(x+h, y) - C(x, y) = y - C(x, y) \leq y - C(x, y) + x\overline{C}(x, y) &= x + y - C(x, y) - xC^*(x, y) \\ = (1-x)C^*(x, y) = hC^*(x, y). \end{aligned}$$

Dabar tarkime, $h < 1 - x$. Pasinaudoję 2.2 teorema, gauname nelygybę

$$\frac{y - C(x+h, y)}{1 - x - h} \geq \frac{y - C(x, y)}{1 - x},$$

kuri yra ekvivalenti

$$C(x+h, y) - C(x, y) \leq h\frac{y - C(x, y)}{1 - x}.$$

Belieka parodyti, kad $\frac{y-C(x,y)}{1-x} \leq C^*(x, y)$, bet tai galioja bet kuriai kopulai, nes

$$\begin{aligned} C^*(x, y)(1-x) &= (x + y - C(x, y))(1-x) = y - C(x, y) + x - x(x + y - C(x, y)) \\ &= y - C(x, y) + x\overline{C}(x, y) \geq y - C(x, y). \end{aligned}$$

Antra nelygybė gaunama analogiškai. □

5.7 Teorema. Tarkime, $C \in \mathcal{C}^-$ ir f tenkina ($\overline{H}1$)–($\overline{H}3$). Tada $H_f(C)(x,y)$ yra kvazikopula.

Įrodymas. Akivaizdu, kad kraštinės sąlygos tenkinamos (tam pakanka ($\overline{H}1$)). Parodysime, kad $H_f(C)(x,y)$ yra didėjanti pagal kiekvieną kintamąjį. Iš tiesų, pasinaudoję ($\overline{H}3$) ir 2.3 išvada, gauname:

$$\begin{aligned} D_1H_f(C) &= D_1C \cdot f(\overline{C}) + C \cdot f'(\overline{C})(D_1C - 1) \geq D_1C \cdot (1-\overline{C})f'(\overline{C}) + C \cdot f'(\overline{C})(D_1C - 1) \\ &= f'(\overline{C})\big(D_1C \cdot (1-\overline{C}) + C \cdot (D_1C - 1)\big) = f'(\overline{C})\left(D_1C \cdot (x+y) - C\right) \\ &\geq f'(\overline{C})\left(\frac{x+y}{x}C - C\right) = f'(\overline{C})\frac{yC}{x} \geq 0. \end{aligned}$$

Analogiškai galima gauti didėjimą pagal kitą koordinatę.

Dabar nagrinėkime skirtumą

$$\begin{aligned} \Delta_x H_f &:= H_f(C)(x+h,y) - H_f(C)(x,y) = C(x+h,y)f(\overline{C}(x+h,y)) - C(x,y)f(\overline{C}(x,y)) \\ &= (C(x+h,y) - C(x,y))f(\overline{C}(x+h,y)) + C(x,y)(f(\overline{C}(x+h,y)) - f(\overline{C}(x,y))). \end{aligned}$$

Kadangi f nemažėjanti, tai $f(\overline{C}(x+h,y)) \leq f(\overline{C}(x,y))$ ir todėl pritaikius ($\overline{H}2$)

$$\begin{aligned} \Delta_x H_f &\leq (C(x+h,y) - C(x,y))f(\overline{C}(x+h,y)) \leq \frac{C(x+h,y) - C(x,y)}{1 - \overline{C}(x+h,y)} \\ &= \frac{C(x+h,y) - C(x,y)}{C^*(x,y)}. \end{aligned}$$

Pasinaudoję 5.6 lema, gauname, kad $\Delta_x H_f \leq h$. Analogiškai galima įvertinti ir skirtumą $H_f(C)(x,y+h) - H_f(C)(x,y)$. Taigi naudodamiesi 2.1 teorema, gauname, kad $H_f(C)$ yra kvazikopula. □

Tyrimas, ar $H_f(C)$, $\forall C \in \mathcal{C}^-$ yra kopula, yra problemiškas, todėl toliau įvesime papildomus apribojimus kopulos antrai mišriai dalinei išvestinei $D_{12}C$.

5.8 Teorema. Tarkime, C turi antrą mišrią išvestinę bei

$$D_{12}C \geq \frac{D_1C \cdot (1 - D_2C)}{y} \quad \text{ir} \quad D_{12}C \geq \frac{D_2C \cdot (1 - D_1C)}{x}. \tag{5.3}$$

Taip pat tarkime, kad f tenkina ($\overline{H}1$)–($\overline{H}4$). Tada $H_f(C)(x,y)$ yra kopula.

