



VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
MATEMATIKOS STUDIJŲ PROGRAMA

Magistro baigiamasis darbas

Apie trinomų šaknis

On roots of Trinomials

Kastytis Bandžiulis

Darbo vadovas : Prof. Paulius Drungilas

Vilnius
2025

Padėka

Darbo autorius dėkoja Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakulteto Informacinių technologijų atviros prieigos centrui už suteiktus našųjų skaičiavimų (angl. High Performance Computing, HPC) išteklius šio darbo tyrimui atlikti. Darbo autorius dėkoja ir darbo Vadovui, Pauliui Drungilui, dėl svarbių pastabų ir įžvalgų rašant šiam darbui.

Santrauka

Šis darbas yra pagrįstas P. Drungilo, J. Jankausko ir G. Junevičiaus staripsniu [5], kuriame aprašomi kompleksiniai Pizo skaičiai, kurie yra Borveino trinomų šaknys. Pateikta formulė, leidžianti kiekvienam Borveino trinomui nustatyti, kiek jo šaknų priklauso vienetinim skrituliui $|z| < 1$. Taip pat pateikiami skaičiavimo eksperimentų rezultatai.

Raktiniai žodžiai: Borveino trinomas, Pizo skaičius, vienetinis apskritimas, šaknis iš vieneto, Pitagoro trejetas.

Summary

This work is based on the article [5] by P. Drungilas, J. Jankauskas, and G. Junevičius, which describes complex Pisot numbers that are roots of Borwein trinomials. A formula is presented that allows for determining, for each Borwein trinomial, how many of its roots belong to the unit disk $|z| < 1$. The results of computational experiments are also provided.

Keywords: Borwein trinomial, Pisot number, unit circle, root of unity, Pythagorean Triplet.

Lentelių sąrašas

1	Polinomialai su šaknimis vienetiniame skritulyje, pateiktas tik vienas iš $\pm f(\pm z)$	15
2	Polinomialai su šaknimis, kurie yra Pizo skaičiai, imame tik vieną iš $\pm f(\pm z)$	17
3	Kai kurie trinomialai su koeficientais iš Pitagoro trejetų, kurių šaknis yra Pizo skaičius . .	19

Turinys

Santrauka	3
Summary	4
Lentelių sąrašas	5
Žymėjimai	7
Įvadas	8
1. Borveino trinomialai ir Pizo skaičiai	10
1.0.1. Borveino trinomas	10
1.1. Bolio teorema	10
1.2. Bent dvi šaknys vienetiniam skritulyje	11
1.3. Borveino trinomialai, kurių šaknis yra Pizo skaičius	16
1.4. Borveino trinomialų neredukuojamumas	17
2. Trinomialai su koeficientais iš Pitagoro trejetų	19
2.1. Pitagoro trejetai	19
2.2. Trinomialai su koeficientais iš Pitagoro trejetų	19

Žymėjimai

- $N(f)$ - polinomo $f = a(z - \alpha_1)(z - \alpha_2)\dots(z - \alpha_n) \in \mathbb{C}[z]$ šaknų $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$, esančių vienetinio *skritulio* viduje, skaičius, t. y.

$$N(f) = \#\{j, 1 \leq j \leq n : |\alpha_j| < 1\}.$$

- $U(f)$ - polinomo $f = a(z - \alpha_1)(z - \alpha_2)\dots(z - \alpha_n) \in \mathbb{C}[z]$ šaknų $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$, esančių ant vienetinio *apskritimo*, skaičius, t. y.

$$U(f) = \#\{j, 1 \leq j \leq n : |\alpha_j| = 1\}.$$

- $f^*(z)$ - sangražinis polinomas, t. y. $f^*(z) = z^n f(\frac{1}{z})$.
- $\lfloor a \rfloor$ - skaičiaus $a \in \mathbb{R}$ sveikoji dalis t. y. didžiausias sveikasis skaičius, neviršijantis a .
- $\{a\}$ - skaičiaus a trupmeninė dalis, t. y. $\{a\} = a - \lfloor a \rfloor$.

Išvadas

Kompleksinis skaičius α vadinamas *algebriniu skaičiumi*, jei jis yra kokio nors polinomo

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0 \quad (1)$$

su racionaliaisiais koeficientais šaknis. Mažiausio laipsnio toks polinomas vadinamas algebrinio skaičiaus α *minimaliuoju polinomu*, o jo laipsnis – algebrinio skaičiaus α *laipsniu*. Jei (1) polinomo visi koeficientai yra sveikieji skaičiai, tai α vadinamas *sveikuoju algebriniu skaičiumi*.

Pavyzdžiui, kiekvienas racionalusis skaičius r yra pirmo laipsnio algebrinis skaičius, kurio minimalusis polinomas yra $z - r$. Be to, r yra sveikasis algebrinis skaičius tada ir tik tada, kai $r \in \mathbb{Z}$. Skaičius $\sqrt{2}$ yra antrojo laipsnio sveikasis algebrinis skaičius, nes jis yra polinomo $z^2 - 2$ šaknis ir šis polinomas yra jo minimalusis polinomas.

Tegul $p(z)$ – algebrinio skaičiaus α minimalusis polinomas. Remiantis pagrindine algebros teorema, egzistuoja tokie kompleksiniai skaičiai $\alpha_1 = \alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, kad

$$p(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdots (z - \alpha_n),$$

čia n yra algebrinio skaičiaus α laipsnis. Skaičiai $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ vadinami skaičiaus α *algebriniais jungtiniais skaičiais*. Pavyzdžiui, $-\sqrt{2}$ yra skaičiaus $\sqrt{2}$ algebrinis jungtinis skaičius.

Realusis sveikasis algebrinis skaičius $\alpha > 1$, kurio visi algebriniai jungtiniai skaičiai, išskyrus patį α , modulių yra mažesni už 1, vadinamas *Pizo skaičiumi*. Pavyzdžiui, aukso pjūvis $\phi \approx 1.618$, kuris yra polinomo $x^2 - x - 1$ šaknis ir kurio kitas algebrinis jungtinis $\phi^{-1} \approx -0.618$, yra Pizo skaičius.

Pizo skaičiai pritraukia dėmesį įvairiuose kontekstuose, tarp jų: fraktalai ir plokštumos klojimas (žr. [1, 2, 3]), realių skaičių trupmeninės dalies pasiskirstymas (žr. [7, 8]).

Pizo skaičiai pasižymi keliomis įdomiomis savybėmis: Pizo skaičių aibė yra skaiti (žr. [12]). Jie turi įdomias sąsajas su realiųjų skaičių trupmeninių dalių sekomis (žr. [6]). Žinoma, kad turint trupmeninių dalių seką $\{\lambda\theta^n\}$, kur $\lambda > 0$, ir θ yra algebrinis skaičius didesnis už 1, jei seka turi baigtinį skaičių ribinių taškų, tada θ yra Pizo skaičius ir λ priklauso $\mathbb{Q}(\theta)$ [4]. Tam tikra prasme Pizo skaičiaus laipsniai artėja prie sveikų skaičių, t. y. jų laipsnių trupmeninės dalys artėja prie 0 (žr. [4, 11].)

