

VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

Magistro darbas

STOCHASTINIŲ DIFERENCIALINIŲ
LYGČIŲ DISKREČIOS IR PUSIAU
DISKREČIOS APROKSIMACIJOS IR JŲ
TAIKYMAS PALŪKANŲ NORMŲ
MODELiams

DISCRETE AND SEMIDISCRETE APPROXIMATIONS
OF STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS AND
APPLICATIONS TO INTEREST RATE MODELS

Aurelija Periokaitė

VILNIUS 2016

Matematinės analizės katedra

Darbo vadovas prof. habil. dr. Vigirdas Mackevičius

Darbo recenzentas lekt. Antanas Lenkšas

Darbas apgintas 2016 m. sausio 14 d.

Darbas įvertintas _____

Registravimo NR. _____

2016-01-04 _____

Stochastinių diferencialinių lygčių diskrečios ir pusiau diskrečios aproksimacijos ir jų taikymas palūkanų normų modeliams

Santrauka

Šiame darbe nagrinėjamas pusiau diskretus Oilerio metodas stochastinėms diferencialinėms lygtims skaitiniais metodais spręsti, konstruojama nauja pusiau diskreti Hoino schema, taip pat tiriama šių aproksimacijų eilė bei paklaida. Pusiau diskrečių aproksimacijų tikslumas lyginamas su diskrečių Oilerio, Hoino ir Milšteino aproksimacijų tikslumu. Vėliau tiek diskrečios, tiek pusiau diskrečios aproksimacijos taikomos trumpalaikių palūkanų normų modelių (Vasiceko ir CIR) lygtims aproksimuoti bei be kuponės obligacijos kainai modeliuoti.

Raktiniai žodžiai: stochastinių diferencialinių lygčių aproksimacijos, pusiau diskreti Oilerio aproksimacija, pusiau diskreti Hoino aproksimacija, CIR modelis, Vasiceko modelis, be kuponės obligacija

Discrete and Semidiscrete Approximations of Stochastic Differential Equations and Applications to Interest Rate Models

Abstract

In this paper, we analyze the semidiscrete Euler approximation of stochastic differential equations and propose a new semidiscrete Heun method and estimate the convergence rate of both methods. The efficiency and behavior of semidiscrete approximations are compared to discrete Euler, Heun, and Milstein schemes. Then we apply discrete and semidiscrete approximations to Vasicek and CIR equations and model the price of zero-coupon bond.

Key words: approximations of SDEs, semidiscrete Euler method, semidiscrete Heun method, CIR model, Vasicek model, zero-coupon bond

Turinys

1 Įvadas	4
2 Pusiau diskretus (semidiscrete) metodas stochastinėms diferencialinėms lygtims spręsti	5
2.1 Hoino aproksimacijos taikymas	9
3 Aproksimacijų konvergavimo skaitinis tyrimas	11
4 Aproksimacijų taikymas trumpalaikiams palūkanų normų modeliams	15
4.1 Vasiceko modelis	16
4.1.1 Vasiceko lygties aproksimacijos ir bekuponės obligacijos kainos modeliavimas	17
4.2 CIR modelis	20
4.2.1 CIR lygties aproksimacijos ir bekuponės obligacijos kainos modeliavimas	22
5 Išvados	28

Apibrėžimai

Arbitražas – galimybė gauti garantuotą pelną nerizikuojant, su nulinėmis investicijomis.

Aproksimacijos stochastinei diferencialinei lygčiai

$$X(t) = x(0) + \int_0^t b(X(s))ds + \int_0^t \sigma(X(s))dB_s, \quad t \in [0, T],$$

$$\Delta B_k = B_{t_{k+1}} - B_{t_k}, \quad h = T/N, \quad t_k = kh, \quad k = 0, 1, \dots, N-1:$$

Oilerio:

$$\bar{X}_{k+1}(t) = \bar{X}_k(t_k) + b(\bar{X}_k(t_k))h + \sigma(\bar{X}_k(t_k))\Delta B_k;$$

Hoino:

$$\bar{X}_{k+1}(t) = \bar{X}_k(t_k) + \frac{1}{2}(b_1(\bar{X}_k(t_k)) + b_1(\hat{X}_{k+1}(t_{k+1})))h,$$

$$\hat{X}_{k+1}(t) = \bar{X}_k(t_k) + b_1(\bar{X}_k(t_k))h;$$

Milšteino:

$$\bar{X}_{k+1}(t) = \bar{X}_k(t_k) + b(\bar{X}_k(t_k))h + \sigma(\bar{X}_k(t_k))\Delta B_k + \frac{1}{2}\sigma\sigma'(\bar{X}_k(t_k))(\Delta B_k^2 - h).$$

Stiprioji aproksimacija. Sakoma, kad $\{X^h\}$ yra stochastinės diferencialinės lygties (1) sprendinio X_t n -osios eilės stiprioji aproksimacija, jei su visais $t \in [0, T]$

$$\mathbf{E}|X_t^h - X_t| = O(h^n), \quad h \rightarrow 0.$$

Lipšico sąlyga. Sakome, kad stochastinės diferencialinės lygties (1) koeficientai tenkina Lipšico sąlygą, jei su kokia nors konstanta $C > 0$ teisinga nelygybė

$$|b(x, t) - b(y, t)|^2 + |\sigma(x, t) - \sigma(y, t)|^2 \leq C|x - y|^2, \quad x, y \in \mathbf{R}, \quad t \in \mathbf{R}_+.$$

Tiesiško augimo sąlyga. Sakome, kad lygties (1) koeficientai tenkina tiesiško augimo sąlygą, jei su kokia nors konstanta $C > 0$ teisinga nelygybė

$$|b(x, t)|^2 + |\sigma(x, t)|^2 \leq C(1 + x^2), \quad x \in \mathbf{R}, \quad t \in \mathbf{R}_+$$

čia $x, y \in \mathbf{R}, t \in \mathbf{R}_+, C > 0$ – konstanta.

Ornšteino–Ulenbeko procesas – atsitiktinis procesas, kuris yra stochastinės diferencialinės lygties

$$dX(t) = \kappa(\theta - X(t))dt + \sigma dB_t,$$

sprendinys ($\kappa, \sigma > 0, \theta \in \mathbf{R}$).

1 Įvadas

Stochastinės diferencialinės lygtys (SDL) yra labai svarbios modeliuojant realius reiškinius, priklausančius nuo įvairių atsitiktinių veiksnių, ne tik fizikoje ar inžinerijoje, bet ir ekonomikoje bei finansuose. Puikus stochastinių diferencialinių lygčių pritaikymo finansuose pavyzdys yra garsusis Black–Scholes modelis, plačiai naudojamas teorinėms europietišku pirkimo (*put*) ir pardavimo (*call*) opcionų kainoms skaičiuoti. Vis dėlto modeliuojant dažnai susiduriama su problema, jog stochastinė diferencialinė lygtis

$$X(t) = x(0) + \int_0^t b(X(s))ds + \int_0^t \sigma(X(s))dB_s, \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

išreikštiniu pavidalu yra neišsprendžiama ir reikia skaitinių sprendimo metodų, kurie leistų tokios lygties sprendinį modeliuoti kompiuteriu [6].

Literatūroje be gerai žinomų Oilerio–Marujamos, Hoino ar Milšteino aproksimacijų, yra pristatoma ir daugybė kitų būdų, skirtų skaitiškai spręsti stochastines diferencialines lygtis. Pavyzdžiui [8] yra siūlomas atskyrimo (*split-step*) metodas. Stochastinė diferencialinė lygtis išskaidoma į deterministinę ir stochastinę dalis, tada deterministinė dalis sprendžiama tiksliai, o stochastinė – aproksimuojama. Straipsnio [9] autoriai (1) pavidalo lygtį siūlo išskirti į dvi lygtis, iš kurių bent vienos tikslus sprendinys būtų žinomas išreikštiniu pavidalu. Įvairių straipsnių gausa rodo, jog naujų aproksimacijų stochastinėms diferencialinėms lygtims konstravimas ir tyrimas yra aktuali tema.

Halidias [4] pasiūlė vadinamąsias pusiau diskrečias (*semidiscrete*) SDL aproksimacijas, kai lygtis išskaidoma į dvi dalis, iš kurių viena sprendžiama tiksliai, o kita aproksimuojama kokiu nors žinomu diskrečiuoju metodu. Šiame darbe siūlome Halidias'o [4] nagrinėto pusiau diskreta Oilerio metodo (*semidiscrete Euler scheme*) pagerinimą – pusiau diskretųjį Hoino metodą, diskrečiojoje dalyje vietoje Oilerio schemos naudojant diskrečiąją Hoino schemą. Ištyrėme abiejų aproksimacijų eiles bei paklaidas. Pusiau diskrečių aproksimacijų tikslumą vėliau palyginame su diskrečių Oilerio, Hoino ir Milšteino aproksimacijų tikslumu.

Svarbi darbo dalis – aproksimacijų taikymas trumpalaikiams palūkanų normų modeliams ir beuponės obligacijos kainos modeliavimui. Tyrimui pasirinkome vienfaktorius Vasiceko ir CIR modelius. Anot [3], šie modeliai dažnai naudojami vertinant išvestinių finansinių instrumentų kainą, nes pasižymi grįžtamumo prie vidurkio savybe, realiai stebima finansų rinkose: vyraujant aukštomis palūkanų normoms, ekonomika lėtėja, pinigų paklausa mažėja, todėl mažėja ir palūkanų normos, artėdamos prie ilgalaikio vidutinio lygio. Ir atvirkščiai, rinkoje vyraujant žemoms palūkanų normoms, pinigų paklausa auga, o kartu prie ilgalaikio vidurkio kyla palūkanų normos.

Pagrindinį dėmesį skyrėme CIR lygties sprendinio aproksimavimui, nes skirtingai nei Vasiceko modelyje, CIR lygties sprendinio išreikštiniu pavidalu rasti negalime. Nors CIR proceso priaugiai turi necentruotą χ^2 skirstinį ir vis gi tikslus šios lygties sprendinio modeliavimas yra įmanomas, tačiau toks būdas yra gana lėtas, lyginant su skaitiniais sprendimo metodais [8].

2 Pusiau diskretus (semidiscrete) metodas stochastinėms diferencialinėms lygtims spręsti

Halidias straipsnyje [4] taiko pusiau diskretų algoritmą (1) pavidalo lygtims skaitiniais metodais spręsti. Pagrindinė šios stochastinių diferencialinių lygčių sprendimo schemas idėja yra tokia.