Įrodymas. Tarkime, C tenkina teoremoje suformuotus rėžius antrai mišriai dalinei išvestinei.

Nagrinėkime antrą mišrią $H_f(C)$ išvestinę

$$\begin{aligned} D_{12}H_f(C) = {} & D_1C \cdot f'(\overline{C})(D_2C-1) + D_2C \cdot f'(\overline{C})(D_1C-1) \\ & + C \cdot f''(\overline{C})(D_1C-1)(D_2C-1) + D_{12}C \cdot f(\overline{C}) + D_{12}C \cdot C \cdot f'(\overline{C}). \end{aligned}$$

Pasinaudojus $(\overline{H}3)$ ir $(\overline{H}4)$ galime ją įvertinti iš apačios

$$\begin{aligned} D_{12}H_f(C) &\geq f'(C)(C \cdot D_{12}C - D_1C \cdot (1-D_2C) - D_2C \cdot (1-D_1C)) + D_{12}C \cdot f(\overline{C}) \\ &\geq f'(C)(C \cdot D_{12}C - D_1C \cdot (1-D_2C) - D_2C \cdot (1-D_1C) + D_{12}C(1-\overline{C})) \\ &= f'(C)((x+y)D_{12}C - D_1C \cdot (1-D_2C) - D_2C \cdot (1-D_1C)) \\ &= f'(C)(xD_{12}C - D_2C \cdot (1-D_1C)) + f'(C)(yD_{12}C - D_1C \cdot (1-D_2C)). \end{aligned}$$

Dėl 5.3 nelygybės gauname, kad

$$D_{12}H_f(C) \geq 0.$$

Kadangi kraštinės sąlygos taip pat yra tenkinamos gauname, kad $H_f(C)$ yra kopula. $\square$

Atvira problema lieka detalesnio sąryšio tarp kopulų tenkinančių 5.3 nelygybes ir kopulų iš C^- nustatymas, tačiau tikrai yra viena kopula kuri tenkina 5.3 nelygybes ir yra iš C^-. Tai yra nepriklausomumo kopula Π, nes

$$D_1\Pi(x,y) = y, \qquad D_2\Pi(x,y) = x \qquad \text{ir} \quad D_{12}\Pi(x,y) = 1.$$

Toliau apsiribosime nepriklausomumo kopula Π ir naudosime žymenį

$$D_f(x,y) := H_f(\Pi)(x,y).$$

Prisiminkime generatorius nagrinėtus 3.1, 3.2 ir 3.3 pavyzdžiuose. Kaip parodėme, jie tenkina (H1)–(H5) sąlygas. Dabar parodysime, kad D_f kopulų šeimai galima praplėsti šių generatorių parametrų sritis.

5.4 Pavyzdys. Nagrinėkime $\kappa_\lambda(x) = (1+\lambda x)^{-1}$ su $\lambda \in [-1,0]$. Akivaizdu, kad generatorius yra tolydus, diferencijuojamas ir tenkina $(\overline{H}1)$ ir $(\overline{H}2)$. Pastebėkime, kad

$$\frac{\partial}{\partial x}\kappa_\lambda(x) = \frac{-\lambda}{(1+\lambda x)^2} = \frac{-\lambda\kappa_\lambda(x)}{1+\lambda x} \leq \frac{\kappa_\lambda(x)}{1+x}$$

bei $\frac{\partial}{\partial x}\kappa_\lambda(x) \geq 0$ ir todėl κ_λ tenkina $(\overline{H}3)$. Antra generatoriaus išvestinė bus

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\kappa_\lambda(x) = \frac{2\lambda^2}{(1+\lambda x)^3} \geq 0,$$

t. y. generatorius κ_λ tenkina $(\overline{H}4)$ sąlygą. Taigi, kartu su 3.1 pavyzdžio rezultatais gauname, kad

$$D_{\kappa_\lambda}(x,y) = \frac{xy}{1-\lambda(1-x)(1-y)},$$

yra kopula su visais $\lambda \in [-1,1]$. Pastebėkime, kad iš tiesų tai yra AMH kopulų šeima [1].