Analogiškai, kompleksinis skaičius α vadinamas *kompleksiniu Pizo skaičiumi*, jei $\alpha \notin \mathbb{R}$, $|\alpha| > 1$, ir visi jo algebriniai jungtiniai skaičiai $\beta' \notin \{\beta, \bar{\beta}\}$ modulių yra mažesni už 1, t. y. $|\beta'| < 1$.

Jie ypatingai svarbus nagrinėjant Gauso sveikuosius skaičius (žr. [16, 17]), kur jie atlieka analogišką vaidmenį, kaip ir virš realių skaičių, t. y.

$$\theta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \text{ jei ribinių taškų aibė } \operatorname{Re}(\lambda\theta^n) \text{ baigtinė,}$$

$$\text{tai } \theta \text{ bus kompleksinis Pizo skaičius, ir } \lambda \in \mathbb{Q}(\theta)$$

[16]

Pirmoji darbo dalis sudaro straipsnio [5] apžvalgą, su išplėstais įrodymais ir papildomo konteks-

to, kur mes surandame visus Borveino trinomus ir jų šaknis, kurios yra Pizo skaičiai. Antroje dalyje pritaikome įrodytus metodus kitai aibei trinomų, kurių koeficientai sudaryti iš Pitagoro trejetų.

1. Borveino trinomai ir Pizo skaičiai

1.0.1. Borveino trinomas

Borveino polinomas yra polinomas su koeficientais iš aibės $\{-1, 1\}$. Trinomas yra polinomas formos $ax^n + bx^m + c$. Pavyzdžiui,

$$x^5 - x^4 + 1$$

Yra Borveino trinomas. Borveino polinomai yra pakankamai paprasti, ir tai supaprastina Pizo skaičių paiešką, nes daugelyje atvejų mes galime gauti baigtinį skaičių polinomų, kurių mums reikės nagrinėti. Autorius [8] Rado visus trinomas ir keturnomus su *realiais* Pizo skaičiais, o autoriai [5] rado baigtinį skaičių Borveino trinomų, turinčius kompleksinius Pizo skaičių kaip šaknį.

1.1. Bolio teorema

1.1..1 Teorema (Bolio Teorema[5]). Tegul $f(z) = z^n + pz^m + q$, kur $p, q \in \mathbb{C}$ ir n, m yra tarpusavyje pirminiai, tokie, kad $n > m$. Tarkime, kokiam nors realiam $v > 0$, egzistuoja trikampis su kraštinėmis ilgiais $v^n, |p|v^m, |q|$, tegul $\alpha = \angle(|p|v^m, |q|)$ ir $\beta = \angle(v^n, |q|)$, tada šaknų, esančių vienetiniame skritulyje, skaičius bus sveikųjų skaičių kiekis intervale $(C_f - \delta_f, C_f + \delta_f)$, kur

$$C_f = \frac{n(\pi + \arg(p) - \arg(q)) - m(\pi - \arg(q))}{2\pi}$$

ir

$$\delta_f = \frac{n\alpha + m\beta}{2\pi}$$

Apsiribojus trinomais ir apribojus koeficientus, mums reikėtų dar vieno apribojimo, kad mums liktų baigtinis skaičius polinomų, kurių mes galėtume įvertinti rankiniu būdu, Bolio teorema suteiks mums dar vieną apribojimą, ties laipsnių n ir m . apibrėžkime dar kelias sąvokas.

Bet koks kompleksinis n -polinomas $f(z)$ virš $\mathbb{C}$ išsiskaido į $f(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \dots (z - \alpha_n)$. Mes apibrėšim $N(f)$ kaip polinomo (nebūtinai skirtingų) šaknų α_i skaičių, esančių vienetinio skritulio viduje, ir $U(f)$ analogiškai šaknų, esančių ant vienetinio apskritimo.

$$N(f) = \#\{j, 1 \leq j \leq n : |\alpha_j| < 1\}$$

$$U(f) = \#\{j, 1 \leq j \leq n : |\alpha_j| = 1\}$$

Tuo pačiu, apibrėžkime $f^*(z) = z^n f(\frac{1}{z})$, jį vadinsime sangrąžiniu polinomu. Nagrinėkime jo išskaidimą į pirmo laipsnio polinomus. Jei $f(z)$ išsiskaido į

$$f(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \dots (z - \alpha_n)$$

taip $f^*(z)$ išsiskaido į:

$$\begin{aligned} f^*(z) &= z^n f\left(\frac{1}{z}\right) = z^n \left(\frac{1}{z} - \alpha_1\right) \left(\frac{1}{z} - \alpha_2\right) \dots \left(\frac{1}{z} - \alpha_n\right) = \\ &= \left(z - \frac{1}{\alpha_1}\right) \left(z - \frac{1}{\alpha_2}\right) \dots \left(z - \frac{1}{\alpha_n}\right) \end{aligned}$$

Gauname polinomą, kurio šaknys bus atvirkštinės $f(z)$ šaknys, be to, jei $|\alpha_i| > 1$, tai $\frac{1}{\alpha_i} < 1$. Taip mes surasime šaknų, nepatenkančių į vienetinį apskritimo vidų, skaičių.

$$N(f^*(z)) = \#\{j, 1 \leq j \leq n : |\alpha_j| > 1\}$$

Bendrai paėmus, mes galime šaknų skaičių n išskirstyti tokia išraiška:

$$N(f) + U(f) + N(f^*) = n$$

1.2. Bent dvi šaknys vienetiniam skritulyje

Pirmiausiai apsibrėžkime porą funkcijų, kurias mes naudosime vėliau:

- $\lfloor x \rfloor$ - didžiausias sveikasis skaičius, mažesnis arba lygus x .
- $\lceil x \rceil$ - mažiausias sveikasis skaičius, didesnis arba lygus x .

Irodysime kelius teiginius apie šitas funkcijas.

1.2..1 Teiginys ([5]). Šie teiginiai teisingi:

1. Bet kokiam realiam skaičiui x , $\lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil$
2. Bet kokiam realiam skaičiui x , $\lceil x \rceil = -\lfloor -x \rfloor$, $\lfloor x \rfloor = -\lceil -x \rceil$
3. Bet kokiems realiems skaičiams a ir b , $a < b$, intervalas (a, b) turės lygiai $\lceil b \rceil - \lfloor a \rfloor - 1$ sveikų skaičių.

1.2..2 Teiginys ([5]). Tegul $n > m$ teigiami sveikieji skaičiai, ir $a, b \in \{\pm 1\}$, tada kompleksinis polinomas $z^n + az^m + b$ neturės kartotinių šaknų.

Irodymas. Naudosimės faktu, kad jei polinomas $f(z)$ turės kartotinę šaknį z_0 , jo išvestinė bus lygi nuliui taške z_0 .