Tarkime, kad $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = T$ yra fiksuoto laiko intervalo $[0, T]$ diskretizacija su pastoviu žingsniu $h = T/N$, $t_k = kh$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, B – Brauno judesys. Tegul (1) lygties koeficientai gali būti išskaidomi taip:

$$\begin{aligned} b(X(t)) &= b_1(X(t)) + b_2(X(t)), \\ \sigma(X(t)) &= \sigma_1(X(t)) + \sigma_2(X(t)). \end{aligned}$$

Tuomet

$$X(t) = X(0) + \int_0^t b_1(X(s))ds + \int_0^t b_2(X(s))ds + \int_0^t \sigma_1(X(s))dB_s + \int_0^t \sigma_2(X(s))dB_s.$$

Sekdami [6], funkcijoms b_1 ir σ_1 pritaikysime formulę

$$f(X(t)) = f(X(t_k)) + \int_{t_k}^t Af(X(s))ds + \int_{t_k}^t Sf(X(s))dB_s, \quad t \geq t_k; \quad (2)$$

čia $Af = bf' + \frac{1}{2}\sigma^2 f''$, $Sf = \sigma f'$ (šios formulės įrodymą galima rasti [6], 9.6 teorema). Taigi turime:

$$\begin{aligned} X(t) &= X(t_k) + \int_{t_k}^t b_1(X(s))ds + \int_{t_k}^t b_2(X(s))ds \\ &\quad + \int_{t_k}^t \sigma_1(X(s))dB_s + \int_{t_k}^t \sigma_2(X(s))dB_s \\ &= X(t_k) + \int_{t_k}^t \left(b_1(X(t_k)) + \int_{t_k}^s Ab_1(X(u))du + \int_{t_k}^s Sb_1(X(u))dB_u \right) ds \\ &\quad + \int_{t_k}^t \left(\sigma_1(X(t_k)) + \int_{t_k}^s A\sigma_1(X(u))du + \int_{t_k}^s S\sigma_1(X(u))dB_u \right) dB_s \\ &\quad + \int_{t_k}^t b_2(X(s))ds + \int_{t_k}^t \sigma_2(X(s))dB_s = X(t_k) + b_1(X(t_k)) \int_{t_k}^t ds \\ &\quad + \int_{t_k}^t b_2(X(s))ds + \sigma_1(X(t_k)) \int_{t_k}^t ds + \int_{t_k}^t \sigma_2(X(s))dB_s + R, \quad t \in [t_k, t_{k+1}], \end{aligned} \quad (3)$$

su liekamuoju nariu

$$\begin{aligned} R &= \int_{t_k}^t \int_{t_k}^s Ab_1(X(u))duds + \int_{t_k}^t \int_{t_k}^s Sb_1(X(u))dB_u ds \\ &\quad + \int_{t_k}^t \int_{t_k}^s A\sigma_1(X(u))dudB_s + \int_{t_k}^t \int_{t_k}^s S\sigma_1(X(u))dB_u dB_s. \end{aligned}$$

Atmetę liekamąjį narį R ir pažymėję $\Delta B_k = B_t - B_{t_k}$, intervaluose $[t_k, t_{k+1}]$, $k = 0, 1, \dots, N - 1$, nuosekliai gauname pusiau diskrečią aproksimaciją

$$\begin{aligned} \bar{X}(t) &= \bar{X}(t_k) + b_1(\bar{X}(t_k))h + \sigma_1(\bar{X}(t_k))\Delta B_k \\ &+ \int_{t_k}^t b_2(\bar{X}(s))ds + \int_{t_k}^t \sigma_2(\bar{X}(s))dB_s, \quad t \in [t_k, t_{k+1}]. \end{aligned} \quad (4)$$

Nesunku pastebėti, kad jei $b_2 = \sigma_2 = 0$, tai gaunama įprasta Oilerio aproksimacija, todėl (4) dar vadinama pusiau diskrečia Oilerio schema (*semidiscrete Euler scheme*) [4].

Norint pritaikyti pusiau diskretų algoritmą stochastinėms diferencialinėms lygtims spręsti yra svarbu lygties (1) koeficientus b ir σ išskaidyti taip, kad kiekviename žingsnyje egzistuotų vienintelis sprendinys išreikštiniu pavidalu (galima tikrinti, ar tenkinamos tiesiško augimo bei Lipšico sąlygos, nes pagal [6] 5.4 teoremą šių prielaidų buvimas garantuoja stochastinės diferencialinės lygties sprendinio egzistavimą ir vienatį). Straipsnyje [4] yra siūlomas toks metodas. Tegul $b = b_1 + b_2$, funkcijos b_1, b_2 yra tolydžios. Tegul, be to, $b_1 = b - \frac{1}{2}\sigma\sigma'$ ir $b_2 = \frac{1}{2}\sigma\sigma'$. Šiuo atveju $\sigma_1 = 0$, o $\sigma = \sigma_2$. Pažymėję

$$\tilde{x}_k = \bar{X}(t_k) + b_1(\bar{X}(t_k))h,$$

lygtį (4) galime perrašyti tokiu būdu:

$$\begin{aligned} \bar{X}(t) &= \tilde{x}_k + \int_{t_k}^t b_2(\bar{X}(s))ds + \int_{t_k}^t \sigma(\bar{X}(s))dB_s \\ &= \tilde{x}_k + \int_{t_k}^t \frac{1}{2}\sigma\sigma'(\bar{X}(s))ds + \int_{t_k}^t \sigma(\bar{X}(s))dB_s \end{aligned}$$

arba

$$\bar{X}(t) = \tilde{x}_k + \int_{t_k}^t \sigma(\bar{X}(s)) \circ dB_s, \quad t \in [t_k, t_{k+1}].$$

Pastarąją jau galėsime išspręsti išreikštiniu pavidalu, o tikslus lygties sprendinys kiekviename žingsnyje bus lygus

$$\bar{X}(t) = H(G(\tilde{x}_k) + B_t - B_{t_k}), \quad t \in [t_k, t_{k+1}];$$

čia G yra funkcijos σ^{-1} pirmykštė funkcija ($G' = \sigma^{-1}$), o H – funkcijos G atvirkštinė funkcija ([6] 7.7 teorema ir įrodymas).

Palyginkime pusiau diskreta, Oilerio ir Milšteino metodų tikslumą skaitiškai ir pavaizduokime gautus rezultatus grafiškai. Nagrinėkime geometrinį Brauno judesio procesą

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \mu X(s)ds + \int_0^t \sigma X(s)dB_s, \quad t \in [0, T], \quad (5)$$

su sprendiniu

$$X(t) = X(0)e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t}.$$

Geometrinis Brauno judesio procesas buvo pasirinktas dėl to, kad yra žinomas tikslus šios lygties sprendinys išreikštiniu pavidalu. Be to, jis apibūdina akcijų kurso kitimą klasikiniame Black–Scholes modelyje (čia μ yra vidutinė grąžos norma (*mean rate of return*), o $\sigma > 0$ – kintamumas (*volatility*), rodantis akcijos rizikingumo laipsnį [7]). Pasak [11], modelis yra labai svarbus ir plačiai naudojamas modernioje finansų teorijoje, kadangi tokiu būdu įmanoma gana tiksliai nustatyti realias finansų rinkose stebimas aktyvų kainas.

Pusiau diskrečiai Oilerio schemai koeficientus parinkę aukščiau aptartu būdu, aproksimacija geometriniam Brauno judesio procesui kiekviename žingsnyje yra lygi

$$\bar{X}(t) = \bar{X}(t_k) + (\mu\bar{X}(t_k) - \frac{1}{2}\sigma^2\bar{X}(t_k))h + \sigma \int_{t_k}^t \bar{X}(s) \circ dB_s, \quad t \in [t_k, t_{k+1}];$$

pažymėję

$$\tilde{x}_k = \bar{X}(t_k) + (\mu\bar{X}(t_k) - \frac{1}{2}\sigma^2\bar{X}(t_k))h,$$

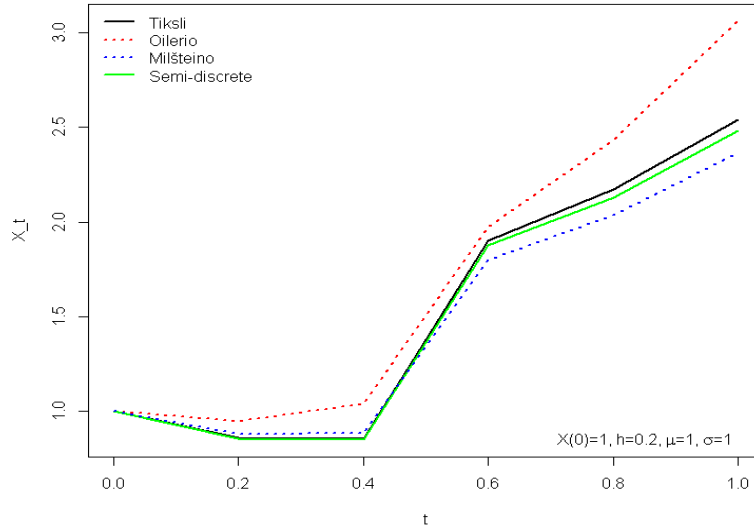
gauname lygtį

$$\bar{X}(t) = \tilde{x}_k + \sigma \int_{t_k}^t \bar{X}(s) \circ dB_s, \quad t \in [t_k, t_{k+1}],$$

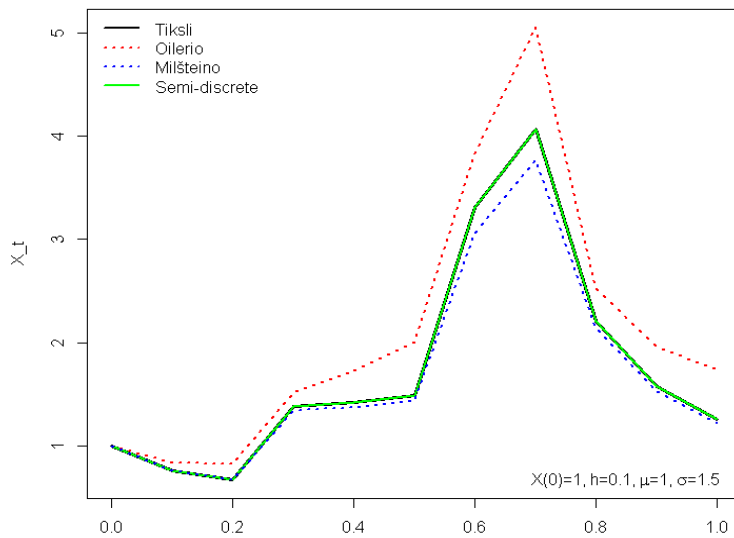
kurios sprendinys yra lygus

$$\bar{X}(t) = \tilde{x}_k \exp\{\sigma(B_t - B_{t_k})\}, \quad t \in [t_k, t_{k+1}].$$

Žemiau pateikiami grafikai, iliustruojantys aproksimacijų gerumą, lyginant su tikslu sprendiniu esant skirtingam kintamumui σ . Iš paveikslų 1, 2 ir 3 aiškiai matome, kad didinant σ didėja ir įprastos Oilerio aproksimacijos paklaida. Nesunku pastebėti, kad pusiau diskreti Oilerio aproksimacija elgiasi panašiai kaip Milšteino aproksimacija ir visais atvejais ($\sigma = 1$, $\sigma = 1.5$ ir $\sigma = 3$) yra tiksliausia.

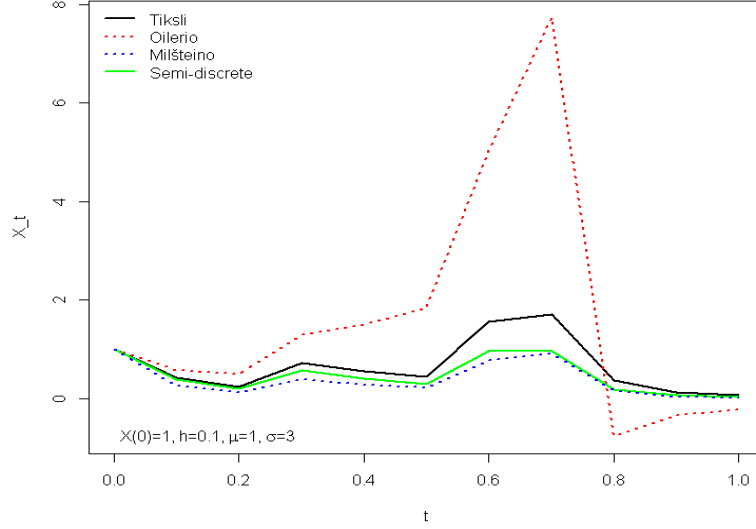


1 pav.: Mažas kintamumas, $\sigma^2 < 2\mu$.



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
<i>Tiksli</i>	1	0,7570266	0,6702934	1,3865527	1,4159004	1,4867495	3,3122209	4,0704383	2,2059968	1,57283	1,2573175
<i>Semi-discrete</i>	1	0,7569669	0,6701878	1,386225	1,4154542	1,486164	3,3106556	4,0681942	2,2046069	1,5717152	1,2563274

2 pav.: Didelis kintamumas, $\sigma^2 \approx 2\mu$.



3 pav.: Labai didelis kintamumas, $\sigma^2 > 2\mu$.

