MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS INSTITUTAS

Olga JANUŠKEVIČIENĖ

STOCHASTINIŲ MODELIŲ STABILUMO TYRIMAS

Habilitacijos procedūrai teikiamų mokslo darbų
APŽVALGA

Fiziniai mokslai, matematika (01 P)

VILNIUS
2008

Olga Januškevičienė. **Stochastinių modelių stabilumo tyrimas.**

Habilitacijos procedūrai teikiamų mokslo darbų apžvalga.

Fiziniai mokslai, matematika (01 P).

TURINYS

ĮVADAS

1.1. Tyrimų aktualumas

Įvairių rūšių ir tipų aproksimacijos problemos sudaro ženklią nagrinėjamų tikimybių teorijoje ir statistikoje problemų dalį. Norėdami pritaikyti matematinį modelį realiame kontekste, mes visada susiduriame su tokiu fundamentaliu klausimu: ar siūlomas modelis yra pakankamai gera nagrinėjamo reiškinio aproksimacija? Jei atsakymas į šį klausimą yra teigiamas, tai kokiose ribose ši aproksimacija yra pakankamai gera?

Pastarųjų trijų dešimtmečių laikotarpiu itin daug matematikų dirbo ir tebedirba šioje srityje, mėgindami suformuluoti paminėtus klausimus griežta matematine kalba, naudodami stochastinių modelių *tolydumo* ir *stabilumo* sąvokas. Kadangi visas fliuktuacines problemas charakterizacijos modeliuose jau priimta vadinti *stabilumo* uždaviniais, šį terminą autorė (pritardama V. Zolotariovo straipsnyje [31] pateikiamiems argumentams dėl tos pačios terminologijos taikymo ir matematinių modelių stabilumo uždaviniams, ir įvairaus tipo ribinėms teoremoms) pasirinko ir savo Apžvalgos pavadinime, ir visuose trijuose jos skyriuose.

Eksponentinis skirstinys turi daug naudingų savybių. Pavyzdžiui, eksponentinių skirstinių klasė yra vienintelė klasė, kurios elementai turi veiksmo be praeities poveikio savybę, t.y. ši savybė charakterizuoja eksponentinių skirstinių klasę. Šios charakterizacijos stabilumą pirmąkart ištyrė Hoang Huu Nhu [38], vėliau darbe [38] gautus stabilumo įverčius pagerino T.A. Azlarovas, A.A. Dzhamirzaevas, M.M. Sultanova. Veiksmo be praeities poveikio savybę ir jos stabilumą detaliai nagrinėjo R. Shimizu [39], [40], D. Richards [41], B. Dimitrov, L. Klebanov, S. Rachev [42].

Tačiau ar tikrai būtina veiksmo be praeities poveikio savybę tikrinti visame pusašyje? G. Marsaglia ir A. Tubilla [35] pirmieji pastebėjo, kad eksponentinio dėsnio charakterizacijai pakanka veiksmo be praeities poveikio savybės išpildymo ne visame pusašyje, o tik dviejuose nebendramačiuose taškuose. Autorė darbe [2] pateikė kitokį – paprastesnį – šios charakterizacijos įrodymą ir ištyrė jos stabilumą. Buvo pasiūlytas diofantinių aproksimacijų taikymo charakterizacijos modelių stabilumo tyrimui metodas, kuris yra itin efektyvus tais atvejais, kai neturima jokios informacijos apie nagrinėjamos imties momentines charakteristikas.

Y.H. Wang (J. Appl. Probab., 1976, **13**, 385-391) prie papildomų sąlygų įrodė, kad X yra Weibull atsitiktinis dydis tada ir tik tada, kai X tenkina apibendrintą veiksmo be praeities poveikio savybę eilės α. Autorė ne tik atsisakė šių papildomų sąlygų, bet ir apibendrintos veiksmo be praeities poveikio savybės eilės α išpildymą visoje pusašyje sušvelnino iki jos išpildymo tik dviejuose nebendramačiuose taškuose, bei ištyrė šios charakterizacijos stabilumo įvertį.

Ar diofantinių aproksimacijų metodas leidžia konstruoti stabilumo įverčius ne tik skirstinių, bet ir charakteristinių funkcijų erdvėje? Gautas teigiamas atsakymas į šį klausimą leido pagaliau gauti stabilumo įverčius specialistams gerai žinomose P. Lévy (žr. [34]) ir M.L. Eaton [43] charakterizacijos teoremose. O pritaikius centrinę ribinę teoremą pirmosios charakterizacijos teoremos – G. Pólya [33] – tyrime, buvo gautas naujas ir paprastesnis pirmosios stabilumo teoremos – L.D. Meshalkin [32] teoremos – įrodymas.

Paprastojo atvaizdžio modelio pavyzdžiu V. Zolotariovas [31] pateikia nepriklausomų atsitiktinių dydžių sumų ribines teoremas. Šis modelis tinka ir atsitiktinių simetrinių polinomų ribinių teoremų aprašymui. Atsitiktinių polinomų tyrimo aktualumą sąlygoja tas faktas, kad tiesiniai modeliai ne visada tiksliai atspindi realias situacijas, ir ypatingas dėmesys čia tenka simetriniams polinomams (žr. V.M. Zolotariovas [44]). Jų konvergavimo greičio įvertinimą autorės darbuose [19], [20], [24] sąlygojo, visų pirma, galimybė tiesiogiai išrašyti šių polinomų formas. Antros eilės simetriniams polinomams buvo ne tik gautas konvergavimo greičio įvertis, bet ir įrodyta, kad šis įvertis yra nepagerinamas.

1.2. Habilitacijai teikiami pagrindiniai rezultatai

1. Pasiūlytas diofantinių aproksimacijų taikymo charakterizacijos modelių stabilumo tyrimui metodas, kuris yra itin efektyvus tais atvejais, kai neturima jokios informacijos apie nagrinėjamos imties momentines charakteristikas. Diofantinių aproksimacijų teorijoje yra žinoma, kad bet kuris iracionalus skaičius α gali būti aproksimuotas racionaliu skaičiumi r/k bet kokiu norimu tikslumu. Autorė įrodė, kad galima įvertinti žingsnių, reikalingų iracionalaus skaičiaus aproksimacijai atlikti racionaliaisiais skaičiais pasirinktuoju tikslumu, skaičių. Šis žingsnių skaičius priklauso tik nuo iracionalaus skaičiaus aproksimacijos racionaliaisiais skaičiais greičio įvertinimo iš apačios. Diofantinių aproksimacijų metodas analizuojamas pirmajame Apžvalgos skyriuje, o jam skirti šie habilitacijai teikiami mokslo darbai: [2], [3], [8], [9], [10], [22].

2. Gauti nauji stabilumo įverčiai dažniausiai sutinkamose charakterizacijos teoremose, pagerinti kai kurie žinomi stabilumo įverčiai. Charakterizacijos modelių stabilumo plataus spektro įverčių konstravimui skirtas antrasis Apžvalgos skyrius ir šie habilitacijai teikiami mokslo darbai: [1], [8], [10], [12], [13], [14], [15].

3. Atliktas tyrimas, kuriame nustatyta, kokias sąlygas turi tenkinti atsitiktinio simetrinio polinomo koeficientai, kad šio polinomo konvergavimas į neišsigimusį atsitiktinį dydį būtų iš principo įmanomas. Gautas nepagerinamas konvergavimo greičio įvertis antros eilės simetrinėms polinominėms statistikoms. Šių klausimų analizei yra skirtas trečiasis Apžvalgos skyrius „Simetrinių polinominių statistikų konvergavimo greičiai" ir šie habilitacijai teikiami mokslo darbai: [4], [5], [16], [17], [18], [19], [20], [21], [24].

Formulių ir konstantų numeracija kiekviename šios Apžvalgos skyriuje yra savarankiška.

1.3. Rezultatų aprobacija

Pagrindiniai rezultatai buvo pristatyti šiuose moksliniuose renginiuose:

I. Tarptautinėse nuolatinėse konferencijose:

1. Stochastinių modelių stabilumo klausimų konferencijose (Varna, Pamplona, Ryga, Sovata ir kt.).
2. Pasaulinėse Vilniaus konferencijose tikimybių teorijos ir matematinės statistikos klausimais.

II. Lietuvos institucijų renginiuose:

1. LMD kasmetinėse konferencijose.
2. MII Atsitiktinių procesų, Tikimybių teorijos ir statistikos skyrių bei Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakulteto Matematinės analizės, Ekonometrinės analizės ir Matematinės informatikos katedrų jungtiniame seminare „Matematika ir jos taikymai".