Tarkime priešingai, kad z_0 yra kartotinė šaknis polinomo $f(z) = z^n + az^m + b$, tada $f(z_0) = f'(z_0) = 0$. Išvestinė bus

$$f'(z) + nz^{n-1} + amz^{m-1} = z^{m-1}(nz^{n-m} + am)$$

Gauname, kad $z_0^{n-m} = -am/n$, jei imsime šaknies modulį (nepamiršus, kad $|a| = 1$), gausime, kad $|z_0|^{n-m} = m/n < 1$, ir iš to gauname, kad $|z_0| < 1$. Kita vertus, iš $f'(z_0) = 0$ gauname $z_0^n = -am/nz_0^m$, įsistačius į $f(z)$, gauname

$$-am/z_0^m + az_0^m + b = 0$$

Iš kurio išplaukia, kad $z_0^m = -bn/(a(n-m))$, ir gauname įvertį $|z_0|^m = n/(n-m) > 1 \Rightarrow |z_0| > 1$, kuris prieštarauja pirmam įvertiui.

□

1.2..3 Teiginys ([5]). tegul $n > m$ tarpusavyje pirminiai, tada:

$$N(z^n + z^m + 1) = n - m - 1 - 2 \left\lfloor \frac{n - 2m}{3} \right\rfloor$$

$$N(z^n + z^m - 1) = 2 \left\lceil \frac{n + m}{6} \right\rceil - 1$$

$$N(z^n - z^m + 1) = 2 \left\lceil \frac{n + 4m}{6} \right\rceil - m - 1$$

$$N(z^n - z^m - 1) = n - 2 \left\lfloor \frac{2n - m}{6} \right\rfloor - 1$$

Irodymas. Pritaikysime Bolio teorema 1.1..1 polinomui $z^n + pz^m + q$ kur $p, q \in \{\pm 1\}$ ir $v = 1$, pagal 1.1..1 mes gausime lygiašonį trikampį $v^n = |p|v^m = |q| = 1$, ir kad kampai $\alpha = \beta = \pi/3$. Dabar, mes galime apskaičiuoti intervalo $(C_f - \delta_f, C_f + \delta_f)$ centro tašką C_f ir plotį δ_f Pradėkime nuo pirmo polinomo $f_1 = z^n + z^m + 1$.

$$C_{f_1} = \frac{n(\pi + \arg(1) - \arg(1)) - m(\pi - \arg(1))}{2\pi}$$

kadangi $\arg(1) = 0$

$$C_{f_1} = \frac{n - m}{2}$$

O $\delta_{f_1} = \frac{n\alpha + m\beta}{2\pi} = \frac{(n+m)\pi/3}{2\pi} = \frac{n+m}{6}$ Turime dabar abu intervalo galus, kad gautume sveikųjų skaičių kiekio įvertį, pritaikome 1.2..1 trečią punktą.

$$\begin{aligned} N(f_1) &= \left\lfloor \frac{n - m}{2} - \frac{n + m}{6} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n - m}{2} + \frac{n + m}{6} \right\rfloor - 1 = \\ &= \left\lfloor \frac{2n - m}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n - 2m}{3} \right\rfloor - 1 \end{aligned}$$

Pastebėkime, kad $n - m - \frac{n - 2m}{3} = \frac{2n - m}{3}$,

$$N(f_1) = \left\lfloor n - m - \frac{n - 2m}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n - 2m}{3} \right\rfloor - 1 =$$

ir pasinaudojus 1.2..1 antru punktu, galime išskelti sveikąją dalį už skliaustų.

$$= n - m - 1 + \left\lceil -\frac{n - 2m}{3} \right\rceil - \left\lfloor \frac{n - 2m}{3} \right\rfloor = n - m - 1 - 2 \left\lfloor \frac{n - 2m}{3} \right\rfloor$$

Likusius atvejus gauname analogiškai, gavus intervalą, ieškome sveikųjų skaičių kiekį, ir suprastinus reiškinius.

Mes gausime skirtingus kiekvienam atveju C_{f_n} .

- $C_{f_2} = 0$
- $C_{f_3} = \frac{2n-m}{2}$
- $c_{f_4} = \frac{n}{2}$

□

1.2..4 Išvada ([5]). Tegul $n > m$ tarpusavyje pirminiai, tada:

$$N((z^n + z^m + 1)^*) = 2 \left\lceil \frac{n+m}{3} \right\rceil - m - 1$$

$$N((z^n + z^m - 1)^*) = n - 2 \left\lfloor \frac{n+m}{6} \right\rfloor - 1$$

$$N((z^n - z^m + 1)^*) = 2 \left\lceil \frac{5n-4m}{6} \right\rceil - n + m - 1$$

$$N((z^n - z^m - 1)^*) = 2 \left\lceil \frac{2n-m}{6} \right\rceil - 1$$

Irodymas. Mes pasinaudosime faktu, kad $(z^n \pm z^m \pm 1)^* = z^n(\frac{1}{z^n} \pm \frac{1}{z^m} + 1) = \pm z^n \pm z^{n-m} + 1$, imkim $\pm z^l \pm z^k + 1, l = n, k = n - m$ ir įsistatome į 1.2..3, gausime atitinkamas lygybes. □

1.2..5 Išvada ([5]). Tegul $n > m$ tarpusavyje pirminiai, tada:

$$U((z^n + z^m + 1)) = 2 \left(1 - \left(\left\lceil \frac{n+m}{3} \right\rceil - \left\lfloor \frac{n+m}{3} \right\rfloor \right) \right)$$

$$U((z^n + z^m - 1)) = 2 \left(1 - \left(\left\lceil \frac{n+m}{6} \right\rceil - \left\lfloor \frac{n+m}{6} \right\rfloor \right) \right)$$

$$U((z^n - z^m + 1)) = 2 \left(1 - \left(\left\lceil \frac{n+4m}{6} \right\rceil - \left\lfloor \frac{n+4m}{6} \right\rfloor \right) \right)$$

$$U((z^n - z^m - 1)) = 2 \left(1 - \left(\left\lceil \frac{2n-m}{6} \right\rceil - \left\lfloor \frac{2n-m}{6} \right\rfloor \right) \right)$$

Irodymas. Kadangi $n = U(f) + N(f) + N(f^*)$, mes galime išreikšti $U(f) = n - N(f) - N(f^*)$ per 1.2..3 ir 1.2..4. Analogiškai pritaikius apvalinančias funkcijas. □

Skaičius, kurių modulis bus lygus 1, vadinsime *skačiais ant vienetinio apskritimo*. Vieneto šaknys yra ant vienetinio apskritimo, bet ne visi skaičiai ant vienetinio apskritimo yra vieneto šaknys, kaip pavyzdį imkime $e^{in}, n \in \mathbb{N}$.