2.1 Hoino aproksimacijos taikymas

Pabandykime pagerinti Halidias [4] siūlomą schemą. Kadangi parametras σ_1 yra parenkamas lygus nuliui, tai aproksimuodami b_1 taikykite ne Oilerio, o Hoino metodą. Tada, jei $b_1 = b - \frac{1}{2}\sigma\sigma'$, $b_2 = \frac{1}{2}\sigma\sigma'$, $\sigma_1 = 0$, o $\sigma = \sigma_2$, pusiau diskreti Hoino aproksimacija kiekviename žingsnyje yra apibrėžiama lygybe

$$\begin{aligned} \bar{X}(t) = \bar{X}(t_k) + \frac{1}{2} \left((b - \frac{1}{2}\sigma\sigma')(\bar{X}(t_k)) + (b - \frac{1}{2}\sigma\sigma')(\hat{X}(t_{k+1})) \right) h \\ + \int_{t_k}^t \frac{1}{2}\sigma\sigma'(\bar{X}(s))ds + \int_{t_k}^t \sigma(\bar{X}(s))dB_s, \quad t \in [t_k, t_{k+1}]; \end{aligned}$$

čia

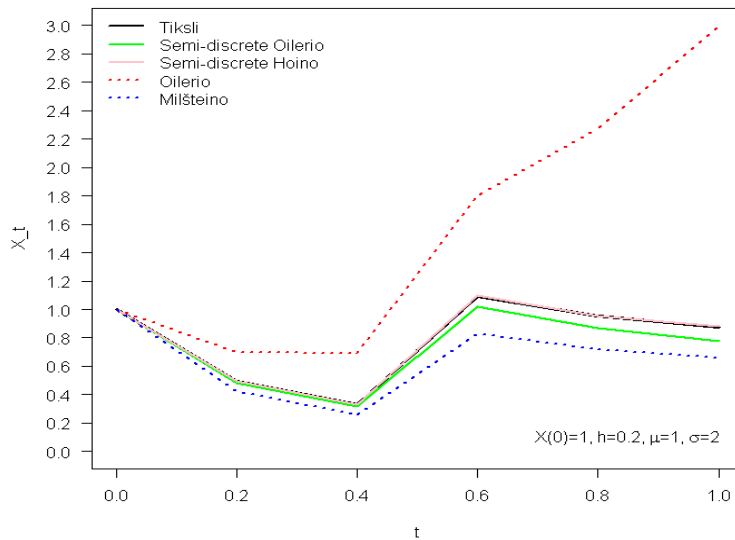
$$\hat{X}(t) = \bar{X}(t_k) + b_1(\bar{X}(t_k))h, \quad t \in [t_k, t_{k+1}].$$

Pažymėję

$$\tilde{x}_k = \bar{X}(t_k) + \frac{1}{2} \left((b - \frac{1}{2}\sigma\sigma')(\bar{X}(t_k)) + (b - \frac{1}{2}\sigma\sigma')(\hat{X}(t_{k+1})) \right) h,$$

turime

$$\bar{X}(t) = \tilde{x}_k + \int_{t_k}^t \sigma(\bar{X}(s)) \circ dB_s, \quad t \in [t_k, t_{k+1}].$$



4 pav.: Geometrinio Brauno judesio pusiau diskreti Hoino aproksimacija.

Pusiau diskrečios Hoino aproksimacijos išraiška geometriniam Brauno judesio procesui:

$$\begin{aligned} \bar{X}(t) = \bar{X}(t_k) + \frac{1}{2} \left[(\mu \bar{X}(t_k) - \frac{1}{2} \sigma^2 \bar{X}(t_k)) + (\mu \hat{X}(t_k) - \frac{1}{2} \sigma^2 \hat{X}(t_k)) \right] h \\ + \sigma \int_{t_k}^t \bar{X}(s) \circ dB_s, \quad t \in [t_k, t_{k+1}]; \end{aligned}$$

čia

$$\hat{X}(t_k) = \bar{X}(t_k) + (\mu \bar{X}(t_k) - \frac{1}{2} \sigma^2 \bar{X}(t_k)) h.$$

Pažymėjus

$$\tilde{x}_k = \bar{X}(t_k) + \frac{1}{2} \left[(\mu \bar{X}(t_k) - \frac{1}{2} \sigma^2 \bar{X}(t_k)) + (\mu \hat{X}(t_k) - \frac{1}{2} \sigma^2 \hat{X}(t_k)) \right] h,$$

turime

$$\bar{X}(t) = \tilde{x}_k \exp\{\sigma(B_t - B_{t_k})\}, \quad t \in [t_k, t_{k+1}].$$

Iš paveikslu 4 matome, kad pusiau diskrečią Hoino aproksimaciją nuo tikslaus sprendinio vizualiai yra sunku atskirti. Taip pat akivaizdu, kad lygčiai (5) ji yra geresnė nei pusiau diskreti Oilerio aproksimacija.

3 Aproximacijų konvergavimo skaitinis tyrimas

Norėdami įsitikinti pusiau diskrečių aproximacijų tikslumu ir vėliau jas palyginti su diskrečiomis aproximacijomis, konvergavimo greičio skaitiniam tyrimui naudosis Alfonsi straipsnyje [1] suformuluota ir įrodyta lema.

Lema. Tegul aproximacija $(\bar{X}_{t_i}^n)$ konverguoja į tolydų procesą X_t ir

$$\mathbf{E}\left(\sup_{0 \leq i \leq n} |\bar{X}_{t_i}^n - X_{t_i}^n|\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Tada $\forall \alpha > 0$ ir $\beta \geq 0$

$$\mathbf{E}\left(\sup_{0 \leq i \leq n} |\bar{X}_{t_i}^n - X_{t_i}^n|\right) = O\left(\frac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha}\right) \Leftrightarrow \mathbf{E}\left(\sup_{0 \leq i \leq n} |\bar{X}_{t_i}^n - \bar{X}_{t_{2i}^{2n}}|\right) = O\left(\frac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha}\right).$$

Kaip ir straipsnyje [1], nagrinėkime laiko intervalą $[0, 1]$, pažymėkime

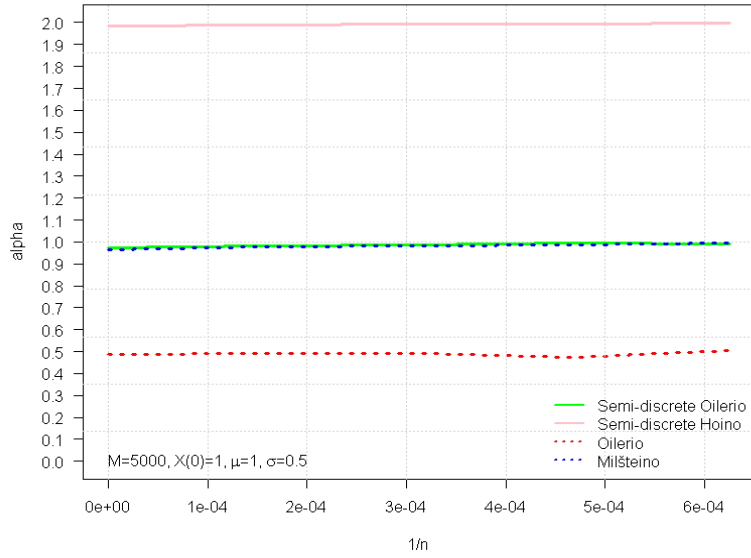
$$S_n = \mathbf{E}\left(\sup_{0 \leq i \leq n} |\bar{X}_{t_i}^n - \bar{X}_{t_{2i}^{2n}}|\right).$$

Be to, tarkime, kad konvergavimo greitis $S_n \sim \frac{C}{n^\alpha}$, kur $\alpha > 0$, o C – konstanta. Tada, remiantis lema, tai bus ekvivalentu konvergavimo greičiui $\frac{1}{n^\alpha}$, o α reikšmės galėsime apskaičiuoti naudojantis

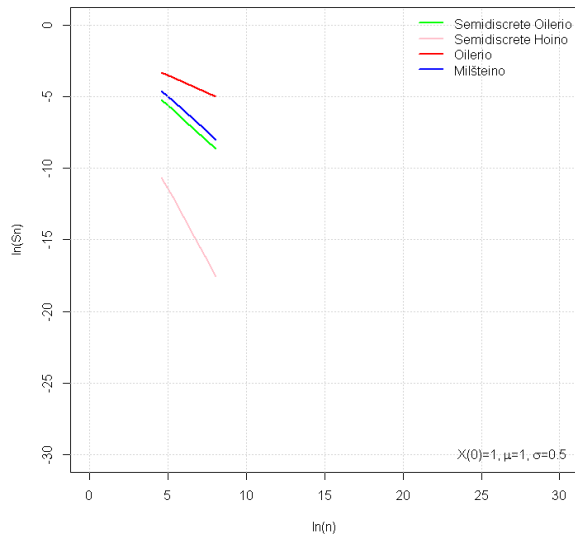
$$\log_2(S_n) - \log_2(S_{2n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha;$$

čia α atitinka stipriosios aproximacijos eilę.

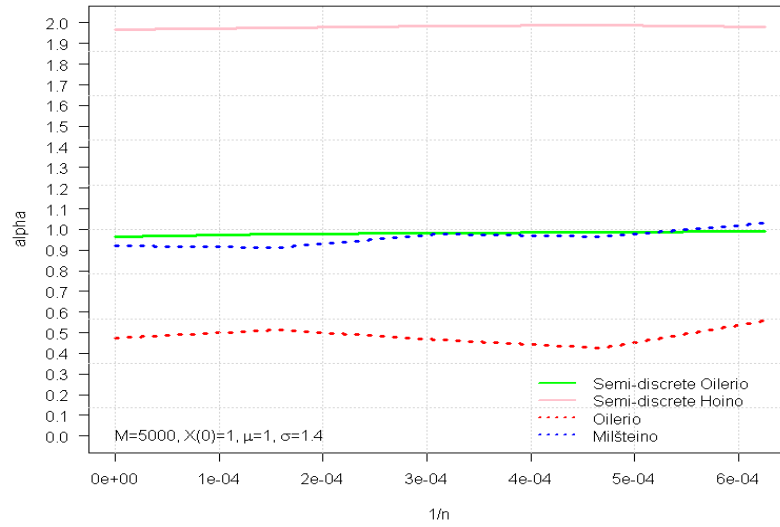
Pateiktuose grafikuose nagrinėtas geometrinis Brauno judesio procesas. Tiriama šiame darbe aptarinėjamų aproximacijų eilė bei parametro α priklausomybė nuo σ . Iš paveikslų 5, 7 ir 9 matome, kad didinant σ aproximacijų eilė α geometriniam Brauno judesiui beveik nepasikeičia, tik kai $\sigma^2 > 2\mu$ ji šiek tiek sumažėja. Grafikuose 6, 8 ir 10 nagrinėjamos aproximacijų paklaidos ir jų priklausomybė nuo aproximacijos žingsnių skaičiaus n . Visuose trijuose grafikuose aiškiai matomas pusiau diskrečių aproximacijų pranašumas geometriniam Brauno judesio procesui. Be to, pusiau diskrečios Hoino aproximacijos paklaida visais atvejais ($\sigma^2 < 2\mu$, $\sigma^2 > 2\mu$ ir $\sigma^2 \approx 2\mu$) yra ryškiai mažesnė nei pusiau diskrečios Oilerio ar Milšteino aproximacijos.



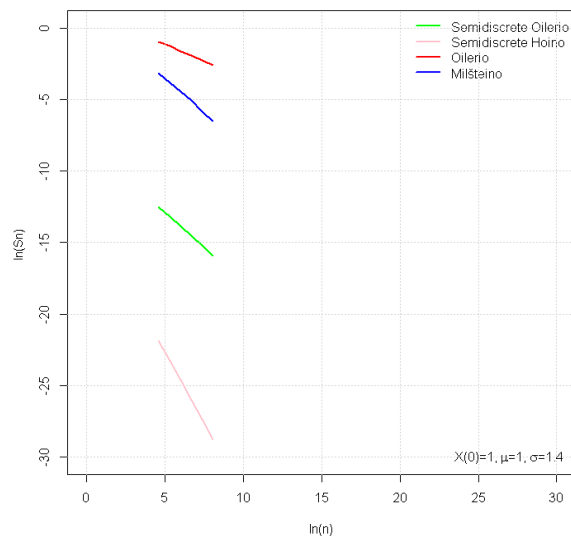
5 pav.: Aproximacijų eilė α , kai $\sigma^2 < 2\mu$.