1.4. Publikacijos

Po daktaro laipsnio suteikimo Olga Januškevičienė paskelbė:

- 10 mokslinių straipsnių, kurie publikuoti mokslo leidiniuose (A02), įtrauktuose į Mokslinės informacijos instituto pagrindinį sąrašą – J. Master List (iš jų 8 yra teikiami habilitacijos procedūrai);

- 16 mokslinių straipsnių, kurie publikuoti recenzuojamuose periodiniuose mokslo leidiniuose (A03), registruotuose tarptautinėse duomenų bazėse (iš jų 12 yra teikiami habilitacijos procedūrai);
- 3 moksliniai straipsniai, kurie publikuoti recenzuojamuose periodiniuose mokslo leidiniuose (B09); habilitacijos procedūrai šie straipsniai neteikiami.

I. DIOFANTINIŲ APROKSIMACIJŲ METODAS STABILUMO TYRIME

Tegu X yra bet koks neneigiamas atsitiktinis dydis, kurį galima interpretuoti kaip prietaiso gyvavimo laiką (pavyzdžiui, elektros lemputės tarnavimo laikotarpį) arba kaip aptarnavimo trukmę (pavyzdžiui, telefoninio pokalbio trukmės laiką).

Tada $P(X \geq x)$ yra tikimybė įvykio, kad "*prietaiso gyvavimo laikas yra ne mažesnis už* x". Tarkime, kad prietaisas dirbo laiko tarpą y, ir nuo jo, šito laiko tarpo y, likęs prietaiso gyvavimo amžius nepriklauso, t.y.

$$P(X \geq x+y \mid X \geq y) = P(X \geq x). \qquad (1)$$

visiems $x \geq 0$ ir tokiems $y \geq 0$, kuriems $P(X \geq y) > 0$. Ši savybė angliškai vadinama *lack of memory property* (pažodžiui verčiant – atminties neturėjimo savybė), o rusiškai – *свойство отсутствия последействия* (veiksmo be praeities poveikio savybė). Autorė pasirinko pastarąjį variantą, nes jis tiksliau aprašo praktikoje sutinkamas šios savybės realizacijas. Lengva įsitikinti, kad eksponentinis skirstinys

$$P(X < x) = \begin{cases} 1-\exp(-\lambda x), & jei\ x \geq 0, \\ 0, & jei\ x < 0, \end{cases} \qquad (2)$$

tenkina sąryšį (1). Galima įrodyti ir atvirkščią teiginį. Tai reiškia, kad ši eksponentinių skirstinių klasė yra vienintelė klasė, kurios elementai turi savybę (1), t.y. veiksmo be praeities poveikio savybė charakterizuoja eksponentinių skirstinių klasę. Šios charakterizacijos įvairių aspektų ir stabilumo tyrimui skirtas autorės darbas [2].

Perrašysime sąryšį (1) kita, tolimesniam tyrimui patogesne forma. Jei $P(X = 0) \neq 1$ (t.y., jei atsitiktinis dydis X yra neišsigimęs nulyje), tai galima įrodyti, kad bet kuriam $y > 0$ $P(X \geq y) > 0$, todėl veiksmo be praeities poveikio savybę (1) galime perrašyti taip:

$$P(X \geq x+y) = P(X \geq x)P(X \geq y),\ \forall x \geq 0,\ \forall y \geq 0. \qquad (3)$$

Pažymėję $P(X \geq x) = f(x)$ gauname, kad veiksmo be praeities poveikio savybė (3) yra ekvivalenti Cauchy lygčiai:

$$f(x+y) = f(x)f(y),\ \forall x \geq 0,\ \forall y \geq 0. \qquad (4)$$

G. Marsaglia ir A. Tubilla žurnale *Annals of Probability* [35] įrodė, kad eksponentinio dėsnio charakterizacijai pakanka veiksmo be praeities poveikio savybės (3) (arba Cauchy lygties (4)) išpildymo ne visuose taškuose $y \geq 0$, o tik dviejuose nebendramačiuose taškuose y_1 ir y_2. Autorės darbe [2] pateiktas naujas, trumpesnis ir paprastesnis šios teoremos įrodymas.

1.1 teorema (G. Marsaglia, A. Tubilla [35], naujas įrodymas [2]). *Jeigu X yra neneigiamas neišsigimęs atsitiktinis dydis ir bent dviejuose nebendramačiuose taškuose $0 < y_1 < y_2$ išpildyti sąryšiai $f(y_i) > 0$ ir šiuose taškuose tenkinama Cauchy lygtis, t.y.*

$$f(x+y_i) = f(x)f(y_i),\ \forall x \geq 0,\ i = 1,2, \qquad (5)$$

tai egzistuoja $\lambda > 0$ toks, kad $f(x) = \exp(-\lambda x)$, $\forall x \geq 0$.

Iš tiesų, kadangi X yra neneigiamas neišsigimęs atsitiktinis dydis, tai bet kuriam $y > 0$ $P(X \geq y) < 1$, o todėl $1 > f(y_i) > 0$. Įvedę naujus pažymėjimus $\lambda_i = -\frac{1}{y_i}\log f(y_i)$, $\varphi_i(x) = \exp(\lambda_i x)f(x)$, iš sąlygos (5) gauname, kad $\forall x \geq 0$, $i = 1,2$

$$\varphi_i(x+y_i)\exp(-\lambda_i x - \lambda_i y_i) = \varphi_i(x)\exp(-\lambda_i x)\varphi_i(y_i)\exp(-\lambda_i y_i).$$

Tai reiškia, kad $\forall x \geq 0$ ir $i = 1,2$

$$\varphi_i(x+y_i) = \varphi_i(x)\varphi_i(y_i). \qquad (6)$$

O kadangi $\varphi_i(y_i) = \exp(\lambda_i y_i)f(y_i) = \exp\left\{-\frac{y_i}{y_i}\log f(y_i)\right\}f(y_i) = 1$, tai iš čia ir (6) gauname, kad

$$\varphi_i(x+y_i) = \varphi_i(x),\quad \forall x \geq 0,\quad i = 1,2. \qquad (7)$$

Taigi, pusašyje $[0,\infty)$ $\varphi_1(x)$ yra periodinė funkcija su periodu y_1, o $\varphi_2(x)$ – su periodu y_2.

Įrodysime dabar, kad $\lambda_1 = \lambda_2$. Tarkime, kad taip nėra, t.y. tegu $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Kadangi iš $\varphi_1(x)$ ir $\varphi_2(x)$ apibrėžimų seka, kad $f(x) = \varphi_1(x)\exp(-\lambda_1 x) = \varphi_2(x)\exp(-\lambda_2 x)$ $\forall x \geq 0$, tai

$$\varphi_1(x) = \varphi_2(x)\exp(-(\lambda_1 - \lambda_2)x)\quad \forall x \geq 0.$$

Tačiau tada prielaida $\lambda_1 \neq \lambda_2$ prieštarauja tam, kad $\varphi_1(x)$ yra periodinė funkcija. Taigi, $\lambda_1 = \lambda_2$ ir $\varphi_1(x) = \varphi_2(x) = \varphi(x)$ $\forall x \geq 0$. Sąryšis (7) reiškia, kad tolydi iš kairės funkcija $\varphi(x)$ turi du nebendramačius periodus, o tai įmanoma tik tuo atveju, kai $\varphi(x) \equiv c$ $\forall x \geq 0$, kur c yra konstanta.

Iš (5) pastebime, kad $f(0) = 1$. Tada pagal $\varphi_i(x)$ apibrėžimą turime, kad ir $\varphi_i(0) = 1$, t.y. ir $\varphi(0) = 1$. Tai reiškia, kad $c = 1$. Dabar belieka vėl pasinaudoti $\varphi_i(x)$ apibrėžimu, iš kur ir gauname, kad $f(x) = c\exp(-\lambda x) = \exp(-\lambda x)$, $\forall x \geq 0$; čia $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$.

Pereiname prie eksponentinio dėsnio charakterizacijos veiksmo be praeities poveikio savybe stabilumo tyrimo, t.y. tarsime, kad charakterizacijos teoremos sąlygos išpildomos ne tiksliai, o tik su tam tikra paklaida ε. Tačiau jei charakterizacijos teoremos sąlygos išpildomos ne tiksliai, o tik apytiksliai, tai ar mes galime tvirtinti, kad charakterizacijos teoremos išvados taip pat yra apytiksliai išpildomos? Teoremos, kuriose nagrinėjamos tokio pobūdžio problemos, vadinamos stabilumo teoremomis, arba charakterizacijų stabilumu.