1.2..6 Išvada ([5]). Tegul $n > m$ tarpusavyje pirminiai, tada polinomial forma $z^n \pm z^m \pm 1$ turės šaknį ant vienetinio apskritimo tada ir tik tada, kai laipsniai taikys dalumo sąlygą. Be to, jei taiko dalumo sąlygą, galima išskaidyti į formą $(z^2 \pm z + 1)g(z)$, kur $g(z)$ neturi šaknų ant vienetinio apskritimo. Dalumo sąlygos:

1. Polinomas $z^n + z^m + 1$ turės šaknį ant vienetinio apskritimo tada ir tik tada, jei $n + m$ dalijasi iš 3. Be to, išsiskaido į $(z^2 + z + 1)g(z)$, kur $g(z)$ neturi šaknų ant vienetinio apskritimo.
2. Polinomas $z^n + z^m - 1$ turės šaknį ant vienetinio apskritimo tada ir tik tada, jei $n + m$ dalijasi iš 6. Be to, išsiskaido į $(z^2 - z + 1)g(z)$, kur $g(z)$ neturi šaknų ant vienetinio apskritimo.
3. Polinomas $z^n - z^m + 1$ turės šaknį ant vienetinio apskritimo tada ir tik tada, jei $n + 4m$ dalijasi iš 6. Be to, išsiskaido į $(z^2 - z + 1)g(z)$, kur $g(z)$ neturi šaknų ant vienetinio apskritimo.
4. Polinomas $z^n - z^m - 1$ turės šaknį ant vienetinio apskritimo tada ir tik tada, jei $2n - m$ dalijasi iš 6. Be to, išsiskaido į $(z^2 - z + 1)g(z)$, kur $g(z)$ neturi šaknų ant vienetinio apskritimo.

Irodymas. Pirmoji dalis visų punktų seka iš 1.2..5, kai $\lfloor x \rfloor$ ir $\lceil x \rceil$ sutampa būtent, kai x yra sveikasis skaičius, be to, mes turime, kad kiekvienas polinomas, kuriam galioja dalumo sąlyga, turės lygiai dvi šaknis ant vienetinio apskritimo.

1. Tariam, kad $3|n + m$. Polinomui $z^n + z^m + 1$ parodome, kad $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ yra šaknis. Be to, $\bar{\zeta} = e^{-\frac{2\pi i}{3}}$ yra polinomo $z^2 + z + 1 = (z - \zeta)(z - \bar{\zeta})$ šaknis (prisiminkime, kad jei $n \geq 1$ laipsnio polinomas su realiais koeficientais turės šaknį α , tai $\bar{\alpha}$ irgi bus polinomo šaknis). kadangi $n + m = 3k$,

$$f(\zeta) = \zeta^n + \zeta^m + 1 = \zeta^{3k-m} + \zeta^m + 1 = \zeta^{3k}\zeta^{-m} + \zeta^m + 1 = \zeta^{-m} + \zeta^m + 1$$

Dabar atkreipime dėmesį į tai, kad ζ yra primitivi vieneto šaknis, t.y. jos laipsniai generuos visas trečiojo laipsnio vieneto šaknis, kadangi jų yra tik $\zeta, \bar{\zeta}, 1$, ir kadangi n, m yra tarpusavyje pirminiai, tai m nesidalija iš 3. Gauname, kad ζ^m yra $z^2 + z + 1$ šaknis.

$$\zeta^{-m} + \zeta^m + 1 = \zeta^{-m} (\zeta^{2m} + \zeta^m + 1) = 0$$

2. Tarkim, kad $6|n + m$. Imsime $\zeta = e^{\frac{\pi i}{3}}$, turime, kad $n + m = 6k$, be to, ζ bus primitivi vieneto šaknis, kurio minimalus polinomas yra $z^2 - z + 1 = (z - \zeta)(z - \bar{\zeta})$, ir $\zeta^6 = 1$, tai

$$f(\zeta) = \zeta^n + \zeta^m - 1 = \zeta^{6k-m} + \zeta^m - 1 = \zeta^{6k}\zeta^{-m} + \zeta^m - 1 = \zeta^{-m} + \zeta^m - 1$$

$$\zeta^{-m} + \zeta^m - 1 = \zeta^{-m} (\zeta^{2m} - \zeta^m + 1)$$

ζ^m yra primitivi 6-ojo laipsnio vieneto šaknis, kadangi $n + m = 6k$ ir n, m tarpusavyje pirminiai, tai 6 ir m bus tarpusavyje pirminiai, gauname, kad ζ yra $f(z)$ šaknis ir ζ^m yra $z^2 - z + 1$ šaknis.

3. Tarkim, kad $6|n + 4m$, parodysime, kad $\zeta = e^{\frac{\pi i}{3}}$, kaip ir antram punkte, $z^2 - z + 1 = (z - \zeta)(z - \bar{\zeta})$ yra minimalus polinomas, $n + 4m = 6k$ ir $\zeta^6 = 1$. Analogiškai gausime:

$$f(\zeta) = \zeta^n - \zeta^m + 1 = \zeta^{6k-4m} - \zeta^m + 1 = \zeta^{-4m} - \zeta^m + 1 = \zeta^{-6m}\zeta^{2m} - \zeta^m + 1$$

1 lentelė. Polinomial su šaknimis vienetiniame skritulyje, pateiktas tik vienas iš $\pm f(\pm z)$

$N(f) = 1$	$N(f) = 2$	$N(f) = 2$
$z^2 + z - 1$	$z^4 + z^2 - 1$	$z^3 + z^2 + 1$
$z^3 + z^2 - 1$	$z^4 - z^2 - 1$	$z^3 - z + 1$
$z^3 + z + 1$	$z^6 + z^4 - 1$	$z^4 + z^3 + 1$
$z^4 + z - 1$	$z^6 - z^4 - 1$	$z^4 + z + 1$
$z^5 + z - 1$	$z^6 + z^2 + 1$	$z^5 + z^4 + 1$
	$z^6 + z^2 - 1$	$z^5 - z^3 + 1$
	$z^8 + z^2 - 1$	$z^5 + z^2 + 1$
	$z^8 - z^2 - 1$	$z^5 - z + 1$
	$z^{10} + z^2 - 1$	$z^6 + z + 1$
	$z^{10} + z^2 + 1$	$z^7 + z^2 + 1$
		$z^7 - z + 1$
		$z^8 + z + 1$

$$\zeta^{-6m}\zeta^{2m} - \zeta^m + 1 = \zeta^{2m} - \zeta^m + 1$$

m ir 6 yra tarpusavyje pirminiai, ir $n + 4m = 6$, gauname, kad ζ^m irgi bus vieneto šaknis, tai ir bus $z^2 - z + 1$ šaknis.

4. Mes pasinaudosime antru punktu, įsistačius sangražinį polinomą

$$-(z^n - z^m - 1)^* = z^n + z^{n-m} + 1$$

Pastebėkime, kad šaknys $\zeta = e^{\frac{\pi i}{3}}$ ir $\bar{\zeta} = e^{-\frac{\pi i}{3}}$ yra atvirkštiniai daugybos atžvilgiu, tai juos nepakeis apvertimo operacija. Reiškia, kad jie bus ir polinomo $z^n - z^m - 1$ šaknys.