5.5 Pavyzdys. Nagrinėkime $\delta_\alpha(x) = 1 - \alpha x$ su $\alpha \in [-1,0]$. Generatorius yra tolydus ir diferencijuojamas. Taip pat galioja ir $(\overline{H}1)$ bei $(\overline{H}2)$. $\delta_\alpha(x)$ išvestinė bus

$$0 \leq \frac{\partial}{\partial x}\delta_\alpha(x) = -\alpha \leq 1 \leq \frac{\delta_\alpha(x)}{1-x},$$

o antra išvestinė $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\delta_\alpha(x) = 0$. Taigi δ_α tenkina $(\overline{H}3)$ ir $(\overline{H}4)$. Prijungę 3.2 pavyzdžio rezultatus, gauname, kad bet kuriam $\alpha \in [-1,1]$

$$D_{\delta_\alpha}(x,y) = xy(1-\alpha(1-x)(1-y)),$$

yra kopula. Pastebėkime, kad tai yra FGM kopulų šeima [10, 12, 17].

5.6 Pavyzdys. Nagrinėkime $\nu_\delta(x) = \exp(\delta x)$ su $\delta \in (0,1]$. Generatorius yra tolydus ir diferencijuojamas. Taip pat galioja ir $(\overline{H}1)$ bei $(\overline{H}2)$, nes

$$\nu_\delta(1-x) = e^{\delta x}(1-x) \leq e^{x}(1-x) \leq e^{0}(1-0) = 1.$$

$\nu_\delta(x)$ išvestinė bus

$$0 \leq \frac{\partial}{\partial x}\nu_\delta(x) = \delta e^{\delta x - 1} = \delta e^{-1}\nu_\delta(x) \leq \nu_\delta(x) \leq \frac{\nu_\delta(x)}{1-x},$$

o antra išvestinė $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\nu_\delta(x) \geq 0$. Taigi ν_δ tenkina $(\overline{H}3)$ ir $(\overline{H}4)$. Prijungę 3.3 pavyzdžio rezultatus, gauname, kad bet kuriam $\delta \in [-1,1]$

$$D_{\delta_\alpha}(x,y) = xy\exp(\delta(1-x)(1-y)),$$

yra kopula. Ši kopulų šeima nagrinėta Cuadras [5].

5.9 Pastaba. Pastebėkime, kad jei $f_2(x) \geq f_1(x)$, visiems $x \in I$ tai $D_{f_1}(x,y) \geq D_{f_2}(x,y)$, visiems $(x,y) \in I^2$. Pažymėkime kraštinius generatorius, tenkinančius (H1)–(H5) arba $(\overline{H}1)$–$(\overline{H}4)$

$$f^{\min}(x) = 1-x, \qquad f^{\max}(x) = \frac{1}{1-x},$$

ir juos atitinkančias kopulas

$$D^{\min}(x,y) = xy(1-(1-x)(1-y)), \qquad D^{\max}(x,y) = \frac{xy}{1-(1-x)(1-y)}.$$

Bet tai yra atitinkamai FGM kopula su parametru -1 ir AMH kopula su parametru 1. Todėl nesunkiai galime gauti kopulų šeimos D_f priklausomybės matų rėžius (žr. [19] 5.2. pavyzdį, 5.10 uždavinį, [14] 2.4. pavyzdį)

$$\begin{aligned} -\frac{2}{9} = \tau_{D^{\min}} \leq & \tau_{D_f} \leq \tau_{D^{\max}} = \frac{1}{3}, \\ -\frac{1}{3} = \rho_{D^{\min}} \leq & \rho_{D_f} \leq \rho_{D^{\max}} = -4\pi^2 - 39 \approx 0,4784. \end{aligned}$$

6 Empirinis taikymas

Gauta transformacija H_f ir jos apibendrinimai suteikia nemažai laisvės taikymuose. Iliustracijai naudosime biržose prekiaujamų fondų (angl. exchange-traded funds) duomenis. Konkrečiau iShares Europos vyriausybių obligacijų (angl. *iShares Core Euro Government Bond UCITS ETF*) ir iShares Europos korporacijų obligacijų (angl. *iShares Core Euro Corporate Bond UCITS ETF*) biržose prekiaujamų fondų logaritmines dienines grąžas nuo 2010 m. spalio 1 d. iki 2015 m. gruodžio 11 d. Savaitgaliai ir šventinės dienos nenagrinėtos. Iš viso 1315 stebėjimų (darbo dienų). Kadangi domina tik pačios kopulos modeliavimas, marginaliuosius skirstinius imsime empirinius, t. y. modeliuosime kopulą tarp empirinių pasiskirstymo funkcijų reikšmių. Šias reikšmes žymėsime atitinkamai x_i ir y_i, $i = 1, \ldots, 1315$. Jos pavaizduotos 6(a) pav.