Autorės darbe [2] aukščiau išnagrinėtos eksponentinio dėsnio charakterizacijos stabilumo tyrimas atliktas diofantinių aproksimacijų metodu. Šiame darbe [2] įrodyta, kad nagrinėjamos charakterizacijos stabilumo įvertis priklauso nuo skaičiaus $\alpha = y_1 / y_2$ iracionalumo tipo. Pastarasis diofantinių aproksimacijų teorijoje apibrėžiamas taip:

Apibrėžimas. *Skaičius α vadinamas skaičiumi tipo $\le g$ (g – nemažėjanti funkcija, kurios visos reikšmės didesnės už 1), jei visiems pakankamai dideliems skaičiams N egzistuoja nelygybių*

$$|n\alpha - m| \le 1/n, \quad N/g(N) \le n < N$$

sprendinys toks, kad n ir m yra tarpusavy pirminiai skaičiai. Skaičius α tipo $\le g$ vadinamas pastoviojo tipo skaičiumi, jei g yra konstanta.

Yra žinoma, kad, pavyzdžiui, skaičiai $\alpha = a + b\sqrt{D}$, kur D – natūralusis skaičius, kuris nėra kito natūraliojo skaičiaus kvadratas, o a ir $b \ne 0$ – racionalieji skaičiai, yra pastoviojo tipo skaičiai.

1.2 teorema (žr. [2]). *Tegu $\varepsilon \ge 0$. Tarkime, kad veiksmo be praeities poveikio savybė išpildoma tik apytiksliai šia prasme – egzistuoja du nebendramačiai taškai y_1 ir y_2, $0 < y_1 < y_2$ tokie, kad*

$$\left|\bar{F}(x + y_i) - \bar{F}(x)\bar{F}(y_i)\right| \le \varepsilon, \quad \forall x \ge 0, \quad i = 1,2, \tag{8}$$

kur $\bar{F}(x) = P(X \ge x)$, $\bar{F}(0) = 1$, $\bar{F}(y_i) > 0$. Jei $\alpha = y_1 / y_2$ yra pastoviojo tipo $\le d$ skaičius, tai egzistuoja konstanta C, priklausanti tik nuo $y_1, y_2, \bar{F}(y_1), \bar{F}(y_2), d$, tokia, kad

$$\left|\bar{F}(x) - \exp(-\lambda x)\right| \le C\sqrt{\varepsilon}, \quad kur\ \lambda = -\log \bar{F}(y_1)/y_1.$$

Ši teorema, kaip ir teoremos darbuose [2], [3], [8], [9], [10], [22], [23], [25], [26], [29], įrodoma diofantinių aproksimacijų metodu. Diofantinių aproksimacijų teorijoje yra žinoma, kad bet kuris iracionalus skaičius α gali būti aproksimuotas racionaliu skaičiumi r/k bet kokiu norimu tikslumu. Autorė įrodė, kad

- **galima įvertinti žingsnių, reikalingų iracionalaus skaičiaus α aproksimacijai atlikti racionaliaisiais skaičiais r/k pasirinktuoju tikslumu, skaičių. Šis žingsnių skaičius priklauso tik nuo iracionalaus skaičiaus α aproksimacijos racionaliaisiais skaičiais greičio įvertinimo iš apačios.**

1.2 teoremoje $\alpha = y_1 / y_2$ yra pastoviojo tipo $\le d$ skaičius. Dabar išnagrinėsime bendrąjį atvejį, kai $\alpha = y_1 / y_2$ yra skaičius tipo $\le g$ (g – nemažėjanti funkcija, kurios visos reikšmės didesnės už 1). Tegu $\gamma(\varepsilon)$ yra kintamojo ε funkcija. Dydžius m_i, $i = 1,2,3,\ldots$ apibrėšime taip:

$$m_1 = \{1 - 1/g(1/\gamma(\varepsilon))\}/\gamma(\varepsilon), \quad m_2 = 1/\gamma(\varepsilon),$$

o m_i, $i = 3,4,\ldots$ apibrėžiami kaip lygčių $m_i = m_{i-1}/(1 - 1/g(m_i))$ sprendiniai.

Sekančios dvi teoremos sudaro autorės išvystyto diofantinių aproksimacijų metodo branduolį.

1.3 teorema (žr. [2]). *Jeigu α yra skaičius tipo $\le g$, eilutė $\sum_{j=1}^{\infty} g(m_j)/m_j$ konverguoja, o $\gamma(\varepsilon)$ tenkina lygtį $\varepsilon/\gamma(\varepsilon) = \sum_{j=1}^{\infty} g(m_j)/m_j$, ir, be to, tenkinamas sąryšis (8), tai*

$$\left|\bar{F}(x) - \exp(-\lambda x)\right| \le C_1 \varepsilon/\gamma(\varepsilon),$$ *kur $\lambda = -\log \bar{F}(y_1)/y_1$, o konstanta C_1 priklauso tik nuo $y_1, y_2, \bar{F}(y_1), \bar{F}(y_2)$.*

Skaičiaus α racionalumo tipą galima nusakyti ne funkcija g, o, pavyzdžiui, nelygybe tipo

$$|r\alpha - k| > b' r^{-b},$$

kur b ir b' yra tam tikros konstantos. Ši svarbi aplinkybė sąlygojo 1.4 teoremos aktualumą.

1.4 teorema (žr. [2]). *Tegu $\varepsilon \ge 0$. Tarkime, kad egzistuoja du nebendramačiai taškai y_1 ir y_2, $0 < y_1 < y_2$ tokie, kad*

$$\left|\bar{F}(x + y_i) - \bar{F}(x)\bar{F}(y_i)\right| \le \varepsilon, \quad \forall x \ge 0, \quad i = 1,2,$$

kur $\bar{F}(x)=P(X\geq x)$, $\bar{F}(0)=1$, $\bar{F}(y_i)>0$. *Tegu, be to,* $\alpha=y_1/y_2$ *yra toks, kad bet kuriems natūraliesiems* r *ir* k *galioja sąryšis* $|r\alpha-k|>b'r^{-b}$, *kur* b *ir* b' *yra konstantos, priklausančios tik nuo* α, *tai egzistuoja konstanta* C_2, *priklausanti tik nuo* y_1, y_2, $\bar{F}(y_1)$, $\bar{F}(y_2)$ *tokia, kad*

$$\left|\bar{F}(x)-\exp(-\lambda x)\right|\leq C_2\varepsilon^{1/(1+b)},$$

kur $\lambda=-\log\bar{F}(y_1)/y_1$.

Ką tik nagrinėtą veiksmo be praeities poveikio savybę (1) galima apibendrinti taip: tegu egzistuoja $\alpha>0$ toks, kad

$$P(X\geq\sqrt[\alpha]{x^\alpha+y^\alpha}\,|X\geq y)=P(X\geq x),\ \forall x\geq 0,\ \forall y\geq 0. \qquad (9)$$

Y.H. Wang (J. Appl. Probab., 1976, **13**, 385-391) prie papildomų sąlygų $P(X\geq 0)=1$, $P(X\geq y)>0$ $\forall y\geq 0$ įrodė, kad X yra Weibull atsitiktinis dydis tada ir tik tada, kai X tenkina sąryšį (9). Autorė ne tik atsisakė šių papildomų sąlygų, bet ir veiksmo be praeities poveikio sąlygos (9) išpildymą visoje y pusašyje sušvelnino iki jos išpildymo tik dviejuose nebendramačiuose taškuose y_1 ir y_2.

1.5 teorema (žr. [9]). *Tarkime, kad* $\alpha>0$. *Atsitiktinis dydis* X *turi Weibull skirstinį*

$$F(x)=1-\exp(-\lambda x^\alpha)\quad visiems\quad x\geq 0$$

tada ir tik tada, jei X *tenkina eilės* α *veiksmo be praeities poveikio sąlygą*

$$P(X\geq\sqrt[\alpha]{x^\alpha+y_i{}^\alpha}\,|X\geq y_i)=P(X\geq x),\ \forall x\geq 0,\ i=1,2$$

bent dviejuose nebendramačiuose taškuose y_1 *ir* y_2.

Tarkime dabar, kad Wang charakterizacijos prielaida (9) išpildoma tik su tam tikra paklaida. Įrodysime, kad su tos pačios eilės paklaida yra išpildoma ir šios charakterizacijos teoremos išvada, t.y. su tos pačios eilės paklaida nagrinėjamas atsitiktinis dydis turi Weibull skirstinį.