□

1.2..7 Teorema ([5]). Tegul $m > n$ teigiami sveikieji skaičiai, visi Borveino trinomial su bent dviem šaknimis vienetiniame skritulyje yra lentelėje 1:

Įrodymas. Tegul $n > m$ teigiami sveikieji skaičiai, tarkim $f(z) = z^n \pm z^m \pm 1$ yra Borveino trinomas, kuriam $N(f) \leq 2$, nagrinėkime du atvejus.

1. n ir m tarpusavyje pirminiai. Mes pritaikysime Bolio teorema 1.1..1 polinomui $z^n + pz^m + q$, kur $p = \pm 1, q = \pm 1, v = 1$. Panašiai kaip 1.2..4, gauname lygiašonį trikampį, tai $\alpha = \beta = \frac{\pi}{3}$. $N(f)$ bus lygus sveikųjų skaičių kiekiui intervale $(C_f - \delta_f, C_f + \delta_f)$ kur $\delta_f = \frac{n\alpha + m\beta}{2\pi} = \frac{n+m}{6}$ ir C_f :

$$C_f = \frac{n(\pi + \arg(p) - \arg(q)) + m(\pi - \arg(q))}{2\pi}$$

Pritaikius 1.2..1, mes gauname:

$$N(f) = \lceil C_f + \delta_f \rceil - \lfloor C_f - \delta_f \rfloor - 1 \geq (C_f + \delta_f) - \lfloor C_f - \delta_f \rfloor - 1 \geq$$

$$\geq (C_f + \delta_f) - (C_f - \delta_f) - 1 = 2\delta_f - 1 = \frac{n + m - 3}{3}$$

Pastebėkime, pasižiūrėjus į 1.2..3, pas mus δ_f visais atvejais pastovus, paėmus bet kokią variaciją polinomo $z^n \pm z^m \pm 1$ kuo mums svarbi gauta nelygybė, prisiminkime, kad $N(f) \leq 2$, sujungus abu gausime

$$\frac{n + m - 3}{3} \leq 2 \Leftrightarrow n + m \leq 9$$

Šita sąlyga, kartu su $\gcd(n, m) = 1$ ir $n > m$, mums apriboja galimas poras (n, m) , iš viso jų bus 13.[5, p.7]

$$(8, 1), (7, 2), (7, 1), (6, 1), (5, 4), (5, 3), (5, 2), (5, 1), (4, 3), (4, 1), (3, 2), (3, 1), (2, 1)$$

Kadangi galime 4 skirtingais būdais išrinkti ženklus Borveino trinomialui, turėsime išvis $13 \cdot 4 = 52$, kuriuos reikėtų tikrinti. Pritaikius 1.2..3(Galime naudotis bet koku matematikos programiniu paketu, šitie buvo rasti Drungilo ir kt.[5] naudojus *SageMath*[14] paketu), mes gauname visus atvejus $N(f) = 1$ ir $N(f) = 2$, kuriuos galime matyti 1 pirmame ir trečiame stulpelyje .

2. n ir m nėra tarpusavyje pirminiai. Tai turėsime $a|n$ ir $a|m$, pažymėkime $n = an_1, m = am_1, \gcd(n_1, m_1) = 1, n_1 > m_1$. Turime $f(z) = z^{an_1} \pm z^{am_1} \pm 1$, arba $f(z) = g(z^a)$, kur $g(z) = z^{n_1} \pm z^{m_1} \pm 1$. Pastebėkime, kad $N(g(z^k)) = kN(g(z))$

$$g(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \dots (z - \alpha_j)$$

$$g(z^k) = (z^k - \alpha_1)(z^k - \alpha_2) \dots (z^k - \alpha_j)$$

$$z^k - \alpha_i = (z - \beta_{i1})(z - \beta_{i2}) \dots (z - \beta_{ik})$$

Atsižvelgus į tai, kad $a > 1$ ir $N(f) \leq 2$, gauname, kad $a = 2, N(f) = 2$, kai $N(g) = 1$. Mes jau suradome Borveino trinomus formos $g(z)$ su $N(g) = 1$ 1 pirmame stulpelyje. Tai lieka tik patikrinti visus $f(z) = g(z^2), N(f) = 2$, visi tokie trinomialai bus lentelės antrame stulpelyje.

□

1.3. Borveino trinomialai, kurių šaknis yra Pizo skaičius

1.3..1 Teorema ([5]). Bet koks Borveino trinomialas su šaknimi, kuri yra kompleksinis Pizo skaičius, bus formos $\pm f(\pm z)$, kur $f(z)$ yra polinomas iš lentelės 2:

[5]. Tegul $f(z) = z^n \pm z^m \pm 1$ Borveino trinomialas su šaknimi β , kuri yra kompleksinis Pizo skaičius, šios skaičiaus minimalus polinomas yra $p(z)$, jis neredukuojamas ir dalija $f(z)$, pagal 1.4..1, kiekviena šaknis polinomo (jei yra) $f(z)/p(z)$ bus skaičius ant vienetinio apskritimo (kita vertus, jei $f(z)$ yra neredukuojamas, gausime $f(z) = p(z)$ ir $f(z)/p(z) = 1$), reiškia, kad $f(z)$ ir $p(z)$ turės vienodą skaičių šaknų, esančių už vienetinio skritulio, ir jų turėsime lygiai 2, kadangi $p(z)$ yra minimalus polinomas kompleksinio Pizo skaičiaus. Gauname, kad $N(f^*) = N(p^*) = 2$, turime, kad Borveino trinomialas

2 lentelė. Polinomiali su šaknimis, kurie yra Pizo skaičiai, imame tik vieną iš $\pm f(\pm z)$

$z^3 + z + 1$	$z^6 - z^2 + 1$
$z^3 - z^2 + 1$	$z^6 + z^4 + 1$
$z^4 + z + 1$	$z^6 + z^5 + 1$
$z^4 + z^2 - 1$	$z^7 + z^5 + 1$
$z^4 + z^3 + 1$	$z^7 - z^6 + 1$
$z^5 + z + 1$	$z^8 + z^6 - 1$
$z^5 - z^2 + 1$	$z^8 + z^7 + 1$
$z^5 + z^3 + 1$	$z^{10} + z^8 + 1$
$z^5 - z^4 + 1$	

$f(z)$ turi lygiai dvi šaknis vienetinio skritulio viduje. Turime visus Borveino trinomas su $N(f) = 2$. Juos patikrinus, randame tik kelias išimtis su realiomis šaknimis vienetinio skritulio viduje. Jos būtų:

- $z^4 + z^2 - 1$
- $z^6 + z^4 - 1$
- $z^6 + z^2 - 1$
- $z^8 + z^2 - 1$
- $z^{10} + z^2 - 1$

Taigi, visi Borveino trinomiali su kompleksiniu Pizo skaičiumi duoti lentelėje 2. □

1.4. Borveino trinomų neredukuojamumas

Polinomų skaidomumą nagrinėjo Selmeris [13] ir Tverbergas [15]. Selmeris atitinkamai įrodė polinomo $z^n - z - 1$ neredukuojamumą visiems $n > 1$. Tverbergas įrodė Borveino trinomams 1.4..1, O Liungrenas įrodė teiginį Borveino keturnomams [10].