Optimalios kopulos paieškai naudojome gerai žinomas Gauso ir Studento kopulų šeimas (žr. [3] 3.2.1 ir 3.2.2 skyrelius). Taip pat naudojome gerai žinomų Clayton [4] (žymėsime C_{Cl}) ir Gumbel [13] (žymėsime C_{Gu}) kopulų, iškilą kombinaciją, t. y. nagrinėjome trijų parametrų kopulų šeimą

$$F_\alpha(C_{Cl}, C_{Gu}) = \alpha C_{Cl}(x,y;\beta) + (1-\alpha)C_{Gu}(x,y;\gamma), \qquad \alpha \in [0,1], \beta \in [-1,\infty)\setminus\{0\}, \gamma \in [1,\infty).$$

Šias šeimas palyginome su kopulų šeima gauta naudojantis mūsų įvesta transformacija R_f, bei generatoriumi $\nu_\delta(x) = \exp(\delta x), \delta \in [-1, 0]$. Vėlgi, naudojome Clayton ir Gumbel kopulas, t. y. nagrinėjome trijų parametrų kopulų šeimą

$$R_{\nu_\delta}(C_{Cl}, C_{Gu})(x,y;\delta,\beta,\gamma) = \frac{1}{2}\left(C_{Cl}(x,y;\beta)\nu_\delta(\overline{C}_{Gu}(x,y)) + C_{Gu}(x,y;\beta)\nu_\delta(\overline{C}_{Cl}(x,y))\right),$$

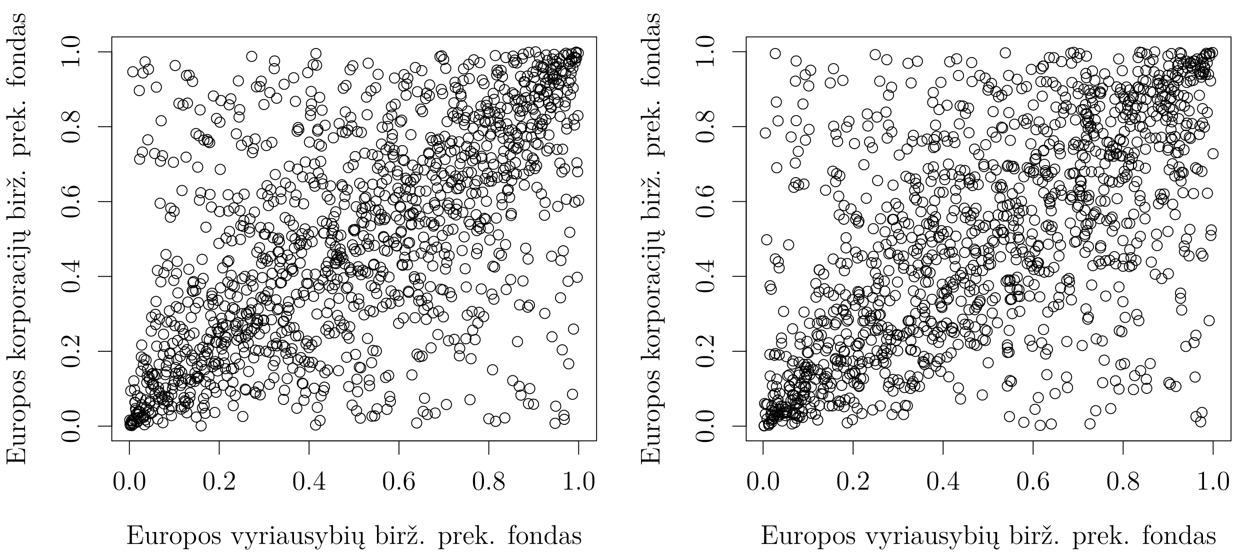
čia $\delta \in [-1, 0]$, $\beta \in [-1,\infty)\setminus\{0\}$ ir $\gamma \in [1,\infty)$.

Kopulų šeimos optimalių parametrų parinkimui naudojome didžiausio tikėtinumo metodą, t. y. maksimizavome logaritminės didžiausio tikėtinumo funkcijos, apibrėžtos lygybe

$$\log(L) := \sum_{i=1}^{1315} \ln(D_{12}C(x_i, y_i)),$$

reikšmę.

Optimizuotas kopulas tarpusavyje lyginsime naudojant šios funkcijos reikšmes. Optimizacijos rezultatai pateikiami 1 lentelėje.