1.6 teorema (žr. [9]). *Tarkime, kad* X *yra neneigiamas atsitiktinis dydis, o* $U_+=\{y\geq 0|P(X\geq y)>0\}$. *Jei*

$$P(X\geq\sqrt[\alpha]{x^\alpha+y^\alpha}\,|X\geq y)=P(X\geq x)+r(x,y),\ |r(x,y)|\leq\varepsilon\ \forall x\geq 0,\ \forall y\in U_+,$$

tai atsitiktinis dydis X *turi visų eilių momentus,* $U_+=[0,\infty)$ *ir egzistuoja* $\lambda>0$ *toks, kad visiems* $\varepsilon\geq 0$

$$|P(X\geq x)-\exp(-\lambda x^\alpha)|\leq 2\varepsilon,\quad \forall x\geq 0.$$

Diofantinių aproksimacijų metodas leidžia konstruoti stabilumo įverčius ne tik skirstinių, bet ir charakteristinių funkcijų erdvėje. Autorės darbai [3], [8], [22], o taip pat [10] galėtų būti gera šio teiginio pagrindimo iliustracija.

II. CHARAKTERIZACIJOS MODELIŲ STABILUMO ĮVERČIAI

Nagrinėsime populiaciją, kurios skirstinys yra funkcija $F(x)$. Tarkime, kad atlikta n nepriklausomų šios populiacijos stebėjimų, kurių rezultate gauta imtis $X_1,...,X_n$. Tarkime, pagaliau, kad yra duotos dvi laisvai pasirinktos statistikos

$$S_1 = S_1(X_1, X_2,..., X_n) \text{ ir } S_2 = S_2(X_1, X_2,..., X_n).$$

Prielaida, kad statistikos S_1 ir S_2 yra vienodai pasiskirsčiusios (vietoj šios prielaidos galėtų būti reikalaujama abiejų statistikų nepriklausomumas, regresijos pastovumas ar pan.), gali būti panaudojama įvairių skirstinių charakterizacijoms gauti.

I skyriuje jau buvo pateikta tokia stabilumo uždavinio formuluotė: jei charakterizacijos teoremos sąlygos išpildomos ne tiksliai, o tik apytiksliai, tai ar galime tvirtinti, kad charakterizacijos teoremos išvados taip pat yra apytiksliai išpildomos? Pirmasis charakterizacijų statistikų vienodo pasiskirstymo savybe stabilumą nagrinėjo L. Meshalkin [32]. Šiame darbe buvo gautas istoriškai pirmosios charakterizacijos – Georg Pólya teoremos [33] – stabilumo įvertis.

G. Pólya teorema teigia, kad jei statistikos $S_1 = X_1$ ir $S_2 = (X_1 + X_2)/\sqrt{2}$ yra vienodai pasiskirsčiusios, tai nagrinėjamoji populiacija turi normalųjį skirstinį su vidurkiu 0, ir atvirkščiai.

Toliau mes rašysime $\mathbf{L}(W) = \mathbf{L}(Z)$ norėdami pabrėžti, kad atsitiktinių dydžių W ir Z skirstiniai sutampa. Taigi, $\mathbf{L}(X_1) = \mathbf{L}\left((X_1 + X_2)/\sqrt{2}\right)$, t.y.

$$f(t) = f^2\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) \quad \forall\, t \in (-\infty, \infty), \tag{1}$$

kur $f(t)$ yra atsitiktinio dydžio X_i charakteristinė funkcija, tada ir tik tada, kai X_i turi normalųjį skirstinį su nuliniu vidurkiu.

Pagal Feller [34], atsitiktinio dydžio X_1 skirstinys vadinamas griežtai stabiliu, jei jis nesukoncentruotas nulyje ir egzistuoja $\alpha \in (0,2]$ toks, kad kiekvienam n galioja $\mathbf{L}(X_1) = \mathbf{L}((X_1 + ... + X_n)/n^{1/\alpha})$, t.y.

$$f(t) = f^n\left(\frac{t}{n^{1/\alpha}}\right), \quad \alpha \in (0,2], \ n = 2,3,4,... \tag{2}$$

Paėmę $\alpha = 2$ ir palyginę sąryšius (1) ir (2) matome, kad kai $\alpha = 2$, tai tam, kad atsitiktinio dydžio X_1 skirstinys būtų griežtai stabiliu, pakanka sąryšio (2) išpildymo vienam vieninteliam $n = 2$, t.y. visiškai nebūtina, kad (2) būtų tenkinamas ir atvejais $n = 3,4,...$ Gal analogiškas teiginys yra teisingas ir atvejais $\alpha \in (0,2)$?

Deja, taip nėra. P. Lévy pateikė pavyzdį, iš kurio matyti, kad sąlygos (2) tenkinimas vieninteliam $n = 2$ nepakankamas griežtai stabilių skirstinių klasės charakterizacijai, nes charakteristinė funkcija

$$f(t) = \exp\left\{2\sum_{k=-\infty}^{\infty}(\cos 2^k t - 1)\right\}$$

tenkina lygtį (2) atveju $n = 2$ ir $\alpha = 1$, t.y. $f(t) = f^2(t/2)$, bet $f(t)$ nėra griežtai stabili.

Iš kitos pusės, P. Lévy įrodė, kad $f(t)$ yra griežtai stabili, jei lygtis (2) yra tenkinama bent dviejuose taškuose $n = 2$ ir $n = 3$. Šios Lévy charakterizacijos stabilumas išnagrinėtas autorės darbuose [3] ir [8]. Iš šių darbų darytina išvada, kad diofantinių aproksimacijų metodas leidžia konstruoti stabilumo įverčius ne tik skirstinių, bet ir charakteristinių funkcijų erdvėje. Pastarojoje tolygiąją metriką priimta žymėti simboliu λ_0:

$$\lambda_0(X,Y) = \sup_t |f_X(t) - f_Y(t)|,$$

kur, kaip jau buvo minėta, f_X ir f_Y yra atsitiktinių dydžių X ir Y charakteristinės funkcijos.

Iš tiesų, minėjome, jog P. Lévy įrodė, kad nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių X_1, X_2, X_3 charakteristinė funkcija $f(t)$ yra griežtai stabili, jei $\mathbf{L}(X_1) = \mathbf{L}((X_1 + X_2)/2^{1/\alpha}) = \mathbf{L}((X_1 + X_2 + X_3)/3^{1/\alpha})$, kur $\alpha \in (0,2]$, t.y. lygtis $f(t) = f^n(t/n^{1/\alpha})$ yra tenkinama visiems realiems t ir bent dviems n reikšmėms $n = 2$ ir $n = 3$. Tarkime dabar, kad ši lygtis – o jei tiksliau, tai *šios dvi lygtys* – yra tenkinamos tik su tam tikra paklaida ε, kuri yra matuojama λ_0 metrikoje. 2.1 teoremos formulavimui mums dar prireiks papildomų rezultatų iš diofantinių aproksimacijų teorijos. Yra žinoma, kad bet kuriems natūraliesiems r ir k egzistuoja konstantos b ir b^* tokios, kad

$$|r\log 2 - k\log 3| > b^* r^{-b}. \tag{*}$$

Iš Gouillon [37] išplaukia, kad šiai tiesinei formai $r\log 2 - k\log 3$ teisingas toks įvertis iš apačios:

$$|r\log 2 - k\log 3| > (23r)^{(-36821\log 2\log 3)},$$

todėl toliau mes fiksuosime šias konstantų b ir b^*, apibrėžtų formulėje (*), reikšmes:

$$b^* := 23^{(-36821\log 2\log 3)}, \quad b := 36821\log 2\log 3.$$

2.1 teorema (žr. [3], [8]). *Tarkime, kad X_1, X_2, X_3 yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai ir, be to,*

$$\lambda_0(X_1,(X_1+X_2)/2^{1/\alpha})\le\varepsilon,\ \lambda_0(X_1,(X_1+X_2+X_3)/3^{1/\alpha})\le\varepsilon,\ \alpha\in(0,2].$$

Tada yra galimas tik vienas iš dviejų variantų: 1) egzistuoja stabilusis atsitiktinis dydis Y ir konstanta C_0 tokie, kad $\lambda_0(X_j,Y)\le C_0\varepsilon^{\Delta_0}$, kur $\Delta_0=1/(b+\max(1,\alpha))$; 2) nagrinėjami atsitiktiniai dydžiai yra beveik išsigimę šia prasme: jų charakteristinė funkcija yra artima 1, kai $\varepsilon\downarrow 0$, o tiksliau, $|f(t)|\ge 1-2\varepsilon$ visiems $\varepsilon\in[0,1/4)$.