1.4..1 Teorema ([5]). *Tegul $n > m$ teigiami sveikieji skaičiai, trinomas $f(z) = z^n \pm z^m \pm 1$ yra redukuojamas virš $\mathbb{Q}$ tada ir tik tada kai turės šaknį ant vienetinio apskritimo. Jei turės šaknis ant vienetinio apskritimo, jomis galima išskirti racionalų $f(z)$ daliklį, likęs daliklis bus neredukuojamas.*

Šitą teiginį įrodė Liungrenas [10], mes naudosime įrodymą iš Drungilo ir kt. [5]

1.4..2 Išvada ([5]). *Tegul $n > m$ teigiami sveiki skaičiai, kuriems $\gcd(n, m) = a$.*

Polinomas $f(z) = z^n \pm z^m \pm 1$ yra neredukuojamas tada ir tik tada, kai jis atitinka vieną iš keturių atvejų, tada jis turės lygiai $2a$ šaknis ant vienetinio apskritimo, kurios bus polinomo $f(z)$ daliklio $h(z)$ šaknys. Be to, $f(z)/h(z)$ yra neredukuojamas.

1. $f(z) = z^n + z^m + 1$ redukuojamas $\Leftrightarrow 3 \mid \frac{n+m}{a}$, $f(z)$ daliklis bus $h(z) = z^{2a} + z^a + 1$.
2. $f(z) = z^n + z^m - 1$ redukuojamas $\Leftrightarrow 6 \mid \frac{n+m}{a}$, $f(z)$ daliklis bus $h(z) = z^{2a} - z^a + 1$.
3. $f(z) = z^n - z^m + 1$ redukuojamas $\Leftrightarrow 6 \mid \frac{n+4m}{a}$, $f(z)$ daliklis bus $h(z) = z^{2a} - z^a + 1$.

4. $f(z) = z^n - z^m - 1$ redukuojamas $\Leftrightarrow 6 \mid \frac{2n-m}{a}$, $f(z)$ daliklis bus $h(z) = z^{2a} - z^a + 1$.

Irodymas. Nagrinėsime atvejį $f(z) = z^n + z^m + 1$, visi kiti atvejai gaunami analogiškai.

Tegul $f(z) = z^n + z^m + 1$ ir $\tilde{f}(z) = z^{n/a} + z^{m/a} + 1$. Atkreipkime dėmesį, kad n/a ir m/a yra tarpusavyje pirminiai. Tuo pačiu (analogiškai, kaip 1.2..7) turime, kad $U(f(z)) = U(\tilde{f}(z^a)) = aU(\tilde{f}(z))$. Pasinaudojus teiginiu 1.2..6, parodome, kad jei $n/a + m/a = (n+m)/a$ dalosi iš 3, tai pagal 1.4..1, jis bus redukuojamas. Įrodom pirmą dalį teiginio.

Tarkim, kad $3 \mid (n+m)/a$, pagal 1.2..6 trinomas $\tilde{f}(z)$ galima išskaidyti į $\tilde{f}(z) = (z^2 + z + 1)g(z)$, kur $g(z)$ neturi šaknų ant vienetinio apskritimo. Kiekviena šaknis $z^{2a} + z^a + 1$ bus vieneto šaknis, kadangi $z^{3a} - 1 = (z^a - 1)(z^{2a} + z^a + 1)$. Galiausiai, iš 1.4..1 išplaukia, kad $f(z)/(z^{2a} + z^a + 1) = g(z^a)$ yra neredukuojamas. $\square$

3 lentelė. Kai kurie trinomai su koeficientais iš Pitagoro trejetų, kurių šaknis yra Pizo skaičius

Apytiksliai reikšmė	Polinomas	Parametras
$0.479 + 4.602i$	$41x^3 + 840x + 841$	$k = 10$
$0.481 - 4.815i$	$45x^3 + 1012x + 1013$	$k = 11$
$0.482 + 5.019i$	$49x^3 + 1200x + 1201$	$k = 12$
$0.483 + 5.215i$	$53x^3 + 1404x + 1405$	$k = 13$
$0.484 + 5.403i$	$57x^3 + 1624x + 1625$	$k = 14$
$0.485 + 5.586i$	$61x^3 + 1860x + 1861$	$k = 15$

2. Trinomai su koeficientais iš Pitagoro trejetų

2.1. Pitagoro trejetai

Teigiami sveikieji skaičiai a, b, c , kurie tenkina lygtį $a^2 + b^2 = c^2$, vadinami Pitagoro trejetais. Jie yra nagrinėjami nuo senovės graikų laikų ir jų savybės yra plačiai žinomos.

Jei a, b, c yra tarpusavyje pirminiai, mes tokį trejetą vadinsime *primityviu*. Yra žinoma Euklido formulę, kurią mes galime generuoti primityvius trejetus. Imdami sveikus skaičius $j > k > 0$, kurie yra tarpusavyje pirminiai, ir tik vienas iš jų yra lyginis, mes galime generuoti visus primityvius trejetus. [9]

$$a = j^2 - k^2, b = 2jk, c = j^2 + k^2$$

2.2. Trinomai su koeficientais iš Pitagoro trejetų

Kuo mums įdomus Pitagoro trejetai, yra tai, kad mes galime generuoti aibę trinomų, kuri lengvai nagrinėjama Bolio teorema.

$$az^n + bz^m + c$$

Mes galime koeficientus surašyti ir priešinga tvarka, tuo mes gausime atitinkamus sangrąžinius polinomus.

$$cz^n + bz^m + a$$

Kadangi gauname žymiai didesnę aibę polinomų, juos išanalizuoti yra sudėtingiau, kadangi nėra aiškių skaidomumo kriterijų. Šioje dalyje bus pateikiami keli įrodymai, analogiškai Borveino trinomų atvejui, ir dar vienas papildomas įrodymas ypatingas būtent Pitagoro trejetų atvejui. Galutinė hipotezė remiasi kompiuterine paieška *Sympy* paketu, buvo ištiriami iki 600 atvejų.

2.2..1 Teorema. Tegul $n > m$ teigiami sveiki skaičiai, n, m yra tarpusavyje pirminiai. Trinomui $p(z) = az^n + bz^m + c$

$$N(p) = n - m - 1 - 2 \left\lfloor \frac{2n - 3m}{4} - \gamma \right\rfloor$$

kur $\gamma = \frac{n-m}{2\pi} \arccos\left(\frac{b}{c}\right)$

Įrodymas. Pirmiausiai, mes pakeiskime trinomą į normuotą pavidalą $z^n + \frac{b}{a}z^m + \frac{c}{a}$ Remdamiesi 1.1..1, imdami $v = 1$ mes gausime statųjį trikampį, su kraštinėmis $1, b/a, c/a$ pastebėkime, kad $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.