(a) Realūs duomenys

(b) Sumodeliuotos kopulos R_ν realizacijos

6 pav.: Naudoti duomenys ir kopulos R_ν su optimaliais parametrais simuliuotos realizacijos

1 lentelė: Optimizuoti parametrai ir $log(L)$ funkcijos reikšmės

Kopula	Optimalūs parametrai	log(L) reikšmė
Gauso	$\theta = 0.5874$	278.672
Stjudento	$\nu = 3$, $\theta = 0.6416$	372.6432
Iškila C_{Cl} ir C_{Gu} kombinacija	$\alpha = 0.4685$, $\beta = 0.4775$, $\gamma = 2.9945$	357.383
$R_{\nu_\delta}(C_{Cl}, C_{Gu})$	$\delta =$ -0.2495, $\beta = 2.8029$, $\gamma = 2.6470$	382.6325

Kaip ir buvo galima tikėtis iš 6(a) pav., Gauso kopula nelabai tinka šiems duomenims, nes ji nesugeba modeliuoti sunkių uodegų, o finansiniai duomenys dažnai pasižymi šia savybe. Stjudento kopula ir tiesinė dviejų Archimedo kopulų kombinacija atrodo gan gerai, nes jos abi geba modeliuoti sunkias uodegas. Iš šių dviejų kopulų, Stjudento su optimaliais parametrais atitinka duomenis šiek tiek geriau nei tiesinė dviejų Archimedo kopulų kombinacija. Optimizuojant kopulų šeimos, gautos naudojant R_f transformaciją ir generatorių ν_δ, parametrus galima dar šiek tiek pagerinti kopulos atitikimą duomenims, nepadidinant (lyginant su tiesine kombinacija) parametrų skaičiaus. Taigi šiuo atveju mūsų įvesta transformacija leidžia rasti kopulų šeimą, kuri geriau atitinka duomenis.

7 Išvados

Šiame darbe įvedėme transformaciją H_f, kuri sujungė keletą literatūroje jau nagrinėtų transformacijų ir kopulų šeimų. Ši kopulų transformacija yra gan bendra ir apima nemažą dalį kopulų. Galima sakyti, kad ji supaprastina optimalios kopulos pasirinkimą iki vienmatės funkcijos f pasirinkimo. Pavyzdžiuose pasiūlytos galimos generatoriaus f vieno parametro šeimos. Analogiškai galima įvesti ir generatorius su didesniu parametrų skaičiumi. Jie duotų kopulų šeimas, kurios leistų modeliuoti įvairesnes priklausomybines struktūras. Taigi ši transformacija leidžia praplėsti gerai žinomų kopulų ir jų šeimų sritis, įvedant didesnį skaičių parametrų. Be to, naudodamiesi H_f atvaizdžiu atkūrėme kelias populiarias kopulų šeimas (AMH, FGM), taigi H_f transformaciją galima interpretuoti kaip šių šeimų apibendrinimą.

Taip pat ištyrėme pagrindines šios transformacijos savybes: parodėme, kad W yra vienintelė transformacijai H_f invariantinė kopula, taip pat, kad transformacija išlaiko konkordancijos tvarkos sąryšį. Radome priklausomybės matų rėžius, ištyrėme, kada transformacija išlaiko radialinio simetriškumo savybę bei parodėme, kad H_f priartina kopulą prie W kopulos L_∞ metrikos prasme.

Darbe pasiūlėme kelis galimus H_f transformacijos apibendrinimus: šios transformacijos posūkį, kuris pakeičia atvaizdžio fiksuotą tašką iš W į M, apibendrinimą $C \times C$ aibėje bei generatoriaus f srities praplėtimą kopuloms, kurios pasižymi LTI ir RTD savybėmis ir plačiau nepriklausomumo kopulai Π. Atvira problema lieka klausimas, ar transformacijos H_f, su generatoriumi tenkinančiu $(\overline{H}1)$–$(\overline{H}4)$ sąlygas, rezultatas yra kopula bet kuriai kopulai iš C^-. Taip pat būtų naudingas ir detalesnis siūlytų apibendrinimų savybių nagrinėjimas bei pačios transformacijos apibendrinimas $n-$matėms kopuloms.

Galiausiai atlikome empirinį tyrimą, iliustruojantį praktinį šios transformacijos taikymą. Gauti rezultatai parodė, kad pritaikius transformaciją galima pagerinti kopulos atitikimą duomenims, lyginant rezultatus su gerai žinomomis kopulų šeimomis.