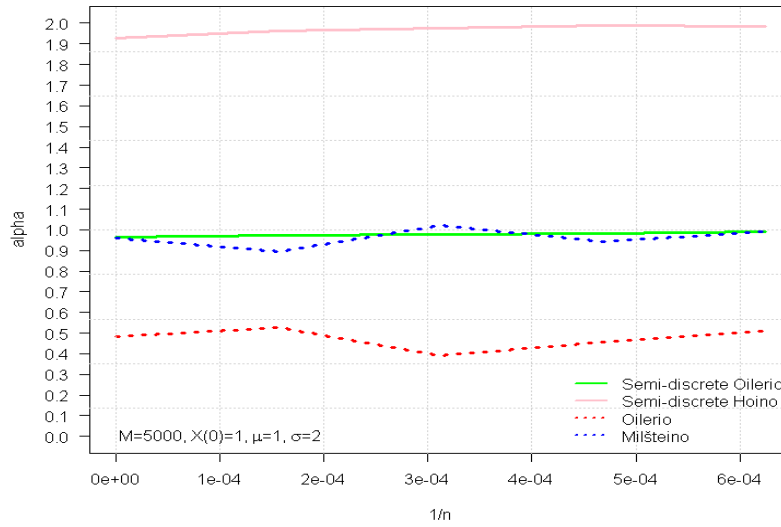
6 pav.: Aproximacijų paklaidos logaritminėje skalėje, kai $\sigma^2 < 2\mu$.



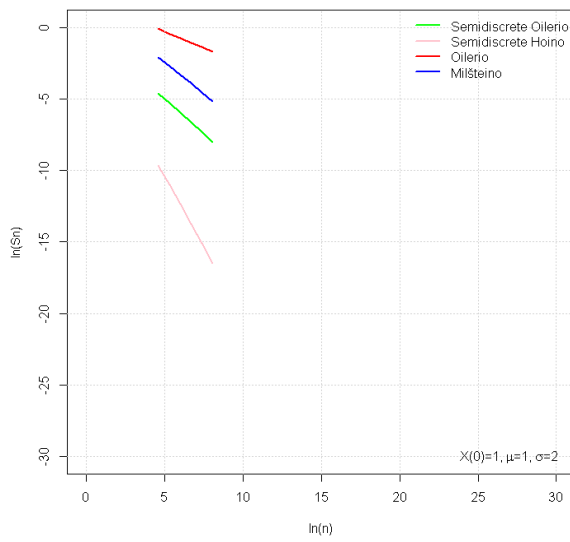
7 pav.: Aproximacijų eilė α , kai $\sigma^2 \approx 2\mu$.



8 pav.: Aproximacijų paklaidos logaritminėje skalėje, kai $\sigma^2 \approx 2\mu$.



9 pav.: Aproximacijų eilė α , kai $\sigma^2 > 2\mu$.



10 pav.: Aproximacijų paklaidos logaritminėje skalėje, kai $\sigma^2 > 2\mu$.

4 Aproximacijų taikymas trumpalaikiams palūkanų normų modeliams

Trumpalaikiuose palūkanų normų modeliuose momentinės palūkanų normos r kitimas apibūdinamas stochastine diferencialine lygtimi

$$dr(t) = \alpha(t, r(t))dt + \beta(t, r(t))dB_t, \quad (6)$$

su tam tikru poslinkio koeficientu α ir difuzijos koeficientu β . Tokio tipo modeliai yra vadinami vienfaktoriais (arba klasikiniiais), nes juose yra tik vienas atsitiktinis procesas. Kadangi koeficientai α ir β gali būti parenkami nevienareikšmiškai, yra daug skirtingų variantų momentinės palūkanų normos dinamiškai apibūdinti. [5]

Toliau nagrinėsime Vasiceko ir Cox–Ingersoll–Ross (CIR) modelius, literatūroje dar vadinamus pusiausvyros modeliais (*equilibrium term structure models*). Didžiausią dėmesį skirsime stochastinės diferencialinės lygties, nusakančios palūkanų normos r kitimą, aproksimavimui bei obligacijos kainos modeliavimui. Modeliuodami laikysimės žemiau išvardintų prielaidų bei naudosime pateiktas formules ir apibrėžimus (apibrėžimai, formulės ir teiginiai yra iš [7]):

- Obligacijos kainą momentu t , kurios vertė išpirkimo momentu T yra lygi 1, žymėsime $P(t, T)$. P yra teigiama ir tenkina sąlygą $P(T, T) = 1$. Bearbi-tražėje rinkoje taip pat galioja multiplikatyvumo sąlyga:

$$P(t, s) = P(t, u)P(u, s), \quad t \leq u \leq s.$$

- **Vidutinė palūkanų norma** (*average interest rate*) $R(t, T)$ intervale $[t, T]$ apibrėžiama lygybe

$$P(t, T) = e^{-(T-t)R(t, T)} \quad (7)$$

t.y.

$$R(t, T) = -\frac{1}{(T-t)} \ln P(t, T). \quad (8)$$

Funkcija $R(t, T)$ kaip kintamojo $T \geq t$ funkcija vadinama pajamingumo kreive (*yield curve*).

- **Momentinė palūkanų norma** (*spot interest rate*). Jei tolydžiai diferencijuojama funkcija $P(t, s)$, $t_0 \leq t \leq s \leq T$, tenkina multiplikatyvumo sąlygą ir $P(t, t) = 1$, tai egzistuoja funkcija r su kuria

$$P(t, s) = \exp \left\{ - \int_t^s r(u) du \right\}, \quad t_0 \leq t \leq s \leq T.$$

Funkcija r yra vadinama momentine palūkanų norma.

- Taip pat laikysime, kad rinkoje kartu su rizikinga investicija, kurios vertė momentu t yra $P(t, T)$, yra ir nerizikinga investicija, kurios vertė momentu t yra

$$S_t^0 = \exp \left\{ \int_0^t r(s) ds \right\}.$$

- **Rizikai neutrali tikimybė.** Tikimybė $\tilde{\mathbf{P}}$ vadinama rizikai neutralia tikimybe, jei ji ekvivalenti tikimybei \mathbf{P} ir jei visos diskontuotos akcijų kainos $\tilde{S}_t^i = e^{-rt} S_t^i$, $t \in [0, T]$, yra $\tilde{\mathbf{P}}$ -martingalai. Terminas *rizikai neutrali tikimybė* paaiškinamas tuo, kad visų akcijų $S_t^i = \tilde{S}_t^i e^{rt}$ vidutinės gražos normos $\tilde{\mathbf{P}}$ atžvilgiu yra lygios nerizikingos obligacijos palūkanų normai r . Remiantis bearbitražės rinkos principu, egzistuoja rizikai neutrali tikimybė $\tilde{\mathbf{P}}$, su kuria diskontuotos obligacijos kainos $P(t, T)/S_t^0$, $t \in [0, T]$, yra $\tilde{\mathbf{P}}$ -martingalai su visais T . Iš čia gauname, kad

$$P(t, T) = \tilde{\mathbf{E}} \left[\exp \left\{ - \int_t^T r(s) ds \right\} \middle| r_t \right]. \quad (9)$$

- Norint rasti obligacijos kainą, reikia žinoti stochastinę diferencialinę lygtį, pagal kurią kinta palūkanų norma r , rizikai neutralios tikimybės $\tilde{\mathbf{P}}$ atžvilgiu. Tarkime, kad λ yra atsitiktinis procesas, su kuriuo $\tilde{B}_t = B_t + \int_0^t \lambda(s) ds$ yra Brauno judesys $\tilde{\mathbf{P}}$ atžvilgiu. Trumpalaikiuose palūkanų normų modeliuose (žr. lygtį 6) $\lambda(t) = \lambda(t, r(t))$, t.y. procesas priklauso ir nuo laiko, ir nuo palūkanų normų. Tada $r(t)$ rizikai neutralios tikimybės $\tilde{\mathbf{P}}$ atžvilgiu tenkina lygtį

$$dr(t) = \left(\alpha(t, r(t)) - \lambda(t, r(t)) \sigma(t, r(t)) \right) dt + \sigma(t, r(t)) d\tilde{B}_t.$$

r tenkina to paties pavidalo lygtis abiejų tikimybių \mathbf{P} ir $\tilde{\mathbf{P}}$ atžvilgiu, o procesas λ yra vadinamas rizikos premija (*risk premium*).

4.1 Vasiceko modelis

Vasiceko modelyje (1977) momentinės palūkanų normos kinta pagal Ornšteino–Ulenbeko procesą su pastoviais koeficientais, t.y. $r(t)$ tenkina tokią lygtį rizikai neutralios tikimybės atžvilgiu:

$$dr(t) = a(b - r(t))dt + \sigma dB_t, \quad r(0) = r_0; \quad (10)$$

čia a, b ir σ – teigiamos konstantos, o B – Brauno judesys [2]. Parametras σ kitaip dar yra vadinamas kintamumo konstanta (*constant of volatility*), parametras a – grįžimo prie vidurkio lygiu (*mean reversion level*), o parametras b – ilgo laikotarpio vidurkio lygiu (*long-term mean level*). Brauno judesio procesas B_t modeliuoja atsitiktinę rinkos riziką.

Pritaikius Ito lemą, lygtį (10) galime išspręsti išreikštiniu pavidalu. Kiekvienam $s \leq t$ sprendinys yra lygus

$$r(t) = r(s)e^{-a(t-s)} + b(1 - e^{-a(t-s)}) + \sigma \int_s^t e^{-a(t-u)} dB_u.$$

Be to, $r(t)$ atžvilgiu \mathcal{F}_s yra normaliai pasiskirstęs atsitiktinis dydis su sąlyginio vidurkiu

$$\mathbf{E}[r(t)|\mathcal{F}_s] = r(s)e^{-a(t-s)} + b(1 - e^{-a(t-s)})$$

ir dispersija

$$\mathbf{D}[r(t)|\mathcal{F}_s] = \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2a(t-s)}).$$

Pagal [2], bekuponės obligacijos kaina yra apskaičiuojama pagal formulę

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r(t)}, \quad (11)$$

čia

$$A(t, T) = \exp \left\{ \left(b - \frac{\sigma^2}{2a^2} \right) (B(t, T) - T + t) - \frac{\sigma^2}{4a} B(t, T)^2 \right\}$$

$$B(t, T) = \frac{1}{a} (1 - e^{-a(T-t)}).$$

4.1.1 Vasiceko lygties aproksimacijos ir bekuponės obligacijos kainos modeliavimas

Kadangi palūkanų normos $r(t)$ kitimą Vasiceko modelyje apibūdina procesas su pastoviu difuzijos koeficientu (t.y. $\beta(t, r(t)) = \sigma$), tai pusiau diskrečios aproksimacijos sutampa su diskrečiomis.