Gauname:

$$C_p = \frac{n(\pi + 0 - 0) - m(\pi - 0)}{2\pi} = \frac{n - m}{2}$$

$$\delta_p = \frac{n\alpha + m\beta}{2\pi} = \frac{m\pi/2 + (n - m)\alpha}{2\pi} = \frac{m}{4} + \frac{n - m}{2\pi} \arccos\left(\frac{b}{c}\right) = \frac{4}{m} + \gamma$$

gauname intervalą $(\frac{2n-3m}{4} - \gamma, \frac{2n-m}{4} + \gamma)$.

Pasinaudosime panašiu argumentu, kaip ir 1.2..3.

$$\begin{aligned} N(p) &= \left\lceil \frac{2n - m}{4} + \gamma \right\rceil - \left\lfloor \frac{2n - 3m}{4} - \gamma \right\rfloor - 1 = \left\lceil (n - m) - \frac{n - m}{2} + \frac{m}{4} + \gamma \right\rceil - \left\lfloor \frac{2n - 3m}{4} - \gamma \right\rfloor - 1 \\ &= n - m + \left\lceil -\frac{n - m}{2} - \frac{m}{4} + \gamma \right\rceil - \left\lfloor \frac{2n - 3m}{4} - \gamma \right\rfloor - 1 = \end{aligned}$$

Analogiškai vėl pasinaudosime 1.2..1[5]

$$= n - m - 1 - 2 \left\lfloor \frac{2n - 3m}{4} - \gamma \right\rfloor$$

□

2.2..2 Išvada. Tegul $n > m$ teigiami sveiki skaičiai, n, m yra tarpusavyje pirminiai. Trinomui $p(z)^* = cz^n + bz^m + a$

$$N(p^*) = n - m - 1 - 2 \left\lfloor \frac{n - 2m}{4} - \gamma^* \right\rfloor$$

$$U(p) = n + 2 - 2 \left(\left\lceil \frac{2m - n}{4} + \gamma \right\rceil - \left\lfloor \frac{n - 2m}{4} - \gamma^* \right\rfloor \right)$$

kur $\gamma = \frac{n-m}{2\pi} \arccos\left(\frac{b}{c}\right), \gamma^* = \frac{m}{2\pi} \arcsin\left(\frac{b}{c}\right)$

Irodymas.

$$C_p = \frac{n(\pi + 0 - 0) - m(\pi - 0)}{2\pi} = \frac{n - m}{2}$$

$$\delta_p = \frac{n\pi/2 + m \arcsin b/c}{2\pi} = \frac{n}{4} + \frac{m}{2\pi} \arcsin \frac{b}{c}$$

Pažymėkime $\gamma^* = \frac{m}{2\pi} \arcsin \frac{b}{c}$, gauname intervalą $(\frac{n-2m}{4} - \gamma^*, \frac{3n-2m}{4} + \gamma^*)$

$$\begin{aligned} N(p^*) &= \left\lceil \frac{3n - 2m}{4} + \gamma^* \right\rceil - \left\lfloor \frac{n - 2m}{4} - \gamma^* \right\rfloor - 1 = \left\lceil (n - m) - \frac{n - m}{2} + \frac{n}{4} + \gamma^* \right\rceil - \left\lfloor \frac{n - 2m}{4} - \gamma^* \right\rfloor - 1 \\ &= n - m - 1 - 2 \left\lfloor \frac{n - 2m}{4} - \gamma^* \right\rfloor \end{aligned}$$

$$U(p) = n - N(p) - N(p^*)$$

Ir remiantis 2.2..1

$$U(p) = n + 2 - 2(n - m) + 2 \left(\left\lfloor \frac{2n - 3m}{4} - \gamma \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n - 2m}{4} - \gamma^* \right\rfloor \right)$$

$$\begin{aligned}
&= n + 2 + 2(-(n - m) + \left\lfloor \frac{n - m}{2} - \frac{m}{4} - \gamma \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n - 2m}{4} - \gamma^* \right\rfloor) \\
&= n + 2 + 2\left(- (n - m) + \frac{n - m}{2} - \frac{m}{4} - \gamma + \left\lfloor \frac{n - 2m}{4} - \gamma^* \right\rfloor\right) \\
&= n + 2 + 2\left(- \frac{n - m}{2} - \frac{m}{4} - \gamma + \left\lfloor \frac{n - 2m}{4} - \gamma^* \right\rfloor\right) \\
&= n + 2 + 2\left(- \frac{2n - m}{4} - \gamma + \left\lfloor \frac{n - 2m}{4} - \gamma^* \right\rfloor\right) \\
&] \\
&= n + 2 - 2\left(\left\lfloor \frac{2n - m}{4} + \gamma \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n - 2m}{4} - \gamma^* \right\rfloor\right)
\end{aligned}$$

□

2.2..3 Teorema. Jei $p(z)^* = cz^n + bz^m + a$ turi šaknį ant vienetinio apskritimo, tai $\arcsin\left(\frac{b}{c}\right)$ bus formos:

$$\arcsin\left(\frac{b}{c}\right) = \pi \frac{n \pm 2m}{2m}$$

Irodymas. Imkime šaknį $z_0 = e^{i\theta}$, įsistačius į $p(z)^*$ gauname:

$$ce^{i\theta n} + be^{i\theta m} + a = 0$$

Pastebėkime, kad pirmų dviejų narių suma yra realus skaičius

$$ce^{i\theta n} + be^{i\theta m} = -a$$

Iš to išplaukia, kad $\text{Im}(ce^{i\theta n}) = -\text{Im}(be^{i\theta m})$ Kita vertus, turime kad,

$$|a + be^{i\theta m}| = |-ce^{i\theta n}|$$

$$(a + be^{i\theta m})\overline{(a + be^{i\theta m})} = (a + be^{i\theta m})(a + \overline{be^{i\theta m}})$$

$$a^2 + b^2 + a(be^{i\theta m} + \overline{be^{i\theta m}}) = c^2$$

Iš šito gauname, kad $be^{i\theta m} + \overline{be^{i\theta m}} = 0$, tai reiškia, $\text{Re}(be^{i\theta m}) = 0$, tai

$$be^{i\theta m} = \pm ib$$

Įsistatom gautą reikšmę

$$ce^{i\theta n} = -a \pm ib$$

Padaliname abejas puses iš c ,

$$e^{i\theta n} = -\frac{a}{c} \pm i\frac{b}{c}$$

Pastebėkime, kad gauname stačiojo trikampio kampo kosinusą ir sinusą, pakeiskime juos eksponen-

tiniu pavidalu.

$$e^{i\theta n} = -(e^{\pm i \arcsin b/c})$$

$$e^{i\theta n} = e^{i(\pm \arcsin b/c + \pi)}$$

$$\theta n = \pm \arcsin \frac{b}{c} + \pi + 2\pi k$$

Prisiminkime, kad $\theta m = \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi k_1$

$$\frac{n}{m} \left(\pm \frac{\pi}{2} + 2\pi k_1 \right) = \pm \arcsin \frac{b}{c} + \pi + 2\pi k$$

$$\arcsin \frac{b}{c} = \frac{n}{m} \left(\frac{\pi}{2} \pm 2\pi k_1 \right) \mp \pi - 2\pi k$$

$$\arcsin \frac{b}{c} = \left(\frac{n\pi \pm 4m\pi k_1}{2m} \right) \mp \pi - 2\pi k$$

Mes galime ignoruoti periodą k , bet mums reikėtų patikrinti, ar išraiška patenka į intervalą $[-\pi, \pi]$.