Literatūra

[1] Mir M Ali, NN Mikhail, and M Safiul Haq. A class of bivariate distributions including the bivariate logistic. *Journal of multivariate analysis*, 8(3):405–412, 1978.

[2] Elisabetta Alvoni, Pier Luigi Papini, and Fabio Spizzichino. On a class of transformations of copulas and quasi-copulas. *Fuzzy Sets and Systems*, 160(3):334–343, 2009.

[3] Umberto Cherubini, Elisa Luciano, and Walter Vecchiato. *Copula methods in finance*. John Wiley & Sons, New York, 2004.

[4] David G Clayton. A model for association in bivariate life tables and its application in epidemiological studies of familial tendency in chronic disease incidence. *Biometrika*, 65(1):141–151, 1978.

[5] Carles M Cuadras. Constructing copula functions with weighted geometric means. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 139(11):3766–3772, 2009.

[6] Bernard De Baets, Hans De Meyer, Jana Kalicka, and Radko Mesiar. Flipping and cyclic shifting of binary aggregation functions. *Fuzzy Sets and Systems*, 160(6):752–765, 2009.

[7] Ali Dolati and Manuel Úbeda-Flores. Constructing copulas by means of pairs of order statistics. *Kybernetika*, 45(6):992–1002, 2009.

[8] Fabrizio Durante. A new class of symmetric bivariate copulas. *Nonparametric Statistics*, 18(7-8):499–510, 2006.

[9] Fabrizio Durante, Juan Fernández-Sánchez, and Wolfgang Trutschnig. Solution to an open problem about a transformation on the space of copulas. *Dependence Modeling*, 2(1), 2014.

[10] Dennis JG Farlie. The performance of some correlation coefficients for a general bivariate distribution. *Biometrika*, 47(3-4):307–323, 1960.

[11] C Genest, JJ Quesada Molina, JA Rodrıguez Lallena, and C Sempi. A characterization of quasi-copulas. *Journal of Multivariate Analysis*, 69(2):193–205, 1999.

[12] Emil J Gumbel. Bivariate exponential distributions. *Journal of the American Statistical Association*, 55(292):698–707, 1960.

[13] Emil Julius Gumbel. Distributions des valeurs extrêmes en plusieurs dimensions. *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris*, 9:171–173, 1960.

[14] Harry Joe. *Multivariate Models and Dependence Concepts*. Chapman & Hall, London, 1997.

[15] Radko Mesiar, Magda Komorníková, and Jozef Komorník. Perturbation of bivariate copulas. *Fuzzy Sets and Systems*, 268:127–140, 2015.

[16] Piotr Mikusiński and Michael D Taylor. Some approximations of n-copulas. *Metrika*, 72(3):385–414, 2010.

[17] D. Morgenstern. Einfache beispiele zweidimensionaler verteilungen. *Mitt. Math. Statist*, 8:234–235, 1956.

[18] Patricia Mariela Morillas. A method to obtain new copulas from a given one. *Metrika*, 61(2):169–184, 2005.

[19] Roger B Nelsen. *An introduction to copulas*. Springer, 2006.

[20] Walter R. Rudin. *Principles of mathematical analysis*. McGraw-Hill, 1976.

A Priedai

A.1 Kodo fragmentai

```
# R vesija 3.2.1 (2015-06-18)
# ----------------------------------------
# Poaibio B C-turis
V = function(C, B) {
  C(B[1,2], B[2,2]) - C(B[1,1], B[2,2]) - C(B[1,2], B[2,1]) + C(B[1,1], B
      [2,1])
}
# Transformacija H_f
dual = function(C) function(x, y) x + y - C(x, y)
survival = function(C) function(x, y) 1 - dual(C)(x, y)
H = function(f) function(C) function(x, y) C(x, y)*f(survival(C)(x, y))
# Generatorius f2
gen_f1 = function(a, epsilon = 0.01) function(x) {
  I_1 = (x > a-epsilon & x < a+epsilon)
  I_2 = (x >= a+epsilon)
  1-I_1*(x-a+epsilon)^2/(4*epsilon*(1-a))-I_2*(x-a)/(1-a)
}
# Nepriklausomumo kopula
PI = function(x, y) x*y
# Neigiamo C-turio pavyzdys
B = matrix(c(0.3, 0.23, 0.36, 0.28), nrow = 2)
V(H(gen_f1(0.5, 0.01))(PI), B)
```

Kodo fragmentas 1: 3.5 pavyzdžio R kodas