Oilerio aproksimacijos išraiška Vasiceko modeliui:

$$\bar{r}(t_{k+1}) = \bar{r}(t_k) + a(b - \bar{r}(t_k))h + \sigma \Delta B_k;$$

čia

$$\Delta B_k = B_{t_{k+1}} - B_{t_k}, \quad h = T/N, \quad t_k = kh, \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Hoino aproksimacijos išraiška:

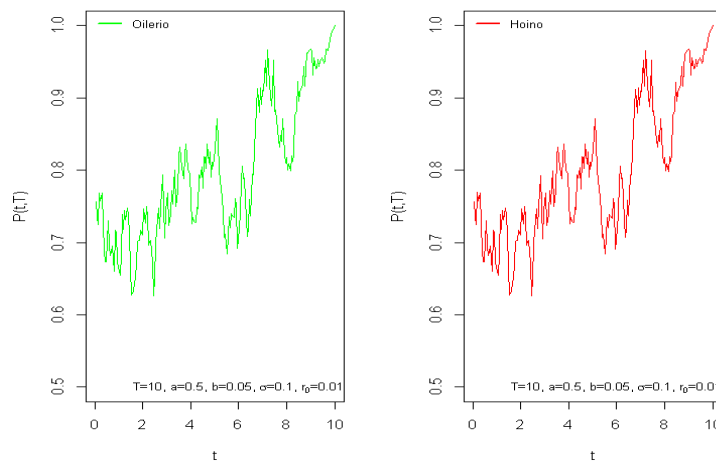
$$\bar{r}(t_{k+1}) = \bar{r}(t_k) + \frac{1}{2} \left[a(b - \bar{r}(t_k)) + a(b - \hat{r}(t_{k+1})) \right] h + \sigma \Delta B_k,$$

$$\hat{r}(t_{k+1}) = \bar{r}(t_k) + a(b - \bar{r}(t_k))h.$$

Norėdami stebėti obligacijos kainos pokyčius artėjant išpirkimo terminui T , brėžiame funkcijos $P(t, T)$ kaip kintamojo t grafiką. Palūkanų normos $r(t)$

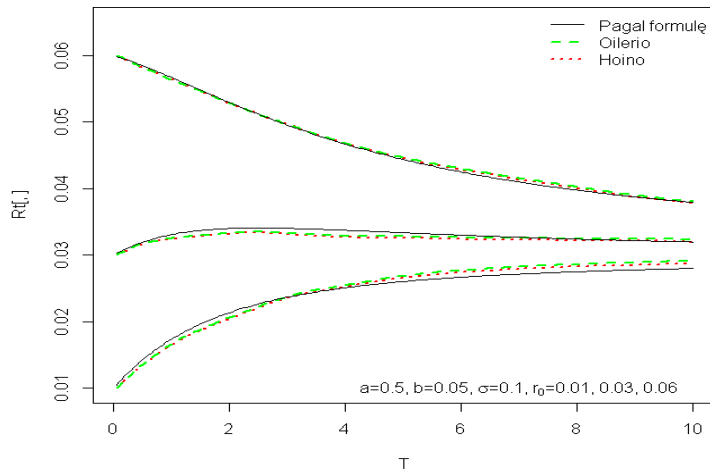
reikšmes modeliuojame diskrečių aproksimacijų pagalba, o gautas reikšmes kiekviename žingsnyje statome į (11) formulę. Vasiceko lygties (10) modeliavimui parametrus a , b ir σ naudosime kaip ir [7].

Iš grafiko 11 matome, kad laiko momentu $t = 0$ nusipirkus obligaciją už 0.7569 piniginių vienetų, po dešimties metų jos vertė bus lygi vienam piniginiui vienetui. Be to, nesunku pastebėti, kad skirtumo tarp obligacijos kainų, gautų naudojant Oilerio aproksimaciją, ir $P(t, T)$, gautų naudojant Hoino aproksimaciją palūkanų normoms, vizualiai beveik nėra.



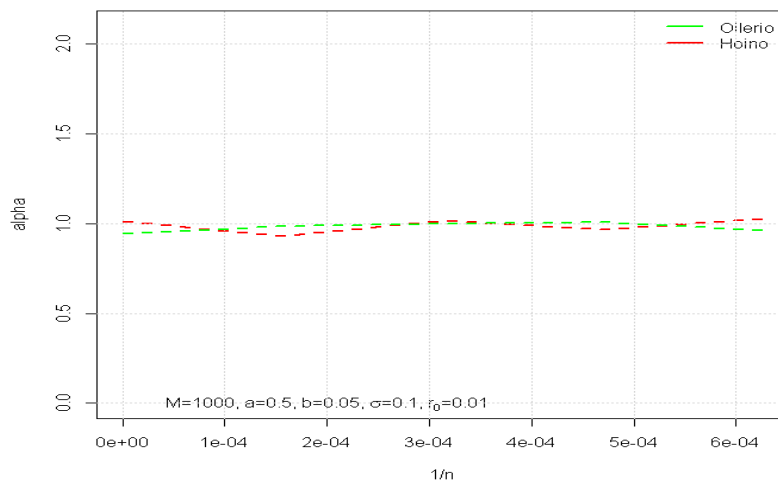
11 pav.: Obligacijos kaina $P(t, T)$ kaip kintamojo t funkcija

Vasiceko modelio pajamingumo kreivę galime rasti dviem būdais — iš tikslios formulės bei naudojant šiame darbe nagrinėjamas aproksimacijas. Iš grafiko 12 pastebime, kaip keičiant r_0 skiriasi pajamingumo kreivių $R(0, T)$ forma. Kreivėms nubrėžti modeliuojame 5000 palūkanų normų trajektorijų.

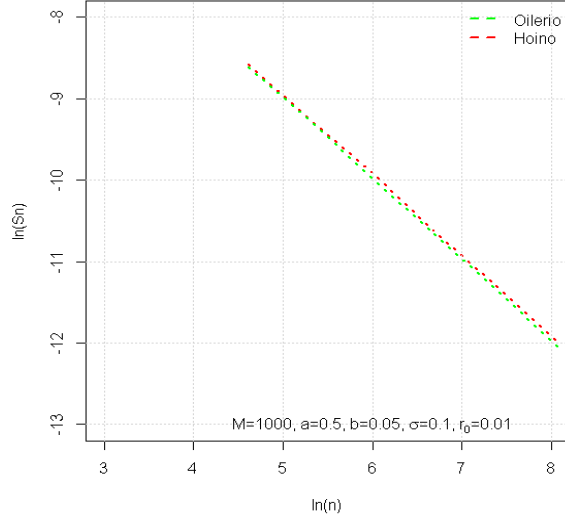


12 pav.: Pajamingumo kreivės $R(0, T)$ Vasiceko modelyje

Aproksimacijų, kurias naudojome tiek obligacijos kainai $P(t, T)$ apskaičiuoti, tiek skirtingų formų pajamingumo kreivėms $R(0, T)$ nubrėžti, eilės ir paklaidai nustatyti pasinaudosime skyrelio 3 lema. Gauti rezultatai pateikti 13 ir 14 grafikuose.



13 pav.: Hoino ir Oilerio aproksimacijų eilės Vasiceko modeliui



14 pav.: Hoino ir Oilerio aproksimacijų paklaidos Vasiceko modeliui

4.2 CIR modelis

CIR modelis (1985) buvo pasiūlytas kaip Vasiceko modelio praplėtimas. Pagrindinis CIR modelio privalumas yra tas, kad modeliuojant išvengiama neigiamų palūkanų normų reikšmių, kas labai dažnai yra įvardijama kaip didžiausias Vasiceko modelio trūkumas [10].

Nagrinėkime tokią lygtį rizikai neutralios tikimybės atžvilgiu:

$$dr(t) = a(b - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dB_t, \quad r(0) = r_0, \quad (12)$$

čia B – Brauno judesys, a , b , σ ir r_0 yra teigiamos konstantos. Kaip ir Vasiceko modelyje, parametras a yra grįžimo prie vidurkio lygis, b – ilgo laikotarpio vidurkis, o σ – kintamumas. Norint užtikrinti, kad momentinė palūkanų norma $r(t)$ būtų visada teigiama, koeficientai a , b ir σ turi tenkinti nelygybę

$$2ab > \sigma^2.$$

Priešingu atveju ji bus tik neneigiama [2].

Palūkanų normos $r(t)$ sąlyginis vidurkis ir dispersija atžvilgiu \mathcal{F}_s yra lygūs:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[r(t)|\mathcal{F}_s] &= r(s)e^{-a(t-s)} + b(1 - e^{-a(t-s)}), \\ \mathbf{D}[r(t)|\mathcal{F}_s] &= r(s)\frac{\sigma^2}{a}(e^{-a(t-s)} - e^{-2a(t-s)}) + b\frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-a(t-s)})^2. \end{aligned}$$

Pagal [7] 15.4 teoremą, CIR modelyje be kuponės obligacijos kaina momentu t yra apskaičiuojama pagal formulę:

$$P(t, T) = f(T - t) \exp \{ -g(T - t)r(t) \}, \quad (13)$$

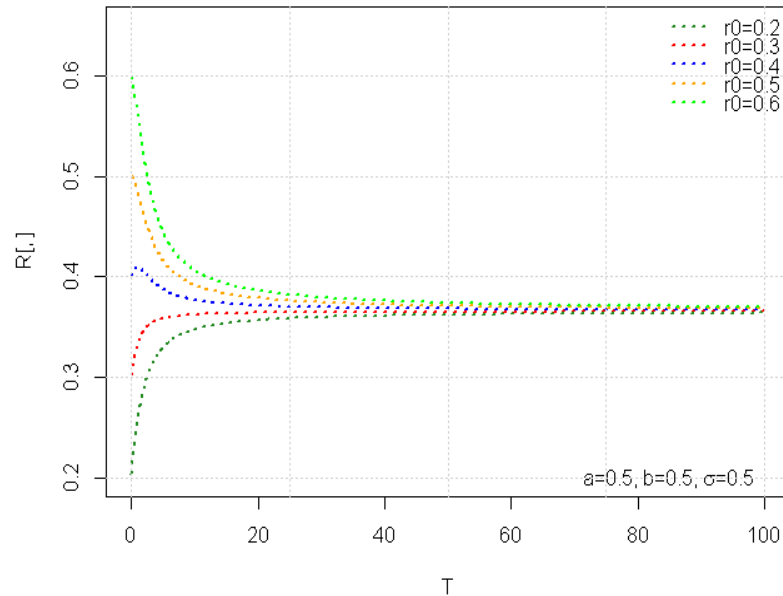
čia funkcijos f ir g apibrėžiamos taip:

$$g(\theta) = \frac{2(e^{\rho\theta} - 1)}{(a + \rho)(e^{\rho\theta} - 1) + 2\rho}, \quad \rho = \sqrt{a^2 + 2\sigma^2}$$

$$f(\theta) = \phi(\theta)^{\frac{2ab}{\sigma^2}}, \quad \phi(\theta) = \frac{2\rho e^{(a+\rho)\theta/2}}{(a + \rho)(e^{\rho\theta} - 1) + 2\rho}.$$

Pajamingumo kreivė momentu t yra lygi

$$R(t, T) = \frac{g(T - t)}{T - t} r(t) - \frac{2ab \ln \phi(T - t)}{\sigma^2 (T - t)}.$$



15 pav.: Skirtingų formų pajamingumo kreivės $R(0, T)$ CIR modelyje. Modeliavimui naudojami CIR lygties parametrai iš [7].