Lévy charakterizaciją apibendrino M.L. Eaton [43]. Tarkime, kad $X_1,\dots,X_{k_1},\dots X_{k_2}$ yra simetriniai nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai. Jei $0<\alpha\le 2$, o natūraliųjų skaičių k_1 ir k_2 logaritmai yra nebendramačiai (t.y. santykis $\log k_1/\log k_2$ yra iracionalus), ir

$$\mathrm{L}(X_1)=\mathrm{L}((X_1+\dots+X_{k_1})/k_1^{1/\alpha})=\mathrm{L}((X_1+\dots+X_{k_2})/k_2^{1/\alpha}),\qquad(3)$$

tai X_i turi simetrinį stabilųjį eilės α skirstinį.

Lengva pastebėti, kad sąlyga (3) būtų ekvivalenti sąlygai (2), jei pastaroji būtų išpildoma ne visiems natūraliesiems n, o tik dviems n reikšmėms $n=k_1$ ir $n=k_2$.

Tarkime dabar, kad Eaton charakterizacijos sąlyga (3) tenkinama ne tiksliai, o tik apytiksliai, su tam tikra paklaida ε. Parametru ε įvertinamas statistikų X_1 ir $(X_1+\dots+X_{k_1})/k_1^{1/\alpha}$ bei statistikų X_1 ir $(X_1+\dots+X_{k_2})/k_2^{1/\alpha}$ artumas λ-metrikoje, kuri apibrėžiama tarp bet kurių atsitiktinių dydžių X ir Y taip:

$$\lambda(X,Y)=\min\left\{\max\left\{\frac{1}{2}\max(|f_X(t)-f_Y(t)|:|t|\le T),\frac{1}{T}\right\}:T>0\right\},$$

čia f_X ir f_Y yra atsitiktinių dydžių X ir Y charakteristinės funkcijos.

λ-metrika yra ekvivalenti Lévy metrikai L ta prasme, kad atsitiktinių dydžių sekos $\{X_n\}$ konvergavimas L-metrikoje implikuoja šios sekos konvergavimą λ-metrikoje, ir atvirkščiai. λ-metrikos dvipusius įverčius nagrinėjo V. Zolotariovas ir V. Senatovas.

Autorės darbe [10] nagrinėjamas toks uždavinys: jei statistikos X_1 ir $(X_1+\dots+X_{k_1})/k_1^{1/\alpha}$ bei statistikos X_1 ir $(X_1+\dots+X_{k_2})/k_2^{1/\alpha}$ yra artimos λ-metrikoje šia prasme:

$$\lambda(X_1,(X_1+\dots+X_{k_1})/k_1^{1/\alpha})\le\varepsilon,\ \lambda(X_1,(X_1+\dots+X_{k_2})/k_2^{1/\alpha})\le\varepsilon,\qquad(4)$$

t.y. Eaton charakterizacijos sąlygos yra išpildomos tik su tam tikra paklaida ε, tai ar galima tvirtinti, kad šios charakterizacijos išvados irgi yra išpildomos su kažkokia paklaida? Jei taip, tai kaip galima įvertinti šią paklaidą?

2.2 teorema (žr. [10]). *Tarkime, kad $X, X_1,\dots,X_{k_1},\dots X_{k_2}$ yra simetriniai nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai, o skaičių k_1 ir k_2 logaritmai yra nebendramačiai (t.y. santykis $\log k_1/\log k_2$ yra iracionalus). Jei egzistuoja $\alpha\in(0,2]$ toks, kad statistikos X_1 ir $(X_1+\dots+X_{k_1})/k_1^{1/\alpha}$ bei statistikos X_1 ir $(X_1+\dots+X_{k_2})/k_2^{1/\alpha}$ tenkina sąryšius (4), tai egzistuoja atsitiktinis dydis Y, turintis simetrinį stabilų skirstinį eilės α, toks, kad*

$$\lambda(X,Y)\le C_1\varepsilon^{\Delta},$$

kur $\Delta=1/(b+\max(1,\alpha))$, C_1 yra konstanta, priklausanti tik nuo α, k_1, k_2, o b yra konstanta, priklausanti tik nuo k_1 ir k_2.

Konstanta b nuo α nepriklauso, o jos išraiškos pateikimui mums dar prireiks papildomų rezultatų iš diofantinių aproksimacijų teorijos. Yra žinoma, kad bet kuriems natūraliesiems r ir k ir bet kuriems natūraliesiems k_1 ir k_2, kurių logaritmų santykis $\log k_1/\log k_2$ yra iracionalus, egzistuoja konstantos b ir b' tokios, kad

$$|r\log k_1-k\log k_2|>b'r^{-b}.$$

Iš Matveev [36] išplaukia, kad šiai tiesinei formai $r\log k_1-k\log k_2$ teisingas toks įvertis iš apačios:

$$|r\log k_1-k\log k_2|>(3r)^{(-2^{39}\log k_1\log k_2)}.$$

Šį įvertį neseniai pagerino Gouillon [37] (Corollary 2.3):

$$|r\log k_1-k\log k_2|>(23r)^{(-36821\log k_1\log k_2)},$$

todėl 2.2 teoremoje mes fiksuojame šią konstantos b reikšmę:

$$b:=36821\log k_1\log k_2.$$

Tarkime dabar, kad turime papildomą informaciją apie nagrinėjamos imties pirmų r ($r > 2$) eilių momentus. Tada Eaton teoremoje galima atsisakyti nuo simetriškumo sąlygos, o vietoj statistikos $(X_1 + \ldots + X_{k_2})/k_2^{1/\alpha}$ nagrinėti bendresnį atvejį $(b_1 X_1 + \ldots + b_{k_2} X_{k_2})$, t.y. koeficientai prie X_i, $i = 1, 2, \ldots, k_2$ nebūtinai lygūs. Mes nagrinėsime tokio tipo charakterizacijos stabilumą atveju $\alpha = 2$. Tuo tikslu indikatorių $\delta_{x,y}$ apibrėžkime taip: $\delta_{x,y} = 1$, jei $x = y$, ir $\delta_{x,y} = 0$, jei $x \neq y$, o simboliu $[x]$ žymėsime realiojo skaičiaus x sveikąją dalį.

2.3 teorema (žr. [1]). *Tarkime, kad* $X, X_1, \ldots, X_{s_1}, \ldots X_{s_2}$ *yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai ir egzistuoja* $r > 2$ *toks, kad* $EX^j = EN^j$, $j = 1, 2, \ldots, [r] - \delta_{r,[r]}$, *kur* N *yra standartinis normalusis atsitiktinis dydis,* $E|X|^r \leq M_r$. *Jei*

$$\lambda((X_1 + \ldots + X_{s_1})/\sqrt{s_1}, b_1 X_1 + \ldots + b_{s_2} X_{s_2}) \leq \varepsilon,$$

ir $b_1^2 + \ldots + b_{s_2}^2 = 1$, $0 < |b_j|\sqrt{s_1} < 1$, *tai egzistuoja konstantos* C_2 *ir* Δ_*, *priklausančios tik nuo* s_1, s_2 *ir* $M_r, r, b_1, \ldots, b_{s_2}$ *tokios, kad nagrinėjama imtis yra beveik normali šia prasme:*

$$\lambda(X, N) \leq C_2 \varepsilon^{\Delta_*}. \tag{5}$$

Autorės darbe [13] parodyta, kad kuo daugiau turime aukščiau minėtos papildomos informacijos apie nagrinėjamos imties momentus, tuo geresnis stabilumo įvertis (5), t.y. kuo didesnis r, tuo didesnis ir Δ_*. Tačiau, aišku, visada $\Delta_* \leq 1$, o tai natūralu – jei charakterizacijos teoremos prielaidos buvo tenkinamos tik su paklaida ε, tai teoremos išvadų paklaida negali būti geresnė už prielaidų paklaidą.

Akademikui V. Statulevičiui priklauso toks uždavinys: pritaikyti stabilumo tyrime ribines teoremas. Autorės darbe [1] tai buvo atlikta. O būtent, pritaikius centrinę ribinę teoremą pirmosios charakterizacijos teoremos – G. Pólya [33] teoremos – tyrime, buvo gautas pirmosios stabilumo teoremos – L.D. Meshalkin [32] teoremos – naujas ir paprastesnis įrodymas.