Imkime $\arcsin \frac{b}{c} = \left(\frac{n\pi + 4m\pi k_1}{2m} \right) - \pi - 2\pi k$, kitas atvejis analogiškai ves prie tos pačios k_1 reikšmės.

$$-\pi \leq \frac{n\pi}{2m} + 2\pi k_1 - \pi \leq \pi$$

Prie visų nelygybės pusių pridedame π ir po to daliname iš 2π

$$0 \leq \frac{n}{4m} + k_1 \leq 1$$

Kadangi $n > m$, mažiausia n reikšmė, kurią galime imti, būtų $m + 1$

$$0 \leq \frac{m+1}{4m} + k_1 \leq 1$$

Gali lengvai parodyti, kad tinka tik vienintelis $k_1 = 0$. Gauname

$$\arcsin \frac{b}{c} = \left(\frac{n\pi}{2m} \right) \mp \pi = \pi \frac{n \pm 2m}{2m}$$

□

2.2..4 Hipotezė. Jei trinomas az^3+bz+c , sudarytas iš Pitagoro trejetų, generuojamas Euklido formule su parametrais $k = k, j = k + 1$. Visada turės Pizo skaičių kaip šaknį.

Literatūra ir šaltiniai

- [1] S. Akiyama, M. Barge, V. Berthé, J.-Y. Lee, A. Siegel. „On the Pisot Substitution Conjecture“. Iš: *Mathematics of Aperiodic Order*. Sudarė J. Kellendonk, D. Lenz, J. Savinien. Basel: Springer Basel, 2015, puslapiai 33–72. ISBN: 978-3-0348-0903-0. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-0903-0_2. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-0348-0903-0_2.
- [2] S. Akiyama. „Pisot number system and its dual tiling“. Iš: *Physics and theoretical computer science of NATO Secur. Sci. Ser. D Inf. Commun. Secur* 7 (2007).
- [3] P. Arnoux, S. Ito. „Pisot substitutions and Rauzy fractals“. Iš: *Bulletin of the Belgian Mathematical Society - Simon Stevin* 8 (2001). <https://doi.org/10.36045/bbms/1102714169>.
- [4] Y. Bugeaud. *Distribution modulo one and Diophantine approximation*. Tomas 193. Cambridge University Press, 2012.
- [5] P. Drungilas, J. Jankauskas, G. Junevičius. „On Complex Pisot Numbers That Are Roots of Borwein Trinomials“. Iš: *Mathematics* 12.8 (2024). ISSN: 2227-7390. <https://doi.org/10.3390/math12081129>. URL: <https://www.mdpi.com/2227-7390/12/8/1129>.
- [6] A. Dubickas. „On the limit points of the fractional parts of powers of Pisot numbers“. ang. Iš: *Archivum Mathematicum* 042.2 (2006), puslapiai 151–158. URL: <http://eudml.org/doc/249821>.
- [7] A. Dubickas. „Intervals without primes near elements of linear recurrence sequences“. Iš: *International Journal of Number Theory* 14.02 (2018), puslapiai 567–579. <https://doi.org/10.1142/S1793042118500355>. URL: <https://doi.org/10.1142/S1793042118500355>.
- [8] A. Dubickas, J. Jankauskas. „On the fractional parts of powers of Pisot numbers of length at most 4“. Iš: *Journal of Number Theory* 144 (2014), puslapiai 325–339. ISSN: 0022-314X. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.jnt.2014.05.003>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022314X14001760>.
- [9] E. J. Eckert. „Primitive Pythagorean Triples“. Iš: *The College Mathematics Journal* 23.5 (1992), puslapiai 413–417. <https://doi.org/10.1080/07468342.1992.11973493>. URL: <https://doi.org/10.1080/07468342.1992.11973493>.
- [10] W. Ljunggren. „On the Irreducibility of Certain Trinomials and Quadrinomials.“ Iš: *MATHEMATICA SCANDINAVICA* 8 (1960), puslapiai 65–70. <https://doi.org/10.7146/math.scand.a-10593>. URL: <https://www.mscaand.dk/article/view/10593>.
- [11] C. Pisot, R. Salem. „Distribution modulo 1 of the powers of real numbers larger than 1“. en. Iš: *Compositio Mathematica* 16 (1964), puslapiai 164–168. URL: https://www.numdam.org/item/CM_1964__16__164_0/.
- [12] R. Salem. „A remarkable class of algebraic integers. Proof of a conjecture of Vijayaraghavan“. Iš: *Duke Mathematical Journal* 11.1 (1944), puslapiai 103–108. <https://doi.org/10.1215/S0012-7094-44-01111-7>. URL: <https://doi.org/10.1215/S0012-7094-44-01111-7>.

- [13] E. S. Selmer. „On the irreducibility of certain trinomials“. Iš: *MATHEMATICA SCANDINAVICA* 4 (1956), puslapiai 287–302. <https://doi.org/10.7146/math.scand.a-10478>. URL: <https://www.mscland.dk/article/view/10478>.
- [14] The Sage Developers. *SageMath Mathematical Software System*. URL: <https://www.sagemath.org/>.
- [15] H. Tverberg. „On the Irreducibility of the Trinomials $x^n \pm x^m \pm 1$ “. Iš: *MATHEMATICA SCANDINAVICA* 8 (1960), puslapiai 121–126. <https://doi.org/10.7146/math.scand.a-10599>. URL: <https://www.mscland.dk/article/view/10599>.
- [16] T. ZAĪMI. „ON REAL PARTS OF POWERS OF COMPLEX PISOT NUMBERS“. Iš: *Bulletin of the Australian Mathematical Society* 94.2 (2016), puslapiai 245–253. <https://doi.org/10.1017/S0004972716000125>.
- [17] T. Zaïmi. „On the distribution of powers of a Gaussian Pisot number“. Iš: *Indagationes Mathematicae* 31.1 (2020), puslapiai 177–183. ISSN: 0019-3577. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.indag.2019.12.002>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0019357719300783>.