4.2.1 CIR lygties aproksimacijos ir be kuponės obligacijos kainos modeliavimas

CIR lygčiai aproksimuoti naudosime tiek diskrečias, tiek pusiau diskrečias aproksimacijas. Pusiau diskreti Oilerio aproksimacija kiekviename žingsnyje yra apibrėžiama lygybėmis:

$$\bar{r}(t) = \bar{r}(t_k) + (ab - a\bar{r}(t_k) - \frac{1}{4}\sigma^2)h + \int_{t_k}^t \sigma\sqrt{\bar{r}(s)} \circ dB_s, \quad t \in [t_k, t_{k+1}];$$

pažymėjus

$$\tilde{r}_k = \bar{r}(t_k) + (ab - a\bar{r}(t_k) - \frac{1}{4}\sigma^2)h,$$

gauname lygtį

$$\bar{r}(t) = \tilde{r}_k + \int_{t_k}^t \sigma\sqrt{\bar{r}(s)} \circ dB_s, \quad t \in [t_k, t_{k+1}],$$

kurios sprendinys bus lygus

$$\bar{r}(t) = (\sqrt{\tilde{r}_k} + \frac{\sigma^2}{2}(B_t - B_{t_k}))^2, \quad t \in [t_k, t_{k+1}].$$

Pusiau diskrečios Hoino aproksimacijos išraiška:

$$\begin{aligned} \bar{r}(t) = \bar{r}(t_k) + \frac{1}{2} \left[(ab - a\bar{r}(t_k) - \frac{1}{4}\sigma^2) + (ab - a\varrho(t_k) - \frac{1}{4}\sigma^2) \right] h \\ + \int_{t_k}^t \sigma\sqrt{\bar{r}(s)} \circ dB_s, \quad t \in [t_k, t_{k+1}], \end{aligned}$$

čia

$$\varrho(t_k) = \bar{r}(t_k) + (ab - a\bar{r}(t_k) - \frac{1}{4}\sigma^2)h.$$

Pažymėję

$$\tilde{r}_k = \bar{r}(t_k) + \frac{1}{2} \left[(ab - a\bar{r}(t_k) - \frac{1}{4}\sigma^2) + (ab - a\varrho(t_k) - \frac{1}{4}\sigma^2) \right] h,$$

gauname Stratonovičiaus pavidalo lygtį, kurios sprendinys lygus

$$\bar{r}(t) = (\sqrt{\tilde{r}_k} + \frac{\sigma^2}{2}(B_t - B_{t_k}))^2, \quad t \in [t_k, t_{k+1}].$$

Diskrečios Oilerio aproksimacijos išraiška:

$$\bar{r}(t_{k+1}) = \bar{r}(t_k) + a(b - \bar{r}(t_k))h + \sigma\sqrt{\bar{r}(t_k)}\Delta B_k;$$

čia

$$\Delta B_k = B_{t_{k+1}} - B_{t_k}, \quad h = T/N, \quad t_k = kh, \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Diskrečios Hoino aproksimacijos išraiška:

$$\bar{r}(t_{k+1}) = \bar{r}(t_k) + \frac{1}{2} \left(a(b - \bar{r}(t_k)) + a(b - \hat{r}(t_k)) \right) h + \sigma \sqrt{\bar{r}(t_k)} \Delta B_k;$$

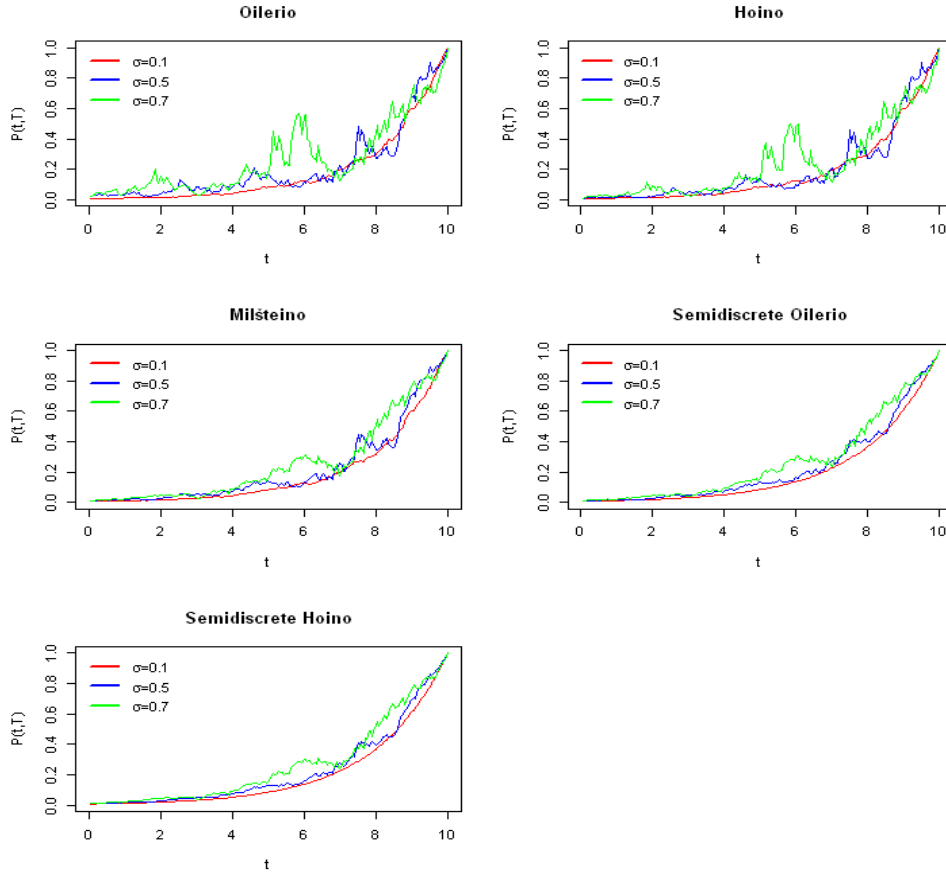
čia

$$\hat{r}(t_k) = \bar{r}(t_k) + a(b - \bar{r}(t_k))h.$$

Milšteino aproksimacijos išraiška:

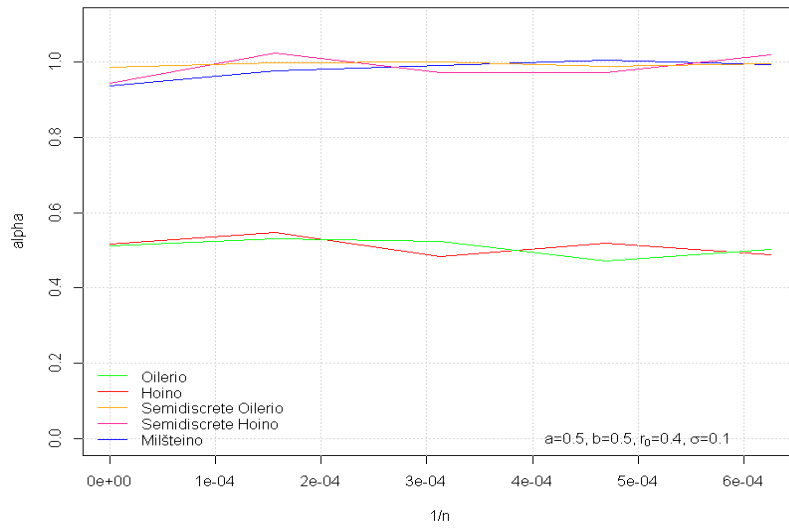
$$\bar{r}(t_{k+1}) = \bar{r}(t_k) + a(b - \bar{r}(t_k))h + \sigma \sqrt{\bar{r}(t_k)} \Delta B_k + \frac{1}{4} \sigma^2 (\Delta B_k^2 - h).$$

Obligacijos kainos $P(t, T)$ kaip kintamojo t funkcijos grafikai, esant skirtingam kintamumui σ , skaičiavimams naudojant (13) formulę, o momentinei palūkanų normai aproksimuoti – diskrečias ir pusiau diskrečias aproksimacijas, pateikti žemiau. Modeliavimui naudojami CIR lygties parametrai iš [7].

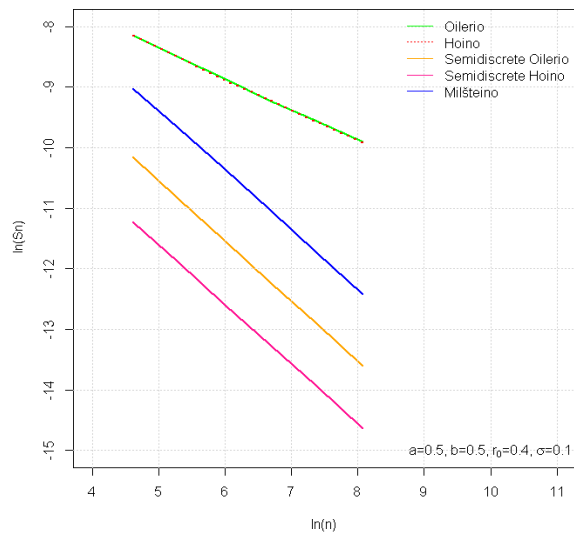


16 pav.: Obligacijos kaina $P(t, T)$ kaip kintamojo t funkcija CIR modeliui; čia $a = 0.5$, $b = 0.5$, $r_0 = 0.4$, $T = 10$.

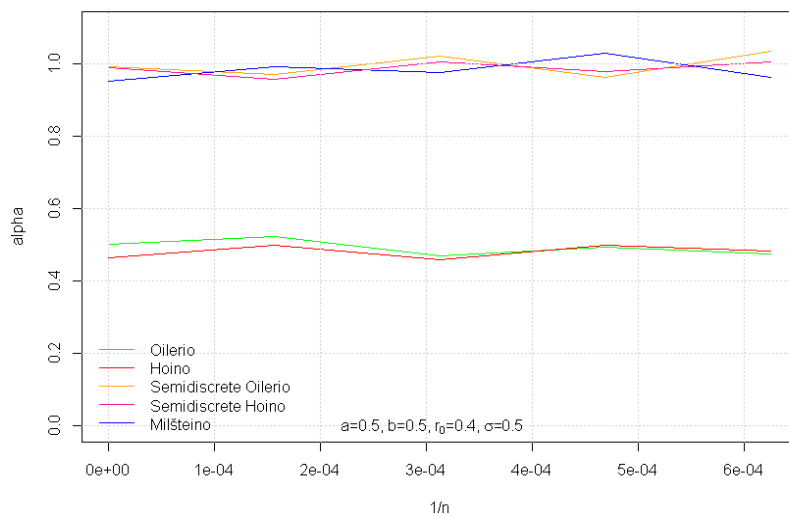
Pasinaudoję skyrelio 3 lema, apskaičiuojame diskrečių ir pusiau diskrečių aproksimacijų eilę bei paklaidą su skirtingu CIR lygties kintamumo parametru σ , o gautus rezultatus pateikiame grafiškai. Nesunku pastebėti pusiau diskrečių aproksimacijų pranašumą, geriausiai matomą iš aproksimacijų paklaidų tyrimo (paveikslai 18, 20, 22). Pusiau diskreti Hoino aproksimacija yra tiksliausia esant mažam kintamumui (t.y. CIR lygties koeficientams tenkinant sąlygą $ab > \sigma^2$). Nors pastarosios eilė α yra lygi vienam, kaip ir pusiau diskrečios Oilerio ar diskrečios Milšteino aproksimacijos, tačiau iš grafiko 18 matyti, kad pusiau diskrečios Hoino schemos paklaida CIR lygčiai yra ryškiai mažesnė.



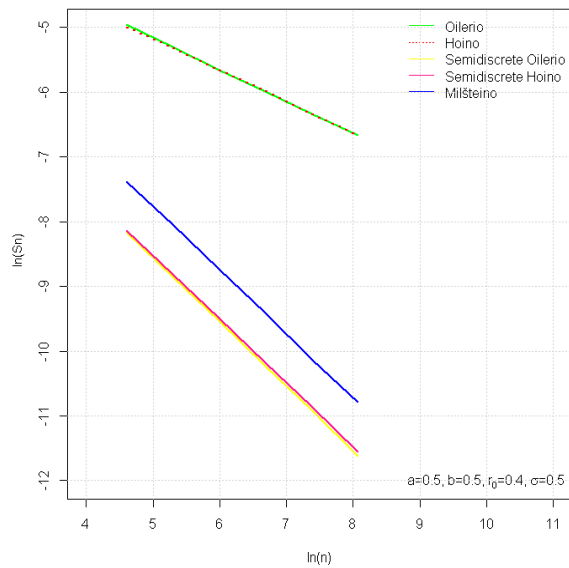
17 pav.: Aproximacijų eilė α CIR modelyje, kai $\sigma^2 < ab$.



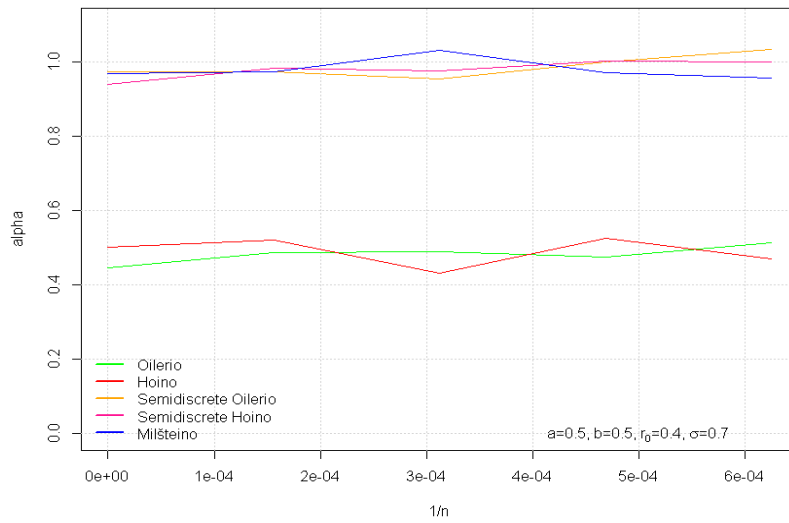
18 pav.: Aproximacijų paklaida, kai $\sigma^2 < ab$.