2.4 teorema (L.D. Meshalkin [32], naujas įrodymas [1]). *Tarkime, kad* X, X_1, X_2 *yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai,* $EX=0$, $EX^2 = 1$, $E|X|^3 \leq M_3$. *Jei*

$$\lambda(X, (X_1 + X_2)/\sqrt{2}) \leq \varepsilon, \tag{6}$$

tai nagrinėjami atsitiktiniai dydžiai yra beveik normalūs šia prasme: $\lambda(X, N) \leq C_3 \varepsilon^{1/3}$; *čia* C_3 *yra konstanta,* N *– standartinis normalusis atsitiktinis dydis.*

☑ Tolimesni 2.4 teoremos apibendrinimai vyko keliomis kryptimis:

- formulėje (6) sąlyga $L(X) \approx L((X_1 + X_2)/\sqrt{2})$ pakeičiama sąlyga $L(X) \approx L(aX_1 + bX_2)$, t.y. nereikalaujama, kad $a = b = 1/\sqrt{2}$, bet, suprantama, paliekant G. Pólya charakterizacijos sąlygą $a^2 + b^2 = 1$ [I. Shiganov];
- formulėje (6) λ-metrika keičiama idealiąja metrika [V. Zolotariov];
- sąlygoje $L(X) \approx L(aX_1 + bX_2)$ koeficientai a ir b nagrinėjami kaip atsitiktiniai dydžiai [R. Shimizu, L. Davies];
- prielaidose išvis atsisakoma momentinių apribojimų, tačiau dar lieka kompaktiškumo apribojimai [A. Zinger, L. Klebanov];
- prielaidose atsisakoma ne tik momentinių, bet ir kompaktiškumo apribojimų [A. Zinger, L. Klebanov, R. Januškevičius];
- apibendrinta Pólya teorema taikoma naujų statistinių kriterijų sudarymui [V. Litvinova, Ya. Nikitin];
- kvazistabilių dėsnių klasėje λ_0-metrikoje gaunamas nepagerinamas stabilumo įvertis [O. Januškevičienė].

Pastarąjį autorės rezultatą [15] – nepagerinamą G. Pólya charakterizacijos stabilumo įvertį kvazistabilių charakteristinių funkcijų klasėje λ_0-metrikoje – panagrinėsime šiek tiek detaliau, prieš tai priminę kvazistabilaus skirstinio sąvoką.

Funkcija f vadinama kvazistabilaus skirstinio charakteristine funkcija (arba tiesiog kvazistabilia charakteristine funkcija), jeigu egzistuoja $\kappa > 0$ ir β, $0 < |\beta| < 1$ tokie, kad

$$f(t) = (f(\beta t))^{\kappa} \text{ visiems realiems } t.$$

Vienintelė lygties $\kappa|\beta|^{r} = 1$ reali šaknis α vadinama kvazistabilaus skirstinio charakteristiniu rodikliu. Kvazistabilus skirstinys yra neaprėžtai dalus, o jo spektrinė funkcija $H(x)$ Lévy išraiškoje užrašoma taip:

$$H(x) = -x^{\alpha}\theta_1(\log x), \quad x > 0; \quad H(-x) = x^{\alpha}\theta_2(\log x), \quad x > 0,$$

kur θ_j – neneigiamos tolygiosios iš dešinės periodinės funkcijos su periodu a.

Pažymėkime simboliu $\mathfrak{A}(\alpha,a)$ klasę visų kvazistabilių skirstinių su charakteristiniu rodikliu α, $\alpha\in(0,2)$, kuriems Lėvy išraiškoje atitinka funkcijos θ_j su periodu a.

2.5 teorema (žr. [15]). *Jei $1.5\le\alpha<2$, tai egzistuoja absoliučios konstantos C_5 ir C_6 tokios, kad*

$$C_5(2-\alpha)\exp(-\alpha a)\le \sup_{f\in\mathfrak{A}(\alpha,a)}\inf_{\gamma,\sigma}\sup_t\left|f(t)-\exp(it\gamma-\sigma^2t^2/2)\right|\le C_6(2-\alpha)\exp(\alpha a)\max(a,1).$$

Dabar belieka pritaikyti šį rezultatą G. Pólya charakterizacijos stabilumo įverčiui gauti. Jei L(X)= =L($(X_1+X_2)/2^{1/\alpha}$), o X, X_1, X_2 yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai, turintys charakteristinę funkciją $f(t)$, tai

$$f(t)=f^2(t/2^{1/\alpha})\text{ visiems realiems } t,$$

t.y. X, X_1, X_2 yra kvazistabilūs. Šią lygtį galima perrašyti tokia forma:

$$f(t)=f^2(t/\sqrt{2})+r_\varepsilon(2-\alpha,t).$$

Pažymėję $2-\alpha=\varepsilon$, visoje realioje ašyje nesunkiai gauname lygtį (7) ir įvertį $|r_\varepsilon(\varepsilon,t)|\le C_7\varepsilon$ $\forall t\in(-\infty,\infty)$. Iš čia ir 2.5 teoremos gaunamas toks rezultatas.

2.6 teorema (žr. [15]). *Kvazistabilių dėsnių klasėje $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}(\alpha,(1/\alpha)\log 2)$ G. Pólya charakterizacijos stabilumo įvertis turi pirmą ε laipsnį, kuris yra nepagerinamas, t.y.*

$$C_8\varepsilon\le\sup_{f\in\mathfrak{A}}\inf_{\gamma,\sigma}\sup_t\left|f(t)-\exp(it\gamma-\sigma^2t^2/2)\right|\le C_9\varepsilon,$$

kur $C_8=C_5/2, C_9=2C_6$.

Sekantis natūralus žingsnis – stabilių procedūrų konstravimas statistinių įverčių teorijos kontekste. Šio klausimo įvairūs aspektai nagrinėjami autorės darbe [14].

III. SIMETRINIŲ POLINOMINIŲ STATISTIKŲ KONVERGAVIMO GREIČIAI

Sekdami [31], pailiustruosime centrinės ribinės problemos pateikimą tam tikro atvaizdžio tolydumo problemos pateikimo forma.

Tegu $\mathcal{X}_*$ yra atsitiktinių dydžių, įgyjančių reikšmes Hilberto erdvėje $\mathfrak{A}$ su elementų norma $|\cdot|$, erdvė. Pažymėkime raide $\mathcal{X}$ aibę visų galimų elementų $\overline{X}=(X_1,\dots,X_n)$, kur $X_j\in\mathcal{X}_*$. Tegu, be to, erdvė $\mathcal{Y}$ sutampa su $\mathcal{X}_*$. Atvaizdį $\mathcal{F}\colon\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ mes apibrėšime taip:

$$\mathcal{F}\overline{X}=A_1X_1+\dots+A_nX_n,$$

kur A_j yra aprėžtas tiesinis operatorius erdvėje $\mathfrak{A}$.

Aibe $\mathcal{A}\subset\mathcal{X}$ pažymėkime aibę tų $\overline{X}=(X_1,\dots,X_n)$, kurių komponentės $X_j\in\mathcal{X}_*$ yra nepriklausomi normalieji atsitiktiniai dydžiai (taip jau tapo įprasta sutrumpintai vadinti *angl.* normally distributed random variables – *aut. pastaba*). Vaizdas $\mathcal{F}\mathcal{A}$ aibėje $\mathcal{Y}$ sutampa su aibe normaliųjų atsitiktinių dydžių erdvėje $\mathcal{X}_*$. Taigi, gavome įvade apibrėžtą *paprastojo atvaizdžio modelį*.

Tarkime, pagaliau, kad μ_* yra metrika erdvėje $\mathcal{X}_*$. Erdvėje $\mathcal{X}$ metriką μ apibrėžkime taip:

$$\mu\left(\overline{X'},\overline{X''}\right)=\mu_*(X_1',X_1'')+\dots+\mu_*(X_n',X_n''),$$

o erdvėje $\mathcal{Y}$ analogiškai apibrėžkime metriką ν. Mus domina atvaizdžio $\mathcal{F}$ (μ,ν)-tolydumas žemiau aptarta prasme.

O būtent, mus domina sumų $\mathcal{F}\overline{X}=A_1X_1+\dots+A_nX_n$ skirstinių aproksimavimo sumų $\mathcal{F}\overline{Y}=A_1Y_1+\dots+A_nY_n$, $\overline{Y}\in\mathcal{A}$ skirstiniais tikslumo įvertinimas. Žinoma, šis įvertinimas turi būti atliekamas individualių dėmenų charakteristikų terminais. Trumpai išnagrinėsime konkretų pavyzdį.

Tegu $S_n=X_{n1}+X_{n2}+\dots$, $n\ge1$ – nepriklausomų atsitiktinių dydžių, tenkinančių sąlygas

$$EX_{nj}=0,\quad d_{nj}^{\,2}=DX_{nj},\quad \beta_{nj}=E|X_{nj}|^r,\quad 2<r\le3,$$

$$d_{n1}^{\,2}+d_{n2}^{\,2}+\dots=1,\quad \varepsilon_n=\beta_{n1}+\beta_{n2}+\dots\to0,\quad n\to\infty,$$

sumos. Tai kaip tik ta sąlygų sistema, kurią naudojo Liapunovas savo garsiojoje teoremoje. Pats modelis truputį išplėstas , nes sumos S_n gali turėti begalinį dėmenų skaičių, o atsitiktiniai dydžiai X_{nj}, $j \ge 1$ sudaro bet kokio pavidalo serijų seką.

Sumų S_n skirstinių aproksimavimo standartinio normaliojo atsitiktinio dydžio N skirstiniu tikslumo įvertinimą galime atlikti įvairiose metrikose. Paprastai pasirenkama tolygioji metrika. Nagrinėjamu atveju centrinė ribinė teorema su Liapunovo sąlyga sudaro tokį teiginį:

$$Jei \quad n \to \infty, \quad \varepsilon_n \to 0, \quad tai \quad \rho(S_n, N) \to 0.$$

Vadovėliuose dažniausiai naudojamas dar nuo Liapunovo laikų išlikęs šios teoremos įrodymas grindžiamas charakteristinių funkcijų metodu ir yra gana griozdiškas. Metrikų metodas yra kompaktiškesnis.

Iš tiesų, atstumui tarp sumos S_n ir normaliojo atsitiktinio dydžio N skirstinių nustatyti pasirinkime taip vadinamą idealiąją metriką ς_r eilės r. Atsitiktinį dydį N užrašykime kaip nepriklausomų atsitiktinių dydžių sumą:

$$N = Y_{n1} + Y_{n2} + \ldots, \quad kur \quad \mathrm{L}(Y_{nj}) = \mathrm{L}(d_{nj} N).$$

Pasinaudoję metrikos ς_r pusiau adityvumo savybe gauname, kad

$$\varsigma_r(S_n, N) \le \varsigma_r(X_{n1}, Y_{n1}) + \varsigma_r(X_{n2}, Y_{n2}) + \ldots .$$

Kiekviename iš dėmenų $\varsigma_r(X_{nj}, Y_{nj})$ atsitiktiniai dydžiai X_{nj}, Y_{nj} turi vienodas matematines viltis ir dispersijas ir, be to, eilės r baigtinius momentus. Iš šių sąlygų nesunku gauti tokį įvertį:

$$\varsigma_r(X_{nj}, Y_{nj}) \le \left(\left(1 + \frac{2^{r/2}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1+r}{2}\right)\right)\beta_{nj}\right) / \Gamma(1+r) := K_r \beta_{nj}, \quad j \ge 1.$$

Tai reiškia, kad

$$\varsigma_r(S_n, N) \le \varsigma_r(X_{n1}, Y_{n1}) + \varsigma_r(X_{n2}, Y_{n2}) + \ldots \le K_r(\beta_{n1} + \beta_{n2} + \ldots) = K_r \varepsilon_n \to 0, \quad n \to \infty.$$

Taigi, iš teoremos sąlygų gavę dėmenų X_{nj} artumą su normaliaisiais Y_{nj}, gavome sumų $\digamma \overline{X} = X_{n1} + X_{n2} + \ldots = S_n$ artumą su normaliąja suma $\digamma \overline{Y} = Y_{n1} + Y_{n2} + \ldots = N$, t.y. konkrečiu pavyzdžiu ne tik apžvelgėme atvaizdžio $\digamma$ tolydumo schemą, bet ir elementariai pademonstravome konkrečius tolydumo įvertinimus.

Kadangi, kaip jau minėjome Įvade, visas fliuktuacines problemas charakterizacijos modeliuose jau priimta vadinti *stabilumo* uždaviniais, todėl šį (o ne *tolydumo*) terminą mes naudosime ir šiame paskutiniame Apžvalgos skyriuje.

Sekantis natūralus po sumų ribinių teoremų analizės tyrimo objektas yra simetrinių polinomų nuo atsitiktinių dydžių ribiniai skirstiniai.

Simetrinių polinominių statistikų konvergavimo greičio įvertinimą autorės darbuose [19], [20], [24] sąlygojo, visų pirma, galimybė tiesiogiai išrašyti šių polinomų formas. Antros eilės simetrinėms polinominėms statistikoms buvo ne tik gautas konvergavimo greičio įvertis, bet ir įrodyta, kad šis įvertis yra nepagerinamas.

Išnagrinėsime tai detaliau. Jų autorės darbuose

Tegu $X, X_1, X_2, \ldots, X_n$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai tokie, kad

$$EX = 0, \quad EX^2 = 1, \quad E|X|^3 = \beta_3, \quad EX^4 = \beta_4 < \infty. \qquad (1)$$

Nagrinėsime antros eilės simetrinius polinomus T_*,

$$T_* = T_*(X_1, \ldots, X_n) = 2 \sum_{\substack{1 \le j,k \le n \\ j \ne k}} X_j X_k .$$

Pažymėję $Y_k = X_k^2 - 1$, mes galime išreikšti T_* tokia forma:

$$T_* = T_2^2 - T_1 - 1,$$

kur

$$T_1 = \frac{Y_1 + \ldots + Y_n}{n}, \quad T_2 = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{\sqrt{n}}.$$

Turėdami visus šiuos pažymėjimus, galime formuluoti 3.1 teoremą.

3.1 teorema (žr. [24]). *Jei tenkinamos sąlygos* (1), *tai egzistuoja absoliuti konstanta C_1 tokia, kad*

$$\rho(T_*, N^2 - 1) \le C_1\left(\beta_3 + \sqrt{\beta_4}\right) n^{-1/4},$$

kur ρ yra tolygioji metrika, o N – standartinis normalusis atsitiktinis dydis. Jei, be to, $EX^6 = \beta_6 < \infty$, tai egzistuoja absoliuti konstanta C_2 tokia, kad

$$L(T_*, N^2 - 1) \le \sqrt{\frac{\log n}{n}} + C_2\beta_3 n^{-1/2} + C_2\beta_6|\beta_4 - 1|^{-3/2} n^{-1/2} \le \left(1 + C_2\beta_3 + C_2\beta_6|\beta_4 - 1|^{-3/2}\right)\sqrt{\frac{\log n}{n}},$$

kur L yra Lévy metrika. Šie įverčiai yra nepagerinami ta prasme, kad egzistuoja nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai $W_1, W_2, \ldots, W_n$ ir teigiama absoliuti konstanta C_3 tokie, kad

$$\rho(T_*(W_1, \ldots, W_n), N^2 - 1) \ge C_3 n^{-1/4}, \quad L(T_*(W_1, \ldots, W_n), N^2 - 1) \ge C_3\sqrt{\frac{\log n}{n}}.$$

Mes ištyrėme atsitiktinių simetrinių polinomų konvergavimo į ribinius skirstinius įverčius. Iškyla natūralus klausimas – kokias sąlygas turi tenkinti atsitiktinio simetrinio polinomo koeficientai, kad šio polinomo konvergavimas į neišsigimusį atsitiktinį dydį būtų išvis įmanomas?

Šių sąlygų tyrimui skirti autorės darbai [4], [5], [16], [17], [18] ir [21]. Deja, dėl šių sąlygų sudėtingumo, pažymėjimų griozdiškumo ir ribotos šios Apžvalgos apimties nėra galimybės pateikti net įdomiausią rezultatą iš ką tik išvardytų autorės darbų – Teoremą iš straipsnio [5].

OLGOS JANUŠKEVIČIENĖS svarbiausių mokslo darbų po disertacijos gynimo ir habilitacijos procedūrai teikiamų mokslo darbų (pažymėti varnele ✓) sąrašas

A02. Straipsniai, publikuoti mokslo leidiniuose, įtrauktuose į Mokslinės informacijos instituto (Institute of Scientific Information) duomenų bazę

Eil.Nr.	*Pilnas bibliografinis aprašas*
[1] ✓	R. Yanushkevichius, **O. Yanushkevichiene**, Limit theorems in the problems of stability. *Lecture Notes in Mathematics*, 1983, vol. 982, 254-282.
[2] ✓	**O. Yanushkevichiene**, Estimate of the stability of a characterization of the exponential law *Theory of Probability and its Applications*, 1985, vol. 29, No 2, 281–292.
[3] ✓	R. Yanushkevichius, **O. Yanushkevichiene**, Stability of P. Levy's Characterization Theorem. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*, 1985, vol. 70, 457–472.
[4] ✓	**O. Yanushkevichiene**, On the convergence of random symmetric polynomials. *Lecture Notes in Mathematics*, 1993, vol. 1546, 184–188.
[5] ✓	**O. Yanushkevichiene**, On the limit distributions of homogeneous random symmetric polynomials of arbitrary degree. *Theory of Probability and its Applications*, 1996, vol. 40, No 3, 588-594
[6]	**O. Yanushkevichiene**, On the rate of convergence of a sequence of random polynomials. *Theory of Probability and its Applications*, 1997, vol. 42, No 2, 377–379.
[7]	Basalykas, **O. Yanushkevichiene**, On the rate of convergence for one quadratic form. *Theory of Probability and its Applications*, 1999, vol. 44, No 1, 143–144.
[8] ✓	R.Yanushkevichius, **O.Yanushkevichiene**. On the stability of one characterization of stable distributions. *Acta Applicandae Mathematicae*, 2003, vol. 79, 137-142.
[9] ✓	R. Yanushkevichius, **O. Yanushkevichiene**. Stability of characterization of Weibull distribution. *Statistical Papers*, 46 (3), 2005, 459-468
[10] ✓	R. Yanushkevichius, **O. Yanushkevichiene**. Stability of characterization by identical distribution of linear forms. *Statistics: A Journal of Theoretical and Applied Statistics*, 2007, vol. 41, No.4, 345-362.