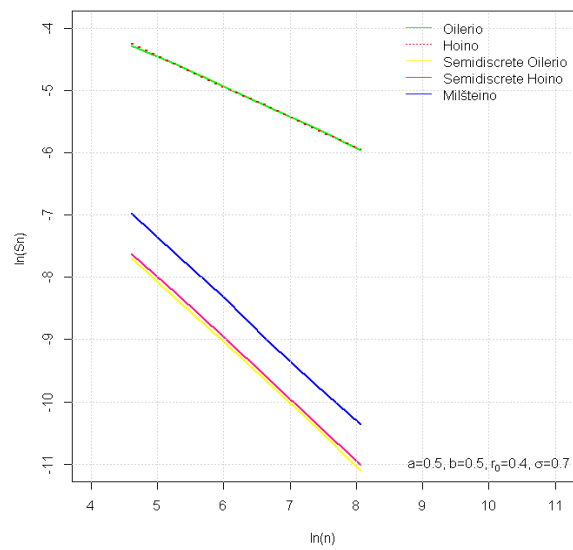
19 pav.: Aproximacijų eilė α CIR modelyje, kai $\sigma^2 = ab$.



20 pav.: Aproximacijų paklaida, kai $\sigma^2 = ab$.



21 pav.: Aproximacijų eilė α CIR modelyje, kai $\sigma^2 > ab$.



22 pav.: Aproximacijų paklaida, kai $\sigma^2 > ab$.

5 Išvados

- Šiame darbe, remiantis Halidias [4] pusiau diskrečiu Oilerio metodu, sukonstruota nauja pusiau diskreti Hoino aproksimacija. Naudojantis Alfonso [1] lema ištirta pusiau diskrečių aproksimacijų eilė bei paklaida. Tiek diskrečios, tiek pusiau diskrečios aproksimacijos palyginamos tarpusavyje, o iš skaitiškai gautų rezultatų matomas akivaizdus pusiau diskrečių aproksimacijų pranašumas. Verta paminėti, kad stochastinėms diferencialinėms lygtims skaitiniais metodais spręsti naudojant šiame darbe pasiūlytą pusiau diskrečių Hoino schemą, gaunami geresni (arba bent jau neprastesni) rezultatai, nei skaičiavimams pasirinkus Halidias aproksimaciją.
- Diskrečios ir pusiau diskrečios aproksimacijos buvo naudojamos lygties, apibūdinančios momentinės palūkanų normos r kitimą Vasiceko ir CIR modeliuose, aproksimavimui ir pritaikytos tiriant be kuponės obligacijos kainos pokyčius artėjant išpirkimo laikotarpiui T . Nubrėžti be kuponės obligacijos kainos $P(t, T)$ kaip kintamojo t funkcijos grafikai, apjungiantys kainos skaičiavimus pagal tikslią formulę ir momentinės palūkanų normos aproksimacijas.
- Didžiausias dėmesys buvo skirtas CIR lygties aproksimavimui, kadangi lygtis nėra išsprendžiama išreikštiniu pavidalu. Diskrečių ir pusiau diskrečių aproksimacijų elgsena nagrinėta esant mažam, dideliame ir labai dideliame kintamumui σ . Pastebėjome, kad mūsų sukonstruota pusiau diskreti Hoino schema yra bene tiksliausia, lyginant su diskrečiomis Oilerio, Hoino ir Milšteino schemomis ar pusiau diskrečia Oilerio aproksimacija, o geriausi rezultatai gaunami esant mažam kintamumui (t.y. kai $\sigma^2 < ab$).

Literatūra

- [1] Alfonsi, A. *On the discretization schemes for the CIR (and Bessel squared) processes*, Monte Carlo Methods Appl., 2005.
- [2] Brigo, D. and Mercurio, F. *Interest Rate Models – Theory and Practice; With Smile, Inflation and Credit*, Springer, 2nd edition, 51–70, 2007.
- [3] Gupta, A. and Zeytun, S. *A Comparative Study of the Vasicek and the CIR Model of the Short Rate*, Berichte des Fraunhofer ITWM, **124**, Kaiserslautern, 2007.
- [4] Halidias, N. *Semi-discrete approximations for stochastic differential equations and applications*, International Journal of Computer Mathematics, **89**(6), 780–794, 2012.
- [5] Lesniewski, A. *Interest Rate and Credit Models*, lecture notes, The Courant Institute of Mathematical Sciences, NYU, New York, 2008.
- [6] Mackevičius, V. *Stochastinė analizė. Stochastiniai integralai ir stochastinės diferencialinės lygtys*, VU leidykla, Vilnius, 2005.
- [7] Mackevičius, V. *Stochastiniai finansų matematikos modeliai*, paskaitų konspektas, 2013 (<http://www.mif.vu.lt/~vigirdas/articles/FMM.pdf>).
- [8] Mackevičius, V. *Weak approximation of CIR equation by discrete random variables*, Lithuanian Mathematical Journal, **51**(3), 385–401, 2011.
- [9] Moro, E. and Schurz, H. *Boundary preserving semi-analytic numerical algorithms for stochastic differential equations*, Siam Journal of Scientific Computing, **29**(4), 1525–1549, 2007.
- [10] Nazir, M. V. *Short rates and bond prices in one-factor models*, U.U.D.M. Project Report **13**, Uppsala University, 2009.
- [11] Ray, S. *A Close Look into Black–Scholes Option Pricing Model*, Journal of Science, **2**(4), 172–178, 2012.

Priedai

1. Geometrinio Brauno judesio tiksli reikšmė bei aproksimacijos.

```
N <- 5
T <- 1
x_0 <- 1
mu <- 1
sigma <- 2
Dt <- T/N
Z <- rnorm(N)

#Brauno judesio generavimas

B <- numeric(N + 1)
for (i in 2:(N + 1))
  B[i] <- B[i - 1] + Z[i - 1]*sqrt(Dt)
t <- seq(0, T, length = N + 1)

#Tiksli reikšmė
X_t <- x_0 * exp((mu - sigma^2/2)*t + sigma * B)

#Oilerio aproksimacija
Y_E <- numeric(N + 1)
Y_E[1] <- x_0
for (i in 1:N)
  Y_E[i + 1] <- Y_E[i] + mu*Y_E[i]*Dt + sigma * Y_E[i]* sqrt(Dt)*Z[i]

Y_E <- ts(Y_E, start = 0, deltat = T/N)

#Milšteino aproksimacija
Y_M <- numeric(N + 1)
Y_M[1] <- x_0
for (i in 1:N)
  Y_M[i + 1] <- Y_M[i] + (mu*Y_M[i] - 0.5*sigma^2*Y_M[i])*Dt + sigma * Y_M[i]* sqrt(Dt)*Z[i]
  + 0.5*sigma^2*Y_M[i]*(sqrt(Dt)*Z[i])^2

Y_M <- ts(Y_M, start = 0, deltat = T/N)

#Semidiscrete Oilerio aproksimacija
Y_ESD <- numeric(N + 1)
Y_ESD[1] <- x_0
Y_0 <- numeric(N + 1)

for (i in 1:N){
  Y_0[i] = Y_ESD[i] + (mu*Y_ESD[i] - 0.5*sigma^2*Y_ESD[i])*Dt
```



```

Y_ESD[i+1]<- Y_0[i]*exp(sigma*sqrt (Dt)*Z[i])
}

Y_ESD <- ts(Y_ESD, start =0, deltat =T/N)

#Semidiscrete Hoino aproksimacija
Y_HSD <- numeric (N +1)
Y_HSD[1] <- x_0
Y_H0<-numeric (N+1)
Y_H<-numeric(N+1)

for (i in 1:N){
Y_H[i]=Y_HSD[i]+(mu*Y_HSD[i]-0.5*sigma^2*Y_HSD[i])*Dt
Y_H0[i]=Y_HSD[i]+ 0.5*( (mu*Y_HSD[i]-0.5*sigma^2*Y_HSD[i])
+(mu*Y_H[i]-0.5*sigma^2*Y_H[i]))*Dt
Y_HSD[i+1]<- Y_H0[i]*exp(sigma*sqrt (Dt)*Z[i])
}

Y_HSD <- ts(Y_HSD, start =0, deltat =T/N)

#Grafiko brėzimas
ylabel <- seq(0, 3, by = 0.2)
y_range <- range(0, ylabel)
plot (t,X_t, type ="l", lwd=3,ylim=c(0,3),axes="false")
axis(1)
axis(2, at = ylabel,las=1)
title(xlab="t", ylab="X_t")
box()
lines(Y_ESD, col="green", lwd=2.5)
lines (Y_HSD, col="pink", lwd=2.5)
lines(Y_E, col="red",lty=3, lwd=2.5)
lines(Y_M, col="blue", lty=3, lwd=2.5)
legend("topleft",c("Tiksli", "Semi-discrete Oilerio", "Semi-discrete Hoino", "Oilerio", "Milšteino"),
lty=c(1,1,1,3,3),lwd=c(2.5,2.5,2.5,2.5,2.5),col=c("black", "green", "pink", "red", "blue"), box.lty=0)
text (T-0.15,0.1,expression(paste("X(0)=1", " , h=0.2, ", mu, "=1, ", sigma, "=2")))

```

2. Obligacijos kaina $P(t, T)$ kaip kintamojo t funkcija Vasiceko modelyje.

```

T<-10
r0<-0.01
a<-0.5
sigma<-0.1
b<-0.05

aproks<-1000

```

```

delta<-0.05
zings<-T/delta
rt<-r0
ht<-r0

R<-matrix(nrow=1, ncol=zings)
H<-matrix(nrow=1, ncol=zings)

for (j in 1:zings){
z<-rnorm(1)

R[1,j]<-rt
H[1,j]<-ht
rt<-rt+(a*b-a*rt)*delta+sigma*sqrt(delta)*z
htt<-ht+(a*b-a*ht)*delta
ht<-ht+0.5*( (a*b-a*ht)+(a*b-a*htt))*delta+sigma*sqrt(delta)*z
}

At<-matrix(nrow=1, ncol=zings)
Bt<-matrix(nrow=1, ncol=zings)
Pform1<-matrix(nrow=1, ncol=zings)
Pform2<-matrix(nrow=1, ncol=zings)

for (i in 1:zings){
Bt[1,i]<- (1/a)*(1-exp(-a*(T-i*delta)))
}

for (i in 1:zings){
At[1,i]<-exp( (b-sigma*sigma/(2*a*a))*(Bt[1,i]-T+i*delta)-(sigma*sigma/(4*a))*Bt[1,i]*Bt[1,i])
Pform1[1,i]<-At[1,i]*exp(-Bt[1,i]*R[1,i])
Pform2[1,i]<-At[1,i]*exp(-Bt[1,i]*H[1,i])
}

par(mfrow=c(1,2))
plot(Pform1[,],type="l",col="green",,xlab="t",ylab="P(t,T)", xaxt="n", ylim=c(0.5,1))
legend("topleft", "Oilerio", cex=0.8, lty=1, lwd=2, col="green", box.lty=0)
at<-seq(from=0, to=200, by=40)
x<-seq(from=0, to=10, by=2)
axis(1, at=at, labels=x)

y<-min(Pform1[,])
text (120,0.5,cex=0.8,expression(paste("T=10, ", "a=0.5", ", b=0.05", ", sigma, "=0.1, ", r[0],"=0.01"))))

plot(Pform2[,],type="l",col="red",xlab="t",ylab="P(t,T)", xaxt="n",ylim=c(0.5,1))
legend("topleft", "Hoino", cex=0.8, lty=1, lwd=2, col="red", box.lty=0)
at<-seq(from=0, to=200, by=40)

```

```
x<-seq(from=0, to=10, by=2)
axis(1, at=x, labels=x)
text (120,0.5,cex=0.8,expression(paste("T=10, ", "a=0.5", ", b=0.05, ", sigma, "=0.1, ", r[0], "=0.01"))))
```

3. Pajamingumo kreivės $R(0, T)$ pagal formulę ir pagal aproksimaciją Vasiceko modelyje.

```
T<-10
r0<-0.06
a<-0.5
sigma<-0.1
b<-0.05
```

```
aproks<-5000
delta<-0.05
zings<-T/delta
```

```
rt<-r0
ht<-r0
htt<-r0
```

```
R<-matrix(nrow=aproks, ncol=zings) #Oilerio
H<-matrix(nrow=aproks, ncol=zings) #Hoino
```

```
for (i in 1:aproks){
for (j in 1:zings){
R[i,j]<-rt
H[i,j]<-ht
z<-rnorm(1)
rt<-rt+a*(b-rt)*delta+sigma*sqrt(delta)*z
htt<-ht+a*(b-ht)*delta
ht<-ht+0.5*(a*(b-ht)+a*(b-htt))*delta+sigma*sqrt(delta)*z
}
rt<-r0
ht<-r0
htt<-r0
}
```

#Skaičiavimas pagal Hoino aproksimaciją (pagal Oilerio aproksimaciją analogiškai)

```
P<-matrix(nrow=aproks, ncol=zings)
for (i in 1:aproks){
for (j in 1:zings){
suma<-0
for (k in 1:j){
```

```

suma<-suma+H[i,k]
}
P[i,j]<-exp(-delta*suma)
}}
Pt<-matrix(nrow=1, ncol=zings)
X<-matrix(nrow=1, ncol=zings)
for (i in 1:zings){
Pt[1,i]<-mean(P[,i])
X[1,i]<-i*delta
}

Rt<-matrix(nrow=1, ncol=zings)
for (k in 1:zings){
Rt[1,k]<-((-log(Pt[1,k]))/X[1,k])
}

#Skaičiavimas pagal formulę

Bt<-matrix(nrow=aproks, ncol=zings)
At<-matrix(nrow=aproks, ncol=zings)
P<-matrix(nrow=aproks, ncol=zings)
for (j in 1:zings){
Bt[1,j]<-(1-exp(-a*j*delta))/a
At[1,j]<-(b-(sigma*sigma)/(2*a*a))*(Bt[1,j]-j*delta)-((sigma*sigma)/(4*a))*Bt[1,j]*Bt[1,j]
P[1,j]<-exp(At[1,j]-Bt[1,j]*r0)
}
Pt<-matrix(nrow=1, ncol=zings)
X<-matrix(nrow=1, ncol=zings)
for (i in 1:zings){
Pt[1,i]<-mean(P[1,i])
X[1,i]<-i*delta
}
Rt<-matrix(nrow=1, ncol=zings)
for (k in 1:zings){
Rt[1,k]<-((-log(Pt[1,k]))/X[1,k])
}

```

4. Pajamingumo kreivės skaičiavimas pagal tikslią formulę CIR modelyje.

```

T<-100
a<-0.5
sigma<-0.5
b<-0.5

F<-matrix(nrow=1, ncol=zings)
K<-matrix(nrow=1, ncol=zings)

```

```

G<-matrix(nrow=1, ncol=zings)
R<-matrix(nrow=1, ncol=zings)

ro<-sqrt(a*a+2*sigma*sigma)
fl<-2*a*b/(sigma*sigma)

for (j in 1:zings){
K[1,j]<-(2*ro*exp((a+ro)*j*delta/2))/((a+ro)*(exp(ro*j*delta)-1)+2*ro)
F[1,j]<-K[1,j]^fl
G[1,j]<-2*(exp(ro*j*delta)-1)/((a+ro)*(exp(ro*j*delta)-1)+2*ro)

R[1,j]<-G[1,j]*r0/(j*delta)-2*a*b*log(K[1,j])/(sigma*sigma*delta*j)
}

plot(R[,],type="l")

```

5. Obligacijos kaina $P(t, T)$ kaip kintamojo t funkcija CIR modelyje

```

T<-10
r0<-0.4
a<-0.5
sigma<-0.1
sigma2<-0.5
sigma3<-0.7
b<-0.5

aproks<-1000
delta<-0.05
zings<-T/delta

et<-r0
ht<-r0
mt<-r0
sdet<-r0
sht<-r0

E<-matrix(nrow=1, ncol=zings)
H<-matrix(nrow=1, ncol=zings)
M<-matrix(nrow=1, ncol=zings)
SDE<-matrix(nrow=1, ncol=zings)
SH<-matrix(nrow=1, ncol=zings)

for (j in 1:zings){
z<-rnorm(1)

```

```

E[1,j]<-et
H[1,j]<-ht
M[1,j]<-mt
SDE[1,j]<-sdet
SH[1,j]<-sht

et<-et+(a*b-a*et)*delta+sigma*sqrt(delta)*z #Oilerio

htt<-ht+(a*b-a*ht)*delta #Hoino
ht<-ht+0.5*( (a*b-a*ht)+(a*b-a*htt))*delta+sigma*sqrt(delta)*z

mt<-mt+ a*(b-mt)*delta+sigma*sqrt(mt)*sqrt(delta)*z
+0.25*sigma^2*(delta*z*z-delta) #Milsteino

sett<-sdet+(a*b-a*sdet-0.25*sigma*sigma)*delta #Semidiscrete Oilerio
sdet<-(sqrt(sett)+0.5*sigma*sigma*sqrt(delta)*z)^2

shtt0<-sht+(a*(b-sht)-0.25*sigma*sigma)*delta #Semidiscrete Hoino
shtt<-sht+0.5*(a*(b-sht)-0.25*sigma*sigma+a*b-a*shtt0-0.25*sigma*sigma)*delta
sht<-(sqrt(shtt)+0.5*sigma*sigma*sqrt(delta)*z)^2
}

Gt<-matrix(nrow=1, ncol=zings)
Ft<-matrix(nrow=1, ncol=zings)
Kt<-matrix(nrow=1, ncol=zings)

Pform1<-matrix(nrow=1, ncol=zings)
Pform2<-matrix(nrow=1, ncol=zings)
Pform3<-matrix(nrow=1, ncol=zings)
Pform4<-matrix(nrow=1, ncol=zings)
Pform5<-matrix(nrow=1, ncol=zings)

ro<-sqrt(a*a+2*sigma*sigma)
fl<-2*a*b/(sigma*sigma)

for (i in 1:zings){
Gt[1,i]<-2*(exp(ro*(T-i*delta))-1)/((a+ro)*(exp(ro*(T-i*delta))-1)+2*ro)
}

for (i in 1:zings){
Kt[1,i]<-(2*ro*exp((a+ro)*(T-i*delta)/2))/((a+ro)*(exp(ro*(T-i*delta))-1)+2*ro)
Ft[1,i]<-Kt[1,i]^(fl)
}

for (i in 1:zings){
Pform1[1,i]<-Ft[1,i]*exp(-Gt[1,i]*E[1,i])
}

```

```

Pform2[1,i]<-Ft[1,i]*exp(-Gt[1,i]*H[1,i])
Pform3[1,i]<-Ft[1,i]*exp(-Gt[1,i]*M[1,i])
Pform4[1,i]<-Ft[1,i]*exp(-Gt[1,i]*SDE[1,i])
Pform5[1,i]<-Ft[1,i]*exp(-Gt[1,i]*SH[1,i])
}

```

6. Aproximacijų eilės α skaičiavimas CIR modeliui pagal Alfonsi [1] lemą.

```

T <- 1
sigma<-0.7
r_0 <- 0.4
a<-0.5
b<-0.5

M<-5000
taskai1<-c(0,1,2,3,4,5,6)
taskai<-length(taskai1)

N<-100*2^(taskai-1)

zingsniai<-numeric(taskai)
for (i in 1:(taskai))
zingsniai[i]<-100*2^(taskai1[i])

S_n<-matrix(0,nrow=M,ncol=taskai-1)

for (i in 1:M){

Y_E<-matrix(0,nrow=taskai, ncol=zingsniai[taskai]+1)
Y_E1<-matrix(0,nrow=taskai, ncol=zingsniai[taskai])

#Brauno judesio generavimas
Dt<-T/N
B <- numeric (N +1)
for (j in 2:( N +1)){
B[j] <- B[j -1] + rnorm(1)*sqrt(Dt)}

deltaB <- numeric (N+1)
for (j in 2:(N+1)){
deltaB[j]<-B[j]-B[j-1]}

for (k in 1:taskai){
h<-T/zingsniai[k]
Y_E[k,1]<-r_0
Y_0<-numeric(zingsniai[k]+1)
Y_0[1]<-r_0

```

```

Y_H<-numeric(zingsniai[k]+1)
for (l in 2: (zingsniai[k]+1)){
  deltaB<-B[(l-1)*N/zingsniai[k]+1]-B[(l-2)*N/zingsniai[k]+1]

#Semidiscrete Oilerio
Y_0[l]<-Y_E[k,l-1]+(a*b-a*Y_E[k,l-1]-0.25*sigma^2)*h
Y_E[k,l]<-(sqrt(Y_0[l])+deltaB*sigma*sigma/2)^2
if (Y_E[k,l]<0) Y_E[k,l]<-0

#Semi discrete Hoino
Y_H[l]<-Y_E[k,l-1]+(a*b-a*Y_E[k,l-1]-0.25*sigma^2)*h
Y_0[l]=Y_E[k,l-1]+ 0.5*( (a*b-a*Y_E[k,l-1]-0.25*sigma^2)+(a*b-a*Y_H[l]-0.25*sigma^2) )*h
Y_E[k,l]<-(sqrt(Y_0[l])+deltaB*sigma*sigma/2)^2
if (Y_E[k,l]<0) Y_E[k,l]<-0

#Milšteino
Y_E[k,l]<-Y_E[k,l-1] + (a*b-a*Y_E[k,l-1])*h+sigma*sqrt(Y_E[k,l-1])*deltaB
+0.25*sigma^2*(deltaB^2-h)
if (Y_E[k,l]<0) Y_E[k,l]<-0

#Oilerio
Y_E[k,l]<-Y_E[k,l-1] + (a*b-a*Y_E[k,l-1])*h+sigma*sqrt(Y_E[k,l-1])*deltaB
if (Y_E[k,l]<0) Y_E[k,l]<-0

#Hoino
Y_H[l]<-Y_E[k,l-1]+(a*b-a*Y_E[k,l-1])*h
Y_E[k,l]<-Y_E[k,l-1] + 0.5*(a*b-a*Y_E[k,l-1]+ a*b -a*Y_H[l])*h
+sigma*sqrt(Y_E[k,l-1])*deltaB
if (Y_E[k,l]<0) Y_E[k,l]<-0

}
}

for (m in 1:(taskai-1)){
s<-0
  for (n in (2:(zingsniai[m]+1))){
    s<-max(abs(Y_E[m,n]-Y_E[m+1,2*n-1]),s) }
  S_n[i,m]<-s
}

}

vidurkis<-numeric(taskai-1)

for (k in 1:(taskai-1)){
suma<-0

```



```
for(i in 1:M){  
  suma<-S_n[i,k]+suma}  
  vidurkis[k]<-suma/M  
}
```

```
alpha<-numeric(taskai-2)  
for (i in 1:5)  
  alpha[i]<-log2(vidurkis[i])-log2(vidurkis[i+1])  
alpha<-ts(alpha, start=0, deltat=T/N)
```

(a) Aproximacijų paklaidų skaičiavimas.

```
logSn<-log(vidurkis[1:5])  
ln_n<-log(zingsniai[1:5])  
plot(logSn~ln_n, type="l")
```