A03. Straipsniai periodiniuose ir tęstiniuose mokslo leidiniuose, registruotuose tarptautinėse mokslinės informacijos duomenų bazėse

Eil. Nr.	*Pilnas bibliografinis aprašas*
[11]	**О. Янушкявичене**, Исследование некоторых параметров устойчивых распределений. *Lietuvos matematikos rinkinys*, 1981, vol. 21, No. 4, 195 – 209.
[12] ✓	L. Klebanov, **O. Yanushkevichiene**, Stability of a characterization of the exponential distribution. *Lietuvos matematikos rinkinys*, 1982, vol. 22, No 3, 288 – 294.
[13] ✓	R. Yanushkevichius, **O. Yanushkevichiene**, Method of multiple transformations in stability theory. *Journal of Soviet Mathematics*, 1986, vol. 35, No 3, 2551 – 2561.

[14]✓	**О. Янушкявичене**, Об одном новом подходе при построении устойчивых процедур статистического оценивания. *Труды семинара "Проблемы устойчивости стохастических моделей"*, М., ВНИИСИ, 1987, 149 – 152. English translation: *Journal of Soviet Mathematics*, 1989, vol. 47, No. 5, 2817-2820.
[15]✓	**O. Yanushkevichiene**, Rate of convergence of quasistable laws to the normal law. *Journal of Soviet Mathematics*, 1988, vol. 40, No 4, 573—579.
[16]✓	**O. Yanushkevichiene**, On limit distributions of inhomogeneous random symmetric polynomials of degree three. *Journal of Soviet Mathematics*, 1992, vol. 59, No 4, 1011—1019.
[17]✓	**O. Yanushkevichiene**, On the equidistribution of polynomials of normal random variables. *Lietuvos matematikos rinkinys*, 1994, t. 34, Nr. 1, 60-66.
[18]✓	L. Branitskaya, **O. Yanushkevichiene**, Limit distributions of random symmetrical polynomials. *Journal of Mathematical Sciences*, 1997, vol. 83, No 3, pp. 374-380.
[19]✓	**O. Yanushkevichiene**, On the rate of convergence of second-degree random polynomials. *Journal of Mathematical Sciences*, 1998, vol. 92, No 3, pp.3955-3959.
[20]✓	A. Basalykas, **O. Yanushkevichiene**, On exact order of convergence of random polynomials. *Journal of Mathematical Sciences*, 2000, vol. 99, No 3, pp. 1234-1243.
[21]✓	**O. Yanushkevichiene**, On the rate of convergence of random polynomials of degree 3. *Journal of Mathematical Sciences*, 2001, vol. 106, No 2, pp 2896–2900.
[22]✓	R. Yanushkevichius, **O. Yanushkevichiene**. New Stability Estimations in P. Lévy's Characterization Theorem. *Journal of Mathematical Sciences*, 2002, vol. 111, No 6, 3912-3917.
[23]	R. Yanushkevichius, **O. Yanushkevichiene**. On the stability of a characterization by identically distributed statistics. *Journal of Mathematical Sciences*. 2004, 122 (4), 3449-3451.
[24]✓	**O. Yanushkevichiene**, Optimal rates of convergence of second-degree polynomials in several metrics, Journal of Mathematical Sciences, 2006, vol. 138, No 1, pp. 5472-5479.
[25]	**O. Yanushkevichiene**, Some remarks on the application of Diophantine approximations for finding estimations of stability, Journal of Mathematical Sciences, 2007, vol. 146, No 4, pp. 6059-6061.
[26]	**O. Januškevičienė**, R. Januškevičius, Apie vieną stabiliųjų dėsnių charakterizaciją ir jos stabilumo įvertį. *Lietuvos matematikos rinkinys*, 2001, t. 41, spec. nr., 626-631 (Math. Sci. Net duomenų bazė, MR1904344 (2003e:60001)).

B09. Straipsniai recenzuojamuose periodiniuose, tęstiniuose ar vienkartiniuose moksliniuose leidiniuose, nepatenkantys į A02 ar A03 skiltis

Eil. Nr.	*Pilnas bibliografinis aprašas*
[27]	**О. Янушкявичене**, К вопросу о зависимости скорости сходимости от метрики. *Lietuvos matematikos rinkinys*, 2003, 43, spec. nr., 687-692.
[28]	**О. Янушкявичене**, К вопросу о скорости сходимости вырожденной *U*-статистики. *Lietuvos matematikos rinkinys*, 2005, t. 45, spec. nr., 533-538.
[29]	R. Januškevičius, **O. Januškevičienė**, Apie stabilumo įverčius be simetriškumo sąlygos. *Lietuvos matematikos rinkinys*, 2006, t. 46, spec. nr., 439-441.

KITA CITUOJAMA LITERATŪRA

- [31] V.M. Zolotarev, General problems of the stability of mathematical models. *Bull. Int. Stat.Inst.*, vol. 47, No 2 *(Proceedings of the 41st session of ISI)*, p. 382-401.
- [32] L.D. Meshalkin, On the robustness of some characterizations of the normal law. *Ann. Math. Statist.*, 1968, 39 (5), 1747-1750.
- [33] G. Pólya, Herleitung des Gausschen fehklergesetzes aus einer funktionalgleichung, *Mathematische Zeitschrift*, 1923, 18, 96-108.
- [34] W. Feller, *An introduction to probability theory and its applications*, 1966, vol. 2. New York - London - Sydney: Wiley.
- [35] G. Marsaglia, A. Tubilla, A note on the „lack of memory property" of the exponential distribution. *Ann. Probab.*, 1975, vol. 3, 353-354.
- [36] E. M. Matveev, An explicit lower bound for a homogeneous rational linear form in the logarithms of algebraic numbers. II. *Izvestija RAN (Ser. Matem.)*, 2000, 64 (6), 1217-1269.
- [37] N. Gouillon, Explicit lower bounds for linear forms in two logarithms. *Journal de Théorie des nombres Bordaux*, 2006, 18, 125-146.
- [38] Hoang Huu Nhu, Stability estimation for one characterization of exponential law, *Lith. Math. J.*, 1968, 8 (1), 175-178.
- [39] R. Shimizu, On a lack of memory property of the exponential distribution, *Ann. Inst. Statist. Math.*, 1979, 31 (2), A, 309-313.
- [40] R. Shimizu, Functional equation with an error term and the stability of some characterizations of the exponential distribution, *Ann. Inst. Statist. Math.*, 1980, 32 (1), A, 1-16.
- [41] D. St. P. Richards, Stability theorems for some characterizations of the exponential distribution, *Ann. Inst. Statist. Math.*, 1981, 33 (2), A, 1-16.
- [42] B. Dimitrov, L. Klebanov, S. Rachev, Stability of the characterization of the exponential law, *Journal of Mathematical Sciences*, 1986, 35(3), 2479-2485.
- [43] M. L. Eaton, Characterization of distributions by identical distribution of linear forms. *J. Appl. Prob.*, 1966, 3, 481-494.
- [44] V. M. Zolotarev, On random symmetrical polynomials, in: *Probability Distributions and Mathematical Statistics*, [Russian], 1986, FAN, Tashkent, 170-188.

Olga Januškevičienė. **Stochastinių modelių stabilumo tyrimas.**
Habilitacijos procedūrai teikiamų mokslo darbų apžvalga.
Fiziniai mokslai, matematika (01 P).

Tiražas 15 egz. Išleido Matematikos ir informatikos institutas